

G.P. Bevz, V.G. Bevz

Algebră

Manual pentru clasa a 9-a instituțiilor
de învățământ general
cu limba română de predare

Recomandat de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei



Львів
Видавництво «Світ»
2017

УДК 512(075.3)
Б36

Перекладено за виданням:

Бевз Г.П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К. : Видавничий дім “Освіта”, 2017.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Сташенко М. О., завідувач кафедри менеджменту освіти Волинського ІППО, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Семено Л. Д., методист ММК управління освіти Полтавського міськвиконкому, вчитель-методист;

Мордик В. О., учитель КЗ «Гуляйпільський колегіум «Лідер» Гуляйпільської районної ради Запорізької області.

Рецензент

Вовк С. П., учитель математики Зміївського ліцею №1 імені З. К. Слюсаренка Харківської області, вчитель вищої категорії, вчитель-методист

Бевз Г.П.

Б 36 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. румунською мовою / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз ; пер. Ш.Г. Лазарович, Г.Ш. Лазарович. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.

ISBN 978-966-914-067-8

УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-914-067-8 (рум.)
ISBN 978-617-656-750-9 (укр.)

© Бевз Г.П., Бевз В.Г., 2017
© Видавничий дім “Освіта”, 2017
© Лазарович Ш.Г., Лазарович Г.Ш.,
переклад румунською мовою, 2017

STIMAȚI ELEVI DIN CLASA A 9-a!

A început noul an școlar și voi cu puteri noi continuați studiarea algebrei – o componentă interesantă și importantă a matematicii. Însușirea acestei științe este o garanție pentru însușirea cu succes a altor obiecte în viitor, pentru o viață deplină în societatea actuală.

Valoarea algebrei pentru om au dezvăluit-o matematicienii renumiți:

- *Algebra extinde și perfecționează rațiunea omului (L. Poincaré).*
- *Oamenii, care nu cunosc algebra, nu pot să-și imagineze acele lucruri neobișnuite, care pot fi realizate cu ajutorul științei indicate (G. Leibniz).*

În același timp cu acest manual voi terminați studiarea algebrei în școala de bază. Dar pentru a vă închipui ce loc aparține materialului din clasa a 9-a, examinați temele enumerate mai jos. Cu culoare este evidențiat materialul care-l veți studia anul acesta.

ALGEBRA (clasele 7 – 9)

<p>Expresii întregi. Expresii raționale.</p> <p>Funcții ($y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$)</p> <p>Ecuatii liniare și sistemele lor.</p> <p>Rădăcini pătrate. Numere reale.</p> <p>Ecuatii pătrate.</p>
<p>Inegalități.</p> <p>Funcții pătrate.</p> <p>Șiruri numerice.</p> <p>Bazele combinatoricii, teoriei probabilităților și statisticii</p>

Noțiunile matematice «inegalitate», «funcția pătrată» și «șir numeric» reprezintă corelațiile, care au un rol important în lumea reală. Pe baza acestor noțiuni și a proprietăților lor se bazează multe metode ale științei actuale și se efectuează cercetarea diferitor fenomene și procese ale naturii și activității umane.

Azi algebra pătrunde aproape toate domeniile de cunoștințe și este limba cu care «vorbesc, scriu și gândesc» alte științe. Este greu de imaginat domeniul de activitate, în care nu se aplică matematica. Cu ajutorul modelelor matematice se descriu procese reale. Aplică metode matematice sociologii și inginerii, juriștii și biologii, arhitectorii și muzicienii. Doar pentru a deveni specialist în viitor, a obține studii de valoare și a fi cu succes în viață matură, este necesar de aplicat multe eforturi. Iar studiarea algebrei este una din treptele spre succes în calea voastră. Sorbiți cunoștințele algebrice, lărgind și complectând experiența obținută în anii precedenți.

Sperăm, că acest manual va fi un ajutor bun în însușirea algebrei, în obținerea noilor cunoștințe, priceperi și experiențe, în dezvoltarea armonică a personalității voastre.

Vă dorim succese la învățatură!

Autorii

Cum de lucrat cu manualul

Dragi elevi din clasa a 9-a și colegi!

Țineți în mâini manualul nou de algebră. Autorii speră că această carte va deveni pentru voi un ajutor de nădejde și un sfătuitor.

Un motiv ponderabil și un stimul bun pentru învățătura trebuie să fie datele despre matematicienii remarcabili și premii matematice, fondate în cinstea lor. Opiniile matematicienilor pot fi pentru voi îndrumător nu numai în instruire, dar și pe drumul vieții.

La începutul fiecărui capitol este dată o prezentare scurtă a conținutului în limbile română și engleză. 1

Fiecare paragraf se începe cu rubrica «**Aplicăm competențele obținute**» (1). Materialul acestei rubrici va accentua atenția la cunoștințele principale – definițiile,

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși tema nouă, ne amintim

- Cum se notează mulțimea $A, B, C, \dots, N, Z, Q, \dots$
- C este submulțime
- Mulțimea K este o parte din mulțimea M $N \subset B \subset R$
- $K \subset M$ K este submulțime lui M
- Pe baza căror proprietăți se rezolvă inecuațiile (p. 32).
- Cum se reprezintă soluțiile inecuațiilor liniare (p. 33).
- Ce semnifică inserțiile $a \leq b$ și $a \geq b$

$a < b$ $a \geq b$
 $a < b$ aŃo $a = b$ $a > b$ aŃo $a = b$

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Rezolvarea celor mai simple inecuații cu moduli se reduce la rezolvarea inegalităților liniare.

Rezolvăm inecuațiile:

a) $|x| < 5$ b) $|x| > 3$ c) $|x| \leq -2$ d) $|x| > -0,5$.

Ńi Toate valorile lui x , modului cărora sunt mai mici decît 5, satisfac inecuația. Acestea sînt toate numerele pozitive mai mici decît 5, toate numerele negative mai mici decît -5 pînă la 0 . Ń Astfel de mulțimi se numesc pînă la *sever* cu ajutorul inegalității duble $-5 < x < 5$. Pe axa numerică aceste mulțimi de numere sînt cuprinse de intervalele ilustrate pe figura 16, a. Numerele 5 pînă la -5 aparțin acestui interval, ele nu satisfac inecuația dată. În inecuația $|x| \leq 5$ o satisfac (fig. 16, b).

b) Inecuația $|x| > 3$ o satisfac toate numerele mai mici decît -3 (fig. 17)

§ 10 TRANSFORMAREA GRAFICELOR
FUNCTIILOR

Alcăinăm tabelele valorilor funcțiilor a) $y = x^2$ și b) $y = -x^2$, definite pe mulțimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
b)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

În general, valorile funcției $y = -x^2$ sînt opuse valorilor respective ale funcției $y = x^2$. De aceea graficele acestor funcții sînt simetrice față de axa x (fig. 76). Ń Astfel de proprietăți au orice funcții $y = f(x)$ și $y = -f(x)$.

Ń **Graficele funcțiilor $y = f(x)$ și $y = -f(x)$ sînt simetrice față de axa x .** Comparăm încă funcțiile $y = 2x(x)$ și $y = f(x)$. Pentru a obține o valoare oarecare a primei din ele trebuie valoarea respectivă a funcției a doua de o înmulți cu 2.

Fig. 76

129. Problemă deschisă. Compuneți inegalități, soluțiile cărora sînt reprezentate pe figura 18.

Fig. 18

Teorema 2.

Dacă ambele părți ale inegalității adevărate de înmulți cu unul și același număr pozitiv, atunci obținem o inegalitate adevărată.

Dacă ambele părți ai inegalității adevărate de înmulți cu unul și același număr negativ și de schimbat semnul inegalității în opus, atunci obținem o inegalitate adevărată.

Efectuăm împreună!

Ń Rezolvați inecuația $2x + 3 < 2(x + 3)$.

Ń Rezolvați $2x + 3 < 2x + 6$,
 $2x - 2x < 6 - 3$,
 $0x < 3$.

Inecuația $0x < 3$ este adevărată pentru fiecare valoare a lui x .

Răspuns. $(-\infty; \infty)$.

Ń Pot explica ce este intersecția și reuniunea mulțimilor.

Intersecția mulțimilor

Reuniunea mulțimilor

Ń Știți a reprezenta intervalele numerice, definite prin inegalități (p. 45)

Ń Știți a reprezenta pe axa de coordonate reuniunea și intersecția intervalelor numerice.

Ń Știți a scrie cu simboluri și cu inegalități intervalele numerice date grafic.

Ń Dorește să învăț și scrie soluțiile totalități de inecuații în formă de reuniune a intervalor respective.

2

Propozițiile marcate cu caracter **aldin (2)**, notate cu săgeți sînt definiții fundamentale.

proprietățile, afirmațiile, pe care voi trebuie să vi le aduceți aminte pentru perceperea efectivă și însușirea materialului nou.

Studiind materialul teoretic, atrageți atenția la cuvintele tipărite cu *aldin cursiv*, aceștia sînt termenii algebrici noi. Trebuie să-i percepeți și să-i memorizați.

Propozițiile marcate cu caracter **aldin (2)**, notate cu săgeți sînt definiții fundamentale.


Textul aldin în paranteze pătrate (3) sunt proprietățile, regulile și alte afirmații importante. Trebuie de știut a le formula (se poate cu cuvinte proprii) și a le aplica la rezolvarea exercițiilor și problemelor propuse.

În fiecare paragraf al manualului este rubrica «**Doriți să știți mai mult?**» (4). Ea conține material suplimentar, destinat elevilor care se interesează.

Manualul conține exerciții de diferite niveluri de complexitate: pentru rezolvare orală și nivelurile A și B. Rezolvarea «**Problemele deschise**» (5) atribuie dezvoltării gândirii logice, percepțiilor de cercetare și creative.

În rubrica «**Efectuăm împreună**» (6) sunt date modele de rezolvare a exercițiilor de cele mai importante tipuri. Este util să vă familiarizați cu ele înainte de a efectua sarcinile de acasă, numerele cărora sunt evidențiate cu culoare albastră.

Folosind rubrica «**Comoara succeselor**» (7), care se află la sfârșitul fiecărui paragraf, se poate analiza, percepe, repeta și îmbunătăți cunoștințele și priceperile obținute.

<p>Clarificăm realizările</p> <p>Sarcini în formă de teste Nr. 1</p> <p>1. Selectați inegalitatea adevărată: a) $0,2 > \sqrt{3}$; b) $-1 < -2$; c) $5 \geq 5$; d) $2^{-3} \leq 2^{-2}$.</p> <p>2. Suma inegalităților $5 > 3$ și $2 > -1$ este inegalitatea: a) $4 > 5$; b) $4 < 5$; c) $7 > 2$; d) $7 \geq 2$.</p> <p>3. Indicați inegalitatea strictă: a) $15 \geq 5$; b) $2 \leq 2$; c) $7 > -2$; d) $-10 \geq 10$.</p> <p>4. Inecuația $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ o satisface numărul: a) 2; b) 1; c) 0; d) -1.</p> <p>5. Câte numere întregi satisfac inecuația dublă $-1 \leq x \leq 1$: a) unul; b) două; c) trei; d) patru?</p> <p>6. Alegeți intervalul cărui îi aparține numărul $\sqrt{3}$: a) $[2; 3]$; b) $(-\infty; \sqrt{3}]$; c) $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; d) $(-\sqrt{3}; \infty)$.</p>	<p>Esențialul în capitol</p> <p>Numărul a este mai mare decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr pozitiv; numărul a este mai mic decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr negativ. Orice semn din $<, >, \leq$ și \geq se numește <i>semn al inegalității</i>. Semnele $<$ și $>$ se numesc <i>semne stricte ale inegalității</i>. Semnele \leq și \geq le numesc <i>semne nestrict ale inegalității</i>. Înscirerea $a \leq b$ semnifică, că $a < b$ sau $a = b$. Înscirerea $a \geq b$ semnifică, că $a > b$ sau $a = b$. Două expresii unite cu semnul inegalității $<, >, \leq$ sau \geq formează o inegalitate. Inegalitatea se numește <i>numerică</i> dacă ambele părți ale ei sunt expresii numerice. Proprietățile inegalităților numerice Dacă: $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$; $a < b$ și c un număr arbitrar, atunci $a + c < b + c$; $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$;</p>
<p>DATE ISTORICE</p> <p><i>Funcția</i> este una din cele mai importante noțiuni ale matematicii contemporane. Ea s-a format și s-a îmbogățit în decursul multor secole. Savanții babilonieni au calculat tablele pătratelor și cuburilor încă cu 4 000 de ani în urmă. Dar acesta este funcția definită în formă de tabel. Arhimede a stabilit dependența ariei cercului și ariei suprafeței sferei de razele lor. Dar egalitățile $S = \pi r^2$ și $S = 4\pi r^2$ definesc funcții. În secolele XVI – XVII de preferință se defineau verbal, grafic sau cu ajutorul tabelelor. Abia P. Fermat și R. Descartes au demonstrat, cum de definit dependența dintre variabile cu ajutorul ecuațiilor. Pentru reprezentarea grafică a diferitor dependențe, ei au aplicat sistemul de coordonate.</p> 	<p>Anexe</p> <p>Proiectul de învățământ nr. 1. Inegalități interesante.....</p> <p>Proiectul de învățământ nr. 2. Funcțiile hiperbolice.....</p> <p>Proiectul de învățământ nr. 3. Aplicarea matematicii.....</p> <p>PROBLEME ȘI EXERCITII PENTRU RECAPITULARE</p> <p>Numere și operații cu ele.....</p> <p>Divizibilitatea numerelor. Rapoarte și proporții.....</p> <p>Expresii întregi.....</p> <p>Expresii raționale.....</p> <p>Expresii iraționale.....</p> <p>Ecuații și sisteme de ecuații.....</p> <p>Probleme pentru compunerea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații.....</p> <p>Inecuații.....</p> <p>Funcții grafice.....</p> <p>Șiruri numerice.....</p> <p>Probleme și exerciții de complexitate ridicată.</p> <p>Teste pentru antrenament.....</p> <p>Cunoștințe din clasele precedente.....</p> <p>Răspunsuri și indicații la probleme și exerciții.....</p> <p>Indice de materie.....</p>

Rubrica «**Clarificăm succesele**» (8) este alcătuită așa, ca să aveți posibilitate să vă pregătiți pentru evaluarea independentă externă.

La sfârșitul cărții sunt rubricile «**Știri istorice**» (9) și «**Esențialul în capitol**» (10).

Atrageți atenția la «**ANEXE**» (11) și completarea lor. Sperăm că veți obține satisfacție de la rezolvarea problemelor și lucrul asupra proiectelor de instruire.

Vă dorim succese în studierea algebrei!



Capitolul 1

MITROPOLSKII Iurii Olexiiovici (1916–2008)

Matematician și mecanic ucrainean, academician ANȘ a Ucrainei (1961), academic-corespondent străin al Academiei de științe în Bolonia (Italia, 1971), Erou al Ucrainei, activist emerit de științe al Ucrainei, doctor în științe tehnice, membru activ al societății de Știință T. G. Șevcenko din Lviv.

«Matematica e ca poezia. Această asemănare nu este numai în frumusețea formelor, în severitatea rafinată a teoriilor matematice, dar și în puternica influență a matematicii asupra altor științe».

«Străbătând prin formulele matematice seci, gândul omenesc se transformă într-un cântec eroic al lucrului creativ».

Iu. O. Mitropolskii

PREMIUL în numele lui Iu. O. MITROPOLSKII

Se decernează în Secția matematică ANȘ a Ucrainei pentru lucrări științifice remarcabile în domeniul matematicii și mecanicii neliniare. Fondată de Academia Națională de științe a Ucrainei în anul 2008

LAUREAȚII PREMIULUI:

Samoilenko A. M.
Boiciuk O. A.
Egorova I. E.
Coșmanenko V. D.
Koroliuk V. S.

INECUAȚII

Inecuațiile se aplică tot așa de frecvent ca și egalitățile.

Ca și egalitățile inecuațiile sunt numerice sau cu variabile.

Unele din ele se demonstrează, altele se rezolvă.

Cu ajutorul inecuațiilor este comod de modelat situații și procese reale, mai cu seamă relațiile mai mare – mai mic, mai scurt – mai lung etc. Un rol important inecuațiile îl au în studierea funcțiilor: determinarea celor mai mari și celor mai mici valori ale funcțiilor pe un interval oarecare, determinarea intervalelor de creștere și descreștere ale funcțiilor, etc.

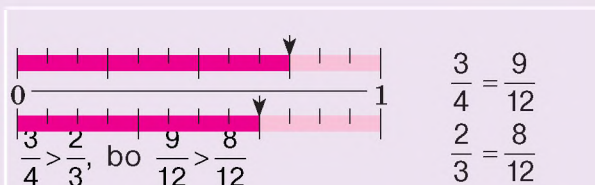
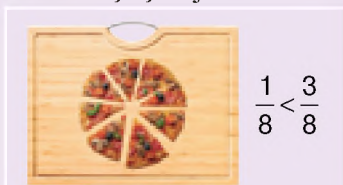
În acest capitol vom examina următoarele teme:

§ 1	Cunoștințe generale despre inecuații	§ 5	Reuniunea și intersecția mulțimilor. Intervale numerice
	General Information About Inequality		Combination and Section. Numeric Intervals
§ 2	Proprietățile inegalităților numerice	§ 6	Sisteme de inecuații cu o variabilă
	Properties of Numerical Inequality		Systems of Inequalities With One Variable
§ 3	Inegalități duble	§ 7	Demonstrarea inegalităților
	Double Inequalities		Inequalities Proof
§ 4	Rezolvarea inecuațiilor cu o variabilă		
	The Solution to Inequalities With One Variable		

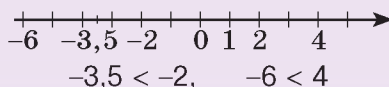
Aplicăm competențele obținute

Reamintim cum se compar numerele pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă.

Cunoașteți deja că:



Din două numere pe dreapta de coordonate mai mare este acela, care este amplasat mai la dreapta, iar mai mic este acela care este amplasat mai la stânga.



§ 1 | CUNOȘTINȚE GENERALE DESPRE INEGALITĂȚI

Permanent noi comparăm ceva: vitezele internetului, prețul călătoriei, diagonalele monitoarelor, înălțimile clădirilor, rezultatele întrecerilor, cantitățile punctelor EIE, etc. Modelul matematic al relațiilor «mai mare» și «mai mic» este inegalitatea. De exemplu, distanța de la Kiev până la Harkiv ($d_1 = 407$ km) este mai mare decât distanța de la Kiev până la Luțk ($d_2 = 368$ km). Aceasta se scrie astfel:

$$407 > 368 \text{ sau } d_1 > d_2.$$

Dacă numărul a este mai mic sau mai mare decât numărul b , atunci se scrie respectiv $a < b$ sau $a > b$. De exemplu,

$$3 < 5, -7 > -13.$$

Conținutul corelațiilor «mai mare» și «mai mic» se poate dezvălui prin definiția următoare:

- ➔ Numărul a e mai mare decât b dacă diferența $a - b$ este număr pozitiv;
numărul a e mai mic decât b dacă diferența $a - b$ este număr negativ.

Deoarece diferența $a - b$ poate fi pozitivă, negativă sau egală cu zero, pentru orice valori reale ale numerelor a și b se realizează una și numai una din trei corelații:

$$a > b, a < b \text{ sau } a = b.$$

Folosind definiția de mai sus, se pot compara numerele, adică se poate stabili care din ele este mai mare și care – mai mic. De exemplu, pentru a compara fracțiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{11}{25}$, aflăm diferența:

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 25} = \frac{1}{225}.$$

Diferența fracțiilor date este un număr pozitiv, deci $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

Pe axa de coordonate numărului mai mic îi corespunde un punct, care se află la stânga de punctul care îi corespunde numărului mai mare. De exemplu, figura 1 corespunde corelațiilor următoare:

$$c < a, a < b, c < b.$$

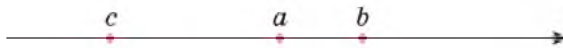


Fig. 1

Inegalitatea este modelul matematic abstract al relațiilor mai mare – mai mic, mai jos – mai sus, mai scurt – mai lung, mai îngust – mai larg, mai subțire – mai gros, mai ieftin – mai scump, mai tânăr – mai în vârstă și a multor altele. Afară de semnele $<$ (mai mic) și $>$ (mai mare) se folosesc des și semnele: \leq – mai mic sau egal (nu este mai mare), \geq – mai mare sau egal (nu este mai mic).

Înscrierea $a \leq b$ semnifică, că $a < b$ sau $a = b$.

Înscrierea $a \geq b$ semnifică, că $a > b$ sau $a = b$.

De exemplu, se poate afirma că $2 \leq 5$, $4 \geq 4$, $-\frac{1}{2} \leq -0,5$.

Semnele $<$ și $>$ se numesc **semnele inegalității stricte**. Ele sunt opuse una alteia: dacă $a < b$, atunci $b > a$ și invers. Semnele \leq și \geq tot sunt opuse, ele se numesc **semnele inegalității nestrict**. Oricare din semnele $<$, $>$, \leq și \geq se numește **semn al inegalității**.

➔ **Două expresii unite cu semnul inegalității formează o inegalitate.**

Exemplu de inegalități: $3 < \sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Expresia care este în partea stângă sau în cea dreaptă de semnul inegalității se numește respectiv partea stângă sau dreaptă a inegalității. De exemplu, partea stângă a inegalității $5x + 4 < 8$ este expresia $5x + 4$, iar cea dreaptă – numărul 8 (orice număr se consideră tot expresie).

Dacă ambele părți ale inegalității sunt expresii numerice, ea se numește inegalitate numerică. Astfel de inegalități pot fi adevărate sau false. De exemplu, din inegalitățile $2 < 3$, $2 \geq 1$, $-3 < -5$ primele două sunt adevărate, iar a treia falsă, deoarece numărul -3 este mai mare decât -5 .

Inegalitățile cu variabile pentru unele valori ale variabilelor pot fi adevărate, iar pentru altele – false. De exemplu, inegalitatea $2x + 3 > 5$ este adevărată dacă x este egal cu 2, 3, 4, 5, iar dacă x este egal 1, 0, -1, -2 este falsă. Se spune că valorile 2, 3, 4, 5 satisfac inegalitatea dată, iar 1, 0, -1, -2 nu o satisfac.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Afară de semnele indicate ale inegalității ($<$, $>$, \leq , \geq) des se aplică și semnul \neq (nu-i egal). Dacă, de exemplu, corelația «nu e mai mare» ($a \leq b$) denotă $a < b$ sau $a = b$, atunci corelația «nu-i egal» ($a \neq b$) semnifică $a < b$ sau $a > b$.

Relația «nu-i egal» se deosebește principial de «nu e mai mare». Pentru toate relațiile egalității și inegalității pe care le indică semnele $=$, $<$, $>$, \leq , \geq se îndeplinește proprietatea *tranzitivă*, adică din $a \leq b$ și $b \leq c$ reiese că $a \leq c$. Dar pentru relația «nu-i egal» această proprietate poate să nu se realizeze: din $a \neq b$ și $b \neq c$ nu totdeauna reiese că $a \neq c$. De exemplu, $2 \neq 3$ și $3 \neq 2$, dar relația $2 \neq 2$ este falsă, incorectă. De aceea, în continuare, vorbind despre inegalități, vom avea în vedere două numere sau expresii unite prin orice semn $<$, $>$, \leq , \geq , dar nu cu semnul \neq .

Verificați-vă

1. Conform cărei condiție numărul a este mai mare decât c ?
2. Ce este inegalitate?
3. Ce feluri de inegalități sunt? Dați exemple.
4. Care inegalități se numesc stricte, iar care – nestricte?
5. Ce înseamnă înscrisurile $a \leq b$, $a \geq b$? Citiți-le.

Efectuăm împreună

1 Care din numerele a și b este mai mic, dacă:

a) $a - b = (-1)^2$; b) $a = b - 3$; c) $a - 5 = b$?

- **Rezolvare.** a) $a - b = (-1)^2 = 1$ (număr pozitiv), deci, $b < a$; b) aflăm diferența numerelor a și b : $a - b = -3$ (număr negativ), deci, $a < b$;
- c) $a - b = 5$ (număr pozitiv), deci, $b < a$.

Răspuns. a) $b < a$; b) $a < b$; c) $b < a$.

2 Care este condiția ca expresia $4 - (2x + 3)^2$ să obțină cea mai mare valoare?

- **Rezolvare.** Expresia dată are cea mai mare valoare dacă scăzătorul este cel mai mic. Iar expresia $(2x + 3)^2$ are cea mai mică valoare, dacă $2x + 3 = 0$, adică pentru $x = -1,5$.

Răspuns. Dacă $x = -1,5$.

3 Care diferență este mai mare și de câte ori:

$$2017^{2018} - 2017^{2017} \text{ sau } 2017^{2017} - 2017^{2016}?$$

- **Rezolvare.** $2017^{2018} - 2017^{2017} = 2017^{2017}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2017}$;
 $2017^{2017} - 2017^{2016} = 2017^{2016}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2016}$;
 $(2016 \cdot 2017^{2017}) : (2016 \cdot 2017^{2016}) = 2017$.

Răspuns. Prima diferență este mai mare decât a doua de 2017 ori.

Efectuați oral

1. Care din numerele x și y este mai mic, dacă:

a) $x - y = 1$; b) $x - y = -1$; c) $y - x = 2$; d) $y - 5 = x$?

2. Punctele K, L, M cu coordonatele k, l, m sunt situate pe axa de coordonate așa, cum

este arătat pe figura 2. Comparați numerele:

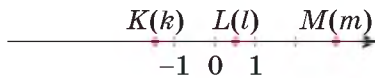


Fig. 2

- a) k și m ; c) m și l ; e) k și l ;
b) k și 1 ; d) 0 și l ; f) m și -1 .

3. Oare este adevărată inegalitatea:

- a) $2 \geq 2$; b) $-3 < -5$; c) $3 \leq 2$; d) $-5 \leq -2$?

4. Comparați numerele:

- a) $1,28$ și $\frac{5}{4}$; b) $0,02$ și $1 \frac{1}{50}$; c) $-\frac{1}{3}$ și $-0,33$; d) $1,6$ și $\frac{5}{3}$.

5. Comparați fracțiile:

- a) $\frac{5}{7}$ și $\frac{3}{7}$; b) $-$ și $-\frac{4}{5}$; c) $\frac{5}{6}$ și $\frac{6}{7}$; d) $-\frac{7}{13}$ și $-\frac{13}{27}$.

6. Oare totdeauna valoarea $1/x$ e mai mică decât valoarea respectivă a lui x :

- a) $\frac{1}{x}$; b) \sqrt{x} ?

7. **Problemă deschisă.** Ca simbol al pierderii unei părți din piață sau al altor probleme financiare sau economice se folosesc diagramele circulare în formă de copaci verzi cu frunze care cad (fig. 3). Compuneți probleme după figurile 3, a și b .

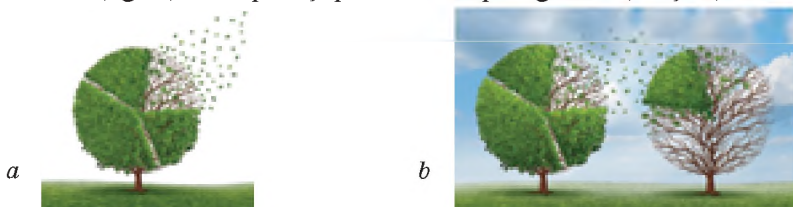


Fig. 3

NIVELUL A

8. Care din numerele a și b este mai mare, dacă:

- a) $a - b = 0,01$; c) $a = 2,3 + b$; e) $a - b = 0$;
 b) $a - b = -3,7$; d) $b - a = (-3)^2$; f) $b = a + 1$?

9. Comparați numerele m și n , dacă:

- a) $m - n = 0,5$; c) $m - 4 = n$;
 b) $n - m = 5$; d) $m + 3 = n$.

10. Comparați numerele x și y , dacă:

- a) $y - x = -1$; c) $x = y - 3$;
 b) $x - y = 7$; d) $y - x = 0$.



11. Care inegalitate este adevărată:

- a) $-7 > -5$; c) $\sqrt{5} \leq \pi$; e) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \geq 1,5$;
 b) $4,3 \geq -3,4$; d) $\frac{1}{0,5} > 0,5$; f) $\pi \leq 3,14$?

12. Punctele cu coordonatele a , b , c sunt situate pe axa de coordonate astfel, cum este arătat pe figura 4. Care din numerele a , b , c este cel mai mare, care — cel mai mic? Oare sunt adevărate inegalitățile:

- a) $a < b$; c) $c < a$;
 b) $b < c$; d) $b \geq c$?



Fig. 4

13. Comparați numerele:

- a) $\frac{10}{11}$ și $\frac{19}{20}$; c) $\frac{48}{49}$ și $0,98$; e) $\frac{2}{15}$ și $\frac{9}{17}$;
 b) $\frac{28}{29}$ și $\frac{29}{30}$; d) $-\frac{7}{9}$ și $-\frac{9}{7}$; f) $-\frac{5}{7}$ și $-\frac{1}{3}$.

14. Aranjați în ordinea descrescătoare numerele:

$$3,1; \pi; \sqrt{10}; 2+\sqrt{2}; 5-\sqrt{3}.$$

15. Aranjați în ordine crescătoare numerele:

$$2; \sqrt{5}; -12; 2\frac{1}{2}; 0; -3\pi.$$

16. Care număr $1,5$; $1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10}$; 2 ; $\sqrt{7} \cdot 0,5$ — e cel mai mare?

17. Comparați valorile expresiilor $2x + 3$ și $3x - 2$, dacă:

- a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) $x = 5$; d) $x = 7$.

18. Comparați valorile funcției $y = 2x - 1$, dacă:
 a) $x = 1$ i $x = 2$; b) $x = -1$ i $x = -2$; c) $x = 0,1$ i $x = 0,2$.
19. Comparați valorile funcției $y = x^2$, dacă:
 a) $x = -20$ i $x = 20$; b) $x = -2$ i $x = -1$; c) $x = -8$ i $x = 0$.
20. Demonstrați, că $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.
21. Este oare adevărată inegalitatea $3x - 2 < 7$, dacă:
 a) $x = 4$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 0$?
22. Care inegalitate este adevărată în cazul când $x = 10$:
 a) $0,5x + 1 > 3$; b) $-7x + 3 < x$; c) $3 - x \geq x - 17$?
23. Oare este adevărată inegalitatea pentru toate valorile reale ale lui c :
 a) $c^2 + 3 > 0$; b) $(c + 2)^2 > 0$; c) $(c - 1)^2 \geq 0$?
24. Demonstrați, că pentru fiecare valoare a lui n :
 a) $n^4 + 1 > 0$; b) $(n - 5)^2 \geq 0$; c) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$.
25. Selectați câteva valori ale variabilei x care satisfac inecuația:
 a) $2x + 3 < 0$; b) $3 - x^2 > 0$; c) $x + \frac{1}{x} < 1$.

NIVELUL B

26. Scrieți numerele în ordine crescătoare:
 $(-\pi)^2$; $\sqrt{2}$; -1^2 ; $1\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $(-2)^3$; $\sqrt{81}$; -5 ; $(-3)^0$.
27. Scrieți numerele în ordine descrescătoare:
 -2π ; $\sqrt{10}$; 297^0 ; $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$; $\frac{1}{0,3}$; $\frac{\pi}{10}$; 0^{297} ; $(-2)^5$; π ; $-\frac{25}{4}$.
28. Comparați valorile expresiilor $5m + 1$ și $19 - 3m$, dacă:
 a) $m = 2$; b) $m = \sqrt{7}$; c) $m = 1 - \sqrt{2}$; d) $m = 1 + \sqrt{3}$.
29. Comparați valorile funcțiilor $y = 12 + 45x$ și $y = \frac{12}{x}$, dacă:
 a) $x = \frac{3}{5}$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = -\frac{2}{3}$; d) $x = \frac{2}{5}$.
30. Care diferență este mai mare și de câte ori:
 $2019^{2020} - 2019^{2019}$ și $2019^{2019} - 2019^{2018}$?
31. Demonstrați, că inegalitatea este adevărată pentru fiecare a :
 a) $(a - 3)^2 + 2 > 0$; c) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$;
 b) $(2a + 1)^2 + 0,5 > 0$; d) $9a^2 + 2 > 6a$.
32. Ce este mai mare: pătratul sumei a două numere pozitive sau suma pătratelor lor?
33. În ce condiție expresia $1 + (2x - 3)^2$ are cea mai mică valoare?

34. În ce condiție expresia $1 - (2x - 3)^2$ are cea mai mare valoare?
35. Cum sunt situate pe axa de coordonate punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $D(d)$, dacă:
a) $a > b$, $a + b = 2d$ și $b + d = 2c$;
b) $a < b$, $2a = b + c$ și $2d = a + b$?
36. Selectați câteva valori ale variabilei n care satisfac inecuația:
a) $3n - 2 > 2n - 3$; b) $5n + 8 \leq 8n - 1$.
37. Suma a două numere inverse este egală cu 2,5. Aflați cel mai mare număr din ele:
38. Se va mări sau se va micșora valoarea fracției $\frac{2}{5}$, dacă la numărătorul și numitorul ei se va aduna unul și același număr natural? Dați exemple.
39. Care din numerele a și b este mai mare, dacă:
a) $a + 7,8 = b + 3,5$; c) $8,5 - a = 7,3 - b$;
b) $a - 4,5 = b - 2,3$; d) $2a + 3,5 = b - 3,5$?
40. Care din numerele pozitive x și y este mai mare, dacă:
a) $2,5x = 3,2y$; c) $x : 3,8 = y : 2,6$;
b) $5,3 : x = 7,1 : y$; d) $2x - 3y = 5,4$?
41. Șapte caiete costă mai scump decât 9 creioane. Ce este mai scump: 12 caiete sau 15 creioane?
42. Patru prietene – Domnica Gherman, Elena Cazacu, Jana Cerchez și Zina Costăș împreună cu frații lor au venit la patinoar. Fiecare frate era mai înalt decât sora. Ei s-au împărțit în perechi și au început a patina. S-a constatat, că în fiecare pereche «cavalerul» era mai înalt decât «domnișoara» și nimeni nu patina cu sora sa. Cel mai înalt între prieteni era Andrei Gherman, iar cea mai joasă – Domnica. Se știe că Jana și Victor Cerchez sunt mai înalți decât Ionel Costăș, dar mai mici la statură decât Elena. Cu cine patina Vasile Cazacu?
43. Comparați valorile expresiilor:
a) $a^2 + 36$ și $12a$; c) $b^2 + 2$ și $2b + 1$;
b) $4(x + 1)$ și $(x + 2)^2$; d) $(y - 3)^2$ și $(y - 2)(y - 4)$.
44. Comparați numerele nenegative a și b , dacă:
a) $a^2 \geq b^2$; b) $b - a = a - b$; c) $a - b = a + b$.
Examinați toate cazurile posibile.



Exerciții pentru repetare

Calculați (45–47).

45. a) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$;

c) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} - 1\right) \cdot 5$;

b) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right) : 1\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$;

d) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 5 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)$.

46. a) $2^{13} \cdot 0,5^{13}$;

c) $0,5^{12} \cdot (-2)^{13}$;

e) $0,1^{-21} \cdot 10^{-20}$;

b) $25^7 \cdot 0,04^7$;

d) $-5^{32} \cdot 0,2^{32}$;

f) $0,2^{-41} \cdot (-0,5)^{-40}$.

47. a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$;

c) $\sqrt{3^2 + 4^2}$;

e) $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2}$;

b) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

d) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$;

f) $\sqrt{8,2^2 - 1,8^2}$.

Aduceți la forma cea mai simplă expresiile (48–50).

48. a) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$;

e) $(c^3 - 2c)(2c + c^3) + 4c^2$;

b) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;

d) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$;

c) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$;

f) $(x^2 - 6x + 9)^2 - (x - 3)^4$.

49. a) $\frac{a^2 - 1}{a^3 + 1} \cdot \left(a + \frac{1}{a - 1}\right) + \left(a + \frac{1}{a} + 1\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a} - 1\right)$;

b) $\left(\frac{a}{ab - b^2} + \frac{b}{a^2 - ab}\right) \cdot \frac{a^2b - ab^2}{a^2 + b^2} - 1$.

50. a) $\sqrt{a} + \sqrt{4a} + \sqrt{9a}$;

d) $(\sqrt{15} + 2)^2 - \sqrt{240}$;

b) $7\sqrt{x} - \sqrt{9x} + \sqrt{25x}$;

e) $\sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}$;

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{60}$;

f) $\sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}$.

51. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$;

d) $z^2 - 9z + 14 = 0$;

b) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

e) $\frac{3x - 1}{3x + 1} = 2 - \frac{x - 3}{x + 3}$;

c) $y^2 - 7y - 18 = 0$;

f) $\frac{3c}{3c - 2} + \frac{2c - 9}{2c - 5} = 2$.

52. Rezolvați sistemele de ecuații:

a)
$$\begin{cases} \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0, \\ \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{3}{x+3} - \frac{2}{y} = 0, \\ \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1. \end{cases}$$

53. Construiți graficele funcțiilor:

a) $y = 3 - x$;

b) $y = \frac{6}{x}$;

c) $y = x^2$;

d) $y = -\sqrt{x}$.

Aflați domeniul de definiție și codomeniul valorilor fiecărei funcții.

54. Amintiți-vă, care proprietăți ale funcțiilor ați examinat în clasele precedente. Privind graficul funcției (fig. 5), explicați, pe care intervale ea crește, descrește, pe care este pozitivă, negativă. Indicați valoarea cea mai mare a funcției.

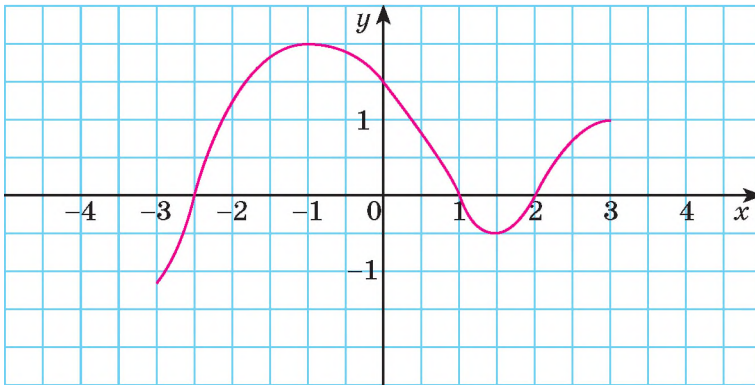


Fig. 5

55. Într-o soluție care conține 40 g de sare s-au turnat 200 g de apă, după ce concentrația ei s-a micșorat cu 10 %. Care era concentrația soluției la început?

Comoara succeselor

✓ Știu că:

$a > b$, dacă $a - b$ este număr pozitiv

$a < b$, dacă $a - b$ este număr negativ

✓ Știu că:

înscierea $a \leq b$, semnifică, că $a < b$ sau $a = b$

înscierea $a \geq b$, semnifică, că $a > b$ sau $a = b$

✓ Știu să deosebesc și se dau exemple de astfel de inegalități:

Stricte

$12 > 7, x < y$

Nestricte

$-3 \leq 5, a \geq a$

Numerice

$3 > 0, 1,5 < 5,1$

Cu variabile

$2x - 5 < 1, a \geq 7a$

✓ Doresc să mă învăț a aplica cunoștințele care se referă la inegalități pentru demonstrarea inegalităților

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este inegalitatea numerică (p. 9).
- În ce condiție numărul a este mai mare decât b :

$$a > b, \text{ dacă } a - b \text{ este număr pozitiv.}$$

- În ce condiție numărul a este mai mic decât b :

$$a < b, \text{ dacă } a - b \text{ este număr negativ.}$$

- Proprietățile funcțiilor $y = \sqrt{x}$ și $y = \frac{k}{x}$.

§ 2

Proprietățile inegalităților numerice

Examinăm o situație din viață. O familie tânără a hotărât să depună lunar o sumă oarecare în bancă sub procent. Soția a aflat, că cota în procente pentru depozit în banca A este mai mică decât în banca B , iar soțul știa, cota în procente pentru depozit în banca C este mai mică, decât în banca A . Care bancă, după părerea voastră, va alege această familie pentru păstrarea resursele bănești, dacă toate celelalte condiții ale depozitului în băncile A , B și C sunt identice?

Răspunsul la această întrebare se poate argumenta, aplicând teorema 1.

Examinăm proprietățile inegalităților numerice și le demonstrăm pentru inegalitățile care conțin semnul «<».

Teorema 1. Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.

Demonstrație. Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci numerele $a - b$ și $b - c$ sunt negative. Suma lor $(a - b) + (b - c) = a - c$ tot este număr negativ. Iar dacă $a - c$ e număr negativ, atunci $a < c$. Aceasta și trebuia de demonstrat.

Teorema 1 manifestă *proprietatea tranzitivității* a inegalităților cu același semn.

Exemplu. Întrucât $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ și $\sqrt{2} < 1,42$, atunci $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Teorema 2. Dacă la ambele părți ale inegalității adevărate de adunat unul și același număr, atunci obținem o inegalitate adevărată.

De exemplu, dacă $a < b$ și c este un număr real arbitrar, atunci $a + c < b + c$.

Demonstrație. Dacă $a < b$, atunci $a - b$ e un număr negativ. Deoarece $a - b = (a + c) - (b + c)$, atunci diferența $(a + c) - (b + c)$ tot e un număr negativ. Aceasta înseamnă că $a + c < b + c$.

Teorema 3.

Dacă ambele părți ale inegalității adevărate de înmulțit cu unul și același număr pozitiv, atunci obținem o inegalitate adevărată.

Dacă ambele părți al inegalității adevărate de înmulțit cu unul și același număr negativ și de schimbat semnul inegalității în opus, atunci obținem o inegalitate adevărată.

Demonstrație. Fie $a < b$ și c un număr pozitiv arbitrar. În acest caz numerele $a - b$, $(a - b)c$ sunt numere negative, adică, $ac < bc$.

Dacă $a < b$ și c este un număr negativ arbitrar, atunci produsul $(a - b)c$, deci și diferența $ac - bc$ sunt numere pozitive. De aceea $ac > bc$.

Exemple. a) $3 < 4$ și $5 > 0$, de aceea $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ sau $15 < 20$; b) $3 < 4$ și $-2 < 0$, de aceea $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ sau $-6 > -8$.

Deoarece împărțirea poate fi înlocuită prin înmulțirea cu numărul invers împărțitorului, atunci în teorema 3 cuvântul «înmulțit» poate fi înlocuit cu cuvântul «împărțit».

Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

Teorema 4. Inegalitățile cu aceleași semne se pot aduna parte cu parte.

De exemplu, dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$.

Demonstrație. Dacă $a < b$ și $c < d$, atunci după teorema a 2-a $a + c < b + c$ și $b + c < b + d$, de unde după teorema 1 $a + c < b + d$.

Exemplu. $2 < 3$ și $5 < 7$, de aceea $2 + 5 < 3 + 7$ sau $7 < 10$.

Teorema 5. Inegalitățile cu aceleași semne se pot înmulți parte cu parte, dacă părțile lor din stânga și din dreapta sunt numere pozitive.

De exemplu, dacă $a < b$, $c < d$ și numerele a , b , c , d sunt pozitive, atunci $ac < bd$.

Demonstrație. Fie $a < b$ și $c < d$, iar numerele c și $b - c$ pozitive. Conform teoremei nr. 3 $ac < bc$ și $bc < bd$, de unde după teorema nr. 1 $ac < bd$.

Remarcă. Teoremele nr. 4 și nr. 5- sunt adevărate și pentru trei sau mai multe inegalități. De exemplu, dacă $a < b$, $c < d$ și $n < m$, atunci $a + c + n < b + d + m$.

Demonstrația teoremelor nr. 1-5 pentru inegalități cu semnul «>» aproape cuvânt cu cuvânt se poate repeta pentru inegalitățile asemănătoare cu semnul «>», «≥» sau «≤».

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Oare se pot ridica la pătrat sau la cub ambele părți ale inegalității? Fie a și b numere pozitive; înmulțim parte cu parte inegalitățile $a < b$ și $a < b$. Obținem $a^2 < b^2$. Înmulțim părțile ultimei inegalități cu $a < b$ și obținem $a^3 < b^3$ ș. a. m. d. Deci, dacă numerele a și b sunt pozitive, iar n – natural, atunci din inegalitatea $a < b$ rezultă $a^n < b^n$.

Dacă cel puțin unul din numerele a și b este negativ, atunci din inegalitatea $a < b$ nu totdeauna rezultă $a^n < b^n$. De exemplu $-3 < 2$, dar inegalitățile $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ sunt false.

Expresia «dacă numerele a și b sunt pozitive și $a < b$ » poate fi scrisă mai pe scurt:

«dacă $0 < a < b$ ».

Cercetați dacă totdeauna este adevărată afirmația:

«dacă $0 < a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ».

Verificați-vă

1. Formulați și demonstrați teorema despre tranzitivitatea inegalităților.
2. Formulați și demonstrați teorema despre adunarea la ambele părți ale inegalității a unui și aceluiași număr.
3. Formulați teorema despre înmulțirea ambelor părți ale inegalității cu unul și același număr.
4. Formulați teorema despre adunarea părților inegalității cu aceleași semne.
5. Formulați teorema despre înmulțirea părților inegalităților cu aceleași semne.

Efectuăm împreună

- 1 Se știe că numerele a și b sunt pozitive și $a < 3$, $b < 6$. Demonstrați că $ab < 20$.
 - **Rezolvare.** Deoarece numerele a și b sunt pozitive, inegalitățile $a < 3$ și $b < 6$ se pot înmulți: $a \cdot b < 3 \cdot 6$, sau $ab < 18$. Dacă $ab < 18$, iar $18 < 20$, atunci $ab < 20$.
- 2 Oare rezultă din inegalitățile $a < 3$ și $b < 6$ inegalitatea $ab < 20$, dacă cel puțin unul din numere a și b este negativ?
 - **Rezolvare.** Dacă unul din numerele a și b este negativ, iar al doilea – pozitiv, atunci produsul ab este negativ. În acest caz inegalitatea $ab < 20$ este adevărată. Dacă ambele numere a și b sunt negative, atunci inegalitatea $ab < 20$ poate fi atât adevărată, cât și falsă. De exemplu, dacă $a = -1$, $b = -2$, atunci $(-1) \cdot (-2) < 20$, deci, inegalitatea este adevărată. Dacă $a = -7$, $b = -10$, atunci inegalitatea $(-7) \cdot (-10) < 20$ este falsă.

Răspuns. Nu.

3 Se știe, că $m \geq -5$. Valoarea expresiei $-3m - 20$ este pozitivă sau negativă?

- **Rezolvare.** Înmulțim ambele părți ale inegalității $m \geq -5$ cu -3 , obținem $-3m \leq 15$ (proprietatea 4). Adunăm la ambele părți ale acestei inegalități numărul -20 : $-3m - 20 \leq 15 - 20$ (proprietatea a 2-a), de aici $-3m - 20 \leq -5$, deci $-3m - 20 < 0$.

Răspuns. Negativă.

Efectuați oral

56. Care din numerele a și c este mai mare dacă: a) $a - c < 0$; b) $a - c > 2$?
57. Privind figura 6, spuneți, valoarea cărei expresii este mai mare: a sau $a + 2b$; b sau $b - 2a$
58. Comparați numerele x și z , dacă:
a) $x < y$ și $y < z$; b) $x > y$ și $y > z$; c) $x \leq a$ și $a \leq z$.
59. Numărul n este pozitiv sau negativ, dacă:
a) $3n < 3,5n$; b) $-1,5n > -n$; c) $0,2n < -n$?
60. Care din fracțiile $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ este mai mare, dacă $b < a < 0$?
61. Care din două fracții negative $\frac{x}{y}$ și $\frac{y}{x}$ este mai mică, dacă $|x| < |y|$?
62. Numărul $a > 1$. Ce număr este: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?
63. Numărul $x < -1$. Ce număr este: $5x$, $5 - x$, x^4 , $2 + x^2$?

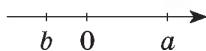


Fig. 6

Nivelul A

64. Comparați numerele a și b dacă diferențele:
a) $a - c$ și $c - b$ sunt numere pozitive;
b) $b - c$ și $c - a$ sunt numere negative;
c) $a - n$ și $n - b$ sunt numere nenegative.
65. Comparați numerele a și b dacă:
a) $a - c > 0$ și $b - c < 0$; b) $a - x \leq 0$ și $x - b \leq 0$.
66. Indicați cum sunt situate pe axa de coordonate punctele cu coordonatele a , b , c și d , dacă $a < c$, $b > c$, $d > b$.
67. Scrieți inegalitatea adevărată, formată în rezultatul:
a) adunării la ambele părți ale inegalității $12 < 18$ a numărului 5;
b) scăderii din ambele părți ale inegalității $12 < 18$ a numărului 77;
c) înmulțirii ambelor părți ale inegalității $12 < 18$ cu 3; cu -5 ;
d) împărțirii ambelor părți ale inegalității $12 < 18$ la 3; la -6 .

68. **Problema deschisă.** Compuneți câteva probleme, care ilustrează proprietățile inegalităților numerice și se referă la activitatea omului.

69. Se știe că $a > b$. Înlocuiți * cu semnul inegalității

- a) $2a * 2b$; c) $-a * -b$; e) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$;
 b) $1,5a * 1,5b$; d) $-3a * -3b$; f) $2a^3 * 2b^3$.

70. Numărul a este pozitiv sau negativ, dacă:

- a) $2a < 3a$; b) $0,5a > a$; c) $-5a < -4a$?

71. Adunați părțile respective ale inegalităților:

- a) $5 < 12$ și $7 < 8$; c) $5 < 6$ și $x < z$;
 b) $3 < 6$ și $-3 < -2$; d) $a < b$ și $x \leq z$.

72. Înmulțiți termenii respectivi ai inegalităților:

- a) $2 < 3$ și $5 < 8$; c) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ și $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$;
 b) $-4 < -1$ și $-5 < -4$; d) $5 < 7$ și $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$.

«Matematica este știința care cere cea mai multă fantezie».

S. V. Kovalevska

73. Comparați numerele pozitive $\frac{c}{a}$ și $\frac{c}{b}$, dacă $a < b$ și $c > 0$.

Nivelul B

74. Se știe că $m < n$. Comparați numerele:

- a) $m + 7$ și $n + 7$; d) $1 - m$ și $1 - n$;
 b) $-0,1m$ și $-0,1n$; e) $5m - 1$ și $5n - 1$;
 c) $\sqrt{(-1)^2 m}$ și $\sqrt{(-1)^2 n}$; f) $-2n - 1$ și $-1 - 2m$.

75. Se știe, că $x > y > z$. Înlocuiți * cu semnul inegalității:

- a) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; c) $(1 - \sqrt{2})x * (1 - \sqrt{2})y$; e) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$;
 b) $x^2 * xy$; d) $\frac{y}{x} * 1$; f) $\frac{x^2 y}{y - x} * \frac{xy^2}{y - x}$.

76*. Se știe, că $x < y < 0$. Înlocuiți * cu semnul inegalității:

- a) $x^3 * y^2$; c) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$; e) $\frac{x}{x - y} * \frac{y}{x - y}$;
 b) $-x * 10y$; d) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; f) $\frac{x + 1}{xy} * \frac{y + 1}{xy}$.

77. Demonstrați, dacă:

- a) $x > y$ și $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, atunci $x > 0$ și $y < 0$; b) $a < b$ și $ab < 0$, atunci $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

78. Aranjați în ordine crescătoare numerele $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, dacă ele toate sunt pozitive și $a < c$, $d < b$ și $d > c$.

79. Aranjați în ordine crescătoare numerele $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, acă ele toate sunt negative și $a > c$, $d > b$ și $d < c$.

80. Demonstrați, dacă:

- $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$;
- $a \leq b$ și $c > 0$, atunci $ac \leq bc$;
- $a \leq b$ și $c < 0$, atunci $ac \geq bc$.

81. Oare este adevărat, că pentru valori pozitive ale lui a și b :

- din $a < b$ rezultă $a^2 < b^2$;
- din $a^2 < b^2$ rezultă $a < b$;
- din $a < b$ rezultă $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
- din $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ rezultă $a < b$?

82. **Sarcina practică.** 1) Construiți un trapez și un paralelogram. Măsurați laturile și diagonalele fiecărui din aceste patrulatere. Clarificați, dacă este adevărată afirmația: «Perimetrul patrulaterului este mai mare decât suma diagonalelor lui». 2) Demonstrați, că: a) diagonala patrulaterului este mai mică decât semiperimetrul lui; b) suma diagonalelor patrulaterului este mai mică decât perimetrul lui. Examinați două cazuri (fig. 6 și 7).

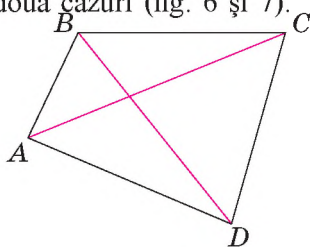


Fig. 6

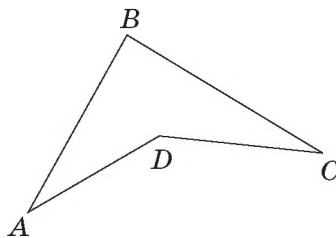


Fig. 7

83.

- | | |
|--|--|
| 1. Adunarea inecuației $-12 < 9$ cu inecuația dată | $A -12 < 10$
$B -13 < 7$
$C -30 < 6$
$D -26 < 10$
$E 6 > -5$ |
| 2. Împărțirea ambelor părți ale inecuației date la 3 | |
| 3. Scăderea inecuației $5 < 8$ din inecuația dată | |
| 4. Înmulțirea ambelor părți ale inecuației date cu $\frac{2}{3}$ | |

84. Folosind identitatea $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $x \geq 0$ și $y \geq 0$, demonstrați: dacă $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, atunci $x > y$.

85. Demonstrați, dacă:

a) $m > n > 0$, atunci $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$;

b) $m < n < 0$, atunci $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$.

86. Oare este adevărat că pentru valori arbitrare ale lui a și b :

a) din $a > b$ rezultă $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

b) din $a < b$ rezultă $|a| > |b|$?

Exerciții pentru repetare

87. Sunt date punctele $A(-3; 14)$, $B(3; 14)$, $C(-2; 20)$, $D(2; 20)$. Oare trece graficul funcției $y = x^2 - 5x + 6$ prin aceste puncte?

88. Pentru care valori ale lui n graficul funcției $y = x^2 - 3x + n$ trece prin punctul $M(3; 7)$? Prin punctul $K(-2; 3)$?

89. Descopuneți în factori trinomul:

a) $x^2 + 2x - 35$;

b) $6x^2 - x - 1$;

c) $6a^2 + a - 2$;

d) $c^2 + \sqrt{2}c - 4$.

90. *Jocul sudoku.* Copiați tabelul în caiet (fig. 8).

Completați pătrățelele libere cu cifre de la 1 până la 9 astfel, ca în fiecare rând, în fiecare coloană și în fiecare pătrat 3×3 evidențiat, fiecare cifră să fie înscrisă numai o dată.

2	4		3		7			
				5	4	3	2	
7		3				5	8	
9				6			3	
8	3	6		1	5		4	2
			9	3		7		
6	1			9				
				7	1	4	6	
3	7		8	4				5

Fig. 8

Comoara succeselor

✓ Cunosc proprietățile inegalităților numerice și pot să le demonstrez.

Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$

Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$

Dacă $a < b$ atunci $a + c < b + c$

Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$

✓ Știu să aplic proprietățile inegalităților numerice.

$$\begin{aligned} 12 > 7, 3 > 0 \\ 36 > 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 > 7, -2 < 0 \\ -24 < -14 \end{aligned}$$

✓ Doresc să mă învăț a aplica proprietățile inegalităților numerice pentru demonstrarea inegalităților.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim proprietățile inegalităților numerice. Dacă

$a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$;

$a < b$ și c este un număr arbitrar, atunci $a + c < b + c$;

$a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$;

$a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$;

$a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$;

$a < b$, $c < d$ și a, b, c, d sunt numere pozitive, atunci $ac < bd$

§ 3

Inegalități duble

Ucraina este o țară cosmică. Vitezele cosmice sunt vitezele minime ale aparatului cosmic, după care el:

- poate deveni satelit al Pământului (prima viteză cosmică: $V_1 = 7,9$ km/s);
- poate învinge atracția gravitațională a Pământului (viteza a doua cosmică $V_2 = 11,2$ km/s);
- poate părăsi sistemul Solar, în care se află Pământul (viteza a treia cosmică $V_3 > 16,67$ km/s).

Corelația dintre aceste viteze se poate scrie astfel:

$$V_1 < V_2 < V_3.$$

Dacă inegalitățile $a < x$ și $x < b$ sunt adevărate, atunci ele pot fi scrise în formă de **inegalitate dublă**: $a < x < b$. Inegalitatea dublă are trei părți: stângă, din mijloc și dreaptă și două semne de inegalitate. Exemple de inegalități duble:

$$3 < x < 4 \quad (x \text{ este mai mare decât } 3 \text{ și mai mic decât } 4);$$

$$2a + 3 < x + 3 \leq 5c \quad (x + 3 \text{ e mai mare decât } 2a + 3 \text{ și nu-i mai mare decât } 5c).$$

Teorema 6. Dacă la fiecare parte a inegalității duble adevărate de adunat unul și același număr, atunci vom obține o inegalitate dublă adevărată.

Demonstrație. Dacă $a < x < b$, atunci sunt adevărate inegalitățile $a < x$ și $x < b$. Conform teoremei a 2-a pentru orice număr real c sunt adevărate inegalitățile $a + c < x + c$ și $x + c < b + c$. Deci, $a + c < x + c < b + c$.

Numărul c poate fi pozitiv, dar și negativ. De exemplu:
 dacă $2,5 < x - 3 < 2,6$ și $c = 3$, atunci $5,5 < x < 5,6$;
 dacă $0,7 < x + 1 < 1,2$ și $c = -1$, atunci $-0,3 < x < 0,2$.

În mod similar se pot demonstra următoarele afirmații:

- dacă $a < x < b$ și $k > 0$, atunci $ka < kx < kb$;
- dacă $a < x < b$ și $k < 0$, atunci $kb < kx < ka$;
- dacă $a < x < b$ și $c < y < d$, atunci:

$$a + c < x + y < b + d;$$

$$a - d < x - y < b - c;$$

$$ac < xy < bd \text{ (când } a > 0 \text{ și } c > 0);$$

$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (când } a > 0 \text{ și } c > 0).$$

De exemplu, dacă $4 < x < 6$ și $2 < y < 3$, atunci

$$4 + 2 < x + y < 6 + 3 \text{ sau } 6 < x + y < 9,$$

$$4 \cdot 2 < x \cdot y < 6 \cdot 3 \text{ sau } 8 < x \cdot y < 18,$$

$$4 - 3 < x - y < 6 - 2 \text{ sau } 1 < x - y < 4;$$

$$\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}, \text{ sau } \frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3.$$

Atrageți atenția la scăderea și împărțirea inegalităților duble! Din termenul mai mic al primei inegalități se scade termenul mai mare al celei de a doua, iar din cel mai mare – cel mai mic. Termenul mai mic al primei inegalități se împarte la termenul mai mare al celei de a doua, iar cel mai mare – la cel mai mic.

Proprietățile studiate dau posibilitatea de a aduce la o formă mai simplă inegalitățile duble. De exemplu, în locul inegalității duble $16 < 3x - 2 < 19$ se poate examina inegalitatea $18 < 3x < 21$ sau și mai simplu: $6 < x < 7$.

Este potrivit de folosit inegalitățile duble pentru *aprecierea valorilor* mărimilor sau expresiilor. Valoarea mărimilor, la fel ca masa, distanța, timpul și altele totdeauna sunt aproximative. Este dificil, bunăoară, de derminat înălțimea copacului cu exactitate până la un decimetru. De aceea se indică, de exemplu, că ea este mai mare decât 9,2 m, dar mai mică decât 9,4 m. Aceasta se scrie în forma inegalității duble: $9,2 < h < 9,4$.

Atrageți atenția la fragmentul etichetei care este amplasată pe sticla cu ulei (fig. 9).

masa neto 800 ± 10 g.

Fig. 9

Această înscrisere semnifică că masa uleiului din sticlă nu poate fi mai mică decât 790 g și mai mare decât 810 g. Cu ajutorul inecuației duble masa uleiului (m) fără sticlă poate fi scrisă așa: $790 \text{ g} \leq m \leq 810 \text{ g}$.



Aplicând proprietățile inegalităților duble, se pot aprecia și valorile expresiilor $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$.

Fie, de exemplu, $3,5 < x < 3,6$ și $2,1 < y < 2,2$. Atunci $3,5 + 2,1 < x + y < 3,6 + 2,2$ sau $5,6 < x + y < 5,8$ (fig. 10).

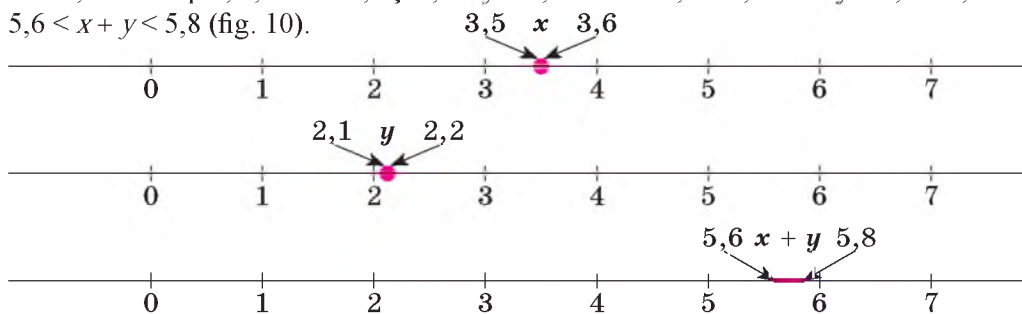


Fig. 10

$$3,5 - 2,2 < x - y < 3,6 - 2,1, \text{ sau } 1,3 < x - y < 1,5;$$

$$3,5 \cdot 2,1 < xy < 3,6 \cdot 2,2, \text{ sau } 7,35 < xy < 7,92;$$

$$\frac{3,5}{2,2} < \frac{x}{y} < \frac{3,6}{2,1}, \text{ sau } 1,59 < \frac{x}{y} < 1,72.$$

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Cu ajutorul inegalităților duble se poate scăpa de modul în inecuațiile de tipul $|x| < a$ și $|x| \leq a$, unde $a > 0$.

De exemplu, inegalitatea $|x| < 3$ este satisfăcută de toate valorile lui x care au modulul mai mic decât 3. Astfel de numere sunt numerele pozitive mai mici decât 3, numerele negative mai mari decât -3 și numărul 0. Această mulțime de numere poate fi scrisă cu ajutorul inegalității duble astfel: $-3 < x < 3$.

Asemănător poate fi scrisă inegalitatea $|x| \leq 3$: $-3 \leq x \leq 3$.

Atrageți atenția! Orice inegalitate de tipul $|M| < a$, unde $a > 0$ și M – o expresie oarecare poate fi scrisă în formă de inegalitate dublă: $-a < M < a$.

Dar, de exemplu, inegalitatea $|x| > 3$ nu poate fi scrisă în formă de inegalitate dublă. De ce?

Verificați-vă

1. Dați exemple de inegalități duble.
2. Ce înseamnă «a aprecia valoarea mărimii»?
3. Cum, cu ajutorul inegalităților duble, se poate aprecia valoarea aproximativă a sumei sau a produsului a două valori ale mărimii?
4. Cum, cu ajutorul inegalităților duble, se poate aprecia valoarea aproximativă a diferenței (câtului) a două valori ale mărimii?

Efectuăm împreună

1 Se știe, că $10 < x < 12$. Ce valori poate obține expresia:
a) $3x - 5$; b) x^2 ?

● **Rezolvare.** a) Înmulțim toate părțile inegalității cu 3:

$$3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12 \text{ sau } 30 < 3x < 36.$$

Scădem din toate părțile inegalității 5:

$$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5 \text{ sau } 25 < 3x - 5 < 31.$$

b) Deoarece toate părțile inegalității date sunt pozitive putem să le ridicăm la pătrat: $100 < x^2 < 144$.

Răspuns. a) $25 < 3x - 5 < 31$; b) $100 < x^2 < 144$.

2 Apreciați valoarea expresiei $0,2a - b$ dacă $5 < a < 15$ și $2 < b < 7$.

● **Rezolvare.** Dacă $5 < a < 15$ atunci $1 < 0,2a < 3$.

Dacă $2 < b < 7$, atunci $-2 > -b > -7$ sau $-7 < -b < -2$.

Adunăm părțile respective ale inegalităților obținute: $-6 < 0,2a - b < 1$.

Răspuns. $-6 < 0,2a - b < 1$.

Efectuați oral

91. Citiți inegalitatea dublă:

a) $4 < a < 7$;

b) $0 < 0,5 < 1$;

c) $-3 < x < 3$.

92. Oare sunt adevărate inegalitățile duble:

a) $-7 < 0 < 7$;

b) $0 < 5 < 10$;

c) $-1 < -2 < -3$?

93. Oare satisfac valorile $x = 3$ și $x = -3$ condiția:

a) $0 < x < 2x$;

b) $-x < x^2 < 3x$;

c) $-x < x^2 < -x^3$?

94. Care valori întregi ale lui a satisfac inegalitățile duble:

a) $-1 < a < 1$;

b) $-2 < a < 2$;

c) $0,1 < a < 1$?

95. Oare există valori ale lui x mai mari decât $\frac{8}{9}$, dar mai mici decât $\frac{6}{7}$?

96. Aflați perimetrul triunghiului echilateral, dacă latura lui este mai mare decât 1,8 m și mai mică decât 2,1 m. Poate oare aria unui astfel de triunghi fi egală cu $\sqrt{3} \text{ m}^2$?

Nivelul A

97. Scrieți în formă de inegalitate dublă corelațiile:

a) $x < 12$ și $x > 3$;

b) $x > -2$ și $x < 2$;

c) $x < 30$ și $x > -0,3$.

98. Oare există valori ale lui c care sunt: a) mai mici decât -3 și mai mari decât $-\sqrt{10}$; b) mai mari decât 10^{-2} și mai mici decât 10^2 ? Dacă sunt scrieți inegalitatea dublă respectivă

99. Se știe, că $4 < n < 5$. Aflați valoarea expresiilor:

- a) $n + 3$; b) $n - 5$; c) $2n$; d) $-3n$; e) n^2 .

100. Știind că $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, aflați valoarea expresiilor:

- a) $2 + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3} - 1$; c) $-\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$.

101. Latura pătratului este egală cu a cm, unde $4,2 < a < 4,3$. Aflați perimetrul și aria lui.

102. *Problemă deschisă.* Studiați eticheta de pe borcanul cu sos de tomate (fig. 11). Încercați să îmbunătățiți caracteristicile numerice pe ea, folosind diferite timuri de inegalități.

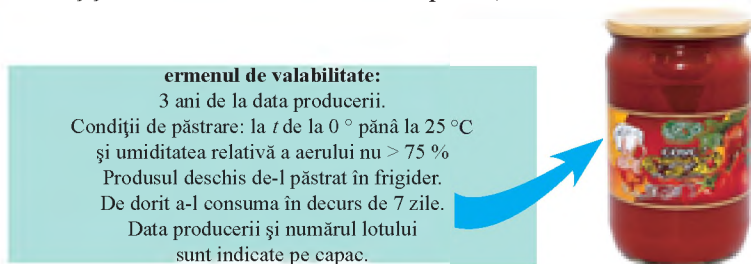


Fig. 11

103. Aflați valoarea diferențelor $x - y$, dacă;

- a) $12 < x < 13$ și $5 < y < 6$;
b) $0,32 < x < 0,33$ și $0,25 < y < 0,27$.

104. Aflați valoarea produselor xy , dacă;

- a) $3 < x \leq 4$ și $5 \leq y \leq 7$;
b) $-2 < x < -1$ și $-3 < y < -1$.

105. Aflați valoarea câturilor $x : y$, dacă;

- a) $12 < x < 15$ și $5 < y < 6$;
b) $6 < x < 8$ și $2 < y < 3$.

106. Se știe, că $-3 \leq x \leq 5$. Ce valori pot primi expresiile:

- a) $2x + 3$; b) $0,1x - 2$; c) $2 - x$; d) $10 - 0,1x$?

107. După măsurarea lungimii a și lățimii b ale dreptunghiului (în metri) s-a constatat, că $1,3 < a < 1,4$, $0,6 < b < 0,8$. Aflați perimetrul și aria acestui dreptunghi.

108. Lungimea muchiei cubului este c mm și $1,53 \cdot 10^2 < c < 1,54 \cdot 10^2$. Aflați: a) suma lungimilor tuturor muchiilor cubului; b) aria suprafeței cubului; c) volumul cubului. Rezultatul rotunjiți-l până la zecimi.

109. 1) Pe figura 12 este reprezentat planul unui apartament. Se știe, că tot apartamentul, la fel și salonul au formă pătrată. Aflați aria salonului, dormitorului și a apartamentului, dacă $4,9 \text{ m} < x < 5,1 \text{ m}$, $2,9 \text{ m} < y < 3,1 \text{ m}$.

2) *Problemă deschisă.* Efectuați măsurările necesare și aflați aria S și perimetrul P : a) camerei în care locuiți; b) ferestrei din această cameră.

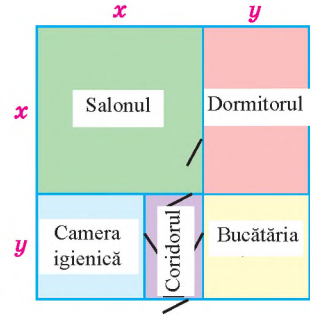


Fig. 12

Nivelul B

- 110.** Se știe, că $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ și $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$, Aflați:
 a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; c) $2 - \sqrt{2}$; d) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$.
- 111.** Fie α și β unghiurile unui triunghi, $62^\circ < \alpha < 63^\circ$; $95^\circ < \beta < 96^\circ$. Aflați măsura unghiului al treilea.
- 112.** Se știe, că $3,14 < \pi < 3,15$. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, dacă raza este mai mare decât 2,5 dm și mai mică decât 2,6 dm.
- 113.** Se știe, că $10 < x < 12$. Ce valori întregi pot primi expresiile:
 a) $2x$; b) $\frac{x^2}{5}$; c) $3x - 5$; d) $\frac{12}{x}$?
- 114.** Se știe, că $3 < x < 4$ și $1,2 < y < 1,3$. Ce valori întregi pot primi expresiile:
 a) $(x + y)^2$; b) \sqrt{xy} ; c) $y^2 - x$; d) $\frac{y + x}{x \cdot y}$?
- 115.** În ce limite se află valoarea expresiei $\frac{3x-2}{x}$, dacă:
 a) $1 < x < 4$; b) $-5 < x < 0$; c) $-10 \leq x \leq 10$?
- 116.** Se știe, că $-\frac{3}{4} < m < \frac{5}{6}$ și $3 < n < 10$. Ce valori pot primi expresiile:
 a) $2m + 3n$; b) $4m - n$; c) $m + n^2$; d) $n^2 - m$?
- 117.** Catetele a și b ale triunghiului dreptunghic sunt astfel că $8,4 < a < 8,5$, $6,5 < b < 6,6$. Aflați aria acestui triunghi și perimetrul lui.

118. Sarcină practică. Scrieți în formă de inegalitate dublă valoarea ariei figurii reprezentate pe figura 13.

119. Demonstrați afirmațiile:

a) dacă $a < x < b$, atunci $-b < -x < -a$;

b) dacă $a < x < b$ și $a > 0$, atunci $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$;

c) dacă $a < x < b$ și $a > 0$, atunci $a^2 < x^2 < b^2$.

120. Demonstrați afirmațiile:

a) dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$;

b) dacă $0 < a < b$, atunci $a < \sqrt{ab} < b$.

121*. Scrieți inegalitățile cu moduli în formă de inegalități duble:

a) $|x| < 3$;

b) $|x| \leq 5$;

c) $2|x| < \pi$;

d) $|x| - 7 \leq -6$.

122*. Scrieți inegalitățile cu moduli în formă de inegalități duble și aduceți-le la forma cea mai simplă:

a) $|2x - 1| < 3$;

b) $|2 - 0,5x| \leq 2,5$;

c) $|\sqrt{x} - 5| < 1$.

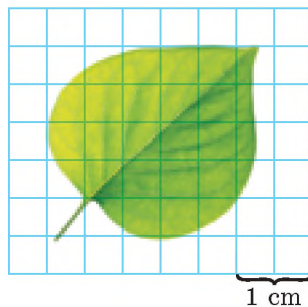


Fig. 13

Exerciții pentru repetare

123. La ora 10 din orașul A spre orașul B a plecat un motociclist, iar la 11 la fel din A spre B – un automobil. La ce oră automobilul va ajunge din urmă motociclistul, dacă el a sosit în B la ora 13, iar motociclistul la ora 14?

124. Scrieți în formă standard masa:

a) Lunii 73 500 000 000 000 000 000 t;

b) Soarelui 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 t.

125. Rezolvați sistemele de ecuații: a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Comoara succeselor

- ✓ Pot da exemple de inegalități duble.
- ✓ Înțeleg cum se scriu și se citesc inegalitățile duble.
- ✓ Știu:
 - a efectua operații cu inegalități;
 - a aduce la formă mai simplă inegalitățile duble;
 - să afle valoarea mărimilor;
 - să afle valoarea expresiilor

$$\begin{array}{r} 3 \leq x+1 < 7 \\ + \\ -1 \leq y < 1 \\ \hline 2 \leq x+y+1 < 8 \\ 1 \leq x+y < 7 \end{array}$$

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Conținutul relațiilor «mai mare», «mai mic», «nu mai mare», «nu mai mic».
- Tipurile inecuațiilor (stricte, nestricte, numerice, cu variabile)
- Proprietățile inecuațiilor numerice (p. 17, 23).
- Cum se rezolvă ecuațiile liniare (p. 255).
- Care ecuații se numesc echivalente (p. 255).

§ 4 Rezolvarea inecuațiilor cu o variabilă

Din clasele precedente știți că egalitățile cu variabile sunt de două tipuri: identități și ecuații. Identitățile se demonstrează, ecuațiile - se rezolvă. La fel se deosebesc două tipuri de inegalități cu variabile: *inegalități identice* și *inegalități cu necunoscute*. **Inegalitatea cu necunoscute se numește inecuație.** Inegalitățile identice se demonstrează (vezi § 7), iar inecuațiile se rezolvă.

Examinăm inecuația $5x - 2 > 8$ cu variabila x . Dacă vom substitui x cu numărul 1 vom obține o inegalitate numerică falsă $5 - 2 > 8$. Se spune că valoarea $x = 1$ inecuația dată nu o satisface. Dacă în locul lui x vom înlocui numărul 3, atunci obținem o inegalitate adevărată $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Valoarea $x = 3$ inecuația dată o satisface, numărul 3 este soluția inecuației $5x - 2 > 8$.

➔ **Soluție a inecuației cu o variabilă se numește valoarea acestei variabile care satisface această inecuație.**

A rezolva o inecuație înseamnă a determina toate soluțiile ei sau a demonstra că ele nu sunt.

La rezolvarea inecuației ea se înlocuiește cu alte inecuații mai simple și echivalente cu cea dată.

Doă inecuații se numesc echivalente dacă ele au unele și aceleași soluții, adică, dacă fiecare soluție a primei inecuații o satisface pe a doua, iar fiecare soluție a inecuației a doua o satisface pe prima. Inecuațiile care nu au soluții de asemenea se consideră echivalente.

De exemplu, inecuația $5x - 2 > 8$ este echivalentă cu fiecare din inecuațiile:

$$5x > 2 + 8, 5x > 10, x > 2.$$

Inecuațiile au multe proprietăți asemănătoare cu proprietățile ecuațiilor.

1. Dacă dintr-o parte a inecuației vom trece în alta un termen cu semnul opus, vom obține o inecuație echivalentă cu cea dată.

2. Dacă ambele părți ale inecuației le înmulțim sau le împărțim la unul și același număr pozitiv, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.

3. Dacă ambele părți ale inecuației le înmulțim sau le împărțim la unul și același număr negativ, schimbând semnul relației în opus, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.

Aceste proprietăți ale inecuațiilor rezultă din teoremele demonstrate în § 2. Folosind aceste proprietăți, inecuațiile pot fi rezolvate ca și ecuațiile.

Exemplul 1. Rezolvați inecuația $5x < 2x + 15$.

Rezolvare. Trecem termenul $2x$ în partea stângă a inecuației:

$$5x - 2x < 15.$$

Reducem termenii asemenea:

$$3x < 15.$$

Împărțim ambele părți ale inecuației la 3:

$$x < 5.$$

Răspuns. Fiecare număr real mai mic decât 5 satisface inecuația.

Exemplul 2. Rezolvați inecuația $7(2 - x) \leq 3x + 44$.

Rezolvare. $14 - 7x \leq 3x + 44$,
 $-7x - 3x \leq -14 + 44$,
 $-10x \leq 30$,
 $x \geq -3$.

Răspuns. Inecuația satisface fiecare număr nu mai mic decât -3 .

Remarcă. Mulțimea soluțiilor inecuațiilor este comod de a o scrie în formă de *intervale*. Mulțimea tuturor numerelor reale mai mici decât 5 se numește intervalul de la minus infinit până la 5 și se notează $(-\infty; 5)$. Pe figura 14 acest interval este marcat prin hașurare, valoarea 5 care nu aparține mulțimii soluțiilor este marcată printr-un cerculeț deschis.



Fig. 14

Mulțimea tuturor numerelor reale nu mai mici decât -3 se numește intervalul de la -3 până la infinit, care include și -3 . El se notează $[-3; \infty)$, se reprezintă intuitiv cum este arătat pe fig. 15; valoarea -3 care aparține mulțimii de soluții este marcată printr-un cerculeț negru.

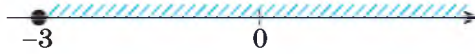


Fig. 15

Deci, răspunsurile inecuațiilor rezolvate se pot scrie și cu ajutorul intervalelor: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

După cum știți din toate ecuațiile cele mai simple sunt cele liniare de forma $ax = b$. Cele mai simple inecuații cu o necunoscută tot sunt liniare.

➔ Dacă a și b sunt numere date, iar x este variabila necunoscută, atunci fiecare din inecuațiile

$$ax < b, \quad ax > b, \quad ax \leq b, \quad ax \geq b \tag{*}$$

se numește **inecuație liniară cu o variabilă x** .

Exemple de inecuații liniare:

$$2x < 3, \quad -7x > 14, \quad 0,5x \leq 1, \quad 9x \geq 0.$$

Ecuațiile liniare se scriu uneori și astfel:

$$ax - b < 0, \quad ax - b > 0, \quad ax - b \leq 0, \quad ax - b \geq 0.$$

Dacă numărul a este diferit de zero, fiecare din inecuațiile (*) are o mulțime de soluții, căreia îi corespunde o semiaxă numerică nesfârșită (sau semidreaptă fără vârf).

Dependența soluțiilor inecuației liniare de valoarea coeficientului variabilei și a semnului inecuației este dată în tabel:

$ax > b$	$ax \leq b$
<p>Dacă $a > 0$, atunci</p> $x > \frac{b}{a}, \quad x \in \left(\frac{b}{a}; \infty \right)$ <p style="text-align: center;">$\frac{b}{a}$</p>	<p>Dacă $a > 0$, atunci</p> $x \leq \frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\infty; \frac{b}{a} \right]$ <p style="text-align: center;">$\frac{b}{a}$</p>
<p>Dacă $a < 0$, atunci</p> $x < \frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\infty; \frac{b}{a} \right)$ <p style="text-align: center;">$\frac{b}{a}$</p>	<p>Dacă $a < 0$, atunci</p> $x \geq \frac{b}{a}, \quad x \in \left[\frac{b}{a}; \infty \right)$ <p style="text-align: center;">$\frac{b}{a}$</p>

Dacă $a = 0$, fiecare inecuație (*) sau nu are soluții (de exemplu, $0x > 5$), sau mulțimea soluțiilor ei este mulțimea tuturor numerelor reale (de exemplu, $0x < 5$).

Atrageți atenția! Reprezentarea intervalelor numerice se poate face și prin alt procedeu – cu arcuri – cum sunt reprezentate pe figurile 16 – 17.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Rezolvarea celor mai simple inecuații cu moduli se reduce la rezolvarea inegalităților liniare.

Rezolvăm inecuațiile:

a) $|x| < 5$; b) $|x| > 3$; c) $|x| \leq -2$; d) $|x| > -0,5$.

a) Toate valorile lui x , modulul cărora sunt mai mici decât 5, satisfac inecuația. Acestea sunt toate numerele pozitive mai mici decât 5, toate numerele negative mai mari decât -5 și numărul 0. O astfel de mulțime de numere pot fi scrise cu ajutorul inegalității duble $-5 < x < 5$. Pe axa numerică acestei mulțimi de numere îi corespunde intervalul ilustrat pe figura 16, *a*. Numerele 5 și -5 nu aparțin acestui interval, ele nu satisfac inecuația dată, dar inecuația $|x| \leq 5$ o satisfac (fig. 16, *b*).

b) Inecuația $|x| > 3$ o satisfac toate numerele mai mari decât 3 și toate numerele mai mici decât -3 (fig. 17).

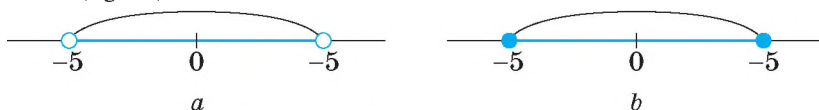


Fig. 16

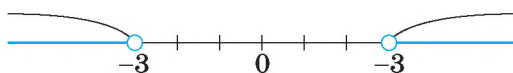


Fig. 17

c) Modulul fiecărui număr este număr nenegativ, el nu poate fi mai mic decât numărul negativ -2 sau egal cu -2 . De aceea inecuația nu are soluții.

d) Fiecare număr nenegativ este mai mare decât $-0,5$. De aceea inecuația dată o satisface fiecare număr real.

Verificați-vă

1. Dați exemple de inecuații.
2. Ce se numește soluție a inecuației?
3. Câte soluții poate avea inecuația cu o variabilă?
4. Cum se scriu mulțimile soluțiilor inecuației?

Efectuăm împreună!

1 Rezolvați inecuația $2x + 3 < 2(x + 3)$.

- **Rezolvare** $2x + 3 < 2x + 6$,
 $2x - 2x < 6 - 3$,
 $0x < 3$.

Inecuația $0x < 3$ este adevărată pentru fiecare valoare a lui x .

Răspuns. $(-\infty; \infty)$.

2 Rezolvați inecuația $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$.

- **Rezolvare.** $6z + 7 \geq 6z + 8,$
 $6z - 6z \geq 8 - 7,$
 $0z \geq 1.$

Inegalitatea $0z \geq 1$ nu este satisfăcută de nici o valoare a lui z .

Răspuns. Soluții nu are.

3 Rezolvați inecuația $\frac{x-5}{6} + \frac{x-8}{3} > \frac{5x}{2} - 1.$

- **Rezolvare.** Înmulțim ambele părți ale inecuației cu 6 (cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 3 și 2):

$$\begin{aligned} x - 5 + 2(x - 8) &> 3 \cdot 5x - 6, \\ x - 5 + 2x - 16 &> 15x - 6, \\ x + 2x - 15x &> -6 + 5 + 16, \\ -12x &> 15, \\ x &< -\frac{15}{12}, \\ x &< -1,25. \end{aligned}$$

Răspuns. $(-\infty; -1,25)$.

4 Rezolvați inecuația dublă: $-2 \leq 10x - 3 \leq 5.$

- **Rezolvare** $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3,$
 $1 \leq 10x \leq 8,$
 $0,1 \leq x \leq 0,8.$

Răspuns. $[0,1; 0,8]$.

Efectuați oral

126. Care din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5 satisfac inecuația:

- a) $2x - 5 > 0;$ b) $4x + 1 \leq 13;$ c) $3x + 4 \geq 5?$

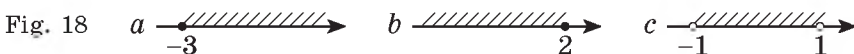
127. Rezolvați inecuațiile:

- a) $2x < 6;$ c) $0,5z > 2;$ e) $x + 3 < x;$
 b) $-3x > 9;$ d) $\frac{2}{3}y < 10;$ f) $x - 3 \leq x.$

128. Câte soluții au inecuațiile:

- a) $x^2 + 1 < 0;$ c) $|x| \leq 0;$ e) $10x < 20?$
 b) $|x| < 0;$ d) $-\sqrt{2}x > 2;$

129. **Problemă deschisă.** Compuneți inegalități, soluțiile cărora sunt reprezentate pe figura 18.



Nivelul A

130. Reprezentați pe axa de coordonate în formă de intervale mulțimea de numere care satisfac inecuațiile:

a) $x < 4$;

b) $x > -1$;

c) $x \leq 0,5$.

Rezolvați inecuațiile (131 – 134).

131. a) $x + 2 > 5$;

c) $2 + x \geq 3$;

e) $4y < 36$;

b) $x - 4 > 0$;

d) $3x > 15$;

f) $5z \geq 35$.

132. a) $3x > 15$;

c) $2x - 5 \geq 0$;

e) $x - 1,5 \leq 0$;

b) $x + 7 > 0$;

d) $-4x \geq 20$;

f) $10 + 5x < 0$.

133. a) $-x < 5$;

c) $-x < 0$;

e) $-3x > -3$;

b) $-z \geq -4$;

d) $-5x \leq 15$;

f) $5z \leq -1$.

134. a) $3x + 2 < 5$;

c) $9x + 5 > 5$;

e) $6z + 1 > 2z$;

b) $7x - 4 \geq 8$;

d) $5x - 4 < 3x$;

f) $y + 5 < 2y$.

135. Oare sunt echivalente inecuațiile:

a) $2x + 3 > x + 8$ și $x > 5$;

b) $2x - 3 \geq 2$ și $2x - 4 \geq 1$;

c) $3 - 5x < x$ și $6x > 3$;

d) $3x - 1 < 6 - 2x$ și $1 - 3x < 2x - 6$?

Rezolvați inecuațiile (136 – 139).

136. a) $8x - 3 > 5x + 6$;

e) $3 + x > 2x - 3$;

b) $7y - 13 < 5y - 9$;

f) $5 - 2y < y + 8$;

c) $2x - 3 \leq 3x - 8$;

e) $3 - 5x > 4 - 5x$;

d) $x - 15 \geq 4x + 3$;

e) $8 + 6z \leq 13 + 6z$.

137. a) $6x + 21 \leq 5x + 8$;

e) $x - 15 < 6x - 10$;

b) $3x + 7 < 7x + 3$;

f) $11x - 3 \leq 8x - 15$;

c) $7x - 5 > 3x + 7$;

e) $18 - 7x \geq 5x + 30$;

d) $2x - 9 \geq 9x + 5$;

e) $17 - x > 10 - 6x$.

138. a) $3(x + 1) > x + 5$;

d) $3(x + 2) - 4 > x + 2$;

b) $2(x - 1) + 4 < x + 7$;

e) $2(x + 3) \geq 5x - 9$;

c) $4(x - 2) < x + 1$;

f) $4(x + 3) - 3x \leq x - 5$.

139. a) $-5(x - 1) < 3 - 7x$;

d) $-3(2 + x) + 5x \leq 2x + 1$;

b) $2(3 - x) - x < 7 + 3x$;

e) $8 - 3(x - 2) > 4x$;

c) $3(2 - x) > x - 6$;

f) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

140. În ce condiție expresiile obțin valori negative:

a) $7 + 5x$;

b) $10 - 0,5x$;

c) $\sqrt{2} - 2x$?

141. În ce condiție expresiile obțin valori nenegative:

a) $2,5 + 0,5x$;

b) $3,9 + 1,5x$;

c) $1,2 - 3x$?

142. În ce condiție valorile expresiilor date este mai mare decât 10:

- a) $3 + 7x$; b) $5,4 - 2,3x$; c) $12 - x\sqrt{2}$?

143. În ce condiție valoarea expresiei $3x - 7$ este mai mare decât valoarea expresiei respective:

- a) $2x + 1$; b) $5x - 2$; c) $3x - 5$?

Rezolvați inecuațiile (144 – 147)

144. a) $\frac{5x}{7} \leq 3$; c) $0 > \frac{5x}{11}$; e) $-\frac{x}{2} \leq 1$; e) $\frac{2x+5}{7} > 3$;

b) $\frac{-3x}{4} < 5$; d) $\frac{2x}{5} > -3$; f) $\frac{3x-1}{4} \leq 2$; e) $\frac{7x-3}{5} \geq x$.

145. a) $\frac{3x}{5} > 2$; c) $\frac{2x}{3} < -4$; e) $\frac{6x+1}{2} > 3$; e) $\frac{3}{5}(x-4) > 12$.

b) $\frac{4x}{7} < 4$; d) $0 \geq \frac{17x}{5}$; f) $\frac{4x-11}{5} \leq 0$;

146. a) $(x + 2)^2 > 5x + x^2$;

c) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$;

b) $(x + 3)^2 - 2x \geq 5x + x^2$;

d) $(7 - x)^2 - x^2 \leq x - 11$.

147. a) $(x - 3)^2 \leq x^2 - x$;

c) $1 - (x + 2)^2 < 5 - x^2$;

b) $(x - 2)^2 + 7x < x^2 - 3x$;

d) $(x - 5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

148. *Problemă deschisă.* Scrieți trei inecuații diferite, mulțimea soluțiilor cărora vor corespunde



Fig. 19

intervalului reprezentat pe figura 19.

149. Care este cea mai mare valoare naturală a lui n ce satisface inecuația:

a) $18 - 3(n - 15) > 11n$;

b) $0,3(n - 2) < 1,2 - 0,5(n + 2)$?

150. Care este cea mai mică valoare întregă a lui m ce satisface inecuația:

a) $3m + 8(2m - 1) > 5m + 35$;

b) $m^2 + 4m \leq (m + 3)^2$?

Nivelul B

151. Pentru ce valori ale lui x valorile funcției $y = \frac{2}{3}x - 7$:

a) sunt pozitive;

b) sunt negative.;

c) mai mari decât 5;

d) nu mai mici decât $-1; 3$? $-\frac{1}{3}$?

152. Pentru ce valori ale lui x valorile funcției $y = 5,2 - 2,5x$ sunt:

a) pozitive;

b) negative;

c) nu mai mari decât $7,7$?

153. Pentru ce valori ale variabilei x au sens expresiile:

- a) $\sqrt{3x-6}$; c) $\sqrt{-(2-x)}$; e) $\sqrt{1-5(x+3)}$;
 b) $\sqrt{4-x}$; d) $\sqrt{0,5-0,3x}$; f) $x+\sqrt{2-x}$?

Rezolvați inecuațiile (154–161).

154. a) $3(x+4)+2(3x-2)>5x-3(2x+4)$;

b) $2x-6-5(2-x)\leq 12-5(1-x)$;

c) $x+2<5(2x+8)+13(4-x)-3(x-2)$.

155. a) $y+7>4(2-y)-12(4-2y)+17(y-1)$;

b) $0,2(x-2)-0,3(3-x)\geq 0,4(2x-1)-0,5(x-1)$;

c) $2,5(2-z)-3,5(z-1)\leq 2,5(z+2)-1,5(2-z)$.

156. a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}>6$; c) $x+\frac{x}{2}\geq 15$; e) $\frac{3-y}{4}-\frac{y+2}{5}\geq 2$.

b) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3}>2$; d) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2}>0$;

157. a) $\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14<\frac{x-3}{2}$;

b) $3(2x-4)+5(x-2)-3\leq\frac{9}{2}(x-2)$.

158. a) $\frac{3(2+c)}{2}-6<\frac{7c-2}{3}-\frac{12+4c}{5}$;

b) $\frac{5z-18}{10}-\frac{27-10z}{14}>\frac{3z-12}{5}-\frac{9-4z}{7}$.

159. a) $(x-2)(x-3)>x^2$;

b) $(x+5)(x-7)<x^2$;

c) $(2x-1)(3x+5)\leq 6x^2$;

d) $(3x-2)(3+2x)\geq 6x^2$;

e) $(3x-1)^2\leq 9x(x-2)$;

f) $(3x-2)^2\geq(3x+2)^2$.

160. a) $(z-2)^2<(z-3)(z+5)$;

b) $(y+3)^2\geq y(y-5)$;

c) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$;

d) $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$.

161. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-3x>\sqrt{2}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{x}{2}>\sqrt{2}-1$;

c) $\frac{2x-3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}>0$;

d) $\frac{2-\sqrt{2}}{3x+2}<0$.

162. Pe figura 20 sunt reprezentate graficele funcțiilor $y=\sqrt{x}$ și $y=4-\frac{x}{2}$. Privin-

du-le, indicați mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{x}<4-\frac{x}{2}$.

Geniul – este un procent de inspirație și nouăzeci și nouă de procente de transpirație.

Th. A. Edison

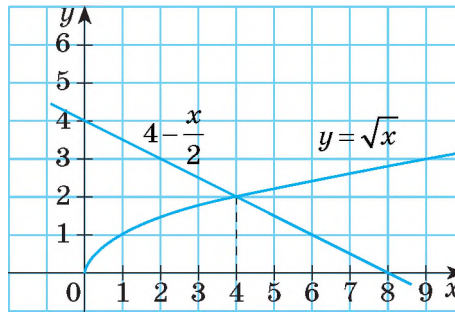


Fig. 20

163. Rezolvați grafic inecuațiile:

a) $\sqrt{x} > \frac{8}{x}$;

b) $\sqrt{x} \geq x^2$;

c) $\sqrt{x} < x - 2$.

164. *Problemă deschisă.* Scrieți inecuația cu variabila x

- a) care nu are nici o soluție;
- b) pe care o satisface fiecare număr real;
- c) pe care o satisface numai numărul 5;
- d) pe care o satisfac toate numerele din intervalul $(-2; 3)$.

165. Niște turiști trebuiau să revină la bază nu mai târziu decât peste 3 h. La ce distanță pot ei pluti după curentul apei cu o barcă cu motor, dacă viteza proprie a ei este de 18 km/h, iar viteza curentului — 4 km/h?

166*. Rezolvați inecuațiile:

a) $(2x - 3)(5x + 2) - (3x - 1)(4x + 2) > 2(1 - x)(1 + x) - x$;

b) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 3)^2 \leq 5x(x + 7) + 10$;

c) $(4x + 1)(3x - 5) + (2x + 3)(5x - 4) < 2x^2 + 5(2x - 1)^2$;

d) $(3x + 1)^2 - (2x - 3)(3 - 2x) \geq (2x + 1)^2 + (3x - 7)(3x + 7)$.

167. Rezolvați inecuațiile duble:

a) $-3 \leq 5x - 1 < 4$;

e) $0,7 < 3x + 1 < 1,3$;

b) $1 < 3x + 4 < 7$;

f) $-3,4 \leq 5 - 2x \leq 1,8$;

c) $-5 \leq 3 - 2x < 1$;

e) $-8 < 7 - 5x < -3$;

d) $-\frac{2}{5} < \frac{4x-1}{3} < \frac{3}{5}$;

e) $-\frac{2}{3} < \frac{2-0,5x}{5} \leq \frac{1}{3}$.

168. Rezolvați inecuațiile duble și indicați cea mai mare soluție întreagă a lor:

a) $2 < 3x - 5 < 7$;

c) $-2 \leq 1 - 3x \leq 4$;

b) $-3 \leq 4 - 2x \leq 3$;

d) $-0,3 < 2,7 + 0,1x < 1,7$.

Rezolvați inecuațiile (169 — 170).

169*. a) $|x| < 5$;

b) $|x - 3| \leq 7$;

c) $|2x - 3| < 1$.

170*. a) $|3x| \leq 1$;

b) $|x + 7| < 3$;

c) $|1 - 5x| \leq 2$.

171*. Pentru fiecare valoare a lui a rezolvați inecuațiile

a) $ax > 5$;

d) $ax > a$;

b) $ax \leq 0$;

e) $a^2x \leq 0$;

c) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$;

f) $a^2 + a - 12 \leq (9 - a^2)x$.

Exerciții pentru repetare

172. 1) Iu. O. Mitropolskii a condus Institutul de matematică al ANȘ al Ucrainei 30 de ani din 1958 până în anul 1988. Urmașul lui a devenit renumitul matematician ucrainean, elevul lui Iu. O. Mitropolskii, numele căruia îl veți afla, dacă veți stabili corect corespondența dintre numerele primului tabel și literele celui de al doilea. În rândul doi din tabelul întâi sunt înscrise abscisele, iar în primul rând al tabelului doi – ordonatele respective ale punctelor, care aparțin graficului funcției.

$$y = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, & x \leq 1, \\ x^2 - 6x + 5, & x > 1. \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	-2	4	3	-3	2,5	-4	1,5	6	-1,5
-5	-4	-3,75	-3	-1,75	0	3	3,75	4	5
E	O	J	M	H	Ï	A	O	C	K

2) Folosind punctele obținute și formula, construiți graficul funcției date.

3) Alcătuiți o problemă asemănătoare despre învățătorul Iu. O. Mitropolskii.

173. Efectuați operațiile: a) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$;

c) $(4,2 \cdot 10^9)^2$;

b) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$;

d) $(3,7 \cdot 10^5) \cdot 2,4 \cdot 10^8$.

174. Construiți graficele ecuațiilor: a) $xy + 6 = 0$; b) $y^2 - x = 0$.

175. Mai înainte 3 kg de carne costau atât, cât acum costă 2 kg. Cu câte procente s-a scumpit carnea?

Comoara succeselor

✓ Pot da exemple de:

– inecuații: $x^2 < 1$ $x + y > 0$

– inecuații liniare $2x < 3$ $-x \geq 5$

✓ Deosebesc inegalități și inecuații identice.

✓ Înțeleg și știu să formulez proprietățile inecuațiilor.

✓ Știu: – să rezolv inecuații liniare cu o necunoscută;

– să scriu soluțiile inecuațiilor.

Aplicăm competențele obținute

- Pentru a înțelege și a însuși tema nouă, ne amintim
- Cum se notează mulțimile $A, C, C, \dots, N, Z, Q, \dots$
 - Ce este submulțime
 Mulțimea K este o parte din mulțimea M . $N \subset Z \subset R$.
 $K \subset M$ K este submulțimea lui M .
 - Pe baza căror proprietăți se rezolvă inecuațiile (p. 32).
 - Cum se reprezintă soluțiile inecuației liniare (p. 33).
 - Ce semnifică înscrisurile $a \leq b$ și $a \geq b$?

$$a \leq b$$

$$a < b \text{ sau } a = b$$

$$a \geq b$$

$$a > b \text{ sau } a = b$$

§ 5

Reuniunea și intersecția mulțimilor. Intervale numerice

Știți deja, că în matematică orice totalități se numesc *mulțimi*. Se cercetează mulțimile, elementele cărora sunt și noțiuni matematice: figuri geometrice (de exemplu, mulțimea patruleterelor), numere (de exemplu, mulțimea numerelor reale), funcții (de exemplu, mulțimea funcțiilor liniare), ecuații (de exemplu, ecuații pătrate), soluțiile inecuațiilor (de exemplu, mulțimea vidă) etc. Afară de ele se cercetează mulțimile, elementele cărora sunt orice obiecte; animale, plante, anotimpurile anului, zilele săptămânii, planete, centrele regionale ale Ucrainei, mijloacele de comunicație, etc. Se întâmplă, că unele mulțimi au elemente comune.

Examinăm, ca exemplu, două mulțimi de «smiley»: mulțimea A , care conține 3 elemente, și mulțimea B , care conține 4 elemente (fig. 21, a).



Fig. 21

Atrageți atenția, fiecare mulțime conține «smiley», care zâmbesc, – ☺. Și «smiley» triști – ☹. L. Dacă mulțimea conține toate elementele comune ale mulțimilor A și B și numai pe ele, atunci această mulțime o numesc intersecție a mulțimilor A și B . În cazul dat intersecția mulțimilor A și B este mulțimea compusă din două elemente (reprezentată pe figura 21, b).

Cu alte cuvinte:

➔ **Intersecție a două mulțimi se numește mulțimea, care conține elementele ce aparțin fiecărei din aceste două mulțimi și numai aceste elemente.**

Se scrie aceasta astfel: $A \cap B$.

Priviți figura 21, c . Mulțimea reprezentată pe ea conține cinci «smiley» diferiți, fiecare fiind element sau al mulțimii A sau al mulțimii B . O astfel de mulțime o numesc *reuniune* a mulțimilor A și B .

➔ **Reuniune a două mulțimi se numește mulțimea care conține fiecare element din fiecare mulțime și numai aceste elemente.**

Se scrie aceasta astfel: $A \cup B$.

Examinăm încă un exemplu. Aflăm reuniunea și intersecția mulțimilor A și B , dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Numerele 2, 4 și 6 sunt elemente ale fiecărei mulțime, de aceea $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, deoarece această mulțime conține fiecare element al mulțimilor A și B și numai elementele lor.

Intersecția și reuniunea mulțimilor este comod de ilustrat cu diagramele lui Euler (fig. 22 și fig. 23). De exemplu, intersecția noțiunilor *dreptunghiuri* și *romburi* este mulțimea *pătratelor* (fig. 22).

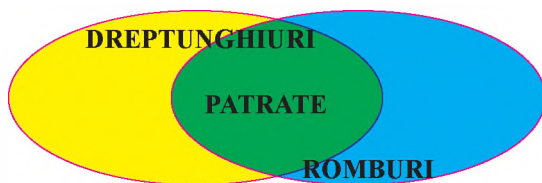


Fig. 22

Reuniunea mulțimilor, a numerelor raționale și iraționale este mulțimea numerelor reale (fig. 23).

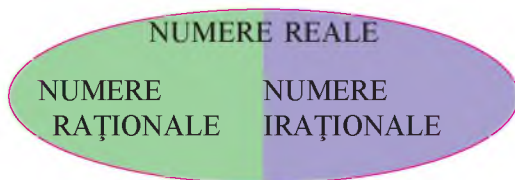


Fig. 23

Un tip particular de mulțimi sunt intervalele numerice, care sunt soluțiile inecuațiilor (vezi, de exemplu, fig. 14 și 15). Noțiunea de interval numeric deseori se aplică și în alte domenii ale matematicii. De aceea este de dorit să deosebim diferite tipuri de intervale numerice și să învățăm a afla intersecția și reuniunea lor.

➔ Intersecție a două intervale numerice se numește partea lor comună.

De exemplu, intersecția intervalelor $(-\infty; 4)$ și $(-3; \infty)$ este intervalul $(-3; 4)$.

Intersecția a două mulțimi se notează prin semnul \cap . Deci, se scrie:

$$(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4).$$

Această egalitate este ilustrată pe figura 24..

Alte exemple.

Figurile 25 – 27 corespund egalităților:

$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$

$$[-3; 5] \cap (-4; -3] = \{-3\};$$

$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \emptyset.$$



Intersecția intervalelor*

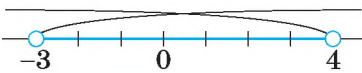


Fig. 24

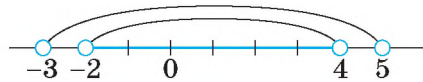


Fig. 25

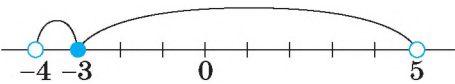


Fig. 26

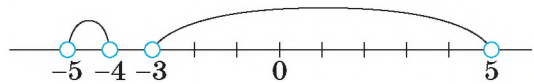


Fig. 27

Egalitatea a doua afirmă că intervalele numerice $[-3; 5]$ și $(-4; -3]$ au numai un număr comun -3 .

Semnul \emptyset indică *mulțimea vidă*. Ultima egalitate denotă că intervalele numerice $(-3; 5)$ și $(-5; -4)$ nu au numere comune.

➔ Reuniune a două intervale numerice se numește mulțimea numerelor care conține fiecare număr al fiecărui interval și numai acele numere.

Reuniunea a două mulțimi se notează prin semnul \cup . Se scrie:

$$(2; 4) \cup (3; 5) = (2; 5).$$

Această egalitate este ilustrată pe figura 28.



Fig. 28

* Pentru a se folosi de codul QR, trebuie de stabilit asigurarea cu programe speciale pe smartphone/planșetă. De exemplu, pentru dispozitive cu sistemul operațional Android trebuie lansat programul Google Play Market și descărcat programul Powerful QR Code Scanner A+ sau orice alta asemănătoare. Descărcarea altor sisteme operaționale, pentru citirea QR-codelor, vor ajuta aplicațiile respective: Windows Mobile – Windows Store, iOS – App Store.

Figurile 29 – 31 corespund egalităților:

$$(-3; 5) \cup [-2; 4) = (-3; 5);$$

$$[-3; 5) \cup (-4; -3] = (-4; 5);$$

$$(-\infty; 4) \cup [-3; 0] = (-\infty; 4).$$

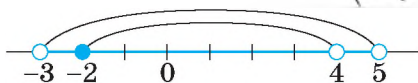


Fig. 29

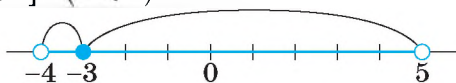


Fig. 30

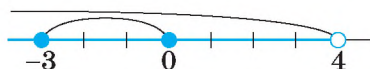


Fig. 31

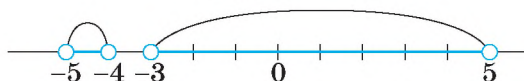


Fig. 32

Reuniunea intervalelor $(-3; 5)$ și $(-5; -4)$ se compune din două intervale despărțite (fig. 32); ea se notează astfel:

$$(-5; -4) \cup (-3; 5).$$

Uneori trebuie de examinat intersecția sau reuniunea a trei sau mai multe intervale numerice.

Intersecția a trei intervale numerice este mulțimea numerelor care conține numerele comune ale acestor trei intervale și numai pe ele. De exemplu,

$$(-4; 5) \cap (-\infty; 6) \cap [-3; 7) = [-3; 5).$$

Reuniunea a trei intervale numerice este mulțimea numerelor care conține fiecare număr al fiecărui interval și numai pe ele. De exemplu,

$$(-4; 5) \cup (-\infty; 6) \cup [-3; 7) = (-\infty; 7).$$

Aceste egalități corespund figurilor 33, a și b.

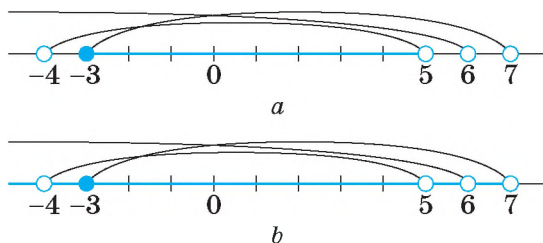


Fig. 33

Deoarece există multe tipuri de intervale numerice, este de dorit a le numi. Dacă a și b sunt numere reale arbitrare, atunci:

$(-\infty; a)$, $(b; \infty)$ — intervale numerice infinite;

$(a; b)$ — interval deschis sau *interval*;

$[a; b]$ — interval închis sau *segment*;

$[a; b)$ — interval deschis din dreapta;

$(a; b]$ — interval deschis din stânga.

Pe figura 34 sunt reprezentate intervale numerice, reprezentarea lor pe axa numerică și inegalitățile respective.

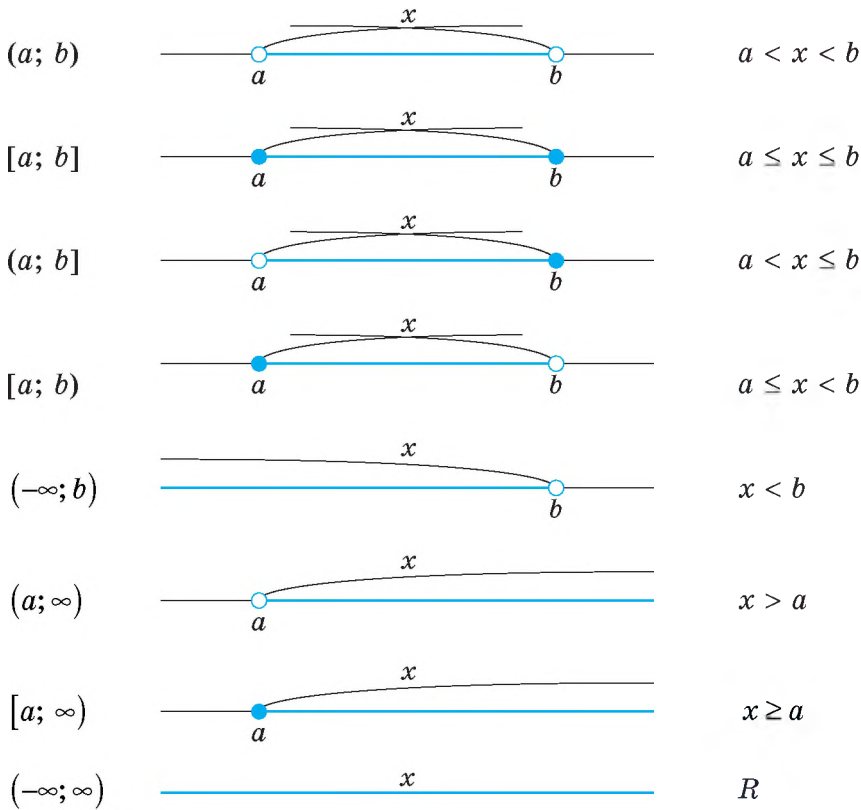


Fig. 34

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Uneori apare necesitatea de a găsi reuniunea soluțiilor a două sau mai multe inecuații. În aceste cazuri se vorbește despre o *totalitate de inecuații*. Ea se scrie cu ajutorul parantezei pătrate:

$$\left[\begin{array}{l} 2x > 17, \\ x - 1 < 3; \end{array} \text{ sau } \left[\begin{array}{l} x > 8,5, \\ x < 4. \end{array} \right.$$

Soluție a totalității de inecuații se numește valoarea variabilei care satisface cel puțin una din inecuațiile date. A rezolva o totalitate de inecuații înseamnă a afla toate soluțiile ei sau a demonstra că ele nu există. Mulțimea soluțiilor totalității de inecuații dată sunt două intervale $(-\infty; 4) \cup (8,5; \infty)$.

Totalitățile se aplică pentru rezolvarea unor tipuri de ecuații și inecuații, mai cu seamă inecuațiilor cu moduli. Orice inecuație de tipul $|M| > a$, unde M este o expresie oarecare, poate fi scrisă în formă de totalitate:

$$\left[\begin{array}{l} M > a, \\ M < -a. \end{array} \right.$$

Verificați-vă

1. Ce este intersecția a două mulțimi? Cu ce simbol se notează?
2. Ce este intersecția a două intervale numerice?
3. Ce este reuniunea a două mulțimi? Cu ce simbol se notează?
4. Ce este reuniunea a două intervale numerice?
5. Dați exemple de intervale, segmente.
6. Dați exemple de intervale numerice infinite.

Efectuăm împreună

1 Aflați intersecția și reuniunea intervalelor numerice $(-6; 8)$ și $(5; \infty)$.

- **Rezolvare.** Reprezentăm intervalele date geometric (fig. 35). Numerele lor comune formează intervalul $(-5; 8)$. Deci, $(-6; 8) \cap (5; \infty) = (5; 8)$. Reuniunea intervalelor numerice date:

$$(-6; 8) \cup (5; \infty) = (-6; \infty).$$

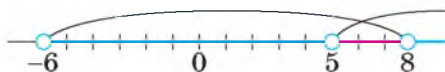


Fig. 35

2 Rezolvați inecuația $|5x - 3| \geq 2$.

- **Rezolvare.** Inecuația $|5x - 35x| \geq 2$ este echivalentă totalității de inecuații

$$\begin{cases} 5x - 3 \geq 2, \\ 5x - 3 \leq -2, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 5x \geq 5, \\ 5x \leq 1, \end{cases} \text{ de unde } \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 0,2. \end{cases}$$

Pe figura 36 este reprezentată mulțimea numerelor, care corespunde acestei totalități și satisface inecuația dată.

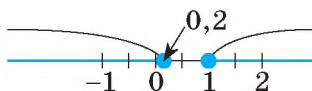


Fig. 36

Răspuns. $(-\infty; 0,2] \cup [1; \infty)$.

Efectuați oral

176. Aflați reuniunea și intersecția mulțimilor A și B , dacă:

- a) $A = \{8, 6, 4, 2, 0\}$ și $B = \{0, -2, -4, -6\}$;
- b) $A = \{\text{Ș, C, O, A, L, Ă}\}$ și $B = \{\text{T, A, B, L, Ă}\}$;
- c) $A = \{\otimes, \boxtimes, \oplus, \ominus, \boxplus\}$ și $C = \{\ominus, \boxtimes, \ominus, \ominus, \boxdot\}$.

177. Aflați reuniunea intervalelor numerice:

- a) $(0; 1)$ și $(0; 2)$;
- b) $(0; 1)$ și $(0,5; 1)$;
- c) $(1; 2]$ și $[2; 5)$;
- d) $(-\infty; 0)$ și $[0; 3)$.

178. Aflați intersecția intervalelor numerice, indicate în exercițiul precedent.
179. Care numere naturale conține intervalul numeric $(1; 8)$? Dar intervalul $[1; 8]$?
180. Care numere întregi conțin intervalele:
 a) $[-3; 4]$; b) $(-3; 4)$; c) $(-3; 4]$; d) $[-3; 4)$?
181. Cu ce este egală intersecția intervalelor $[a; b]$ și $(a; b)$? Dar reuniunea lor??

Nivelul A

182. Reprezentați pe axa de coordonate intervalele numerice:
 a) $(2; \infty)$; b) $(-\infty; 0)$; c) $[-3; \infty)$; d) $(-\infty; -4]$.
183. Scrieți cu simboluri intervalele numerice, care corespund intervalelor reprezentate pe figura 37.

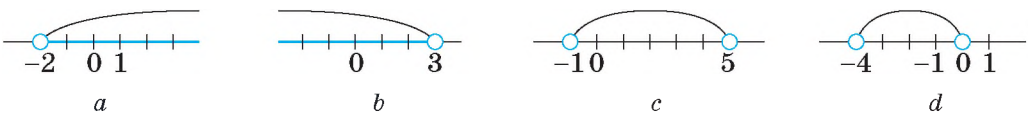


Fig. 37

184. Reprezentați în formă de intervale și pe axa de coordonate mulțimile de numere care satisfac inecuațiile:
 a) $x < 3$; b) $x \geq -2$; c) $x \leq 0$; d) $x > 7$.
185. Care inecuație liniară are mulțimea soluțiilor:
 a) $(3; \infty)$; b) $(-2; \infty)$; c) $(-\infty; 7]$; d) $[-3; \infty)$?
186. **Problemă deschisă.** Compuneți o inecuație liniară, care are mulțimea soluțiilor reprezentate pe figura 37?
187. Reprezentați cu simboluri și grafic mulțimea numerelor reale, care satisfac inegalitățile duble:
 a) $-3 < x < 2$; b) $0 < x < 4$; c) $-5 < x < 0$.
188. Aflați reuniunea și intersecția intervalelor numerice:

- a) $[2; 3]$ și $[3; 5]$; e) $(1; 2)$ și $(-2; 1)$;
 b) $[-5; 0]$ și $[-3; 0]$; d) $(-2; -1)$ și $[-3; -1]$;
 c) $[-5; 7]$ și $[-7; 5]$; f) $(-\infty; 2)$ și $[-2; \infty)$.

189. Copiați tabelul în caiet și înscrieți în el reuniunea și intersecția intervalelor numerice indicate

Nr.	Intervalele	Reuniunea	Intersecția
1	$(0; 3)$ și $(0; 5)$		
2	$(-2; 0)$ și $(-3; 0)$		
3	$(-\infty; 1)$ și $(0; 2)$		
4	$(-2; \infty)$ și $(0; \infty)$		
5	$(-\infty; 1)$ și $(0; \infty)$		

190. Comparați numerele a și b , dacă:

- a) $(-\infty; a) \cup (c; \infty) = R$; c) $(y; a) \cap (c; y) = \emptyset$;
 b) $(a; x) \cap (x; c) = \emptyset$; d) $(a; \infty) \cup (-\infty; c) = R$.

Rezolvați inecuațiile, scrieți răspunsurile în formă de interval (191—192).

191. a) $5x - 3 > 12$; c) $0,5x + 2,6 > 3$; e) $5 - 3x < 2$;
 b) $3x + 5 \geq 11$; d) $1 + 2x < 7$; f) $-1,3x - 9 \leq 4$.
 192. a) $3x \leq 1 - 2x$; c) $5x > x - 2$; e) $2x \leq 7x + 3$;
 b) $-7x < 3x + 5$; d) $-2x > 9 - 5x$; f) $1,1x \geq x - 5$.

Reprezentați pe axa de coordonate mulțimile soluțiilor inecuațiilor (193—195).

193. a) $0,5x - 4(x - 3) > 3x$; c) $0 < y - 0,3(2 - y)$;
 b) $6x < 0,2x - 2(x + 3)$; d) $4 \geq 5z - 0,2(1 - z)$.
 194. a) $0,3 \leq 1,2 + 0,5(x - 2)$; c) $2,7(x + 3) < 7,2(x - 3)$;
 b) $0 < 4,5 + 0,7(2y - 3)$; d) $3,4(2x + 3) < 6(x + 2)$.
 195. a) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; c) $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0,4$;
 b) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$; d) $2y - \frac{1}{2} < 0,2(y + 3)$.

Nivelul B

196. În ce condiție:

- a) $(a; b) \cap (m; n) = (a; b)$; b) $(a; b) \cup (m; n) = (a; b)$?

197. Comparați numerele x și a , y și c , dacă:

- a) $(a; c) \cap (x; y) = (a; c)$; c) $(a; c) \cup (x; y) = (a; c)$;
 b) $(a; c) \cap (x; y) = (x; y)$; d) $(a; c) \cup (x; y) = (a; y)$.

198. Scrieți în formă de inegalități duble corelațiile dintre numerele a , x și y , dacă:

- a) $(a; \infty) \cap (x; y) = (a; y)$; c) $(-\infty; a) \cup (x; y) = (-\infty; y)$;
 b) $(a; \infty) \cup (x; y) = (a; \infty)$; d) $(-\infty; a) \cap (x; y) = (x; a)$.

- 199.** Care numere fracționare cu numitorul 2 conțin intervalul:
 a) (1; 6); b) (2; 3); c) [-5; 0]; d) [-2; 3]?
- 200.** Pentru care valori ale lui x valorile expresiei $1,3 - 0,3x$ aparțin intervalelor:
 a) (-0,2; 2,5); b) [1; 4]; c) (-2,6; 0,2]; d) [-2; 0,1]?
- 201.** Pentru ce valori ale lui x valorile expresiei $3x + 2$ aparțin segmentelor:
 a) [-1; 5]; b) (1; 17); c) [0; 3]; d) (-7; -1]?
- 202.** O croitoreasă lucrează acasă și într-o oră de lucru câștigă 10 unități de bani. Ea trebuie să procure marfă, costul căreia în magazin este 15 unități de bani pentru 1 pachet fără a sta la coadă, iar în magazinul universal această marfă ea poate procura cu 11 unități de bani, dar ea trebuie să stea la coadă în decurs de o oră. Clarificați: a) în ce condiții cumpărarea mărfii scumpe este convenabilă; b) câtă marfă trebuie de procurat, pentru ca să fie rentabil de stat la coadă 1 oră.

Rezolvați inecuațiile și scrieți soluțiile în formă de intervale (203–204).

- 203.** a) $5(x + 2) + 2(x - 3) < 3(x - 1) + 4(x + 3)$;
 b) $3(2x - 1) + 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x + 3)$;
 c) $2(x - 3) + 5(x - 2) > 3(2 - x) - 2(3 - x)$;
 d) $9(x - 2) - 2(3x - 2) \leq 5(x - 2) - 2(x + 5)$.
- 204.** a) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$;
 b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$;
 c) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$;
 d) $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

«Câmpul aplicării matematicii nu are limite diferite de limita cunoașterii».

S. N. Bernștein

- 205.** Luând aria pătratului mai mic de 1, clarificați cărui interval numeric aparține aria figurii vopsite, reprezentate pe figura 38:
 a) [1; 2), b) [2; 3), c) [3; 4), d) [4; 5]?

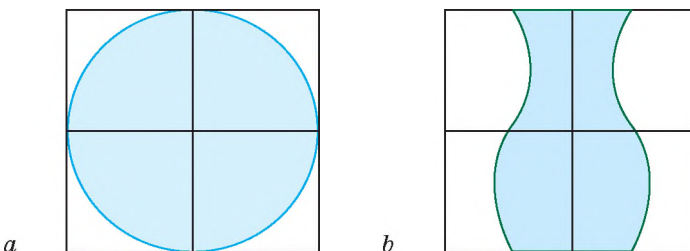


Fig. 38

Aflați reuniunea și intersecția mulțimilor, care sunt soluțiile inecuațiilor (206–207).

206. a) $\frac{5x-1}{4} + \frac{x+1}{2} < 0$ și $\frac{x-3}{5} - \frac{2x-1}{10} \geq 4$;

b) $\frac{3+x}{2} + \frac{2-x}{3} \geq 0$ și $\frac{4x+3}{7} + \frac{x+1}{2} < 2$.

207. a) $3x - \frac{2x-1}{4} > 0$ și $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{4} \geq 2$;

b) $\frac{3-x}{15} - \frac{x-3}{3} > 0$ și $\frac{3x-2}{4} - \frac{5x+1}{3} > 1$.

208. Pe figura 39, a este reprezentată o figură, alcătuită din n cuburi, așezate pe pătratul 4×4 .

1) În care din intervalele $(57; 67)$, $(50; 69)$ sau $[45; 55]$ se conține numărul n ?

2) În care din intervalele $(13, 23]$, $(25, 35]$, $(10, 20]$ se conține numărul m de cuburi, cu care trebuie de completat figura dată, pentru a obține un paralelepiped dreptunghic $4 \times 4 \times 5$?

3) **Problemă deschisă.** Compuneți și rezolvați probleme asemănătoare reprezentând figura, compusă din n cuburi, așezate pe pătratul 5×5 (fig. 39, b).

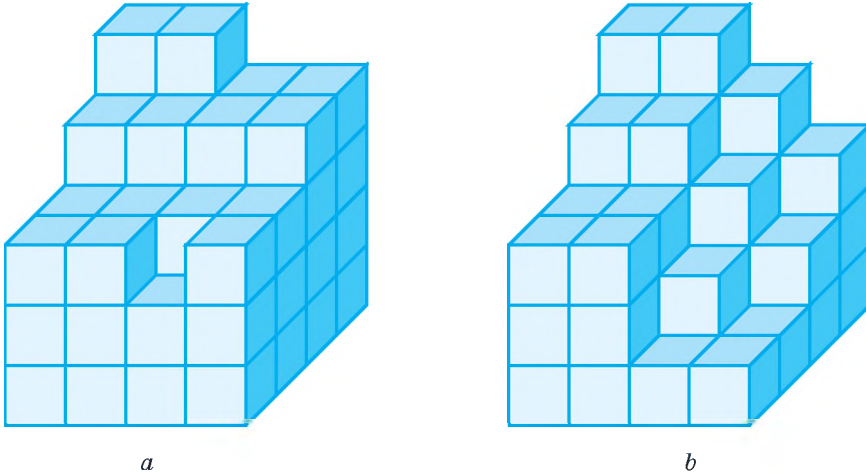


Fig. 39

Rezolvați inecuațiile (209–210).

209*. a) $|x| > 1$;

c) $|3x+1| > 5$;

e) $|x-1| > 3$;

b) $|x+2| > 5$;

d) $|5x| > 2$;

f) $|5-2x| > 3$.

210*. a) $|x+5| > -3$;

c) $|2x-1| > 1$;

e) $|5x+3| \geq 0$;

b) $|1-3x| < -1$;

d) $|x-1| \leq 0$;

f) $|8-4x| < 0$.

Exerciții pentru repetare

211. Aflați valoarea produselor:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{40}$;

c) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{18}$;

b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{50}$;

d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{45}$.

212. Aflați soluțiile ecuațiilor:

a) $5\sqrt{x} = 0$;

c) $6\sqrt{x} - 48 = 0$;

e) $4\sqrt{x} + 9 = 11$;

b) $10\sqrt{x} = 4$;

d) $3\sqrt{x} + 20 = 0$;

f) $7 - 2\sqrt{x} = 12$.

213. *Problema lui al-Carhi.* Aflați aria dreptunghiului, baza căruia este de două ori mai mare decât înălțimea, iar aria numerică este egală cu perimetrul.

214. Obiectul taxării impozitului pe transport sunt automobilele ușoare, care au nu mai mult de cinci ani (inclusiv) din anul producerii și al căror cost mediu pe piață este 1,03 mln gm. Impozitul pe transport în anul 2016 pentru automobilele ușoare plătesc proprietarii după cota de 25 000 gm. pe an pentru fiecare automobil. Stabiliți, ce procent din costul automobilului nou va plăti proprietarul în formă de impozit pe transport în 5 ani, dacă automobilul costă:

a) 1 055 835 gm;

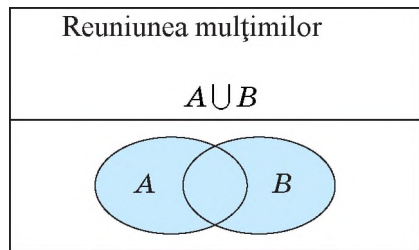
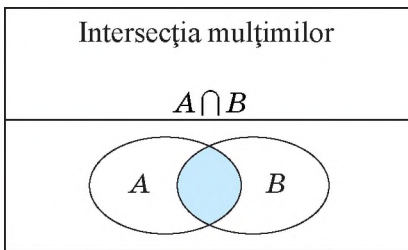
c) 2 051 281 gm;

b) 1 187 844 gm;

d) 2 450 448 gm.

Comoara succeselor

✓ Pot explica ce este intersecția și reuniunea mulțimilor.



✓ Știu a reprezenta intervalele numerice, definite prin inegalități (p. 45)

✓ Știu a reprezenta pe axa de coordonate reuniunea și intersecția intervalelor numerice.

✓ Știu a scrie cu simboluri și cu inegalități intervalele numerice date grafic.

✓ Vreau să știu scrie soluțiile totalității de inecuații în formă de reuniune a intervalelor respective.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Conținutul relațiilor «mai mare», «mai mic», «nu mai mare», «nu mai mic».
- Tipurile inecuațiilor (stricte, nestricte, numerice, cu variabile).
- Proprietățile inegalităților numerice.
- Cum se rezolvă inecuațiile liniare.
- Cum se scriu soluțiile inecuațiilor.
- Ce este intersecția și reuniunea mulțimilor.
- Cum de aflat intersecția și reuniunea intervalelor numerice.

§ 6

Sisteme de inecuații cu o necunoscută

Uneori apare necesitatea de a determina soluțiile comune a câtorva inecuații. Aflăm, de exemplu, soluțiile comune a două inecuații

$$2x - 3 < 5 \text{ și } 2 - 3x < 11.$$

Aflăm acele valori ale lui x care satisfac atât prima, cât și a doua inecuație.

În astfel de cazuri se are în vedere *sistemul de inecuații*.

Sistemul de inecuații, ca și sistemul de ecuații, se scrie cu ajutorul acoladei:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11. \end{cases}$$

➔ **Soluție a sistemului de inecuații cu o variabilă se numește valoarea variabilei care satisface fiecare inecuație din sistemul dat.**

A rezolva sistemul de inecuații înseamnă a afla toate soluțiile ei sau a demonstra că ele nu sunt.

Să rezolvăm sistemul de mai sus, înlocuind treptat fiecare inecuație cu mai simple și echivalente ei:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8, \\ -3x < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -3. \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații va fi intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor care fac parte din el. Aflăm intersecția cu ajutorul axei de coordonate.

Prima inecuație este satisfăcută de toate numerele mai mici decât 4, iar a doua – de toate numerele mai mari decât -3 (fig. 40).

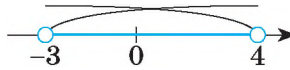


Fig. 40

Ambele inecuații ale sistemului sunt satisfăcute de acele valori ale lui x , care $-3 < x < 4$. Această mulțime de valori ale lui x este intervalul $(-3; 4)$. Numerele -3 și 4 nu aparțin acestui interval.

Să mai rezolvăm două sisteme de inecuații.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 1 > x + 3, \\ 5x - 1 < 6 - 2x. \end{cases}$$

Rezolvare.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 15, \\ -x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x > -6. \end{cases}$$

Ambele inecuații sunt satisfăcute de valorile lui x mai mari decât 5 (fig. 41).

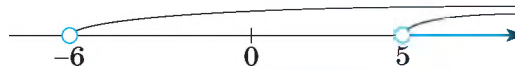


Fig. 41

$$\text{b) } \begin{cases} 2x > x + 4, \\ 5x < 7 - 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ 7x < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < 1. \end{cases}$$

Nu sunt numere care ar fi simultan mai mici decât 1 și mai mari decât 4 (fig. 42).



Fig. 42

Răspuns. a) $(5; \infty)$; b) nu are soluții.

La rezolvarea sistemelor se reduc și astfel, de exemplu, inecuații:

$$\text{a) } (x - 2)(x + 5) < 0; \quad \text{b) } \frac{x - 2}{x + 5} < 0.$$

Rezolvare. a) Produsul a două numere este negativ, dacă unul din aceste numere este negativ, iar al doilea – pozitiv. Deci, rezolvarea inecuației date se reduce la rezolvarea a două sisteme de inecuații:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 5 < 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases}$$

Primul sistem nu are soluții, mulțimea soluțiilor sistemului al doilea este intervalul numeric $(-5; 2)$, care și este soluția inecuației date.

b) Valoarea fracției este negativă, dacă unul din termenii ei este negativ, iar al doilea – pozitiv. De aceea rezolvarea inecuației b este la fel, ca și rezolvarea inecuației a și răspunsul este același.

Răspuns. a) $(-5; 2)$; b) $(-5; 2)$.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Să rezolvăm inecuațiile:

a) $|2x - 3| \leq 5$; b) $|x - 1| > 2x - 5$.

Rezolvare.

a) Inecuația $|2x - 3| \leq 5$ și inecuația dublă $-5 \leq 2x - 3 \leq 5$ sunt echivalente sistemului de inecuații: $\begin{cases} 2x - 3 \leq 5, \\ 2x - 3 \geq -5, \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2x \leq 8, \\ 2x \geq -2. \end{cases}$

Mulțimea soluțiilor ei este $[-1; 4]$.

b) Inecuația $|x - 1| > 2x - 5$ este echivalentă totalității de inecuații:

$$\begin{cases} x - 1 > 2x - 5, \\ x - 1 < -(2x - 5); \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 > 2x - 5, \\ x - 1 < 5 - 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ 3x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x < 2. \end{cases}$$

Inecuația dată o satisfac toate numerele din intervalele $(-\infty; 4)$ și $(-\infty; 2)$. Reuniunea lor este $(-\infty; 4)$.

Răspuns. a) $[-1; 4]$; b) $(-\infty; 4)$.

Verificați-vă

1. Dați exemplu de sistem de inecuații.
2. Ce este soluția sistemului de inecuații cu o necunoscută?
3. Ce înseamnă «a rezolva sistemul de inecuații»?
4. Cum de aflat soluțiile sistemului, dacă sunt cunoscute soluțiile fiecărei inecuații din sistem?

Efectuăm împreună!

1 Rezolvați sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} (z^2 - 2) \cdot 3 \geq 3z^2 - 5, \\ z^2 + 2z \leq (z - 1)(z + 1). \end{cases}$$

- **Rezolvare.** $\begin{cases} 3z^2 - 6 \geq 3z^2 - 5, \\ z^2 + z \leq z^2 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \geq -5, \\ z \leq -0,5. \end{cases}$

Prima inecuație este falsă, de aceea nu are soluții.

Răspuns. Sistemul nu are soluții.

2 Pentru care valori ale lui x sens expresia $\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{5-x}$?

● **Rezolvare.** Expresia are sens cu condiția că:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ 5-x \geq 0, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x > -1, \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Ambele inecuații satisfac acele valori ale lui x , că $-1 < x \leq 5$ (fig. 43).

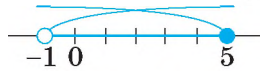


Fig. 43

Răspuns. $(-1; 5]$.

Efectuați oral

215. Oare au soluții sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > -3, \\ x < 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq 2? \end{cases}$

216. Oare satisface sistemul de inecuații $\begin{cases} 2x \geq 0, \\ 3x < 6 \end{cases}$ numărul:

a) 2; b) 3; c) 0; d) 6?

217. Care din inecuațiile: a) $|x| < 3$; b) $|x| - 1 < 0,5$; c) $|x| > 5$; d) $7 - |x| < 0$ este echivalentă cu un sistem de inecuații respective? Iar care cu o totalitate?

Nivelul A

218. Oare este numărul 2 soluție a sistemului de inecuații:

a) $\begin{cases} x-3 < 5, \\ 4x+2 > 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x \geq x+2, \\ 12 < 8x-5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x \geq 2x-3, \\ 3x-1 > 4? \end{cases}$

219. Care din numerele $-1, 0, 1, 2, 3$ satisfac sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 7+x > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3 > 5, \\ 1-x < 0? \end{cases}$

220. Rezolvați sistemul de inecuații și indicați două numere întregi care îl satisfac:

a) $\begin{cases} 2x+7 \geq 0, \\ 3x+6 \geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5 < 0, \\ 3x+9 < 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+1 < 0, \\ 2x+5 > 0. \end{cases}$

Rezolvați sistemele de inecuații (221–224).

221. a) $\begin{cases} 2x+3 > x, \\ 4x-x < 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2-5x < 7, \\ 3x+1 < -8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8 \leq 4x+8, \\ 0 > 3x+6. \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
 222. \text{ a) } \begin{cases} 5y-1 < 2y, \\ 3-2y < y; \end{cases} & \text{ b) } \begin{cases} 4-3y \geq -2y, \\ y-3 \geq 4; \end{cases} & \text{ c) } \begin{cases} 5y-7 \leq 3y, \\ 2-4y < 5. \end{cases} \\
 223. \text{ a) } \begin{cases} 0,5z-2 < z, \\ 0,3-2z > 3z; \end{cases} & \text{ b) } \begin{cases} 0,8x-3 \geq 5, \\ 0,8x+1 \geq 9; \end{cases} & \text{ c) } \begin{cases} 1-1,5x < x, \\ 1+1,5x < 16. \end{cases} \\
 224. \text{ a) } \begin{cases} \frac{x}{2}-1 > \frac{x}{3}, \\ x-1 < 7; \end{cases} & \text{ b) } \begin{cases} 6z+1 < 4z, \\ \frac{z}{2}-\frac{z}{5} > 0,3; \end{cases} & \text{ c) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x-2}{3}, \\ 2x-3 > 0. \end{cases}
 \end{array}$$

225. Indicați câteva valori ale lui a astfel, ca fiecare din sistemele de inecuații a), b), c): 1) va avea o soluție; 2) nu va avea soluții:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \begin{cases} x > a, \\ x < 3; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x < a, \\ x < -3; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x \geq a, \\ -x \geq 2. \end{cases}
 \end{array}$$

Rezolvați sistemele de inecuații (226–228).

$$\begin{array}{ll}
 226. \text{ a) } \begin{cases} 15-3x < 9x-12, \\ 8x-7 > 5x+4; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2(x-3) \leq 5x+7, \\ 3+4x > 3(x-5); \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 12-z < 8z-15, \\ 7z-6 > 6z+4; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 5(x+2) \geq 2x-4, \\ 3(x+3) < 7-8x. \end{cases} \\
 227. \text{ a) } \begin{cases} 3-2(x-1) < 0, \\ 5-3(x-4) > 0; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x \leq 2-3(x+1), \\ 5x \geq 3+(x-4); \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} -4(2x-1) < 3, \\ -5(x-3) \geq 4; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 8(1+x) > 3(2x-1), \\ 5 < 3x-2(8x-3). \end{cases} \\
 228. \text{ a) } \begin{cases} 2x-0,2(x-2) > 4, \\ \frac{x}{2}-6 \leq \frac{x}{8}; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 0,5x+3 \leq 2,5-3x, \\ 5-0,2x \leq 0,2-5x; \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 4-\frac{x-1}{3} \geq x, \\ 7x-1 \geq 48; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 0,4z+2 \geq 3,5-2z, \\ 7-1,3z \geq 0,3-5z. \end{cases}
 \end{array}$$

229. Aflați soluțiile întregi ale sistemelor de inecuații:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2n+3 < 4(3n-5), \\ 8-4n < 7-2(4n-13); \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} n(n+1) > (n+2)(n-2), \\ (n-3)^2 \geq 3-n(2-n). \end{cases}
 \end{array}$$

230. Rezolvați inecuațiile duble

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } -2 < 3x-4 < 5; & \text{d) } 0,7 \leq 3-2x \leq 1,2; \\
 \text{b) } 3 < 2-x < 5; & \text{e) } -1 \leq \frac{1}{3}(6-z) < 1;
 \end{array}$$

c) $0,4 \leq 2x + 1 \leq 0,6$;

f) $-2,5 < \frac{1}{2}(1-3y) \leq 1,5$.

Nivelul B

Rezolvați sistemele de inecuații (231–234).

$$231. \text{ a) } \begin{cases} c^2 - 3 < (c+3)^2, \\ 2c + c^2 > (c-2)^2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5 - (x+3)^2 > (x-2)(1-x), \\ x(x+7) < (x+7)^2 - 7; \end{cases}$$

$$232. \text{ a) } \begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 4, \\ (x-1)^2 > x^2 - 4; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7 + (x+3)^2 < 5x + (x-3)^2, \\ (x-1)(x+2) < (x+1)(x-2); \end{cases}$$

$$233. \text{ a) } \begin{cases} \frac{2y+15}{9} - \frac{1-y}{5} \geq \frac{y}{3}, \\ 2y > \frac{19-2y}{2} - \frac{11-2y}{4}; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4\frac{2}{3}x - 1 < 3x + 3\frac{1}{3}, \\ \frac{3x+12}{5} + 3 > \frac{8+x}{2}; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (z^2 - 2) \cdot 3 \geq 3z^2, \\ z^2 + 2z \leq (z-1)z; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x-1)^2 + 3x \geq (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \geq (x+2)^2 - 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (x-1)^2 \geq x^2 + 7, \\ (x-2)^2 \geq x^2 - 8; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - (x+1)^2 \leq 5 - (1-x)^2, \\ (x-3)(x+3) > (x+7)(x-7). \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{4x+3}{3} - \frac{3x-1}{8} < 1 + \frac{8-x}{6}, \\ \frac{7x+3}{5} + \frac{3x+1}{2} > 4 + \frac{x-4}{2}; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{a}{2} < \frac{5}{3}, \\ 6 - \frac{a+16}{3} < -2a. \end{cases}$$

234.

$$\text{a) } \begin{cases} y + 0,25 \leq \frac{14y+3}{12}, \\ y - \frac{1-3y}{4} \leq \frac{y+8}{6}; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2x-1}{3} - x \leq \frac{11-x}{6} - 2, \\ 3(x-1)^2 + 8x + 2 \leq x(3x-2) + 17. \end{cases}$$

Reprezentați pe planul de coordonate mulțimea punctelor, ordonată cărora satisfac primul sistem, iar abscisa – sistemul al doilea. Ce figură s-a format? Aflați perimetrul și aria figurii obținute.

235. Pentru care valori ale lui x are sens expresia:

a) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$;

c) $\sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$;

b) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+2}$;

d) $\frac{\sqrt{2x+3}}{5} + \frac{5}{\sqrt{3x+2}}$?

236. Pentru ce valori ale lui x valoarea expresiei $4x - 1,5$ aparține intervalului:

- a) $(1; 2)$; b) $[-2; 0]$; c) $(-\infty; 0)$; d) $[3; 7)$?

237. Pentru care c valoarea expresiei $\frac{2}{3}$ aparține intervalului:

- a) $(-\infty; 0)$; b) $[0; \infty)$; c) $(-1; 1)$; d) $[1; 8]$?

Rezolvați inecuațiile (238–241)

- 238.** a) $(x + 2)(x - 7) < 0$; d) $(2y + 8)(7 - 4y) \leq 0$;
 b) $(x - 3)(2x - 5) > 0$;
 c) $(3 - 2z)(1 + z) \geq 0$;
239. a) $(2x + 1)(10x - 7) \geq 0$;
 b) $(5 - 2x)(1 - 3x) \leq 0$;
 c) $(x^2 + 5)(x + 5) > 0$;

- d) $0,5x(x + 3) < 0$;
 f) $(x^2 + 1)(5 - x) \leq 0$.
 d) $x^3 + 2x^2 + x < 0$;
 e) $5x^2 - 3x - 2 \leq 0$;
 f) $x^3 + 3x^2 > 0$.

240. a) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; c) $\frac{3-x}{2x-1} < 0$; e) $\frac{3x+5}{x(x^2+1)} > 0$;

b) $\frac{5-2x}{2x-7} \geq 0$; d) $\frac{(x^2+3)x}{2x-3} \leq 0$; f) $\frac{x^3}{x-3} \leq 0$.

241. a) $\frac{3x-1}{x+5} \leq 0$; c) $\frac{-3x}{7x-14} \leq 0$; e) $\frac{2x+3}{4-x} > 5$;

b) $\frac{5-2x}{2+5x} > 0$; d) $\frac{3x-1}{2x+4} < 2$; f) $\frac{x-4}{3x+2} > 3$.

242. Pentru care valori ale lui n

a) diferența fracțiilor $\frac{1}{n+1}$ și $\frac{1}{n-1}$ este mai mare decât produsul lor;

b) suma fracțiilor $\frac{3}{n-4}$ și $\frac{3}{3-n}$ este mai mică decât produsul lor?

243. Luni dimineața în casieria băncii a Fondului asigurării depozitelor au adus 720 000 gm, care trebuia distribuite până sâmbătă inclusiv. Ce sumă poate distribui casieria zilnic, dacă pe zi suma eliberată de bani nu poate depăși 150 000 gm?

244. Rezolvați sistemele din trei inecuații:

a)
$$\begin{cases} 2x - 1 > 5, \\ 4x - 3 < 37, \\ 3x - 5 > 7; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2 \leq 5x - 8, \\ 2x - 1 \leq 4(2 - x), \\ 2x - 7 < 3(1 - x). \end{cases}$$

245. Rezolvați sistemele de inecuații duble:

a)
$$\begin{cases} 0 < 1 - 2x < 1, \\ 3 < 3x + 4 < 5; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 1 < 5 - 3x < 3, \\ -3 < 3 - 2x < 1. \end{cases}$$

246. Rezolvați inecuațiile:

a) $x^2 \leq 25$; b) $x^2 > 16$; c) $x^2 < 2$.

247. Oare este adevărat, dacă numărul a este pozitiv, atunci inecuația:

a) $x^2 < a^2$ este echivalentă cu inecuația $|x| < a$;

b) $x^2 > a^2$ este echivalentă cu inecuația $|x| < a$?

248. Rezolvați inecuațiile prin două procedee:

a) $|x-1| < 2$; c) $(2x+1)^2 < 9$; e) $(x-2)^2 \geq 25$;

b) $(x-1)^2 < 4$; d) $|x-8| > 1$; f) $(5x-3)^2 > 49$.

Rezolvați inecuațiile (249–250).

249*. a) $|2x+3| < 5$;

c) $|3x-1| \geq 2$;

b) $|x-3|+|x+1| \leq 7$;

d) $|x-2|+|x+1| \geq 3$.

250*. a) $|5-x| > 0,5$;

c) $|4x-3| < x$;

b) $|x-1|+|1-x| > 1$;

d) $|x-7| > |x-1|$.

251*. a) $(x-3)\sqrt{x-2} < 0$;

c) $(5-2x)\sqrt{x^2+3} \geq 0$;

b) $(2x-1)\sqrt{3x-2} > 0$;

d) $(4x-5):\sqrt{3x-1} \leq 0$.

Exerciții pentru repetare

252. Descompuneți în factori trinomialul pătrat:

a) $x^2 - 10x + 21$; c) $2x^2 + 5x - 3$; e) $9a^2 + 3a - 2$;

b) $a^2 + 2a - 15$; d) $c^2 - 11c - 26$; f) $4c^2 + 25c + 25$.

253. Demonstrați, că valoarea expresiei $17^{10} + 3 \cdot 7^{10} - 3 \cdot 7^9 + 17^9$ se divide cu 36.

254. Scrieți numerele în formă standard:

a) 47 000 000; d) 0,00000407; e) $3,7 \cdot 100^5$;

b) 308 000 000; e) $803 \cdot 10^9$; e) $0,42 \cdot 10^{-7}$;

c) 0,000000039; f) $0,067 \cdot 10^7$; ж) 2000^5 .

255. Construiți graficele ecuațiilor

a) $2x + 3y = 6$; b) $xy = 12$; c) $x^2 + y^2 = 4$; d) $y^2 - x^2 = 0$.

Comoara succeselor

- ✓ Pot da exemple de sisteme de inecuații cu o variabilă.
- ✓ Înțeleg ce este soluția sistemului de inecuații cu o variabilă.
- ✓ Știu:
 - să rezolv sisteme de inecuații cu o variabilă.
 - să scriu soluțiile sistemelor de inecuații

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și însuși bine tema nouă, ne amintim:

Dacă diferența $a - b$ e număr pozitiv, atunci numărul a e mai mare decât b

Media aritmetică

Valoarea expresiilor

$$(a + b)^2 \geq 0$$

pentru orice a și b ,

Dacă diferența $a - b$ e număr negativ, atunci numărul a e mai mic decât b

Media geometrică \sqrt{ab}

$$(a + b)^2 + c > 0$$

pentru $c > 0$ și orice a și b .

§ 7 | Demonstrarea inegalităților*

Uneori apare necesitatea de a demonstra că inegalitatea dată cu variabile este adevărată pentru toate valorile indicate ale variabilelor. Aceasta se poate realiza pe baza definițiilor noțiunilor «mai mare» și «mai mic»:

$a > b$, dacă diferența $a - b$ este un număr pozitiv.

Exemplul 1. Demonstrați, că pentru fiecare valoare reală a lui a

$$a^2 + 2 > 2a.$$

Demonstrație. $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1$. Pentru orice valoare reală a lui a valoarea expresiei $(a - 1)^2$ este nenegativă, $(a - 1)^2 + 1$ este pozitivă. Deci, totdeauna $a^2 + 2 > 2a$.

Exemplul 2. Demonstrați, că pentru a și b pozitivi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$$\text{Demonstrație } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Expresia formată $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ pentru orice a și b pozitivi nu este negativă. Deci,

dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Egalitatea are loc numai atunci, când $a = b$.

* Pentru acei care doresc să știe mai mult

Remarcă. Expresia $\frac{a+b}{2}$ se numește *medie aritmetică* a numerelor a și b , iar expresi \sqrt{ab} este *media geometrică* a lor. De aceea inegalitatea demonstrată se citește astfel:

Media aritmetică a două numere pozitive nu este mai mică decât media geometrică a lor.

Exemplul 3. Argumentați, că pentru a, b și c pozitivi

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Demonstrație. Deoarece media aritmetică a două numere pozitive nu este mai mică decât media geometrică a lor, avem:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Înmulțind termenii acestor inegalități, obținem:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca},$$

sau

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Demonstrarea afirmației cu variabile este argumentarea că ea este adevărată pentru toate valorile admisibile ale variabilei. *Contestarea afirmației* este argumentarea că ea este falsă.

A contesta inegalitatea cu variabile înseamnă a arăta, că inecuația dată este falsă cel puțin pentru o valoare a variabilei.

Exemplul. Constați inegalitatea $(n+1)^2 > n^2$.

Contestarea. Când $n = -1$ inegalitatea are forma $0^2 > 1^2$. Ultima inegalitate este falsă. Deci, și inegalitatea dată este falsă.

Exemplul care contestează o afirmație oarecare se numește *contra exemplu*.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Afară de media aritmetică și media geometrică, savanții examinează media pătrată a doua sau mai multe numere. *Medie pătrată* a câtorva numere se numește numărul egal cu rădăcina pătrată din media aritmetică a pătratelor lor.

Media pătratelor numerelor a și b sau x, y și z este:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

Media pătratelor a două numere totdeauna este mai mare decât media aritmetică

a lor. $\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}$

Încercați să argumentați, că pentru orice numere pozitive a și b totdeauna:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ilustrați corectitudinea acestei inegalități duble, folosind figura 44.4.

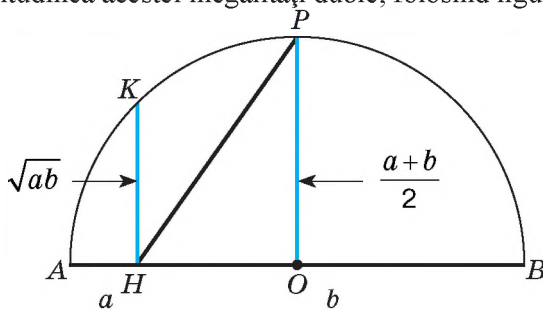


Fig. 44

Verificați-vă

1. Ce înseamnă «a demonstra afirmația»? Dar a o contesta?
2. Ce înseamnă «a demonstra inegalitatea»?
3. Formulați definiția mediei aritmetice și mediei geometrice a două numere.
4. Comparați media aritmetică și media geometrică a două numere pozitive.

Efectuăm împreună

Argumentați: dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$. Formulați această afirmație.

- **Demonstrație.** Dacă $a < b$, atunci $2a < a + b$, de unde $a < \frac{a+b}{2}$.

Dacă $a < b$, atunci $a + b < 2b$, de aici $\frac{a+b}{2} < b$.

Unind ambele cazuri obținem: dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$

Media aritmetică a două numere reale diferite este mai mare decât cel mai mic din numerele date și mai mică decât cel mai mare din ele.

Efectuați oral

256. Aflați mediile aritmetice ale numerelor:

- a) 1,3 și 2,7; b) 38 și 0; c) 409 și -409; d) 10, 20 și 30.

257. Aflați mediile geometrice ale numerelor:

- a) 50 și 8; b) 1000 și 40; c) 0,2 și 0,8; d) 5^{11} și 5^{-7} .

Argumentați inegalitățile (258 — 259).

258. a) $(a - 2)^2 + 3 > 0$; b) $(1 - 2a)^2 + 1 > 0$; c) $(a + 2)^2 > 4a$.

259. a) $a^2 + 6a + 10 > 0$; b) $9 - 12a + 4a^2 \geq 0$; c) $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

Nivelul A

Argumentați inegalitățile (260 -203)

260. a) $a^2 + 2a + 2 > 0$;

b) $a^2 - 2a + 5 > 0$;

c) $2a^2 + 4a + 5 > 0$;

d) $2a^2 + a + 1 > 0$.

261. a) $a^2 + 3 > 2a$;

b) $a^2 + 5 > 4a$;

c) $2a^2 + 1 > 2a$;

d) $3a^2 + 1 > 2a$.

262. a) $(2a - 1)(2a + 1) < 4a^2$;

b) $(a - 3)^2 > a(a - 6)$;

c) $a^2 + 65 > 16a$;

d) $a^4 + 82 > 18a^2$.

263. a) $(a + 1)^2 \geq 4a$;

c) $\text{---} \leq 1$;

b) $99 + 20a < (a + 10)^2$;

d) $\frac{a^2 + 4}{4} \geq a$.

264. Demonstrați, că pentru fiecare valoare negativă a lui x :

a) $(x - 1)(x - 2) > 0$;

b) $x^2 + 9 > 10x$;

c) $(x - 3)(3 - x) < 0$;

d) $(2 - x)(x - 3) < 0$.

265. Demonstrați, că pentru fiecare c pozitiv:

a) $c + \frac{1}{c} \geq 2$;

b) $9c + \frac{1}{c} \geq 6$;

c) $(c + 1)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 4$.

Nivelul B

Demonstrați inegalitățile (266 – 267).

266. a) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$;

b) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.

267. a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

268. Argumentați, că suma pătratelor a oricăror două numere reale nu este mai mică decât îndoiul produs al lor.

269. Ce este mai mare: a) suma pătratelor a două numere pozitive sau pătratul sumei lor; b) suma pătratelor a două numere negative sau pătratul sumei lor?
270. Argumentați, că semisuma pătratelor a două numere reale nu este mai mică decât pătratul semisumei lor.
271. Din toate dreptunghiurile, care au arii egale, cel mai mic perimetru are pătratul. Argumentați.
272. Din toate triunghiurile dreptunghice cu ipotenuze egale cea mai mare arie o are triunghiul isoscel. Argumentați.
273. Din toate dreptunghiurile, înscrise într-o circumferință dată, pătratul are cea mai mare arie. Argumentați.

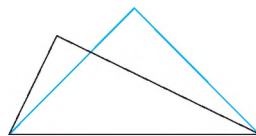


Fig. 45

Demonstrați inegalitatea pentru orice valori reale ale variabilei (274–278).

274. a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$; b) $(a + b + 1)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + 1)$.
275. a) $a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$; b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.
276. a) $8a^2 + 14ab + 7b^2 + 1 > 0$; c) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;
 b) $2a^2 + 5c^2 + 2ac + 1 > 0$; d) $\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$.
277. a) $|a| + |b| \geq |a + b|$; b) $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Demonstrați veridicitatea inegalităților numerice (278–281).

278. a) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} < 2$; b) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3$.
279. a) $\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}} < 3$; b) $\sqrt{2 - \sqrt{12 - \sqrt{12}}} > 3$.
280. a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1$; b) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Exerciții pentru repetare

281. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{4}{x+3} = -2x$;

b) $\frac{3}{x+3} + \frac{5x}{x-1} = 1$.

282. Una din rădăcinile ecuației $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ este egală cu -2 . Aflați celelalte rădăcini ale ecuației date.

283. Minereul conține 60 % de fier. Din el s-a topit fontă care conține 98 % de fier. Din câte tone de minereu se vor topi 1000 t de fontă??

284. Este dată funcția $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 2x - 4}$.

1) Calculați $f(9)$, $f(99)$, $f(999)$.

2) Aflați domeniul de definiție al funcției $f(x)$.

285. Stabiliți corespondența dintre formulele (1– 4), care definesc unele funcții, și graficele lor respective (A – D).

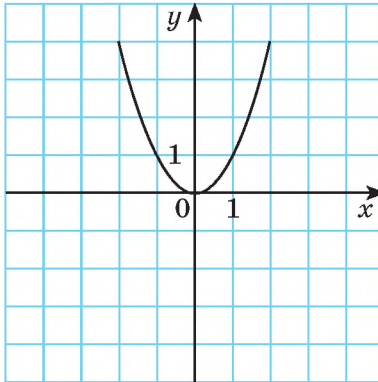
1 $y = 0,5x$

2 $y = \sqrt{x}$

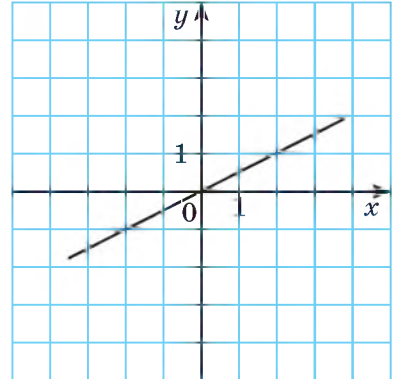
3 $y = x^2$

4 $y = 2 - x$

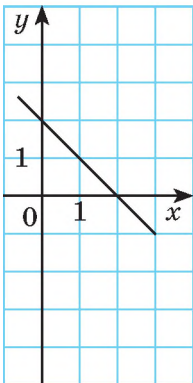
A



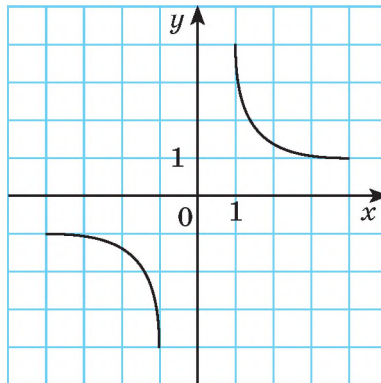
B



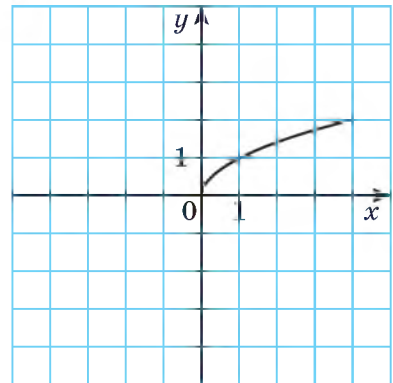
C



D



F



Comoara succeselor

- ✓ Știu, că $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
- ✓ Știu, că a contesta inegalitatea cu variabile, înseamnă a arăta, că inecuația dată este falsă cel puțin pentru o valoare a variabilei.
- ✓ Știu să aplic definiția noțiunilor «mai mare» și «mai mic» pentru demonstrarea inegalităților cu variabile.

SARCINI PENTRU LUCRUL INDEPENDENT*

Varianta I

1°. Rezolvați inecuația $3x - 5 < 13$.

2. Rezolvați sistemele de inecuații:

$$a^\circ) \begin{cases} 2x + 3 > 7, \\ x - 5 \leq 1; \end{cases} \quad b^\bullet) \begin{cases} 3 - \frac{x-2}{2} \leq x, \\ 5(x-2) < 8x+1. \end{cases}$$

3°. Rezolvați inecuația dublă $-1 \leq 2x - 3 < 5$.

Varianta II

1°. Rezolvați inecuația $4x - 7 < 13$.

2. Rezolvați sistemele de inecuații:

$$a^\circ) \begin{cases} 3x - 7 < 5, \\ 2x + 1 \geq 3; \end{cases} \quad b^\bullet) \begin{cases} 2 - \frac{x-1}{3} \geq x, \\ 7(x-3) > 5x-2. \end{cases}$$

3°. Rezolvați inecuația dublă $-3 < 2c + 1 \leq 7$.

Varianta III

1°. Rezolvați inecuația $5x - 4 > 26$.

2. Rezolvați sistemul de inecuații:

$$a^\circ) \begin{cases} 5x - 2 \leq 18, \\ 2x + 3 > 5; \end{cases} \quad b^\bullet) \begin{cases} 4 - \frac{2-x}{3} > x, \\ 2(x-4) \geq 5x-2. \end{cases}$$

3°. Rezolvați inecuația dublă $-2 \leq 3n + 4 < 10$.

Varianta IV

1°. Rezolvați inecuația $7x + 3 > 38$.

2. Rezolvați sistemele de inecuații:

$$a^\circ) \begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 5x + 2 \leq 27; \end{cases} \quad b^\bullet) \begin{cases} 3 - \frac{x-4}{2} < 3x, \\ 5(x-1) \geq 3x-1. \end{cases}$$

3°. Rezolvați inecuația dublă $-5 < 2m - 1 \leq 7$.

* Aici și mai departe:

° — nivelul începător și mediu;
 • — nivelul mediu;
 •• — nivelul înalt.

DATE ISTORICE

Oamenii știau a determina, care număr din două este mai mare, iar care – mai mic, încă pâna la era noastră. În «Bazele» lui Euclid (sec. III p.e.n.) este demonstrată inegalitatea care în prezent se scrie astfel:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Atunci a și b se considerau nu numere pozitive arbitrare, dar lungimile segmentelor; demonstrarea se propunea pur geometrică și fără semnele inegalității.

Savantul din Grecia Antică Arhimede (sec. III p. e. n.) a demonstrat inegalitatea dublă, care în prezent se scrie astfel:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Matematicianul englez T. Garriot primul în a. 1631 a propus semnele «<» și «>». Cu toate că semnele inegalității au fost propuse mai târziu decât semnul egalității ele se foloseau mai devreme, deoarece le tipăreau folosind litera V, iar semnul «=» pe vremea aceea încă nu era.

Matematicianul englez Dj. Vallis în a. 1670 a propus semnele inegalităților nestrictе, însă liniuța el o scria deasupra semnului inegalității. Aceste semne se foloseau rareori. În a.1734 matematicianul francez P. Baucher a propus semnele «≤» și «≥» în forma uzuală.

În matematica contemporană și științele aplicative se folosesc inegalitățile dintre medii, mai cu seamă dintre media aritmetică și media pătrată a câtorva numere reale. De exemplu, dacă $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt numere reale arbitrare, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Sunt cunoscute inegalități care au numiri proprii.

Inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a n numere pozitive se numește *inegalitatea lui Cauchy*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Inegalitatea lui Buneakovski:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Oghiusten Lui Cauchy – matematician francez, membru al Academiei din Paris, al societății Regale din Londra și al altor multe academii de știință. A lucrat în diferite domenii ale matematicii (aritmetica și teoria numerelor, algebra, analiza matematică, ecuațiile diferențiale, mecanica teoretică și cerească, fizica matematică). În genere el a scris și a publicat mai mult de 800 de lucrări. Colecția completă a lucrărilor lui editată de AȘ din Paris Oghiusten Lui Cauchy conține 27 de volume.



Oghiusten Lui Cauchy
(1789–1857)

Dintre matematicienii ucrainieni ai sec. XIX problemele referitoare la inegalități cel mai mult le-a cercetat **V. I. Buneakovski**. El s-a născut în or. Bar (în prezent e în regiunea Vinița), a făcut studiile în Germania, Franța. A susținut teza de doctorat și a obținut titlul de doctor în matematică în Paris (1825). Inegalitatea demonstrată de el uneori o atribuie matematicianului neamț G. Șvarț, dar V.I.



V.I. Buneakovski
(1804–1889)

Buniacovski a demonstrat-o cu 16 ani mai devreme. El a studiat caracteristicile statistice ale populației, contingentul posibil al armatei ruse, plauzibilitatea mărturiilor în procesul judiciar, eroarea în observări, etc.

Din a. 1858 a fost expertul principal al guvernului în problemele statisticii și asigurării.

Există și alte inegalități care au nume proprii: *inegalitatea lui Gelder*, *inegalitatea lui Minkowski*, *inegalitatea lui Young* ș.a. Aceste inegalități se aplică în diferite domenii ale matematicii superioare. Cu ele cu timpul vă veți familiariza, dacă veți deveni specialiști în domeniul matematicii.

Inegalitățile se aplică și în geometrie. De exemplu, $\triangle ABC$ există atunci și numai atunci, când se realizează trei inegalități:

$$AB < BC + CA; BC < CA + AB \text{ și } CA < AB + BC.$$

Esențialul în capitol

Numărul a este mai mare decât numărul b , dacă diferența $a - b$ este număr pozitiv; numărul a este mai mic decât numărul b , dacă diferența $a - b$ este număr negativ.

Orice semn din $<$, $>$, \leq și \geq se numește *semn al inegalității*.

Semnele $<$ și $>$ se numesc *semne stricte ale inegalității*. Semnele \leq și \geq le numesc semne nestrictate ale inegalității.

Înscrierea $a \leq b$ semnifică, că $a < b$ sau $a = b$.

Înscrierea $a \geq b$ semnifică, că $a > b$ sau $a = b$.

Două expresii unite cu semnul inegalității ($<$, $>$, \leq sau \geq) formează o inegalitate. Inegalitatea se numește *numerică* dacă ambele părți ale ei sunt expresii numerice.

Proprietățile inegalităților numerice

Dacă: $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$;

$a < b$ și c un număr arbitrar, atunci $a + c < b + c$;

$a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$;

$a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$;

$a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$;

$a < b$, $c < d$ și a, b, c, d sunt numere pozitive, $ac < bd$.

Inecuațiile de formă $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$ se numesc *inecuații duble*. Ele se aplică pentru evaluarea valorilor mărimilor și calculelor aproximative.

Deoarece dacă $a < x < b$ și $c < y < d$, atunci avem:

$a + c < x + y < b + d$, $a - d < x - y < b - c$,

$ac < xy < bd$, $a : d < x : y < b : c$.

Ultimele două inecuații duble sunt adevărate cu condiția că numerele a și c sunt pozitive.

$2x + 17 < 1$, $12 - 3x \geq 2$ sunt exemple de inecuații cu o variabilă x .

Inecuațiile sunt asemănătoare cu ecuațiile. Soluție a inecuației se numește un astfel de număr care satisface inecuația dată, adică o transformă în inegalitate numerică adevărată.

A rezolva inecuația înseamnă a afla toate soluțiile ei sau a demonstra că nu are soluții.

Mulțimea soluțiilor cel mai des formează *intervale*. De exemplu, mulțimea soluțiilor inecuațiilor $2x + 7 < 15$ și $8 + 3x \geq 2$ sunt intervalele respective $(-\infty; 4)$ și $[-2; \infty)$.

Câteva inecuații cu aceeași variabilă formează *sistemul de inecuații* când trebuie de aflat soluțiile lor comune. A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a găsi toate soluțiile ei sau a arăta că ele nu există.

Clarificăm realizările

Sarcini în formă de teste Nr. 1

- 1** Selectați inegalitatea adevărată:
 a) $0,2 > \sqrt{2}$; b) $-1 < -2$; c) $5 \geq 5$; d) $2^{-1} \leq 2^{-2}$.
- 2** Suma inegalităților $5 > 3$ și $2 > -1$ este inegalitatea:
 a) $4 > 5$; b) $4 < 5$; c) $7 > 2$; d) $7 \geq 2$.
- 3** Indicați inegalitatea strictă:
 a) $15 \geq 5$; b) $2 \leq 2$; c) $7 > -2$; d) $-10 \geq 10$.
- 4** Inecuația $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ o satisface numărul:
 a) 2; b) 1; c) 0; d) -1.
- 5** Câte numere întregi satisfac inecuația dublă $-1 \leq x \leq 1$:
 a) unul; b) două; c) trei; d) patru?
- 6** Alegeți intervalul căruia îi aparține numărul $\sqrt{3}$:
 a) $[2; 3]$; b) $(-\infty; \sqrt{3})$; c) $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; d) $(-\sqrt{3}; \infty)$.
- 7** Alegeți inecuația care nu are soluții:
 a) $|x| \geq -3$; b) $x < -3$; c) $7 - |x| < 0$; d) $x^2 < 0$.
- 8** Sistemului de inecuații $\begin{cases} 2x \leq 3, \\ x+1 \leq 2 \end{cases}$ are mulțimea soluțiilor:
 a) $(-\infty; 1]$; b) $[1, 5; \infty)$; c) $(-\infty; 1, 5]$; d) $[2; 3]$.
- 9** Care cel mai mare număr este soluție a inecuației $x^2 - 2x \geq x^2 + 2$:
 a) 2; b) 1; c) -1; d) -2?
- 10** Aflați domeniul de definiție al funcției $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$:
 a) $(-\infty; 0]$; b) $(-\infty; 0)$; c) $[0; \infty)$; d) $(0; \infty)$.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 1

1 Comparați fracțiile:

$$\text{a}^\circ) \frac{5}{7} \text{ i } \frac{3}{7}; \quad \text{b}^\circ) -\frac{4}{3} \text{ i } -\frac{4}{3}; \quad \text{c}^\circ) \frac{5}{6} \text{ i } \frac{6}{7}; \quad \text{d}^\circ) -\frac{7}{13} \text{ i } -\frac{13}{27}.$$

2 Se știe că $x < y$. Comparați:

$$\begin{array}{ll} \text{a}^\circ) x - 3 \text{ și } y - 3; & \text{c}^\circ) -2x \text{ și } -2y; \\ \text{b}^\circ) 1,3x \text{ și } 1,3y; & \text{d}^\circ) 5 - x \text{ și } 5 - y. \end{array}$$

3 Se dă $7 < b < 12$, $2 < c < 5$. Evaluați valoarea expresiei:

$$\text{a}^\circ) 3b; \quad \text{b}^\circ) bc; \quad \text{c}^\circ) 3b + 2c; \quad \text{d}^\circ) \frac{3b+2c}{bc}.$$

4 Rezolvați inecuația:

$$\begin{array}{ll} \text{a}^\circ) 2x - 5 < 7; & \text{c}^\circ) 4 - (x - 2)^2 > x - x^2; \\ \text{b}^\circ) 3x + 7 < 7x + 3; & \text{d}^\circ) \frac{x-3}{5} - \frac{2x-1}{10} \geq 4. \end{array}$$

5* Aflați reuniunea și intersecția mulțimilor A și C , dacă:

$$\begin{array}{l} \text{a)} A = (2; 5), C = (1; 3); \\ \text{b)} A = (-3; \infty), C = (-\infty; 3]; \\ \text{c)} A = (-\infty; \pi), C = [\sqrt{10}; \sqrt{11}]. \end{array}$$

6 Rezolvați sistemele de inecuații:

$$\text{a}^\circ) \begin{cases} 6x - 7 \geq 4x - 3, \\ 3x + 16 \geq 8x - 4; \end{cases} \quad \text{b}^\circ) \begin{cases} x(x+7) \geq (x-7)^2, \\ (3-x)(x+3) \geq 0, 5x - x^2. \end{cases}$$

7* Aflați domeniul de definiție al funcției:

$$y = \sqrt{2x+3} - \frac{9}{\sqrt{9-2x}}.$$

8* Rezolvați inecuațiile:

$$\text{a)} |5x - 3| \leq 1; \quad \text{b)} |3x - 15| > 9.$$

9** Rezolvați ecuația:

$$|x+1| + |x-2| = 3.$$

10** Demonstrați inegalitatea când $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$(a+2c)(c+2b)(b+2a) > 16\sqrt{2}abc.$$

Capitolul 2



BOGOLIUBOV M.M.

(1909 – 1992)

Matematician și fizician-teoretician ucrainean cu renume mondial, fondatorul școlilor științifice a mecanicii nelineare (Kiev), a fizicii statistice și a teoriei cuantice a câmpului.

Academician al ANȘ a Ucrainei și al multor academii de științe străine. Laureat al Premiului internațional Denni Hienemann în domeniul fizicii matematice.

«Și oare nu există câțiva Bogoliubovi fiecare dintre ei fiind cel mai mare specialist în domeniul său?»

N. Wiener

Anii copilăriei și adolescenței ai lui Bogoliubov M. M. sunt un exemplu că o persoană tânără, în pofida împrejurărilor, datorită stăruinței și capacității de muncă poate realiza succese remarcabile și obține recunoștință mondială.

PREMIUL în numele lui M. M. BOGOLIUBOV

Se decernează pe Secția matematicii ANȘ a Ucrainei pentru lucrări științifice remarcabile în domeniile matematicii și fizicii teoretice.

Fondată de Academia Națională de Științe a Ucrainei în anul 1992

LAUREAȚII PREMIULUI:

Bariahtar V. G.
Mitropolski Iu. O.
Sâtenko O. G.
Șarkovski O. M.
Ahiezer O. I.
Koroliuk V. S.
Șârkov D. V.
Parasiuk O. S.
Berezanski Iu. M.
Samoilenko A. M.
Skripnik I. V.
și alții

Funcție de gradul doi

Funcția este un model matematic avantajos pentru studierea multor procese. Studiarea diferitor fenomene și procese cu ajutorul funcțiilor este una din metodele principale ale științei actuale. Funcția care poate fi definită prin formula $y = ax^2 + bx + c$ este de *gradul doi*. Graficul ei este *parabola*. Astfel de funcții se aplică des în diferite domenii ale științei. Ele sunt îmbinate cu ecuațiile și inecuațiile pătrate.

În acest capitol vom studia astfel de teme:

§ 8	Funcții Functions	§ 12	Inecuațiile pătrate Quadratic Inequalities
§ 9	Proprietățile funcțiilor Functions Properties	§ 13	Sisteme de ecuații de gradul al doilea Second Degree Equations Systems
§ 10	Transformarea graficelor funcțiilor Functions Graphs Transformations	§ 14	Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuații Compilation of Systems of Equations Task Solving
§ 11	Funcția de gradul doi Quadratic Function		

Aplicăm competențele obținute

- Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:
- Ce este funcția, domeniul de definiție și codomeniul funcției.
- Metodele de definire ale funcției:

prin formulă	grafic	tabel	cu cuvinte, etc.
--------------	--------	-------	------------------
- Ce este graficul funcției și cum se construiește el.
- Tipurile funcțiilor

liniară	liniară	pătrată	altele
$y = kx + b$	$y = \frac{k}{x}$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$

§ 8 Funcții

Funcția este una din cele mai importante noțiuni ale matematicii și practicii. Dacă vom cugeta bine, atunci putem înțelege, că noi toți trăim în lumea funcțiilor – schimbărilor, dependențelor și relațiilor. Cu trecerea timpului ziua schimbă noaptea, primăvara – iarna. Sub ritmul acesta se acomodează toate vietățile, printre altele și omul. Graficul de lucru cel mai răspândit, orarul lecțiilor, lucrul centrelor de distracție și chiar programele radioului și televiziunii se compun în dependență de ora zilei și anotimpurile anului.

Există numeroase exemple ale dependențelor și relațiilor dintre variabile în diferite domenii ale științei:

- *geometrie* – formula $S = 4\pi R^2$ exprimă dependența ariei suprafeței sferice (S) de raza ei (R);

fizică – formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ stabilește corespondența dintre lungimea pendulului l și perioada oscilației lui (T). Deci, T este o funcție de l (aici $\pi \approx 3,14$, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ sunt constante);

- *conomie* – formula $T_R = p \cdot Q$ definește dependența venitului total (T_R) care obține întreprinderea de prețul (p) mărfii vândute și volumul vânzării (Q).

Amintim cunoștințele fundamentale despre funcție.

Dacă fiecărei valori a variabilei x dintr-o mulțime oarecare D îi corespunde o singură valoare a variabilei y , atunci această corespondență se numește **funcție**.

Aici x se numește *variabilă independentă* sau *argument*, y – *variabilă dependentă* sau funcție, iar mulțimea D – *domeniu de definiție* al funcției date. Mulțimea tuturor valorilor ale lui y care poate primi funcția se numește *mulțimea valorilor* sau *codomeniul* funcției și de notează prin litera E .

Grafic al funcției se numește mulțimea tuturor punctelor din planul de coordonate, abscisele cărora sunt egale cu valorile argumentului, iar ordonatele – cu valorile respective ale funcției.

Funcția cel mai des se definește în formă de formule, tabele sau grafice. De exemplu, formula $y = x^2$ definește funcția, care exprimă corespondența dintre numere și pătratele lor. Dacă domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea numerelor întregi din intervalul $[-3; 3]$, ea poate fi definită în formă de tabel:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graficul acestei funcții sunt șapte puncte (fig. 46). Domeniul ei de definiție este mulțimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, iar codomeniul – mulțimea $E = \{0, 1, 4, 9\}$.

Dacă domeniul de definiție al funcției $y = x^2$ este $[-2; 2]$, atunci graficul ei este o parte din parabola reprezentată pe figura 47, iar codomeniul – segmentul $[0; 4]$.

Graficul funcției $y = x^2$ definită pe mulțimea tuturor numerelor reale \mathbf{R} este toată parabola (fig. 48). Domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea numerelor reale \mathbf{R} , iar codomeniul este intervalul $[0; \infty)$.

Reamintim încă câteva exemple de funcții.

$y = kx$ – **proporționalitatea directă** ($k \neq 0$). Graficul ei este o dreaptă care trece prin originea de coordonate. Domeniul de definiție al ei este mulțimea \mathbf{R} , codomeniul – tot mulțimea \mathbf{R} .

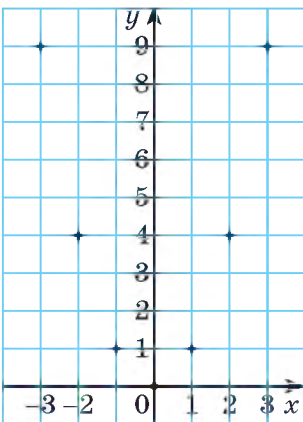


Fig. 46

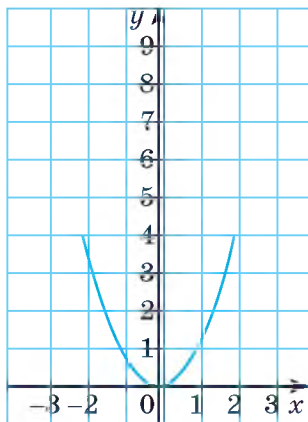


Fig. 47

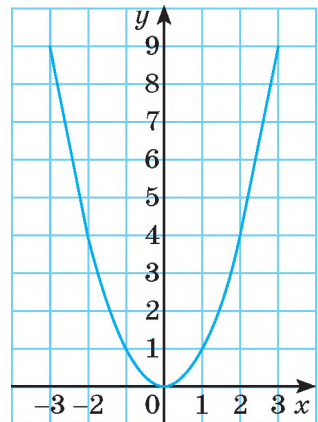


Fig. 48

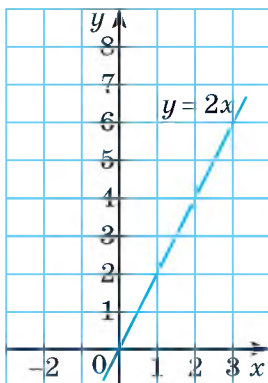


Fig. 49

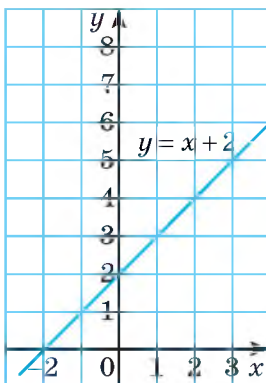


Fig. 50

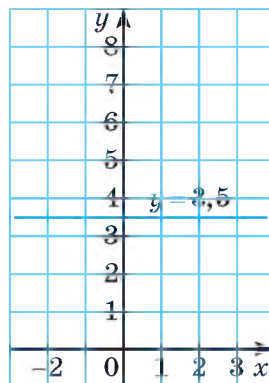


Fig. 51

De exemplu, graficul funcției $y = 2x$ este reprezentat pe figura 49.

$y = kx + b$ – **funcția liniară**. Graficul ei este o dreaptă care nu-i paralelă axei y . Domeniul de definiție este mulțimea \mathbf{R} , codomeniul – \mathbf{R} , dacă $k \neq 0$. Dacă $k = 0$ codomeniul este un număr b . Exemple: $y = x + 2$ (fig. 50), $y = 3,5$ (fig. 51).

$y = \frac{k}{x}$ – **proporționalitatea inversă** ($k \neq 0$). Graficul ei este o hiperbolă. Dacă $k > 0$, ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele I și III ale planului de coordonate, dacă $k < 0$, – în sfereturile II și IV. Domeniul de definiție al funcției $y = k/x$ este mulțimea \mathbf{R} fără numărul 0, codomeniul – aceeași mulțime $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Exemple: $y = \frac{3}{x}$ fig. 52, a), $y = -\frac{2}{x}$ (fig. 52, b).

Graficul funcției $y = x^3$ este reprezentat pe figura 53. Domeniul de definiție și codomeniul ei este mulțimea \mathbf{R} .

Graficul funcției $y = \sqrt{x}$ este o ramură a parabolei (fig. 54). Domeniul de definiție al ei este $[0; \infty)$, codomeniul $[0; \infty)$. Dacă variabila y depinde de x , atunci se scrie $y = f(x)$ (se citește: igrec este egal cu fe de iks). Simbolul $f(a)$ indică valoarea funcției $y = f(x)$, dacă $x = a$. Fie, de exemplu, funcția definită prin formula $y = 3x^2 - 5$. Se scrie și așa: $f(x) = 3x^2 - 5$. În acest caz $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

Remarcă. Dacă $y = f(x)$, atunci se spune că y este funcție de x , adică variabila y o numesc funcție. Dar de cele mai multe ori sub funcție se înțelege nu o variabilă dependentă, dar corespondența dintre două variabile. De asemenea, nu orice corespondență, dar cea univocă, când fiecărei valori a variabilei x îi corespunde o singură valoare a funcției y .

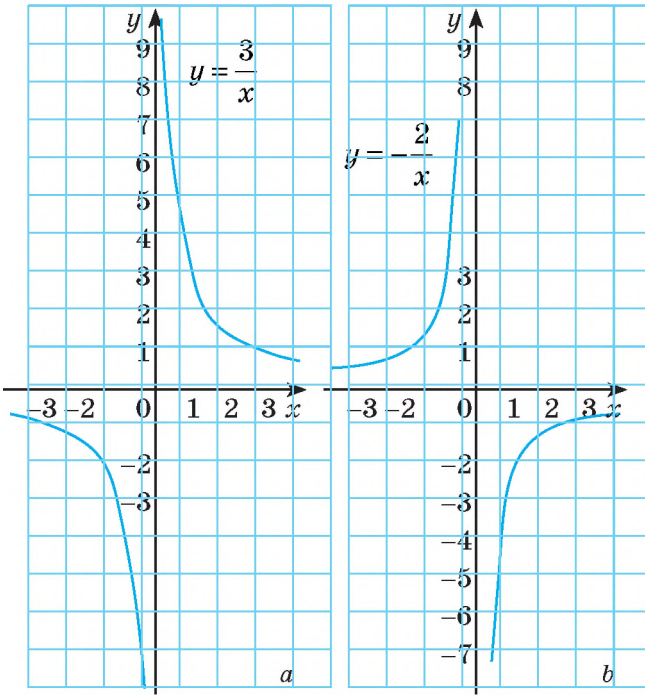


Fig. 52

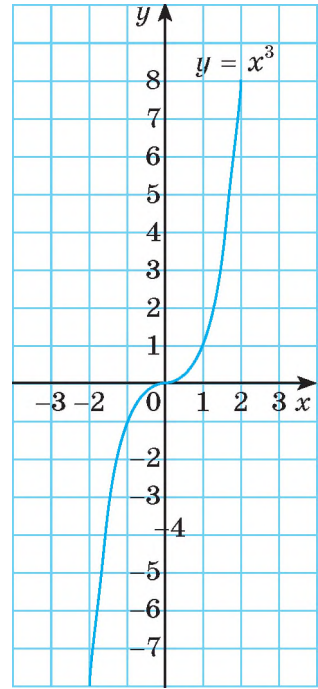


Fig. 53

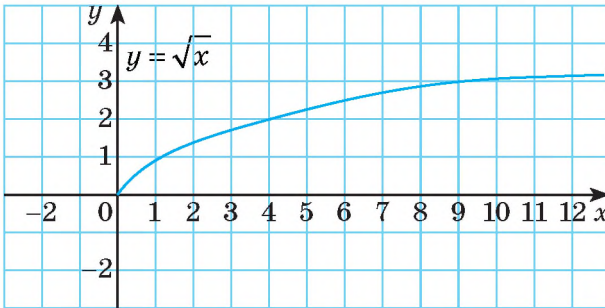


Fig. 54

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Unele funcții pe părți separate ale domeniului de definiție se definesc prin diferite formule. De exemplu, funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 0, \\ x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Valorile acestei funcții pentru valori negative ale argumentului se află folosind formula $f(x) = x^2$, iar pentru pozitive – după formula $f(x) = x$. Graficul ei este reprezentat pe figura 55.

Există și alte funcții care se marchează cu simboluri noi.

Parte întreagă a numărului real x se numește cel mai mare număr întreg $[x]$ care nu este mai mare decât x . Graficul funcției $y = [x]$ este reprezentat pe figura 56.

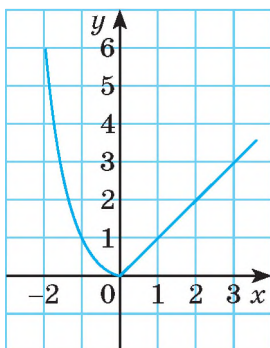


Fig. 55

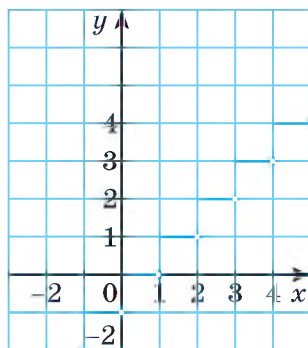


Fig. 56

Parte fracționară a numărului real x se numește diferența dintre numărul dat și partea lui întreagă: $\{x\} = x - [x]$. Graficul funcției $y = \{x\}$ este reprezentat pe figura 57.

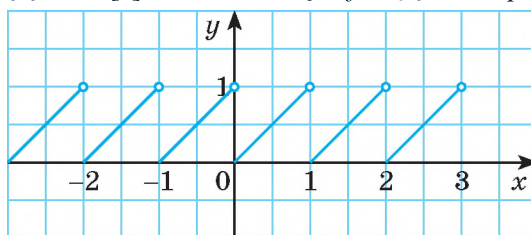


Fig. 57

Verificați-vă

1. Formulați definiția funcției.
2. Ce este argumentul funcției? Dați exemple.
3. Cum se poate defini funcția?
4. Ce este domeniul de definiție și codomeniul funcției?
5. Care funcții se numesc liniare? Care sunt proprietățile lor?
6. Numiți proprietățile proporționalității inverse.
7. Ce se numește graficul funcției?

Efectuăm împreună

1. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^3 + 1$. Aflați: $f(-3)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$.
- **Rezolvare.** $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$, $f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$,
 $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$.
- Răspuns.** $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$.

2. În care puncte graficul funcției $y = x^2 - 3x + 2$ intersectează:

a) axa y ; b) axa x ?

• **Rezolvare.** a) Dacă graficul intersectează axa y într-un punct oarecare, atunci abscisa acestui punct este egală cu 0, iar coordonatele satisfac ecuația care definește funcția.

Avem: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Deci, graficul funcției intersectează axa y în punctul cu coordonatele (0; 2).

b) Dacă graficul intersectează axa x într-un punct oarecare, atunci ordonata acestui punct este egală cu 0, iar coordonatele punctului satisfac ecuația care definește funcția.

Avem: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Deci, graficul funcției intersectează axa x în punctele cu coordonatele (1; 0) și (2; 0).

Răspuns. a) (0; 2); b) (1; 0) și (2; 0).

Efectuați oral

286. Declinați cuvintele: a) *funcție*; b) *argument*; c) *grafic*.

287. Alcătuiți formula funcției care exprimă corespondența dintre numere și: a) cuburile lor; b) numerele opuse lor; c) numerele inverse lor; d) modulele lor.

288. Cum este graficul funcțiilor, definite prin formulele:

a) $y = 3x + 1$;

c) $y = 3$;

e) $y = \frac{x}{3}$;

b) $y = x^2$;

d) $y = \frac{3}{x}$;

f) $y = \sqrt{x}$?

289. Oare este adevărat că:

a) graficul funcției $y = \frac{2}{3}x - 5$ este și graficul ecuației $2x - 3y = 15$;

b) graficul funcției $y = \sqrt{x}$ este și graficul ecuației $y^2 = x$? De ce?

290. Graficul cărei funcții trece prin originea de coordonate:

291. Aflați domeniul de definiție al funcțiilor:

a) $y = 3x - 2$;

c) $y = -2,5$;

e) $y = \sqrt{2x - 4}$;

b) $y = 4 - x^2$;

d) $\frac{1}{x(x-1)}$

f) $y = \frac{1}{x}\sqrt{5-2x}$.

Nivelul A

292. Funcția este definită prin formula $y = \frac{1}{2}x^2$ pe domeniul de definiție $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Definiți-o tabelar și grafic.

293. Construiți graficul funcției $y = \frac{1}{2}x^2$ pe segmentul $[-4; 4]$. Aflați codomeniul ei.

294. Funcția $y = \frac{1}{2}x^2$ este definită pe mulțimea \mathbf{R} . Aflați codomeniul ei. Oare aparține graficului acestei funcții punctul $A(-100; 5\ 000)$?

295. Funcția este definită în formă de tabel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Definiți-o prin formulă. Indicați domeniul de definiție și codomeniul ei.

296. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^2 + 10$. Calculați: $f(2)$, $3f(2)$, $2f(3)$, $0,5f(10)$.

297. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^3 - 5$. Aflați:

$$f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(7), f\left(\frac{1}{2}\right), f(\sqrt{3}).$$

298. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^2 - x$. Calculați:

a) $f(-2) + f(-1)$; b) $f(0) + f(1)$; c) $f(2) - f(30)$.

299. $f(x) = x^2 - x + 1$. Aflați:

a) $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$; b) $f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7)$.

300. Pe figura 58 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$.

Aflați:

a) domeniul de definiție și codomeniul funcției date;

b) $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;

c) pentru care valori ale argumentului $f(x) = 4$, $f(x) = 3$;

c) coordonatele punctelor, în care graficul funcției intersectează axele de coordonate;

d) pentru care x valoarea funcției $f(x)$ e cea mai mare, cea mai mică?

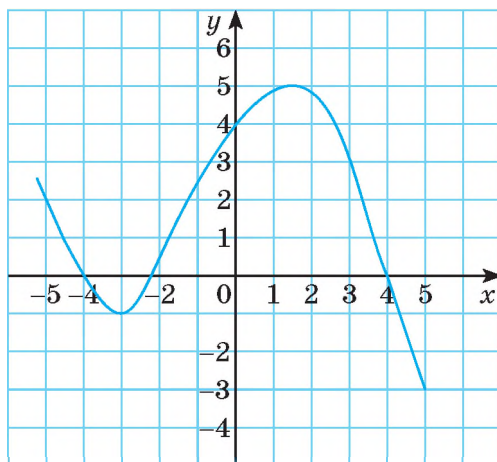


Fig. 58

Aflați domeniul de definiție al funcțiilor (301 – 302).

301. a) $y = 3x - 2$; c) $y = \sqrt{x+5}$; e) $y = \sqrt{x^2+1}$;
 b) $y = \frac{3}{x-2}$; d) $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$; f) $y = \frac{10}{x^2+1}$.

302. a) $y = 5x - 1$; c) $y = \sqrt{4-x}$; e) $y = \sqrt{x+1}$;
 b) $y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}$; d) $y = \frac{2x}{5-x}$; f) —

303. Construiți graficul funcțiilor:

a) $y = 3x - 2$; c) $y = -3x$; e) $y = 5$;
 b) $y = 0,5x - 1$; d) $y = 7 - 2x$; f) $y = 3 - x$.

304. Construiți graficul funcțiilor definite prin formule:

a) $f(x) = 2 - 3x$; c) $f(x) = 3 - 2x$;
 b) $f(x) = -1$; d) $f(x) = 0,5x$.

305. Aflați codomeniul funcțiilor:

a) $f(x) = 7$; b) $f(x) = 2x$; c) $y = x^2$.

306. Oare aparține graficului funcției $y = \sqrt{25-x^2}$ punctul $A(3; 4)$? Punctul $B(-4; 3)$?

307. Oare trece graficul funcției $y = x(x-3)$ prin punctele $A(2; -2)$; $B(-1; 4)$; $C(1,5; -2,25)$?

308. Care din punctele $A(-2; -6)$; $B(1,5; 8)$; $C(-3; 4)$; $D(-2; -6)$; $E(3; 4)$ aparțin graficului funcțiilor:

a) $y = -10x - 26$; b) $y = \frac{12}{x}$; c) $y = \sqrt{x^2+7}$?

309. În care puncte graficul funcțiilor:

a) $y = 2,5x$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 2(x - 1)$?

310. Temperatura scării lui Celsius, lui Fahrenheit și Kelvin marcăm respectiv

t_C , t_F , t_K . Formule de transformare au formă: $t_F = \frac{9}{5}(t_C + 32)$, $t_K = t_C + 273$.

Pentru 10 valori arbitrare ale temperaturii după Celsius aflați valorile respective ale temperaturii după Fahrenheit și Kelvin. Datele introduceți-le în tabel. Reprezentați grafic dependența obținută.

Nivelul B

311. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^2$. Este oare adevărat, că pentru fiecare a se realizează egalitatea $f(-a) = f(a)$?

312. Funcția este definită prin formula $f(x) = x^3$. Oare pentru fiecare valoarea a argumentului ei x se realizează egalitatea $f(-x) = -f(x)$?

313. Aflați $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, dacă funcțiile sunt definite prin formulele:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = 3x^3 - 2$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$.

314. Funcția este definită prin formula $y = \frac{6x}{1+x}$ pe mulțimea numerelor naturale a primei zeci. Definiți-o în formă de tabel.

315. Funcția este definită prin formula $y = 2\sqrt{x+5}$ pe domeniul de definiție $D = \{-4; -2,75; -1; 1,75; 4; 11\}$. Definiți-o în formă de tabel și grafic.

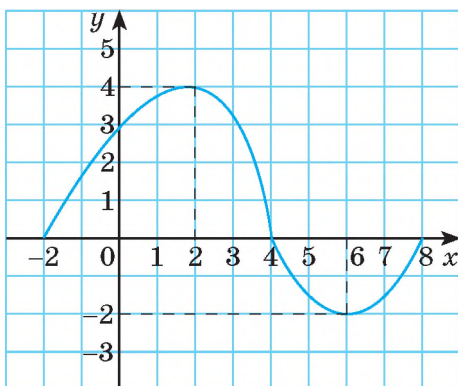
316. Fără a construi graficul ecuației $9x - 2y = 14$ aflați punctul, ordonata căruia este egală cu abscisa.

317. Fără a construi graficul funcției $y = x^2 - 2$ aflați punctul, abscisa și ordonata căruia sunt numere opuse.

318. Fiecărui număr natural îi corespunde numărul opus lui. Oare este această relație o funcție? Dacă e funcție, definiți-o prin formulă și grafic.

319. Fiecărui număr întreg îi corespunde numărul egal lui. Oare este această relație o funcție? Dacă este funcție, care este graficul ei?

320. Funcția $y = f(x)$ este definită grafic (fig. 59). Pentru care valori ale argumentului:



a) $f(x) = 0, f(x) \leq 0$;

b) $f(x) = -2, f(x) > -2, f(x) \leq -2$;

c) $f(x) = 3, f(x) \geq 3, f(x) < 3$;

d) $0 \leq f(x) \leq 3$;

e) $-2 < f(x) < 4$?

Fig. 59

321. În care puncte graficele funcțiilor intersectează axa x și axa y .

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$;

c) $y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$;

e) $y = x^2 - 2x$;

b) $y = x - \frac{4}{7}$;

d) $y = x^2 - 4$;

f) $y = 6 - 5x - x^2$?

Construiți într-un sistem de coordonate graficele funcțiilor (322 –

322. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ și $y = x^2 - 2$.

323. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$ și $y = \sqrt{x} - 3$.

324. $y = |x|$, $y = |x| + 11$ și $y = |x| - 2$.

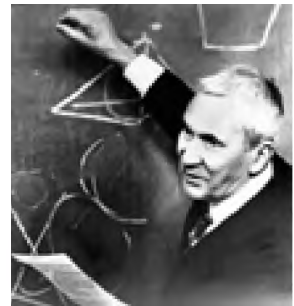
325. Pentru care valoare a lui m graficul funcției $y = \sqrt{x+m}$ trece prin punctul $P(5; 5)$? Oare trece acest grafic prin punctul $Q(-4; 4)$?

326. Se știe, că punctul $A(3; 1)$ aparține graficului fiecărei funcții $y = f(x)$. Stabilitți corespondența între funcțiile $f(x)$ (1 – 4) și punctele (A – E), prin care trece graficele acestor funcții.

- | | |
|--------------------------|------------|
| 1 $f(x) = x^2 + m$ | A (4; 8) |
| 2 $f(x) = m - 2x$ | B (12; 4) |
| 3 $f(x) = \frac{m}{x+1}$ | C (12; -7) |
| 4 $f(x) = \sqrt{3x} + m$ | D (1; 2) |
| | F (1; 5) |

327. Construiți graficul funcțiilor:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| a) $y = \frac{4}{x}$; | c) $y = \frac{12}{x}$; | e) $y = 0,5x^2$; |
| b) $y = -\frac{3}{x}$; | d) $y = 2x^2$; | f) $y = x^2 - 1$. |



A. M. Kolmogorov

328*. Aflați domeniul de definiție al funcțiilor:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5}}$; | d) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$; |
| b) $y = \frac{-\sqrt{x^3 + 5x}}{4}$; | e) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$; |
| c) $y = \frac{1}{x^3 + 5x^2}$; | f) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$. |

«Matematica este aceea, care ajută oamenii să dirijeze natura și pe sine însuși».

A. M. Kolmogorov

329*. Problema lui A. M. Kolmogorov. Care condiție suplimentară trebuie aplicată pe valorile lui x în formula $f(x) = 1$ pentru ca să obținem definirea funcției $f(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2$?

330*. Construiți graficul funcțiilor:

- | | |
|---|--|
| a) $y = \begin{cases} 4, & \text{dacă } x < -2, \\ x^2, & \text{dacă } -2 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ | b) $y = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 1, \\ 3-x, & \text{dacă } 1 < x < 4, \\ -1, & \text{dacă } x \geq 4; \end{cases}$ |
|---|--|

331*. Construiți graficul funcțiilor:

a) $y = |2x - 3|$; c) $y = |x + 1| - |x|$; e) $y = \frac{6}{|x|}$;

b) $y = 2|x| - 3$; d) $y = \frac{|x|}{x}$; f) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.

332*. Funcția cererii mărfii: $Q_D = 9 - p$. Funcția propunerii mărfii: $Q_S = 2p - 6$. Aici Q_D este volumul cererii și Q_S - volumul propunerii (mln. bucăți pe an), p este prețul (unități de bani). Determinați prețul echilibrat (cererea este egală cu propunerea) și volumul vânzării. Cum va influența asupra prețului echilibrat al mărfii micșorarea cererii cu 20 %?

Exerciții pentru repetare

333. Comparați valoarea expresiilor:

a) $3\sqrt{2}$ și $\sqrt{20}$; c) $\sqrt{13}$ și $2\sqrt{3}$; e) $4\sqrt{5}$ și 9;
b) $3\sqrt{5}$ și $\sqrt{44}$; d) $3\sqrt{7}$ și 8; f) $5\sqrt{2}$ și 7.

334. Funcționarului N într-o lună de lucru i s-a calculat leafa în mărimea de 5430 gm. Din toate calcule se reține impozitul pe venit al persoanelor fizice, care constituie 18 %, și alte rețineri în mărime de 2,5 %. Câți bani va primi funcționarul N într-o lună? Ce sumă vor alcătui reținerile într-un an?

335. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{2x+3}{3x+1} > 0$; b) $\frac{x-6}{1-x} > -1$; c) $\frac{9-2x}{x} \geq 1$.

Comoara succeselor

√ Știu, cum se notează funcțiile.

√ Pot da exemple de funcții studiate:

liniară $y = 2x + 3$;
proporționalitate directă $y = -0,5x$;
proporționalitate inversă $y = k/x$;
altei $y = x^2$.

√ Știu a calcula valoarea funcției într-un punct.

√ Știu a construi graficele funcțiilor și știu denumirea graficelor:

$y = kx$
dreaptă

$y = kx + b$
dreaptă

$y = k/x$
hiperbolă

$y = x^2$
parabolă

√ Doresc să învăț mai detaliat a caracteriza funcția după graficul ei.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Care caracteristici ale funcției se pot determina după graficul ei: domeniul de definiție, codomeniul, valori pozitive, valori negative, etc.

- Tipurile funcțiilor, graficele lor și proprietățile principale:

liniară invers proporțională de gradul al doilea

$$y = kx + b$$

$$y = k/x$$

$$y = x^2$$

§ 9 Proprietăți ale funcției

Pentru a studia procesele și fenomenele mediului ambiant, la început trebuie să ne învățăm să stabilim trăsăturile caracteristice ale modelelor matematice respective. În primul rând asta se referă la funcții.

Descriind proprietățile funcțiilor, de obicei, se începe cu domeniul de definiție al ei – se indică toate valorile pe care le poate primi argumentul.

Dacă funcția este definită printr-o formulă, iar despre domeniul de definiție al ei nimic nu se spune, atunci se consideră că el este același ca și domeniul valorilor admisibile al variabilei, care este în această formulă.

Dacă funcția este definită grafic, domeniul de definiție al ei este proiecția graficului ei pe axa x ; codomeniul este proiecția graficului ei pe axa y (fig. 60). De exemplu, domeniul de definiție al funcției $y = x^2$ este mulțimea tuturor numerelor reale \mathbf{R} , codomeniul – intervalul $[0; \infty)$. Domeniul de definiție și codomeniul funcției $y = \sqrt{4 - x^2}$ sunt segmentele $[-2; 2]$ și $[0; 2]$ (fig.61).

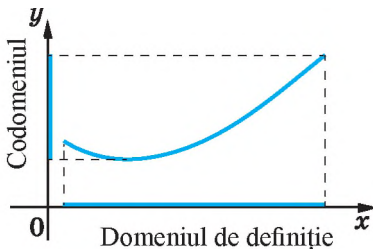


Fig. 60

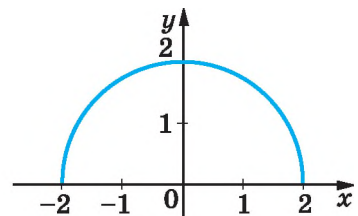


Fig. 61

Examinăm funcția $y = f(x)$, graficul căreia este reprezentat pe figura 62. Când $x = -2$, $x = 3$ și $x = 5$, valorile funcției sunt egale cu zero.

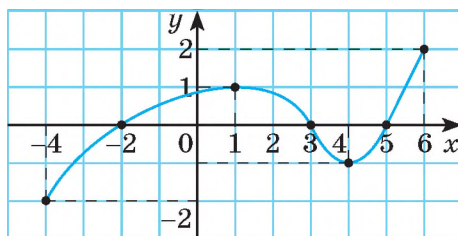


Fig. 62

➔ **Valorile argumentului, pentru care valoarea funcției este egală cu zero, se numesc *zerourile funcției*.**

Zeroul funcției $y = x - 6$ este numai o valoare x : numai când $x = 6$, valoarea funcției este egală cu zero.

Pentru a afla zerourile funcției $y = f(x)$ trebuie rezolvată ecuația $f(x) = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt zerourile funcției.

Funcția $y = f(x)$ graficul, căreia este reprezentat pe figura 62, are valori pozitive, zero și negative. Pe intervalul $(-2; 3)$ valorile ei sunt pozitive. Acesta-i intervalul cu semnul constant: toate valorile funcției pe el au semnul constant «+». Și intervalul $(5; 6)$ este cu semnul constant «plus». Intervalele $(-4; -2)$ și $(3; 5)$ de asemenea sunt cu semnul constant: toate valorile funcției $y = f(x)$ sunt negative.

Intervalele domeniului de definiție al funcției, pe care funcția nu-și schimbă semnul (adică are valori numai pozitive sau numai negative), se numesc *intervale cu semn constant*. Pe intervalele acestea funcția nu intersectează axa absciselor.

Atrageți atenția la graficul funcției din figura 62. Pe segmentul $[-4; 1]$ graficul «merge la deal»: la mărirea valorilor lui x din acest interval valorile respective ale funcției se măresc.

Dacă $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$.

Se spune că pe intervalul $[-4; 1]$ funcția $y = f(x)$ *crește* (sau este *creșcătoare*). Creșcătoare este și pe intervalul $[4; 6]$.

Pe intervalul $[1; 4]$ graficul funcției «merge la vale»: la mărirea valorilor argumentului valorile respective ale funcției se micșorează. Se spune că pe acest interval funcția $y = f(x)$ *descreește* (sau este *descrescătoare*).

➔ **Funcția se numește *crecătoare* pe un interval oarecare, dacă fiecărei valori mai mari ale argumentului din acest interval îi corespunde valoarea mai mare a funcției.**

➔ **Funcția se numește *descrescătoare* pe un interval oarecare dacă fiecărei valori mai mari a argumentului din acest interval îi corespunde valoarea mai mică a funcției.**

Există funcții care cresc (sau descresc) pe tot domeniul de definiție. De exemplu, funcțiile $y=2x$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$ sunt crescătoare, iar $y=-2x$, $y=-\sqrt{x}$ sunt descrescătoare.

Caracterizând proprietățile funcției, deseori se menționează în care puncte ea are valoarea cea mai mare, în care – cea mai mică. Funcția, graficul căreia este reprezentat pe figura 62, valoarea cea mai mare are în punctul $x=6$; ea este egală cu 2. Valoarea cea mai mică -2 această funcție o primește în punctul $x=-4$.

A studia funcția înseamnă a descoperi cele mai importante proprietăți ale ei:

- 1) de indicat domeniul de definiție;
- 2) de indicat codomeniul;
- 3) de aflat punctul de intersecție cu axa y ;
- 4) de aflat zerourile funcției și intervalele cu semn constant;
- 5) de determinat intervalele de creștere sau de descrescere;
- 6) de indicat valoarea cea mai mare și cea mai mică ale funcției;
- 7) de construit graficul funcției.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Următorul pas în studierea funcției constă în clarificarea parității sau imparității funcției.

➔ **Funcția $y=f(x)$ de numește *pară*, dacă domeniul ei de definiție este simetric față de zero și pentru fiecare valoare a lui x din domeniul de definiție $f(-x) = f(x)$.**

➔ **Funcția $y=f(x)$ se numește *impară*, dacă domeniul ei de definiție este simetric față de zero și pentru fiecare valoare a lui x din domeniul de definiție $f(-x) = -f(x)$.**

Există funcții nici pare, nici impare. Domeniul de definiție al lor nu este simetric față de zero sau nu se îndeplinește nici una din condițiile $f(-x) = \pm f(x)$ (de exemplu, $y=2x+3$).

Dacă funcția este definită grafic, atunci este ușor de cercetat dacă funcția este pară sau impară, deoarece **graficul funcției pare este simetric față de axa y , iar al celei impare este simetric față de originea de coordonate.**

Exemple. Funcțiile: $y=x^2$ cu domeniul de definiție R și $y=x^2$ cu domeniul de definiție $[-5; 5]$ sunt pare (fig. 63). Funcțiile $y=x^3$ cu domeniul de definiție R și $y=x^3$ cu domeniul de definiție $[-27; 27]$ sunt impare (fig. 64).

Dar, de exemplu, fiecare funcție cu domeniul de definiție $[-2; 1]$ și fiecare funcție $y = x^2 + x$ cu orice domeniu de definiție sunt nici pară, nici impară (fig. 65 a, b).

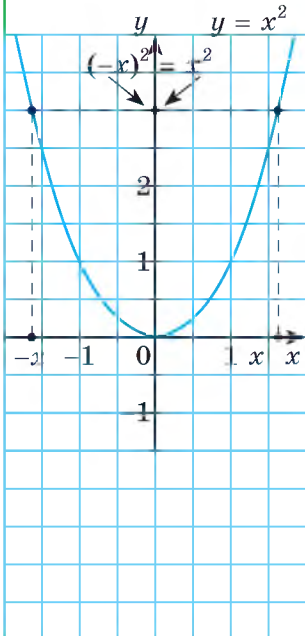


Fig. 63

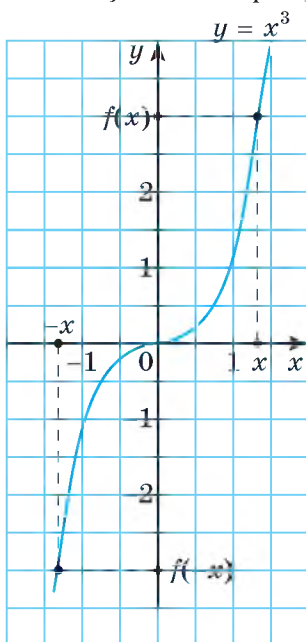


Fig. 64

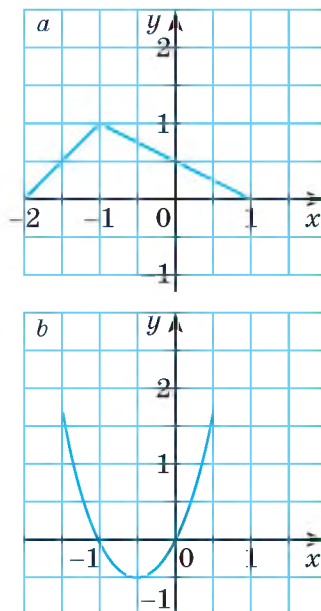


Fig. 65

Verificați-vă

1. Ce este domeniul de definiție și codomeniul funcției?
Cum de le aflați cu ajutorul graficului?
2. Ce se numesc intervale cu semn constant?
3. Ce numim zerouri ale funcției?
4. Care funcții se numesc crescătoare? Dar descrescătoare?
5. Ce este valoarea cea mai mare și cea mai mică a funcției.

Rezolvăm împreună

1 Aflați zerourile funcției $y = x^2 - x - 6$.

Rezolvare. Rezolvăm ecuația $x^2 - x - 6 = 0$.

$$D = (-1)2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25;$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

Răspuns. Zerourile funcției sunt numerele -2 și 3 .

2 Demonstrați, că funcția $y = x^2 + 3$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ descreește.

• **Rezolvare.** Fie x_1 și x_2 două valori arbitrare ale argumentului x din intervalul $(-\infty; 0)$, în plus $x_1 < x_2$. Valorile respective ale funcției sunt: $y_1 = x_1^2 + 3$, $y_2 = x_2^2 + 3$.

$$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Valorile x_1 și x_2 din $(-\infty; 0)$ sunt negative.

Deoarece $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1$ este număr pozitiv, $x_2 + x_1$ este număr negativ, produsul lor este negativ, deci, și diferența $y_2 - y_1$ este negativă.

Deci, valorii mai mari a argumentului îi corespunde o valoare mai mică a funcției: funcția dată pe acest interval descreește (fig. 66).

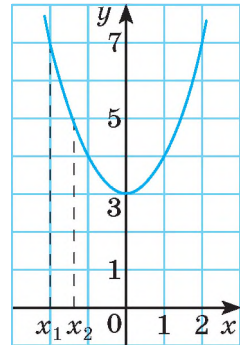


Fig. 66

3 Funcția este pară sau impară:

a) $y = x^2 - 7$; b) $y = 5x - 1$?

• **Rezolvare.** a) Domeniul de definiție $D(y)$ al funcției $y = x^2 - 7$ este mulțimea tuturor numerelor reale R , ea este simetrică față de 0. Aflăm

$$f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x). \text{ Deci, funcția } y = x^2 - 7 \text{ este pară.}$$

b) $D(y) = R$ și este simetric față de 0.

$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1)$. Această funcție nu este egală nici cu $f(x)$, nici cu $f(-x)$.

Deci, funcția $y = 5x - 1$ este nici pară, nici impară.

Răspuns. a) pară; b) nici pară, nici impară.

Efectuați oral

336. Aflați domeniul de definiție și codomeniul funcțiilor:

a) $y = 2x^2$; c) $y = x^3$; e) $y = x - 2$; e) $y = \sqrt{x}$;
 b) $y = \frac{2}{x}$; d) $y = \frac{2x}{x}$; f) $y = \frac{2x}{3} + 5$; e) $y = \frac{2}{x^2}$.

337. Codomeniile funcțiilor $y = x^2$ și $y = |x|$ sunt aceleași. Dați alte exemple de funcții cu aceleași codomenii.

338. Oare sunt la fel codomeniile funcțiilor:

a) $y = |x + 3|$ i $y = |x| + 3$; b) $y = x^2 + 3$ i $y = (x + 3)^2$?

339. Care funcție din problema 336 este pară, care este impară? Dați alte exemple de funcții pare și impare.

340. Oare are zerouri funcțiile:

a) $y = x^2 + 1$; b) $y = x^4 - 4$; c) $y = -x^4 - 9$; d) $y = |x|$?

341. Graficul funcției intersectează axa absciselor de n ori. Câte zerouri are această funcție?

342. Graficul funcției $y = f(x)$ intersectează axa absciselor într-un singur punct $A(12; 0)$. Câte zerouri are această funcție? Câte soluții are ecuația $f(x) = 0$?

343. Indicați valoarea cea mai mare și cea mai mică ale funcției, graficul căreia este reprezentat pe figura 61?

344. Numiți intervalele cu semn constant pentru funcțiile, graficele cărora sunt reprezentate pe figurile 63 – 65.

NIVELUL A

345. Aflați domeniul de definiție al funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = -7x + 3; & \text{c) } y = \sqrt{x+4}; & \text{e) } y = \frac{-1}{x^2+4}; \\ \text{b) } y = x^2 - 4; & \text{d) } y = \frac{3}{x+9}; & \text{f) } y = \frac{x}{1-x}. \end{array}$$

346. Aflați codomeniul funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 0,01x; & \text{c) } y = \sqrt{1-x^2}; & \text{e) } y = 2x^{-1}; \\ \text{b) } y = x^2; & \text{d) } y = x^3; & \text{f) } y = \sqrt{1+x^2}. \end{array}$$

347. Aflați domeniul de definiție și codomeniul funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^2 - 1; & \text{c) } y = \frac{1}{x} + 2; & \text{e) } y = |x|; \\ \text{b) } y = \frac{2-x}{3}; & \text{d) } y = 1 - \sqrt{x}; & \text{f) } y = |x| + 2. \end{array}$$

348. *Problemă deschisă.* Construiți graficul oricăreia funcției $y = f(x)$ pentru care:

$$\text{a) } D = [-6; 2], E = [-2; 2]; \quad \text{b) } D = [-1; 3) \cup (3; 5], E = [-3; 1) \cup (1; 3].$$

349. Funcția $y = 1,5x - 2$ este definită pe $[-2; 5]$. Aflați domeniul de definiție și codomeniul ei.

350. Construiți graficul funcției $y = 0,5x^2$ definite pe $[1; 4]$ și proiectați-l pe axele de coordonate. Care este codomeniul funcției date?

351. Pentru a stabili dependența dintre prețul (p) peștelui și volumul cererii (K), prețul peștelui și volumul cererii a fost fixat în decurs de 6 luni. Rezultatele observărilor s-au introdus în tabel. Construiți graficul acestei funcții. Aflați domeniul de definiție și codomeniul. Oare are această funcție valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare? Funcția este crescătoare sau descrescătoare?

p (grn. pentru kg)	35	40	50	60	65	70
K (tone pe lună)	16	15	12	9	6	2

352. În mijlocul anilor 70 în regiunea Poltava a fost începută cultivarea organică a pământului în Ucraina. Unul din pionierii cultivării organice a pământului în Ucraina, Semen Antoneti, conduce din acel timp întreprinderea «Agroecologia», care în activitatea sa se bazează pe producerea organică. Pe figura 67 este dată schimbarea cantității întreprinderilor organice certificate pe parcursul anilor 2002 – 2014, iar pe figura 68 – dezvoltarea mărimii medii a întreprinderilor organice în această perioadă. Analizați graficele acestor funcții. Faceți concluzii despre proprietățile principale ale funcțiilor reprezentate pe grafice. Cum se schimba cantitatea și dimensiunile întreprinderilor organice în ultimii anii? De ce? Aflați mai mult despre prelucrarea organică a pământului în Ucraina.

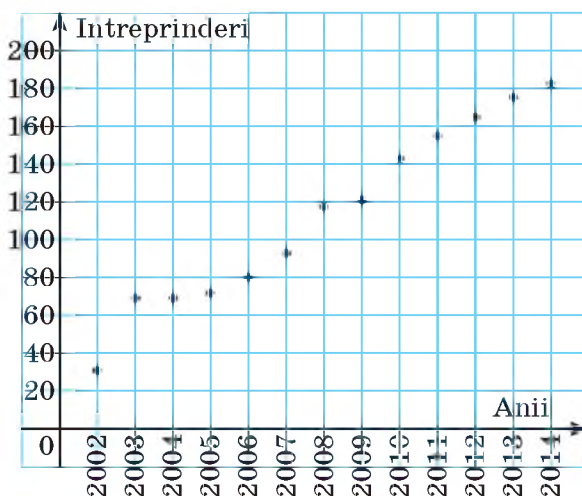


Fig. 67

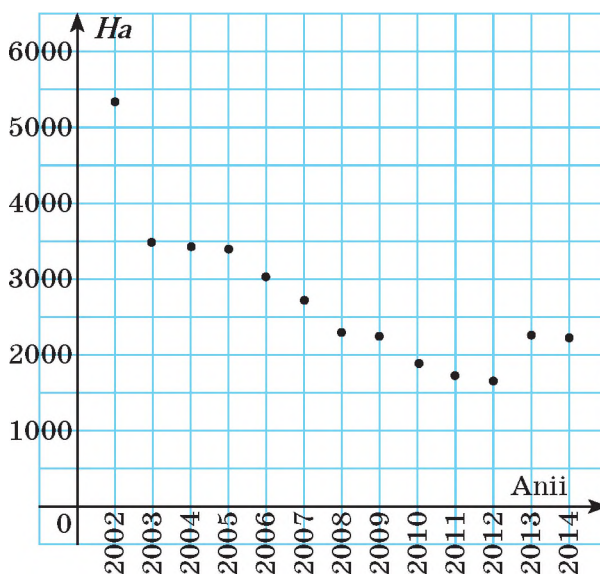


Fig. 68

Oare are zerouri funcțiile:

- a) $y = x^4 + 3$; c) $y = 1 : x^2$; e) $y = \sqrt{x}$;
 b) $y = x^2 + x$; d) $y = x^2 + x^4$; f) $y = 0,5$?

Dacă au, atunci aflați zerourile ei și intervalele cu semn constant.

354. Aflați zerourile și intervalele cu semn constant ale funcțiilor:

- a) $y = 2x$; c) $y = x^3 + x$; e) $y = x^2 + 5x + 6$;
 b) $y = -x^2 + 1$; d) $y = 2x + 3$; f) $y = \sqrt{x} - 2$.

355. Demonstrați, că funcția $f(x) = x^4 + 3$ obține numai valori pozitive.

Care este domeniul de definiție al ei? Oare are această funcție valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare?

356. Demonstrați, că funcția $f(x) = -x^2 - 3$ primește numai valori negative.

Care este domeniul de definiție al ei? Oare are această funcție valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare?

357. 1) Pe fig. 69 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$.

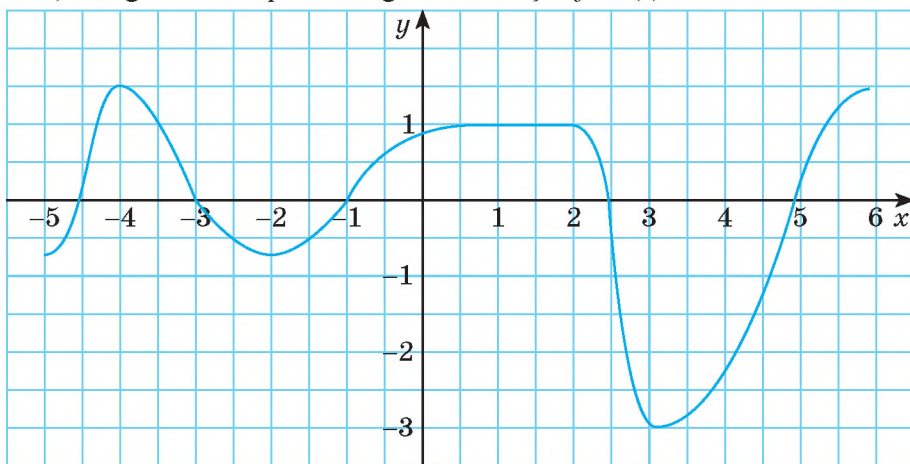


Fig. 69

Aflați: a) domeniul de definiție și codomeniul funcției; b) zerourile funcției; c) intervalele cu semn constant; d) valoarea cea mai mare și cea mai mică ale funcției; e) intervalele pe care funcția crește;

f) intervalele pe care funcția descrește.

2) *Problemă deschisă.* Efectuați aceste sarcini pentru graficul funcției, construit independent.

358. Aflați intervalele cu semn constant și zerourile funcțiilor:

- a) $y = x + x^3$; c) $y = 1 - |x|$; e) $y = x + 3$; e) $y = 3\sqrt{x}$.
 b) $y = 6$; d) $y = -7x$; f) $y = x^2 - 4$;

359. Care funcție este crescătoare și care – descrescătoare:

- a) $y = 2x$; b) $y = -x - 2$; c) $y = x^3$; d) $y = \sqrt{x}$?

360. Crescătoare sau descrescătoare sunt funcțiile::

a) $y = \frac{2x}{5}$; b) $y = \frac{5x}{2}$; c) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$; d) $y = \frac{-x}{5x}$?

361. Construiți graficul funcției și scrieți proprietățile ei:

a) $y = 0,5x - 1$; b) $y = 2x^2$; c) $y = \sqrt{x+1}$; d) $y = x^{-1}$.

Nivelul B

362. Aflați codomeniul funcției $y = 4 - x^2$ definite pe intervalul:

a) $[-3; 3]$; b) $[1; 7]$; c) $[0; \infty)$.

363. Aflați domeniul de definiție și codomeniul funcției:

a) $y = 4 + x^2$; b) $y = 3 + \sqrt{x+2}$; c) $y = 1 : (1 + x^2)$.

364. Aflați domeniul de definiție al funcției $y = x^3 - 8$, dacă codomeniul ei este $[-35; 0]$:

365. Fără a construi graficul funcției stabiliți, pentru care valori x ea primește valori pozitive, dacă:

a) $y = -2x + 5$; c) $y = 0,5x - 3$; e) $y = 3x - x^2 - 2$;
 b) $y = \sqrt{x+4}$; d) $y = 3 - \frac{1}{x}$; f) $y = \frac{x}{x+1}$.

366. Fără a construi graficul funcției stabiliți pentru care valori x ea primește valori nepozitive, dacă:

a) $y = 5x - 1$; c) $y = (x + 1)(1 - x)$; e) $y = (x + 2)^3$;
 b) $y = \sqrt{x} - 4$; d) $y = \frac{6}{x} + 2$; f) $y = \frac{1}{x-1} - 1$.

367. Demonstrați, că funcția:

a) $y = 3x + 5$ crește pe \mathbf{R} ; c) $y = -x^3$ descreește pe \mathbf{R} ;
 b) $y = 1 - \sqrt{x}$ descreește pe $[0; \infty)$; d) $y = 2x^2$ crește pe $[0; \infty)$.

368. Crescătoare sau descrescătoare sunt funcțiile:

a) $y = x - 5$; c) $y = \sqrt{3+x}$; e) $y = 8 - x^3$;
 b) $y = 2x^3$; d) $y = 13 - \sqrt{x}$; f) $y = x^3 + x$?

369. Indicați intervalele de descreeștere ale funcțiilor:

a) $y = x^4 + 3$; b) $y = |x-3|$; c) $y = |x| - x$.

370. Pe care intervale funcția dată crește:

a) $y = x \cdot |x|$; b) $y = \sqrt{4+x^2}$; c) $y = \sqrt{4-x^2}$?

371. Demonstrați, că funcția $f(x) = x^2 + 3$ este pară, iar $f(x) = x^3 + x$ - impară. Arătați, că funcția $f(x) = x^2 + x$ e nici pară, nici impară,

372. Oare au unul și același sens propozițiile «funcția $y = f(x)$ nu este pară» și «funcția $y = f(x)$ este impară»?

373. Determinați domeniul de definiție al funcțiilor. Demonstrați, că funcția $y = f(x)$

este pară, dacă: a) $f(x) = x^4 + 3x^2$; c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$;
 b) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$; d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

374. Determinați domeniul de definiție al funcțiilor. Demonstrați, că funcția $y = f(x)$ este impară, dacă:

a) $y = x(1 - x^2)$; b) $y = 7x^3 + x$; c) $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$.

375. Care din funcțiile date sunt pare, care – impare:

a) $y = x^4$; c) $y = -x^2 + 3$; e) $y = \frac{3x^2 + 1}{x}$;
 b) $y = x^5$; d) $y = \frac{5}{x^2}$; f) $y = \sqrt{1 - x^2}$?

376*. Construiți graficele de pe fig. 70 în caiet. Fiecare grafic complectati-l astfel, ca funcția obținută să fie: 1) pară; 2) impară; 3) nici pară, nici impară.

Pentru fiecare punct 1) – 3) efectuat, stabiliți zerourile funcției, intervalele cu semn constant, de creștere și de descreștere. Ce concluzii se pot face?

a

b

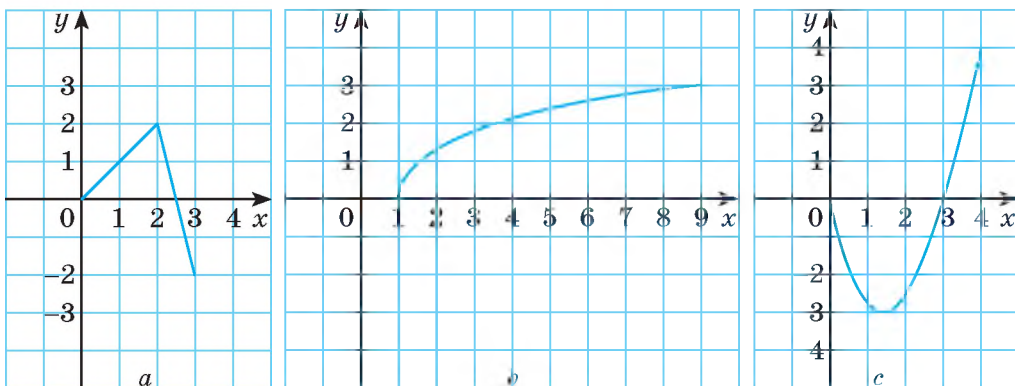


Fig. 70

377*. Funcția $y = f(x)$ este pară. Pe intervalul $(-\infty; 2)$ ea crește, iar pe $(-2; 0)$ descrește. Cum este ea pe restul domeniului de definiție?

378*. Funcția $y = f(x)$ este impară. Pe intervalul $(-\infty; -3)$ ea descrește, iar pe $(-3; 0)$ crește. Cum este ea pe restul domeniului de definiție?

379. Problemă deschisă. Construiți schematic graficul funcției pare $y = g(x)$, care pe segmentul $[-4; -2]$ crește de la 1 până la 5, iar pe $[-2; 0]$ descreește de la 5 până la -1 . Pentru funcția $y = g(x)$ stabiliți:

- a) domeniul de definiție și codomeniul; b) zerourile și intervalele cu semn constant; c) valoarea cea mai mare și cea mai mică.

380*. Problemă deschisă. Construiți schematic graficul funcției impare $y = f(x)$, care pe segmentul $[-4; -1]$ descreește de la 3 până la -3 , iar pe $[-1; 0]$ crește de la -3 până la 0. Pentru funcția $y = f(x)$ stabiliți: a) domeniul de definiție și codomeniul; b) zerourile și intervalele cu semn constant; c) valoarea cea mai mare și cea mai mică.

381. Descrieți proprietățile funcțiilor, graficele cărora sunt reprezentate pe figurile 71–73.

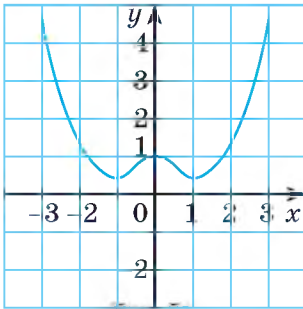


Fig. 71

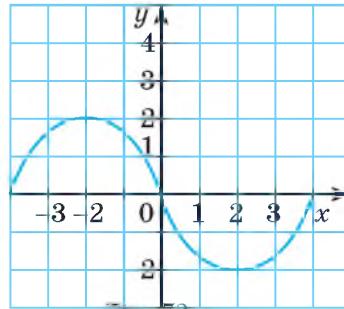


Fig. 72

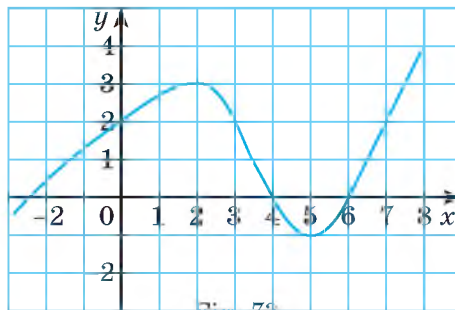


Fig. 73

Construiți graficele funcțiilor și descrieți proprietățile lor (382–385).

382. a) $y = |x|$; b) $y = |x - 3|$; c) $y = |x| - 3$.

383. a) $y = \sqrt{x^2}$; b) $y = \sqrt{(x - 2)^2}$; c) $y = \sqrt{(4 - x)^2}$.

384. a) $y = 6x^{-1}$; b) $y = \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$; c) $y = \frac{x^2}{x}$; d) $y = x^{-2}$.

385. Studiați funcțiile și construiți graficele lor:

a) $y = x^2 - 6$; b) $y = -x^3$; c) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x}$; d) $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

386. Sarcină practică. Dacă vom turna apa într-un bazin cu o viteză constantă, atunci înălțimea apei în el va fi o funcție de timp $y = f(x)$ (fig. 74). 1. Examinați desenele și stabiliți: a) oare depinde viteza creșterii funcției de aria bazei bazinului (apa în toate bazinele se dă cu aceeași viteză); b) în care caz (a -- c) viteza creșterii funcției $y = f(x)$ va fi cea mai mare, iar în care – cea mai mică?

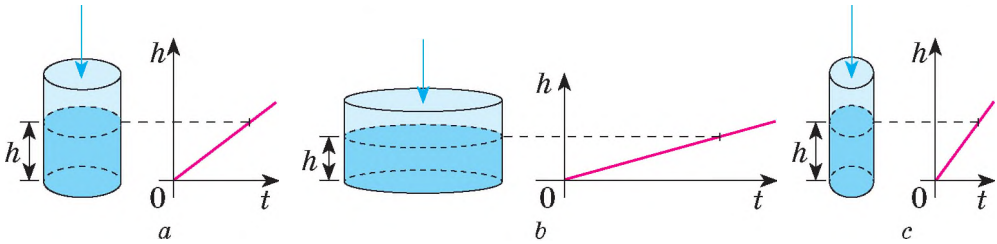


Fig. 74

2. Reprezentați schematic graficul dependenței înălțimii apei de timpul unplerii bazinului, reprezentat pe figura

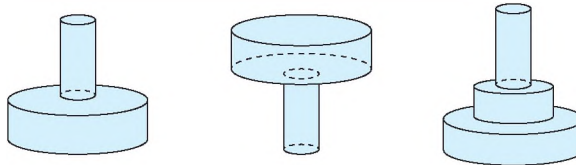


Fig. 75

Exerciții pentru repetare

387. Este stabilit că masa de prisos a omului este rezultatul consumării unei cantități mai mari de calorii, decât utilizate. Deoarece excesivul de masă influențează negativ asupra stării sănătății și modului de viață al omului, atunci e necesar de folosit nu mai puține calorii decât consumăm. Un pahar de băutură «Coca-Cola» conține 26,5 g de zahăr în 250 ml, ce este egal cu patru sau cinci lingurițe de ceai cu zahăr sau 108 kal. În câte minute veți putea prelucra kaloriile, primite de la un pahar de această băutură, cu ajutorul:

a) călcatului albiturilor, stând în picioare, dacă în acest timp în 1 oră se folosesc 3,6 kal de la 1 kg din masa corpului vostru;

b) plivitul grădinii cu mâinile, dacă în timpul acesta în 1 h se folosesc 5 kal de la 1 kg din masa corpului vostru;

c) curățitul covoarelor cu aspiratorul, dacă în acest timp în 1 h se folosesc 2,9 kal de la 1 kg din masa corpului vostru?

Rezolvați ecuațiile (388–389)

388. a) $2x^2 + 3x = 9$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + 4x = 1$.

389. a) $(x+3)\sqrt{x+5} = 0$; b) $(x+5)\sqrt{x+3} = 0$

390. Scrieți în formă standard numerele:

a) 7800;

c) 84,17;

e) 0,085;

g) 0,58954;

b) 140000;

d) 486000000;

f) 0,00045;

h) 0,0000008.



Comoara succeselor

√ Pot caracteriza funcția după graficul ei:

- 1) pot indica domeniul de definiție;
- 2) pot indica codomeniul;
- 3) pot determina punctul de intersecție al graficului funcției cu axa y ;
- 4) pot afla zerourile funcției și intervalele cu semn constant;
- 5) pot determina intervalele de creștere sau descreștere;
- 6) pot indica valoarea cea mai mare și cea mai mică a funcției;
- 7) pot construi graficul funcției;

√ Știu a afla cu ajutorul graficului:

domeniul de definiție al funcției ca proiecția graficului ei pe axa x ;

codomeniul funcției ca proiecția graficului ei pe axa y

√ Știu ce este:

• zerourile funcției $y = f(x)$:

$$f(x) = 0$$

• intervalele cu semn constant ale funcției $y = f(x)$:

$$f(x) > 0 \text{ sau } f(x) < 0$$

√ Știu care funcție se numește crescătoare descrescătoare

$$\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}$$

Aplicăm competențele obținute

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Cum de calculat valoarea funcției $f(x)$ în punctul x_0 : $f(x_0)$.
- Cum de alcătuit tabelele valorilor funcțiilor după formule.
- Ce este graficul funcției și cum îl construiesc.
- Tipurile funcțiilor și graficele lor:

funcția liniară

$$y = kx + b$$

linie dreaptă

proporționalitatea inversă

$$y = k; x$$

hiperbolă

funcția de gradul al doilea

$$y = x^2$$

parabolă

§ 10

TRANSFORMAREA GRAFICELOR FUNCȚIILOR

Alcătuiți tabelele valorilor funcțiilor a) $y = x^2$ și b) $y = -x^2$, definite pe mulțimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
b)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

În general, valorile funcției $y = -x^2$ sunt opuse valorilor respective ale funcției $y = x^2$. De aceea graficele acestor funcții sunt simetrice față de axa x (fig. 76). O astfel de proprietate are orice funcție $y = f(x)$ și $y = -f(x)$.

➔ **Graficele funcțiilor $y = f(x)$ și $y = -f(x)$ sunt simetrice față de axa x .** Comparăm încă funcțiile $y = 2f(x)$ și $y = f(x)$. Pentru a obține o valoare oarecare a primei din ele trebuie valoarea respectivă a funcției a doua de o înmulțit cu 2. De aceea graficul primei funcții se poate obține

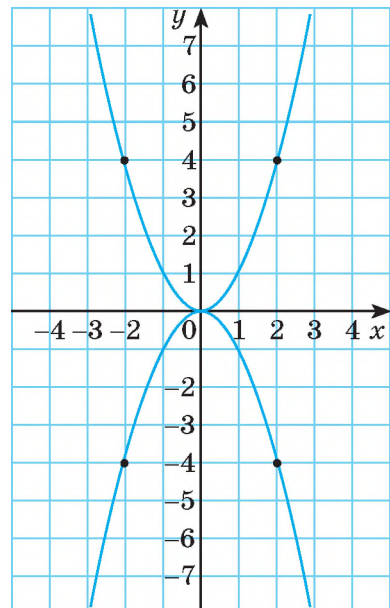


Fig. 76

din graficul funcției a doua dacă îl vom întinde de două ori de la axa x . Dar pentru a construi graficul funcției $y = \frac{1}{3}f(x)$, trebuie de comprimat graficul $f(x)$ spre axa x de trei ori.

➔ Pentru a construi graficul funcției $y = kf(x)$, $k > 0$, trebuie graficul funcției $y = f(x)$ de-l întins de la axa x de k ori, dacă $k > 1$, sau de-l comprimat de $\frac{1}{k}$ ori spre axa x , dacă $0 < k < 1$.

Exemplu. Construiți graficele funcțiilor: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0,5\sqrt{x}$, $y = -0,5\sqrt{x}$.

Rezolvare. Construim graficul funcției $y = \sqrt{x}$. Pe figura 77 el este reprezentat prin curba I. Dacă vom mări de două ori ordonata fiecărui punct, vom primi mulțimea de puncte, situate pe curba II. Ea este graficul funcției $y = 2\sqrt{x}$. Dacă ordonata fiecărui punct al graficului I o vom micșora de două ori și vom marca pe planul de coordonate, atunci vom primi curba III care este graficul funcției $y = 0,5\sqrt{x}$. Curba IV este simetrică cu curba III față de axa x și este graficul $y = -0,5\sqrt{x}$.

Fiecare valoare a funcției $y = f(x) + 4$ este cu 4 mai mare decât valoarea respectivă a funcției $y = f(x)$. De aceea graficul funcției $y = f(x) + 4$ se obține din graficul funcției $y = f(x)$ printr-o translație cu 4 unități în direcția axei y (fig. 78). Din graficul funcției $y = f(x)$ se obține graficul funcției $y = f(x) - 6$ printr-o translație cu 6 unități în direcția opusă.

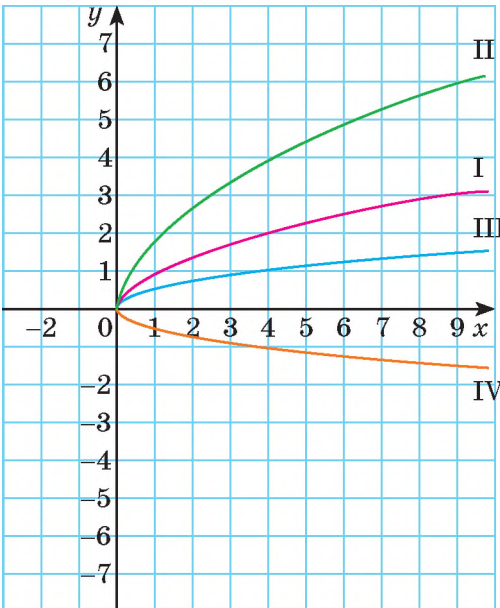


Fig. 77

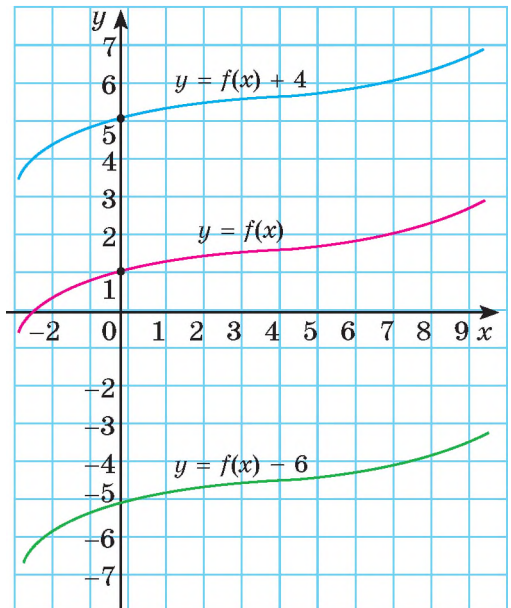


Fig. 78

➔ Pentru a obține graficul funcției $y = f(x) + n$, trebuie graficul funcției $y = f(x)$ de-l mutat cu n unități în sus (în direcția axei y), dacă $n > 0$, sau cu $-n$ unități în jos (în direcția opusă), dacă $n < 0$.

Dar cum trebuie de transformat graficul funcției $y = f(x)$ pentru a obține graficul funcției $y = f(x - m)$? Calculăm pentru unele și aceleași valori x valorile funcțiilor

a) $y = x^2$ și b) $y = (x - 2)^2$.

a)	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b)	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

După cum vedem, pentru fiecare valoare $x = c$ valoarea funcției $y = (x - 2)^2$ este așa ca și valoarea funcției $y = x^2$, când $x = c - 2$. De aceea graficul funcției $y = (x - 2)^2$ se poate obține din graficul funcției $y = x^2$ printr-o translație cu 2 unități în direcția axei x (fig. 79). Graficul funcției $y = (x + 3)^2$ se poate obține din graficul funcției $y = x^2$ printr-o translație cu 3 unități în direcția opusă direcției axei x .

Pentru a obține graficul funcției $y = f(x - m)$, este suficient graficul funcției $y = f(x)$ de-l translat cu m unități în dreapta (în direcția axei x), dacă $m > 0$, sau cu m unități în stânga (în direcția opusă), dacă $m < 0$.

Pe figura 80 este arătat cum, de exemplu, din graficul funcției $y = x^3$ se obțin graficele funcțiilor $y = (x - 2)^3$ și $y = (x + 3)^3$.

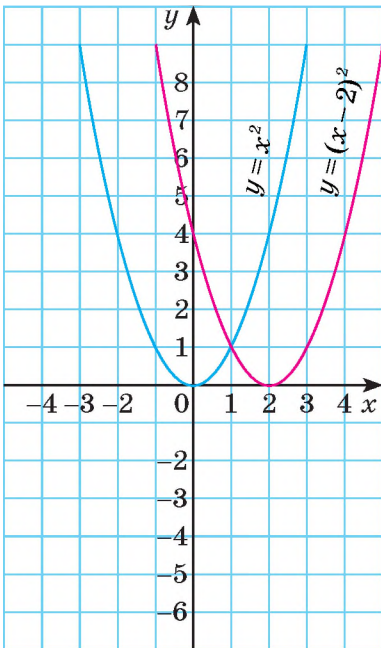


Fig. 79

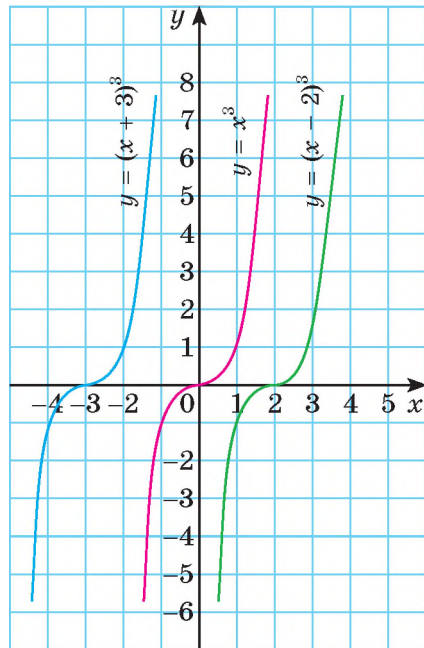


Fig. 80

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Cum din graficul funcției $y = f(x)$ se obține graficul funcției $y = |f(x)|$?
 Conform definiției modulului,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

De aceea valorile funcțiilor $y = |f(x)|$ și $y = f(x)$ sunt identice cu condiția că $f(x) \geq 0$ și opuse dacă $f(x) < 0$. Deci, pentru a construi graficul funcției $y = |f(x)|$ este suficient ca părțile graficului $y = f(x)$, care se află mai jos de axa x , de le înlocuit cu simetrice lor față de aceeași axă, iar toate celelalte rămân neschimbate. De exemplu, din graficul funcției $y = x^2 - 4$ (fig. 81) se obține graficul funcției $y = |x^2 - 4|$ (fig. 82)

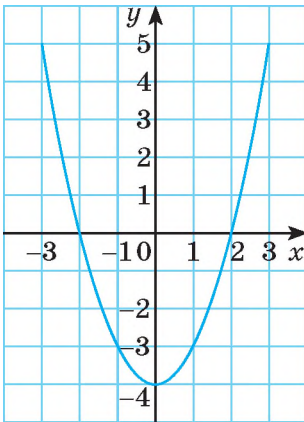


Fig. 81

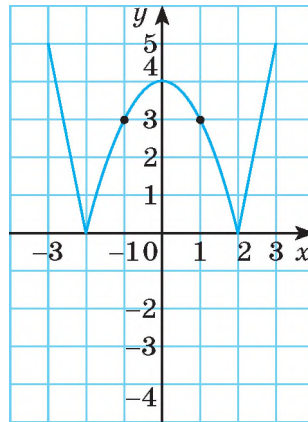


Fig. 82

Cercetați, cum se poate obține graficul funcției $y = f(|x|)$ din graficul funcției $y = f(x)$.

Verificați-vă

1. Ce este graficul funcției?
2. Cum din graficul funcției $y = f(x)$ se obține graficul funcției:

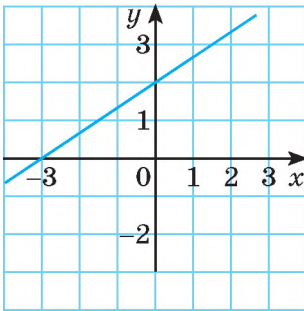
a) $y = -f(x)$;	c) $y = k \cdot f(x)$;	e*) $y = f(x) $;
b) $y = f(x) + n$;	d*) $y = f(x - m)$;	f*) $y = f(x)$?
3. În care cadran se află graficul funcției $y = -f(x)$, dacă graficul funcției $y = f(x)$ este amplasat în: a) cadranul al III; b) I și al II?
4. Indicați cea mai mare valoare a funcției $y = -f(x)$, dacă 5 este cea mai mare valoare a funcției:

a) $y = f(x) + 5$;	b) $y = f(x - 5)$;	c) $y = 5f(x)$.
---------------------	---------------------	------------------

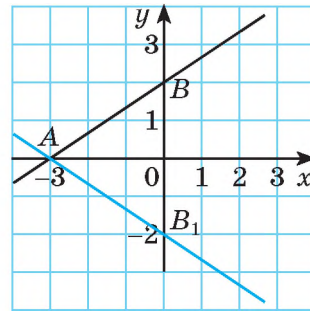
Efectuăm împreună!

1 Pe figura 83 este reprezentat graficul funcției liniare $y = f(x)$. Construiți graficul funcției $y = -f(x)$.

- **Rezolvare.** Graficele funcțiilor $y = f(x)$ și $y = -f(x)$ sunt simetrice față de axa absciselor. Punctul $A(-3; 0)$ este comun ambelor grafice, iar punctul simetric lui $B(0; 2)$ față de axa x este $B_1(0; -2)$. Dreapta AB_1 este graficul funcției $y = -f(x)$.



a



b

Fig. 83

2 Construiți graficul funcțiilor: a) $y = x^2$; b) $y = \frac{1}{2}x^2$; c) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

- **Rezolvare.** a) Graficul funcției $y = x^2$ este o parabolă simplă (fig. 84).

b) Pentru a obține graficul funcției $y = \frac{1}{2}x^2$, trebuie ordonata fiecărui punct al primului grafic de micșorat de două ori; pe figură această parabolă este de culoare albastră.

c) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$. Dacă vom micșora ordonata fiecărui punct al parabolei simple de patru ori, vom obține graficul necesar – parabola de culoare roșie.

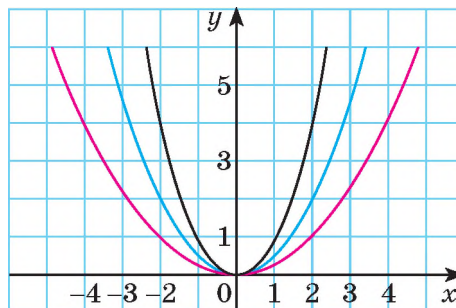


Fig. 84

Efectuăm oral

391. Prin ce se deosebesc graficele funcțiilor:

- a) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ și $y = -x^2$;
- b) $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ și $y = (-2x)^2$;
- c) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ și $y = |x|$?

392. Cum sunt amplasate reciproc graficele funcțiilor:

- a) $y = 2x$ și $y = -2x$;
- b) $y = x^3$ și $y = -x^3$;
- c) $y = \frac{1}{3}x$ și $y = -\frac{1}{3}x$;
- d) $y = \frac{1}{x}$ și $y = -\frac{1}{x}$?

393. Funcția $y = f(x)$ este crescătoare pe tot domeniul de definiție. Crescătoare sau descrescătoare este funcția:

- a) $y = 2f(x)$;
- b) $y = 0,5f(x)$;
- c) $y = -f(x)$?

394. Este oare adevărat, că graficele funcțiilor $y = 0,3x$, $y = 0,3x + 2$ și $y = 0,3x - 5$ sunt drepte paralele?

395. Pe figura 95 sunt reprezentate două drepte paralele – graficele a două funcții. O funcție este $y = 0,5x + 3$. Numiți formula funcției a doua.

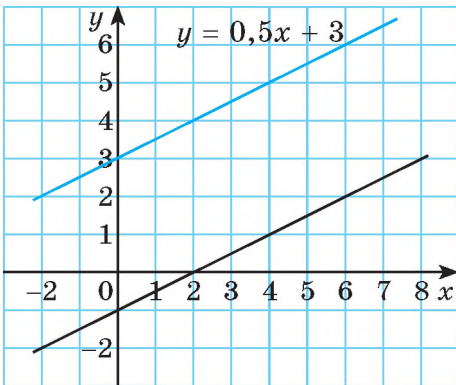


Fig. 85

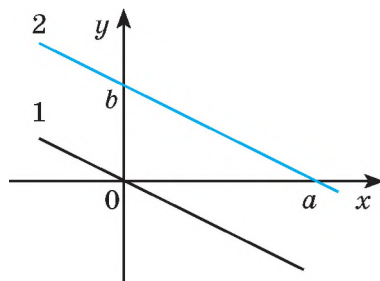


Fig. 86

396. Pe figura 86 dreapta 1 este graficul funcției $y = f(x)$, iar dreapta a doua paralelă cu ea intersectează axele de coordonate în punctele a și b . Un elev consideră, că dreapta a 2 este graficul funcției $y = f(x - a)$, altul – că este graficul funcției $y = f(b + x)$, iar al treilea – că este graficul funcției $y = f(x) + b$. Cine are dreptate?

397. Prin ce diferă graficele funcțiilor:

- a) $y = x^2 + 2$ și $y = x^2 - 2$;
- b) $y = x^2 - 2$ și $y = (x - 2)^2$;
- c) $y = x^3 + 1$ și $y = (x + 1)^3$;
- d) $y = (x - 2)^3$ și $y = (x + 2)^3$?

398. Domeniul de definiție al funcției $y = f(x)$ este intervalul $(a; b)$. Care este domeniul de definiție al funcțiilor:
 a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = |f(x)|$; d) $y = k \cdot f(x)$?
399. Codomeniul funcției $y = f(x)$ este $(c; \infty)$. Care este codomeniul funcțiilor:
 a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = f(x) - m$; d) $y = k \cdot f(x)$?

Nivelul A

400. Pe figura 87 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$. Copiați-l în caiet și construiți pe același sistem de coordonate graficele funcțiilor $y = -f(x)$ și $y = 3 \cdot f(x)$.

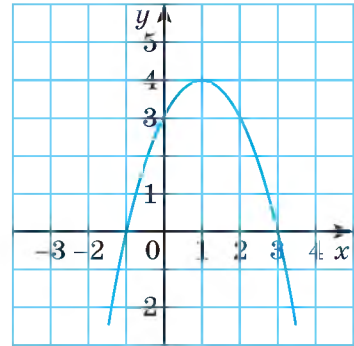


Fig. 87

- Construiți graficul funcțiilor (401–403).
401. a) $y = -x^2$; b) $y = -x^3$; c) $y = -|x|$.
402. a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{9x}$; c) $y = \sqrt{16x}$.
403. a) $y = 3x^2$; b) $y = -3x^2$; c) $y = -0,5x^2$.
404. Cum trebuie de transformat graficul funcției $y = \sqrt{x}$, pentru a obține graficul funcției $y = -\sqrt{x}$? Oare este adevărat, că reuniunea graficelor funcțiilor $y = \sqrt{x}$ și $y = -\sqrt{x}$ este graficul ecuației $y^2 = x$?
405. Cum trebuie transformat graficul funcției $y = 3x - 4$ pentru a obține graficul funcției $y = 4 - 3x$? Efectuați construcția.
406. Construiți graficele funcțiilor $y = x^2$ și $y = x^2 - 4$. Aflați codomeniul lor. Pentru care valori ale lui x valorile funcției sunt pozitive, pentru care valori sunt negative? Aflați coordonatele intersecției graficului cu axele de coordonate.
407. Graficele căror funcții sunt reprezentate pe fig.88, a, b)?
- Construiți într-un sistem de coordonate graficele funcțiilor (408–409).
408. a) $y = 2x$, $y = 2x + 1$ și $y = 2x - 3$;
 b) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ și $y = -x^2 - 1$.
409. a) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-1}$ și $y = \sqrt{x} + 2$;
 b) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ și $y = 2x^2 - 1$.
410. Cum trebuie transformat graficul funcției $y = x^2$, pentru a obține graficul funcției:
 a) $y = (x + 3)^2$; b) $y = (x - 3)^2$; c) $y = -(x + 3)^2$?

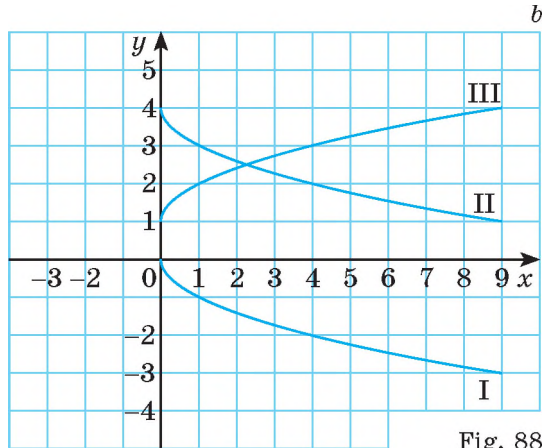
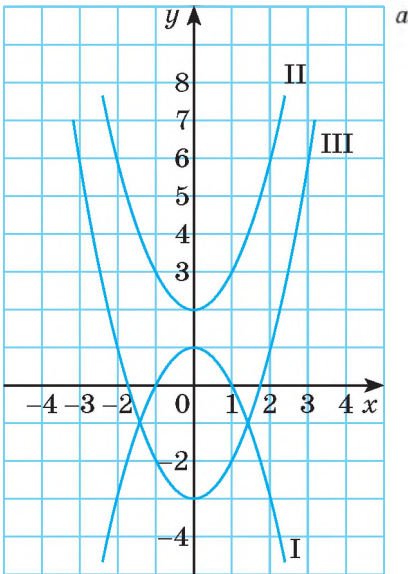


Fig. 88

Construiți într-un sistem de coordonate graficele funcțiilor (411–412).

411. a) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x - 1)$ și $y_3 = 2(x + 3)$;

b) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$ și $y_3 = -(x - 3)^2$.

412. a) $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x-3}$ și $y_3 = \frac{4}{x+1}$; b) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$ și $y_3 = \sqrt{x+2}$.

413. Care funcții au graficele reprezentate pe fig. 82, a, b?

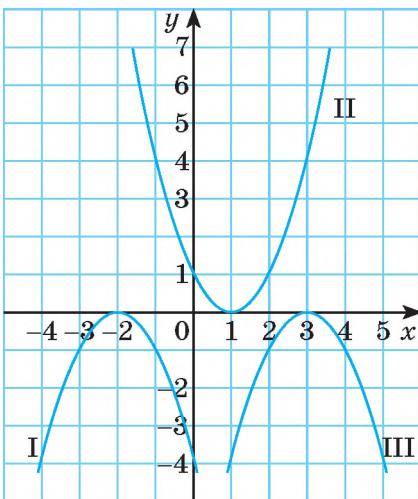
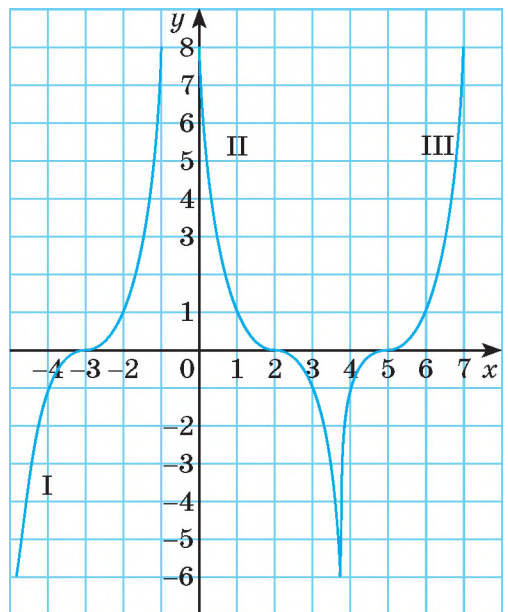


Fig. 89

a



b

- 414.** 1) Fie data parabola $y = x^2$. Scrieți ecuația parabolei care se poate obține din ea, efectuând translația:
- cu 2 unități la dreapta și 3 unități în sus;
 - cu 4 unități la stânga și 2 unități în jos.
- 2) *Problemă deschisă.* Este dată hiperbola c . Scrieți ecuația hiperbolei, care se obține din cea dată cu translarea ei cu c .
- 415.** Construiți graficul funcțiilor:
- $y = (x-2)^2 + 1$ și $y = (x-2)^2 - 1$;
 - $y = (x+1)^2 + 3$ și $y = (x+1)^2 - 3$.

Nivelul B

- 416.** Graficul funcției $y = f(x)$ este simetric față de axa y . Oare este simetric față de această axă graficul funcțiilor:
- $y = 2f(x)$;
 - $y = -f(x)$;
 - $y = -2f(x)$?
- Construiți graficele respective.
- 417.** Funcția $y = f(x)$ pe intervalul $(-\infty; a)$ descrește, iar pe $(a; \infty)$ crește. Cum sunt pe aceste intervale funcțiile:
- $y = 2f(x)$;
 - $y = 0,5f(x)$;
 - $y = -f(x)$?
- Construiți graficele respective..
- 418.** Pe fig. 90 este reprezentat graficul funcției $y = 4x^{-2}$. Copiați-l în caiet și construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor:
- $y = \frac{4}{x^2} + 2$;
 - $y = \frac{4}{x^2} - 3$;
 - $y = 1 - \frac{4}{x^2}$.

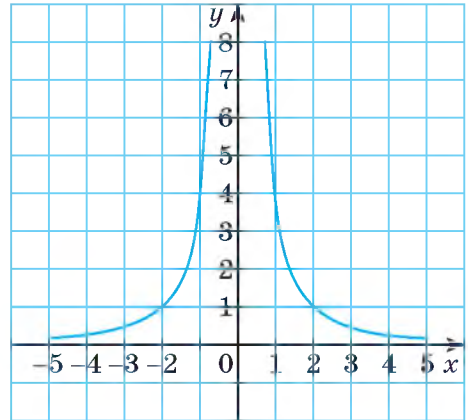


Fig. 90

- 419.** Construiți într-un sistem de coordonate graficele funcțiilor:
- $y = -\frac{12}{x}$; $y = -\frac{12}{x} + 3$; $y = -\frac{12}{x} - 1$.
 - $y = 2\sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x} - 3$; $y = 2\sqrt{x} + 2$.
- 420.** Construiți graficul funcțiilor:
- $y = -x^2 + 3$;
 - $y = x^3 + 1$;
 - $y = 2x^3 - 1$;
 - $y = \frac{4}{x} - 3$;
 - $y = -\sqrt{x} + 1$;
 - $y = 0,5x^2 - 2$.

421. Completați pătrățelele libere din tabelă. Prin care formulă se poate defini funcția $y = f(x)$?

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						

422. Pe fig. 91 este reprezentat graficul funcției $y = \sqrt[3]{x}$. Copiați-l în caiet și construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor:

a) $y = \sqrt[3]{x-2}$; b) $y = \sqrt[3]{x+1}$; c) $y = 3 - \sqrt[3]{x}$.

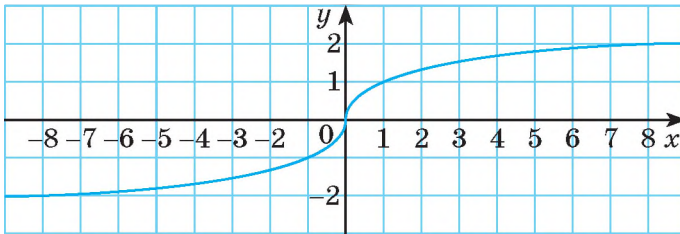


Fig. 91

423. Construiți graficele funcțiilor:

a) $y = 0,5(x - 1)^3$; c) $y = 2(x - 2)^2$; e) $y = 3\sqrt{x+3}$;
 b) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$; d) $y = \frac{1}{x-3}$; f) $y = \frac{-3}{x+3}$.

424. Construiți graficul și studiați proprietățile funcțiilor:

a) $y = \frac{12}{x-3} + 4$; b) $y = \frac{6}{x+2} - 3$; c) $y = \frac{x+2}{x+1}$.

Construiți graficele funcțiilor (425 - 428).

425. a) $y = (x + 2)^2 + 3$; c) $y = -2(x + 1)^2 + 3$;
 b) $y = \frac{1}{x-1} + 2$; d) $y = 5 - \frac{6}{x+1}$.

426. a) $y = 2\sqrt{x-3} + 1$; c) $y = -(x + 1)^3 + 2$;
 b) $y = 2 - \sqrt{x+3}$; d) $y = 0,5(x - 3)^3 - 3$.

427*. a) $y = 2|x-3|$; c) $y = \sqrt{|x|}$; e) $y = (|x|-1)^2$;
 b) $y = |1-|x||$; d) $y = -|x|+2$; f) $y = |x|^3 + 1$.

428*. a) $y = |3x+1|$; c) $y = |1-\sqrt{x}|$; e) $y = |6x^{-1}-3|$;
 b) $y = |-x^2+4|$; d) $y = |0,2x-1|$; f) $y = |x^2-2|$.

Exerciții pentru repetare

429. Calculați:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + 1\frac{2}{15}\right) : 2\frac{7}{15}; \quad \text{b) } \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}; \quad \text{c) } \frac{7}{8} - \frac{1}{2} : \frac{3}{4} + 5 : \frac{1}{3} - \frac{1}{8}.$$

430. În tabelă sunt date denumirile, locul amplasării și aria celor mai mari și mai frumoase 5 parcuri dendrologice din Ucraina. După aceste date compuneți o problemă. Folosiți-vă de informații despre alte parcuri dendrologice din Ucraina, printre altele, și de cel mai apropiat de voi.

Denumirea	Locul amplasării	Aria (ha)
Trostianeți	s. Trostianeți din reg. Cernigov	350 ha
Olexandria	or. Bila Ţerkva din reg. Kiev	290 ha
Sofiyvka	or. Umani din reg. Cercasi	179,2 ha
Poltavsky	or. Poltava	124,5 ha
Veseli Bokoveniki	Raionul Molânsky din reg. Kirovograd	109 ha

431. Aflați rădăcinile trinomului pătrat:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2 + 7x - 30; & \text{c) } 4x^2 - 5x + 3; & \text{e) } x^2 - 6x - 55; \\ \text{b) } x^2 - 5x + 6; & \text{d) } 7x^2 - 5x - 2; & \text{f) } x^2 + 10x + 25. \end{array}$$

432. Separați din trinomul dat pătratul binomului:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - 6x + 15; & \text{c) } x^2 + 5x + 6; & \text{e) } 5x^2 - 10x + 8; \\ \text{b) } x^2 + 8x + 8; & \text{d) } x^2 - x - 1; & \text{f) } 9 + 2x - 3x^2. \end{array}$$

Comoara succeselor

✓ Înteleg în ce constă transformarea graficului funcției $f(x)$:

$$f(x) \rightarrow f(x - m)$$

translarea graficului

$m > 0$ – la dreapta

$m < 0$ – la stânga

$$f(x) \rightarrow f(x) + n$$

translarea graficului

$n > 0$ – în sus

$n < 0$ – în jos

$$f(x) \rightarrow kf(x), k > 0$$

$k > 1$ – întinderea graficului de la axa x de k ori,

$k < 1$ – comprimarea graficului spre axa x de $\frac{1}{k}$ ori.

- ✓ Înteleg că graficele funcțiilor $y = f(x)$ și $y = -f(x)$ sunt simetrice față de axa x .
- ✓ Pot construi graficul funcției, folosind regula transformării.
- ✓ Doresc să învăț a construi graficele funcțiilor ce conțin moduli.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este trinomul pătrat și rădăcinile lui.
- Cum de aflat rădăcinile trinomului pătrat

$$ax^2 + bx + c \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ unde } D = b^2 - 4ac$$

- Descompunera trinomului pătrat în factori,
dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile lui: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Cum de separat pătratul deplin:

$$x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 1 = (x + 3)^2 - 9 + 1 = (x + 3)^2 - 8$$

- Regulile transformării graficului funcției:

$$f(x) \rightarrow f(x) + n \quad f(x) \rightarrow f(x - m) \quad f(x) \rightarrow kf(x)$$

§ 11

FUNȚIA DE GRADUL DOI

Funcția, care poate fi definită prin formula $y = ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$, b , c sunt numere arbitrare, iar x – argument, se numește *funcție de gradul al doilea*.

Exemple de funcții de gradul al doilea: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = (x + 4)^2$. Graficele lor sunt parabole identice, dar situate diferit pe planul de coordonate. Graficul funcției $y = ax^2$ tot este o parabolă; vârful ei coincide cu originea de coordonate, iar ramurile sunt îndreptate în sus, când $a > 0$, și în jos, când $a < 0$.

➔ Graficele funcțiilor $y = ax^2 + bx + c$ și $y = ax^2$ sunt *parabole identice* care pot fi suprapuse la o translație.

Demonstrăm aceasta:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Deoarece $a \neq 0$, b și c sunt numere, atunci $\frac{b}{2a}$, și $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ tot sunt numere.

Notându-le prin $m = -\frac{b}{2a}$ și $n = -\frac{b^2+4ac}{4a}$, primim identitatea:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n.$$

Deci, funcția $y = ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$ poate fi prezentată în forma $y = a(x - m)^2 + n$. De exemplu, funcția $y = 3x^2 - 12x + 8$ se poate scrie așa: $y = 3(x - 2)^2 - 4$.

Din § 10 se știe că graficul funcției $y = a(x + m)^2$ se poate obține cu ajutorul translației cu $|m|$ unități de-a lungul axei x a graficului $y = ax^2$.

Dacă graficul funcției $y = a(x - m)^2$ îl vom deplasa cu $|n|$ unități de-a lungul axei y , vom obține graficul funcției $y = a(x - m)^2 + n$. Deci, cu ajutorul a două translații din graficul funcției $y = ax^2$ se obține graficul funcției $y = a(x - m)^2 + n$, iar de aici și a funcției date $y = ax^2 + bx + c$.

De exemplu, pentru a construi graficul funcției $y = 3x^2 - 12x + 8$ sau $y = 3(x - 2)^2 - 4$ trebuie graficul funcției $y = 3x^2$ de-l deplasat în direcția axei x cu 2 unități (fig. 92), după ce curba II de-o mutat cu 4 unități în jos. Curba III obținută este graficul funcției date.

Din cugetările prezentate reiese că graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$ este parabola $y = a(x - m)^2 + n$. Coordonatele

le vârfului sunt m și n , adică, $-\frac{b}{2a}$ și $-\frac{b^2+4ac}{4a}$.

Pentru a construi graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$ trebuie de aflat coordonatele vârfului parabolei și câteva puncte ale ei, de le notat pe planul de coordonate și de le unit cu o linie lină. Putem să ne folosim de alt procedeu: construim graficul funcției $y = ax^2 + bx$, iar apoi de-l ridicat sau de-l coborât cu $|c|$ unități. Graficul funcției $y = ax^2 + bx$ sau $y = x(ax + b)$ se construiește cu ușurință, deoarece, el intersectează axa absciselor în punctele $x = 0$ și $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplu. Construim graficul funcției $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Rezolvare. Graficul funcției $y = 2x^2 + 4x$, sau $y = x(2x + 4)$ intersectează axa x în punctele $x = 0$ și $x = -2$. Le marcăm pe plan (fig. 93). Aceste puncte sunt simetrice față de axa parabolei care trebuie construită, deci, abscisa vârfului este $x = -1$. Ordonata este egală cu

$$2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2.$$

Notăm punctul $(-1; -2)$. Prin aceste trei puncte trece graficul I al funcției $y = 2x^2 + 4x$.

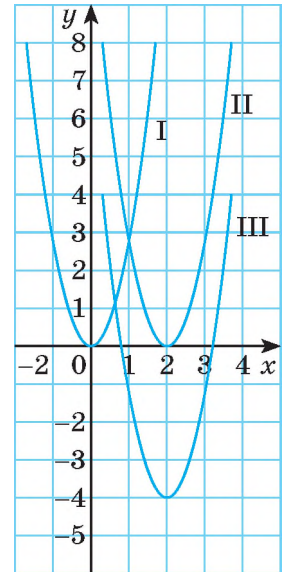


Fig. 92



Construirea
graficului funcției
 $y = 3(x - 2)^2 - 4$

Facem o translație cu 3 unități în sus și obținem graficul II al funcției date $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Analizăm proprietățile funcției $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Graficul funcției este o parabolă. Fie punctul $M(m, n)$ vârful ei, adică

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \quad \text{unde } D = b^2 - 4a$$

Dacă $a > 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Atunci:

- 1) domeniul de definiție al funcției este mulțimea \mathbf{R} ;
- 2) codomeniul este intervalul $[n; \infty)$;
- 3) dacă $x < m$, funcția descreește, pentru $x > m$ ea crește;
- 4) dacă $D > 0$, funcția are două zerouri: x_1 și x_2 ;
- 5) pe intervalul $(x_1; x_2)$ valorile funcției sunt negative, pe intervalele $(-\infty; x_1)$ și $(x_2; \infty)$ sunt pozitive.

Dacă $a < 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în jos și proprietățile 2), 3), 5) trebuie formulate altfel. Încercați să faceți aceasta independent.

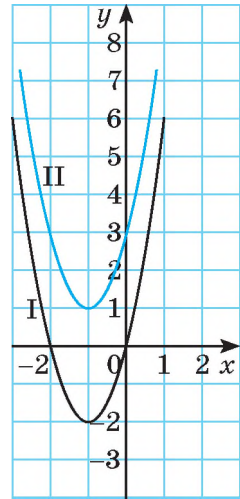


Fig. 93

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT??

Graficul fiecărei funcții de gradul al doilea este o parabolă. Examinăm unele proprietăți ale ei.

Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de la un punct dat și o dreaptă dată. Ilustrăm această afirmație pe exemplul funcției $y = x^2$. Examinăm punctul $F(0; 0,25)$, dreapta l ecuația căreia este $y = -0,25$ și un punct arbitrar al parabolei $M(x, x^2)$ (fig. 94). Fie că perpendiculara MP pe dreapta l intersectează axa absciselor în punctul H . Demonstrăm, că $FM = MP$.

Calculăm FM după formula distanței dintre două puncte:

$$FM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 0,25)^2} = \sqrt{(x^2 + 0,25)^2} = x^2 + 0,25.$$

Deoarece $MP = MH + HP = x^2 + 0,25$, pentru fiecare valoare x $MF = MP$.

Punctul F și dreapta l care au astfel de proprietăți se numesc *focar* și *directoare* a parabolei date..

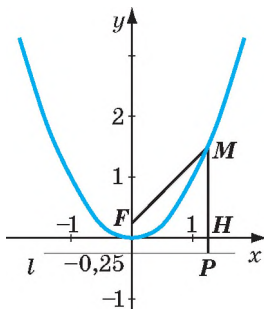


Fig. 94

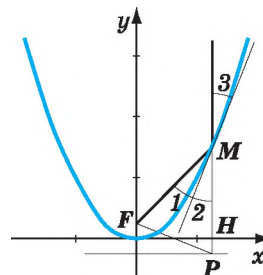


Fig. 95

Interesantă și foarte importantă este următoarea proprietate a parabolei. Deoarece $\triangle FMP$ este isoscel, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (fig. 95). De aceea raza care pleacă din focarul F și cade astfel pe o porțiune a parabolei în apropierea punctului M , se reflectă astfel, că unghiul de cădere ($\angle 1$) este egal cu unghiul de reflexie ($\angle 3$). Deci, raza reflectată este paralelă cu axa y . Dacă secțiunea axială a unei oglinzi concave are forma parabolei, toate razele reflectate de ea nu se vor dispersa, dar vor forma un fascicul de raze paralele. Această proprietate se aplică în reflectoare care trebuie să lumineze obiecte îndepărtate și invers, dacă pe o astfel de oglindă cad raze paralele axei ei Oy , reflectându-se, ele toate trec prin focarul F . În rezultat corpul fizic care este situat lângă focarul F poate fi încălzit puternic.

Verificați-vă

1. Care funcții se numesc de gradul al doilea?
2. Cum se numește linia care este grafic al funcției de gradul al doilea?
3. Indicați proprietățile funcției $y = ax^2 + bx + c$.
4. Care sunt coordonatele vârfului parabolei, care este graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$?
5. Care este condiția, ca graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$ să intersecteze axa x ?
6. Indicați zerourile funcției $y = ax^2 + bx$.
7. Cum se construiește graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$?
8. Prin ce se deosebesc graficele funcțiilor $y = ax^2 + bx + c$ și $y = x^2$?
9. Care este condiția ca graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$:
 - a) să fie cu ramurile îndreptate în sus;
 - b) să fie cu ramurile îndreptate în jos;
 - c) să se atingă de axa x ;
 - d) să intersecteze axa absciselor?

Efectuăm împreună

- 1 Oare intersectează graficul funcției $y = 5x^2 + x + 3$ axa absciselor?
 - **Rezolvare.** Dacă graficul funcției intersectează axa absciselor într-un punct, valoarea funcției în el este egală cu 0. Problema se reduce la alta: oare are soluții ecuația $5x^2 + x + 3 = 0$? Discriminantul ei $D = 1 - 60 < 0$, ecuația nu are soluții.

Răspuns. Nu intersectează.

- 2 Graficul funcției $y = 2x^2 - 7x + n$ intersectează axa ordonatelor y în punctul $y = 5$. În care puncte el va intersecta axa absciselor?
 - **Rezolvare.** Punctul cu coordonatele 0 și 5 aparține graficului. De aceea trebuie să se realizeze egalitatea $5 = 0 - 0 + n$, de unde $n = 5$. Deci, funcția este

$y = 2x^2 - 7x + 5$. Aflăm zerourile ei: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2,5$.

Răspuns. În punctele $A(-2,5; 0)$ și $B(-1; 0)$.

3 Construiți graficul funcției $y = 2x^2 - 4x$.

● **Rezolvare.** La început construim graficul funcției mai simple $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$. El intersectează axa x în punctele $O(0; 0)$ și $B(2; 0)$ (fig. 96). Ele sunt simetrice față de axa parabolei, care trece prin mijlocul segmentului OB . De aceea vârful parabolei este punctul cu abscisa $x = 1$ și ordonata $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$. Marcăm acest punct $M(1; -2)$ și trasăm prin el axa.

Marcăm punctul de control $K(-1; 6)$ și punctul simetric lui față de axa parabolei $K_1(3; 6)$.

Unim cu o linie lină punctele marcate și obținem graficul funcției $y = 2x^2 - 4x$ (curba I).

Apoi deplasăm graficul funcției $y = 2x^2 - 4x$ cu 3 unități în jos și avem graficul funcției $y = 2x^2 - 4x - 3$ (curba II).

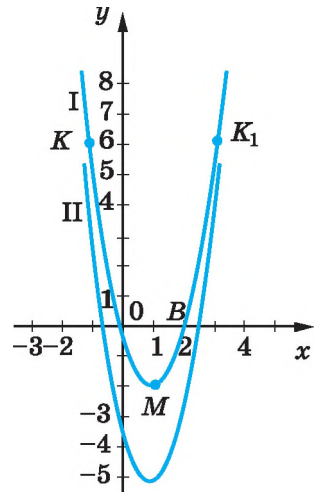


Fig. 96

Efectuați oral

433. Indicați proprietățile principale ale funcției $y = 2x^2$.

434. Indicați zerourile funcțiilor:

a) $y = 2x^2$; b) $y = x^2 - 7x$; c) $y = x^2 - 9$.

435. Pe fig. 97 este reprezentat graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$. Indicați:

- a) domeniul de definiție al funcției;
- b) semnul coeficientului a ;
- c) abscisa și ordonata vârfului parabolei;
- d) codomeniul funcției;
- e) zerourile funcției;
- f) intervalele pe care funcția crește și pe care descrește;
- g) intervalele pe care funcția are valori pozitive, -negative;
- h) cea mai mică valoare a funcției.

436. Aflați coordonatele vârfului parabolei:

- a) $y = (x - 3)^2$;
- b) $y = 2(3 - x)^2$;
- c) $y = (x - 5)^2 + 2$;
- d) $y = 2(5 - x)^2 - 3$;
- e) $y = 2(x + 1)^2 + 1$;
- f) $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

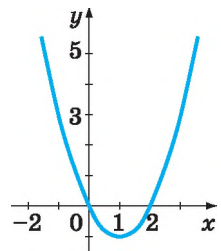


Fig. 97

437. Rezolvați rebusul (în limba ucraineană; fig. 98).

Nivelul A

Constriți graficul funcțiilor (438–439).

438. a) $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
 b) $y = -2x^2$, $y = -0,5x^2$, $y = -0,5x^2 - 2$.

439. a) $y = (x - 1)^2$; c) $y = x^2 - 6x + 9$;
 b) $y = x^2 - 2x + 1$; d) $y = x^2 + 4x + 4$.

440. În care puncte axa x se intersectează cu graficul funcției:

a) $y = x(x - 2)$; d) $y = 3x^2 + 5x$;
 b) $y = -x(3x + 5)$; e) $y = 2x^2 - 6x$;
 c) $y = x^2 - 2x$; f) $y = -3x^2 + 4x$?

441. Pe fig. 99, a , b , c sunt date graficele funcțiilor de gradul al doilea. Aflați după grafic pentru fiecare din ele:

- semnul discriminantului;
- semnul primului coeficient;
- coordonatele vârfului parabolii;
- zerourile funcției;
- intervalele pe care funcția crește, descrește.

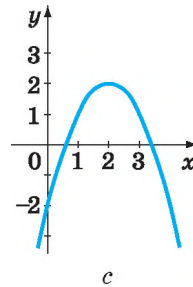
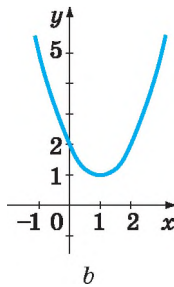
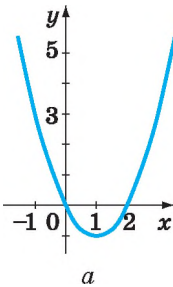


Fig. 99

442. Aflați coordonatele vârfului parabolii fără a constui graficul funcțiilor

a) $y = x^2 + 4$; c) $y = x(x - 4)$; e) $y = x^2 + 4x$;
 b) $y = 2x^2 - 6$; d) $y = x(2x + 6)$; f) $y = -8x - 3x^2$.

443. Constriți graficele funcțiilor:

a) $y = (x - 1)^2 + 2$; c) $y = (x + 4)^2 + 2$;
 b) $y = (x + 2)^2 + 1$; d) $y = (x - 4)^2 - 3$.

444. Constriți parabolile, evidențiind pătratul binomului:

a) $y = x^2 + 4x + 5$; d) $y = 1 + 4x - x^2$;
 b) $y = x^2 - 6x + 5$; e) $y = 4x^2 - 4x + 5$;
 c) $y = x^2 - 2x - 1$; f) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

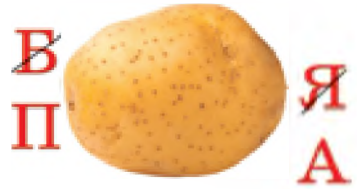


Fig. 98

Construiți graficele funcțiilor (445–446).

445. a) $y = x^2 - 2x + 5$;

b) $y = x^2 + 2x - 3$;

c) $y = x^2 + 2x + 4$;

d) $y = x^2 - 2x - 3$.

446. a) $y = x^2 - 2x - 8$;

b) $y = x^2 - 4x - 5$;

c) $y = x^2 + 2x + 6$;

d) $y = x^2 - 4x + 3$.

447. Punctul $M(3; 5)$ este vârful parabolei $y = x^2 + mx + n$. Aflați: a) m și n ; b) în care puncte graficul intersectează axa y .

448. Aflați p și q dacă graficul funcției $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele $P(1; 4)$; $Q(-1; 10)$.

449. Graficul funcției $y = x^2 - 5x + c$ intersectează axa y în punctul $A(0; 4)$. În care puncte el intersectează axa x ?

450. Graficul funcției $y = x^2 - 3x + c$ intersectează axa y în punctul $A(0; 3)$. Oare intersectează el axa x ?

451. Construiți graficul funcției, indicați intervalele pe care funcția crește (descrește):

a) $y = x(x - 2)$;

c) $y = x^2 - 6x$;

e) $y = 3x^2 + 12x$;

b) $y = x(5 - x)$;

d) $y = 2x - x^2$;

f) $y = x - 2x^2$.

452. Pentru care valori ale argumentului funcțiile date au cele mai mici valori:

a) $y = x(x - 6)$;

b) $y = (x - 3)^2 + 1$;

c) $y = x^2 + 2x$?

Nivelul B

Fără a construi graficul funcției efectuați sarcinile (453–454).

453. Pentru care valoare a lui c graficul funcției $y = x^2 - 5x + c$:

a) trece prin originea de coordonate;

b) este tangent la axa x ;

c) intersectează axa x în punctul $A(3; 0)$;

d) intersectează axa y în punctul $B(0; -5)$?

454. Pentru care valoare a lui b graficul funcției $y = x^2 + bx + 4$:

a) este tangent la axa x ;

b) nu are puncte comune cu axa x ;

c) intersectează axa x în punctul $A(4; 0)$;

d) intersectează axa x în punctele, distanța dintre care este egală cu 3?

Construiți graficul funcțiilor de gradul al doilea (455–461).

455. a) $y = x^2 + x + 1$; c) $y = x^2 - x + 1$;
 b) $y = x^2 - (x + 2)$; d) $y = x(x + 1) - 3$.
456. a) $y = -x^2 + 3x + 1$; c) $y = -x^2 - 2x + 3$;
 b) $y = 1 - 2x - x^2$; d) $y = 4x - (x^2 - 1)$.
457. a) $y = 1 + x - x^2$; c) $y = 4 - x - x^2$;
 b) $y = 2 + x(1 - x)$; d) $y = 3 - x(x - 2)$.
458. a) $y = (x - 1)(x + 2)$; c) $y = (x + 2)(x - 3)$;
 b) $y = (x - 2)(x + 3)$; d) $y = 2(3 + x)(x - 1)$.
459. a) $y = (2x - 1)^2 + 3$; c) $y = (0,5x + 2)^2 - 3$;
 b) $y = 1 - (x + 3)^2$; d) $y = 4(0,5x + 1)^2 - 1$.
460. a) $y = 3x^2 + 3x - 1$; c) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
 b) $y = 2x^2 - 4x + 5$; d) $y = -x^2 + x - 3$.
461. a) $y = 0,5x^2 - x + 2$; c) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$;
 b) $y = 0,3x^2 - 0,6x + 1$; d) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.
462. Aflați intervalele de creștere și descreștere ale funcțiilor:
 a) $y = x^2 + 2x$; c) $y = x^2 - 4x + 3$; e) $y = (1 - x)^2$;
 b) $y = 1 - x^2$; d) $y = x(x + 4)$; f) $y = x^2 + x + 1$.
463. Pentru care valori ale lui x funcțiile date au cele mai mici valori:
 a) $y = x^2 - 6x + 9$; c) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
 b) $y = x^2 + 4x + 7$; d) $y = 4x^2 - 4x + 1$?
464. Aflați valoarea cea mai mare a funcțiilor:
 a) $y = 3 - (x - 2)^2$; c) $y = 6x - x^2 - 10$;
 b) $y = -0,25(x + 5)^2$; d) $y = -5x^2 + 4x + 1$.
465. a) Valoarea cea mai mică a funcției $y = x^2 - 6x + c$ este egală cu -5 . Construiți graficul ei.
 b) Valoarea cea mai mare a funcției $y = c + 4x - 4x^2$ este egală cu 4 . Construiți graficul ei.
466. Aflați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor:
 a) $y = x^2$ și $y = (x - 4)^2$;
 b) $y = 2x^2$ și $y = -x^2 + 3$;
 c) $y = 3x^2 + 7$ și $y = 3x^2 + 2x + 1$.
467. Aflați distanța dintre vârfurile parabolilor care sunt graficele funcțiilor:
 a) $y = (x - 3)^2$ și $y = (x - 3)^2 + 7$;
 b) $y = x^2$ și $y = (x + 5)^2$;
 c) $y = x^2 - 2x + 5$ și $y = x^2 - 2x - 4$;
 d) $y = x^2 + 4x + 5$ și $y = -x^2 - 4x - 5$.

468. Aflați distanța de la vârful parabolei, ecuația căreia este $y = x^2 - 6x + 13$ până la axele x , y și originea de coordonate.

469. Aflați valoarea a lui b , dacă graficul funcției $y = x^2 + bx$ este simetric față de dreapta $x = 3$.

470*. Construiți graficul funcției:

a) $y = |x^2 - 4x + 3|$; c) $y = |x^2 + 4x| + 3$;

b) $y = |x^2 + x - 6|$; d) $y = |6x| - x^2 - 5$.

471*. *Problema lui G. Cardano.* Aflați soluția pozitivă a ecuației $x^2 + 6x = 91$ cu ajutorul construcției geometrice.



G. Cardano

Exerciții pentru repetare

472. Înlocuiți literele cu cifre ca egalitatea să se realizeze:

$$\text{PARA} + \text{PARA} = \text{BOLA}.$$

Câte soluții are problema?

Rezolvați inecuațiile (473–474).

473. a) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$;

b) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;

c) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$;

d) $3x - 0,5(1 - 3x) \leq 2,5(x - 3)$.

474. a) $(x - 1)(2 - x) > 0$;

b) $(3 + x)(x + 7) < 0$;

c) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$;

d) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

475. Câte soluții au ecuațiile:

a) $|x - 1| + |x + 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |x + 2| = 3$;

c) $|x - 1| + |x + 2| = 2$;

d) $|x - 1| + |x + 2| = 0$?

Comoara succeselor

✓ Știu care funcții sunt de gradul al doilea:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

✓ Știu că graficul funcției de gradul al doilea este o *parabolă*.

✓ Pot da exemple de funcție de gradul al doilea:

$$y = 3x^2; \quad y = x^2 + x; \quad y = -x^2 + 5; \quad y = 2x^2 - 3x + 2$$

✓ Pot explica algoritmul construirii graficului funcției de gradul al doilea.

✓ Pot să caracterizez funcția după graficul ei.

✓ Știu să rezolv exerciții ce prevăd construirea graficului funcției de gradul al doilea.

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Cum se construiește graficul funcției de gradul al doilea?
- Graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$.

Ramurile sunt îndreptate în sus:

$$a > 0$$

se atinge de axa absciselor

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

Ramurile sunt îndreptate în jos:

$$a < 0$$

intersectează axa absciselor

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

- Tipurile inecuațiilor: stricte, nestricte.
- Proprietățile inecuațiilor numerice p. 69.
- Cum se scriu soluțiile inecuațiilor p. 45.

§ 12

Inecuații de gradul doi

- ➔ Dacă partea stângă a inegalității este expresia $ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$, b , c sunt numere date, iar partea dreaptă este 0, ea se numește *inecuație de gradul al doilea*.

Exemple de inecuații de gradul al doilea:

$$x^2 - 5x + 3 < 0, 2x^2 + 4 \leq 0, -3x^2 + 2x \geq 0, -x^2 + 3x + 7 > 0.$$

Astfel de inecuații este comod de rezolvat cu ajutorul graficelor funcțiilor de gradul al doilea.

Exemplu 1. Rezolvați inecuația $x^2 - 6x + 3 < 0$.

Rezolvare. Construim graficul funcției $y = x^2 - 6x + 3$ (fig. 100). Zerourile ei sunt numerele 1 și 5. Valori negative funcția are numai în acel caz, când variabila x aparține intervalului (1; 5). El este mulțimea soluțiilor inecuației date.

Răspuns. (1; 5).

Este clar, pentru a rezolva aceste inecuații construirea exactă a graficelor funcțiilor de gradul al doilea nu este necesară. Este suficient de determinat direcția ramurilor parabolei și punctele de intersecție ale graficului cu axa x (dacă ele există).

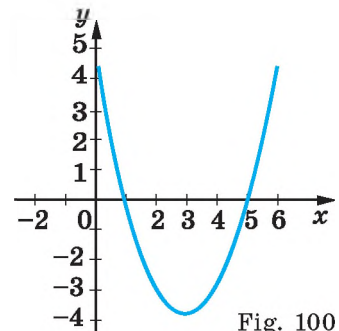


Fig. 100

Exemplul 2. Rezolvați inecuația $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Rezolvare. Graficul funcției $y = -x^2 + 2x + 3$ intersectează axa x în punctele cu abscisele -1 și 3 ; ramurile parabolei sunt îndreptate în jos. Schematic graficul funcției poate fi reprezentat ca pe figura 101. Valorile nepozitive ale funcției sunt atunci, când x aparține intervalului $(-\infty; -1]$ sau $[3; \infty)$.

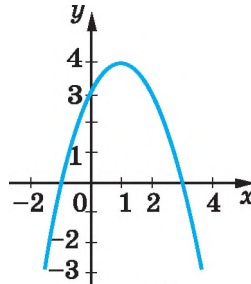


Fig. 101

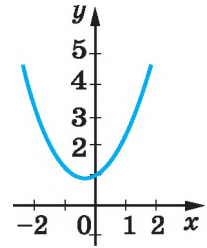


Fig. 102

Deci, mulțimea soluțiilor inecuației este reuniunea acestor intervale. Deoarece reuniunea mulțimilor se marchează cu simbolul \cup , **răspunsul** poate fi scris așa: $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

Exemplul 3. Rezolvați inecuația $x^2 + x + 1 < 0$.

Rezolvare. Discriminantul ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ este negativ, de aceea graficul funcției $y = x^2 + x + 1$ cu axa x nu are puncte comune. Ramurile parabolei sunt îndreptate în sus (fig. 102). Deci, pentru fiecare valoare x valoarea funcției $y = x^2 + x + 1$ este pozitivă.

Răspuns. Inecuația nu are soluții.

Exemplul 4. Rezolvați inecuația $(x + 4)(x + 1) > 0$.

Rezolvare. Expresia $(x + 4)(x + 1)$ este egală identic cu un trinom pătrat cu coeficientul lui x^2 pozitiv. Deci graficul funcției $y = (x + 4)(x + 1)$ este parabola cu ramurile întrepătate în sus și care intersectează axa x în punctele cu abscisele -4 și -1 (fig. 103). Valorile funcției sunt pozitive, când $x < -4$ sau $x > -1$.

Răspuns. $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$.

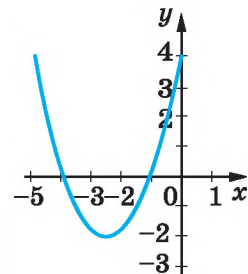


Fig. 103

Deoarece inecuația $\frac{x+4}{x+1} > 0$ este echivalentă inecuației $(x + 4)(x + 1) > 0$, prin acest procedeu (grafic) se pot rezolva și cele mai simple inecuații raționale fracționare.

- Pentru a rezolva inecuațiile de gradul al doilea cu ajutorul graficului este necesar:
- după semnul primului coeficient de stabilit direcția ramurilor parabolei;
 - de aflat soluțiile ecuației pătrate respective, dacă ele sunt;
 - de construit schița graficului funcției de gradul al doilea;
 - de determinat după grafic intervalele pentru x pe care inecuația este justă.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Procedeul după care se rezolvă inecuațiile de gradul al doilea poate fi aplicat și la rezolvarea altor tipuri de inecuații.

Exemplu. Să se rezolve inecuația $(x-1)(x-2)(x+5) < 0$.

Această problemă este echivalentă cu următoarea: pentru care valori x valorile funcției $y = (x-1)(x-2)(x+5)$ sunt negative?

Pentru a răspunde la întrebarea definită, aflăm întâi zerourile funcției: 1, 2 și -5 . Ele împart domeniul de definiție în patru intervale: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 2)$ și $(2; \infty)$. Pe fiecare interval fiecare factor al produsului $(x-1)(x-2)(x+5)$ are un semn precis. Prezentăm semnele lor și a produsului în următorul tabel:

Factorul	$(-\infty; -5)$	$(-5; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$x - 1$	—	—	+	+
$x - 2$	—	—	—	+
$x + 5$	-	+	+	+
y	—	+	—	+

Pe figura 104 este reprezentată schița graficului funcției y .

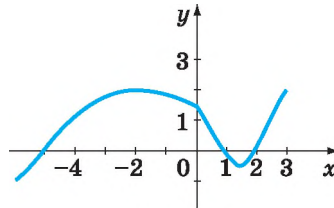


Fig. 104

Deci, funcția obține valori negative pe intervalele $(-\infty; 5)$ și $(1; 2)$.

Răspuns. Mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty; 5) \cup (1; 2)$.

În exemplul cercetat intervalele pe care valorile funcției sunt pozitive alternează cu cele pe care valorile funcției sunt negative. Dar nu totdeauna este așa.

Să rezolvăm inecuația $(x+1)^2(x+3)(x-5) \geq 0$.

Partea stângă a inecuației este egală cu zero pentru valorile x egale cu -3 , -1 sau 5 . După ce alcătuim tabelul respectiv ne convingem că partea stângă a inecuației primește valori negative pe intervale vecine $(-3; -1)$ și $(-1; 5)$. Deci, mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty; -3] \cup [5; \infty) \cup \{-1\}$.

Schița graficului funcției $y = (x+1)^2(x+3)(x-5)$ este reprezentată pe figura 105.

Procedeul studiat este un caz particular al *metodei intervalelor*. În clasele superioare îl veți studia mai detaliat.

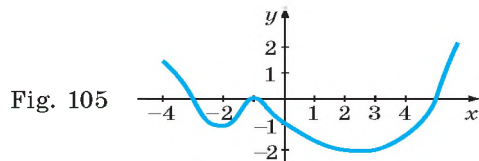


Fig. 105

Verificați-vă

1. Formulați definiția inecuației de gradul al doilea.
2. Dați exemple de inecuații de gradul al doilea.
3. Cu care simbol se notează reuniunea mulțimilor?
4. Câte soluții poate avea inecuația de gradul al doilea?
5. Dați exemple de inecuații de gradul al doilea care:
 - a) nu au nici o soluție;
 - b) au numai o singură soluție;
 - c) sunt satisfăcute de toate numerele reale.

Efectuăm împreună

- Rezolvați inecuațiile:
 a) $x^2 + 3x < 0$; b) $z^2 - 3z - 2 \leq 0$; c) $t^2 + t + 1 > 0$.

- **Rezolvare.** a) Graficul funcției $y = x^2 + 3x$ intersectează axa x în punctele $x = 0$ și $x = -3$, ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Reprezentăm schița graficului (fig. 106) și obținem mulțimea soluțiilor inecuației $(-3; 0)$.

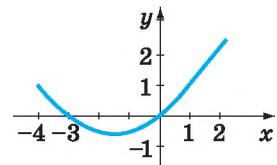


Fig. 106

- b) Aflăm rădăcinile ecuației $z^2 - 3z - 2 = 0$.

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17; \quad z_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \quad z_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Ramurile parabolei sunt îndreptate în sus, de aceea mulțimea soluțiilor căutate este $\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right]$.

c) Rezolvăm ecuația $t^2 + t + 1 = 0$: $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. Coeficientul lui t^2 este pozitiv și ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Ea este situată în semiplanul de sus. Deci, mulțimea soluțiilor inecuației este mulțimea R .

Răspuns. a) $(-3; 0)$; b) $\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right]$; c) R .

Efectuați oral

476. Numiți inecuațiile de gradul al doilea:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$;

d) $x^3 - 2x + 6 \geq 0$;

b) $3x^2 + 6 \leq 0$;

e) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \geq 0$;

c) $-2x^2 - 5x + 7 \leq 0$;

f) $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$.

477. Determinați direcția ramurilor graficului funcțiilor:

- a) $y = 4x^2 - 16x + 5$; d) $y = 6x^2 + 5x$; g) $y = 3x(x - 4)$;
 b) $y = -x^2 + 4x + 3$; e) $y = 7 - 4x - x^2$; h) $y = -x(x + 3)$;
 c) $y = 3x^2 - 7$; f) $y = 5 + 7x - 5x^2$; i) $y = (x - 1)(2 - x)$.

478. Oare intersectează axa absciselor graficul funcțiilor:

- a) $y = x^2 - 2x + 3$; c) $y = 3x^2 - x$; e) $y = 5x^2 + 3x - 1$;
 b) $y = -x^2 + 7x - 5$; d) $y = 3x^2 - x + 3$; f) $y = x(7x - 1)$?

479. De ce inecuațiile nu au soluții:

- a) $3x^2 < -3$; c) $3x^2 - x + 1 < 0$; e) $-(1 - x)^2 > 0$;
 b) $(x - 2)^2 + 1 \leq 0$; d) $-x^2 \geq 2$; f) $2x^2 < x - 1$?

Nivelul A

480. Reprezentați pe axa de coordonate reuniunea intervalelor:

- a) $(-\infty; 2]$ și $[3; \infty)$; c) $[2; 4]$ și $(5; 7)$; e) $[-4; 2]$ și $[2; 3]$;
 b) $(-4; 3)$ și $(4; 7)$; d) $(-\infty; 3)$ și $(3; 7)$; f) $(-\infty; 1)$ și $(1; 4)$.

Rezolvați inecuațiile (481 – 487).

481. a) $x^2 - 4x < 0$; c) $z^2 + 6z - 7 \leq 0$; e) $2x^2 + 7x \geq 0$;
 b) $x^2 + 6x \leq 0$; d) $6x^2 - x > 0$; f) $y^2 - 4y - 5 < 0$.
482. a) $x^2 - 6x + 9 > 0$; d) $z^2 + z + 0,25 \leq 0$;
 b) $y^2 - 8y + 16 < 0$; e) $x^2 > 2x - 1$;
 c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$; f) $y^2 \geq 4y - 4$.
483. a) $x^2 \leq 3x - 2$; d) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$;
 b) $t^2 + 9 < 6t$; e) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$;
 c) $x^2 - 4x + 3 > 0$; f) $x^2 - 2x + 9 < 0$.
484. a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$; d) $y^2 - 4y < 12$;
 b) $x^2 + 8 < 6x$; e) $-x^2 + 3x - 2 > 0$;
 c) $0,5x^2 - x - 2 > 0$; f) $11z \geq z^2 + 18$.
485. a) $2 - 3y \leq y^2$; d) $4x(x + 1) < 15$;
 b) $12x - 36 < x^2$; e) $-2x^2 > 2x + 3$;
 c) $3z^2 \leq 5z + 12$; f) $6(t^2 + 1) < 13t$.
486. a) $x(x - 3) < -2$; d) $8 - (5 - y)^2 > 3y$;
 b) $2(z^2 + 5) > 9z$; e) $(x - 3)(x + 5) > 0$;
 c) $x(2 - x) \geq 4$; f) $(x + 2)(x + 7) < 0$.
487. a) $(x + 7)(x - 1) \geq 0$; d) $(a + 2)(a - 5) \leq 0$;
 b) $(x - 3)(x - 5) \leq 0$; e) $(t + 3)(t + 4) \geq 0$;
 c) $(x - 2)(x + 3) < 0$; f) $(2 - c)(3 - c) \geq 0$.

488. Pentru care valori ale lui x valorile funcției $y = x^2 + 3x$ sunt negative, iar pentru care sunt pozitive?

489. Pentru care valori ale lui x valorile funcției $y = f(x)$ sunt pozitive, iar pentru care sunt negative, dacă:

a) $f(x) = x^2 - 4$;

c) $f(x) = x^2 + 6x - 7$;

b) $f(x) = 9 - x^2$;

d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

490. Aflați domeniul de definiție al funcției:

a) $y = \sqrt{x^2 - 4}$;

c) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$;

e) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$;

b) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

d) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$;

f) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

491. Aflați soluțiile întregi ale inecuației:

a) $x^2 + 5x - 6 < 0$;

c) $x^2 - x - 6 < 0$;

e) $x^2 + 2x - 8 < 0$;

b) $x^2 - 5x - 6 \leq 0$;

d) $6 - x^2 \geq x$;

f) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

Nivelul B

Rezolvați inecuațiile (492 – 496).

492. a) $(2 - x)(3 - x) \leq 2$;

d) $(x + 2)(x + 3) \geq 10x$;

b) $(x + 4)(x - 5) < 10$;

e) $(3 - 2x)(x + 1) \leq 2$;

c) $(1 - z)(2 + z) > 2$;

f) $3(x^2 + 1) \leq 5x + 1$.

493. a) $2(x - 3)(1 - 2x) > 6$;

d) $1 - x > 2(x^2 + 1)$;

b) $4(x^2 - 9) > x + 3$;

e) $-x(2 - x) \leq 5 - 4x^2$;

c) $x(x - 2) > 2 - 3x^2$;

f) $3 - x < 3(x^2 + 3)$.

494. a) $\frac{x-3}{x+2} < 0$;

c) $\frac{4-x}{2x+5} > 0$;

e) $\frac{3x-2}{5-2x} < 0$;

b) $\frac{x+2}{x-7} > 0$;

d) $\frac{2x-1}{3-x} < 0$;

f) $\frac{4z-1}{3-2z} > 0$.

495. a) $\frac{x-1}{x+3} < 1$;

c) $\frac{3x-1}{2x+5} > 3$;

e) $\frac{x^2}{2-x} \leq 3 - x$;

b) $\frac{x+4}{x-1} > 5$;

d) $\frac{7x+4}{3-2x} \geq 2$;

f) $\frac{2}{2-x} \geq \frac{x-8}{10-x}$.

496. a) $\frac{x+5}{x+7} \geq 0$;

c) $\frac{x}{1-x} \leq 0$;

e) $\frac{x+3}{1+3x} \leq 1$;

b) $\frac{2-x}{3-x} \leq 0$;

d) $\frac{2x+1}{x-7} < 1$;

f) $\frac{5x-1}{1-x} \geq 1$.

497. Rezolvați inecuațiile:

a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$;

b) $(x - 2)(x + 2) + x(x + 7) \leq 0$;

c) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) \geq 10$;

d) $(x - 4)(3x + 1) < (2x - 6)(x - 2) + 4$.

Rezolvați inecuațiile prin metoda intervalelor (498–502.).

498*. a) $(x^2 - 3x + 2)(x + 7) \geq 0$;
 b) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) < 0$;
 c) $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$.

499*. a) $(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4x + 5) \leq 0$;
 b) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$;
 c) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) > 0$.

500*. a) $(x^2 - 1)(3x - 2x^2 + 5) \geq 0$;
 b) $(x^2 + 3x - 10)(4 - x^2) < 0$;
 c) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 9) > 0$.

501*. a) $\frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 2x - 3} \leq 0$; b) $\frac{2x^2 - 3}{4x - 1} \geq \frac{x}{2}$; c) $1 > \frac{8 - 3x}{3x^2 - 2x - 16}$.

502*. a) $\frac{5x^2 - 9x - 2}{11x - 2 - 5x^2} > 0$; b) $4 > \frac{4 - 3x}{3x^2 - x - 4}$; c) $\frac{x + 1}{1 - x} < 2x$.

503. Pentru care valori ale lui x valorile funcției $y = 2x + 2$ sunt mai mari decât valorile respective ale funcției:

a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = 4x^2 + 9x - 13$?

504. Aflați domeniul de definiție al funcției:

a) $y = \sqrt{8 + 7x - x^2}$;

d) $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$;

b) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^2 - 3x - 4}$;

e) $y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{4 + x - 5x^2}}$.

c) $y = \sqrt{x^3 - x^2 - 25x + 25} - \sqrt{\frac{5}{x^2 + 6x + 9}}$;

505. Pentru care valori ale lui b inecuațiile nu au soluții:

a) $x^2 + 2bx + 1 < 0$;

c) $(b - 1)x^2 + 3b > 2bx$;

b) $bx^2 + 6x + 1 < 0$;

d) $b(x^2 + 1) \leq bx + 9$?

506. Pentru care valori ale lui m fiecare număr real satisface inecuațiile:

a) $x^2 - mx + 4 > 0$;

c) $mx^2 + m + 3 < 4x$;

b) $x^2 - 6x + m \geq 0$;

d) $mx^2 + 4x + 2m < 1$?

Rezolvați sistemul de inecuații (507-508).

507. a) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0. \end{cases}$

508. a) $\begin{cases} x^2 - 3 > 2x, \\ x^2 + 28 \geq 11x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 1 > 4x, \\ 3x^2 + 2 \leq 5x. \end{cases}$

« Sunt scumpe nu acele cunoștințe care se depun în creier ca grăsimi; sunt scumpe acelea care se transformă în mușchi intelectuali».

G. Spencer

509. Rezolvați inecuațiile duble:

a) $0 < x^2 - 5x < 6$;

b) $1 < x^2 + 2 < 3x$;

c) $x < 2x + 3 < x^2$;

d) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$.

510. Rezolvați inecuațiile prin metoda grafică:

a) $x^2 < x + 2$;

b) $(x - 2)^2 \geq |x|$;

c) $2x^2 < 1 + \sqrt{x}$;

d) $x^2 - 3,5x \geq \sqrt{x}$.

Exerciții pentru repetare

511. Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y = -4, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -16, \\ 3x + 5y = 9. \end{cases}$

512. Prietenii au procurat un cadou comun în valoare de 260 grn. Dacă ei erau cu 3 persoane mai multe, contribuția fiecărui ar fi fost cu 6 grn. mai mică. Câte persoane au procurat cadoul?

Aduceți la forma cea mai simplă expresiile (513–514).

513. a) $9x^2y \cdot (-0,5x^2y)$; b) $(-0,5ab^3) \cdot (-24a^2b^3)$.

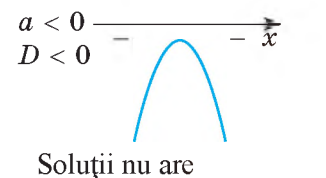
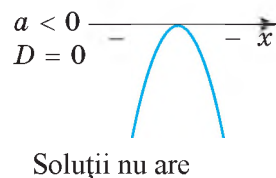
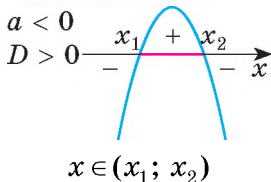
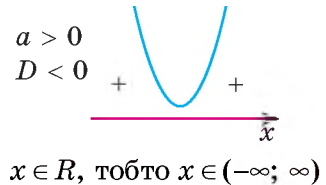
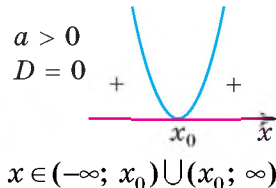
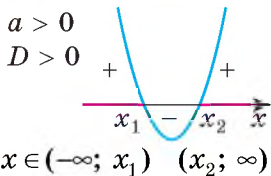
514. a) $\frac{a^2 - 4b^2}{ab} : \frac{a^2 - 2ab}{3b}$; b) $\frac{x + x^3}{y^2 - 9} : \frac{9 - x^2}{2y - 6}$.

Comoara succeselor

✓ Pot da exemplu de ecuație de gradul al doilea cu o variabilă:

$2x^2 + 3x + 1 > 0$ $x^2 + 1 > 0$ $x^2 - 3x < 0$ $-0,5x^2 - x + 2 \leq 0$

✓ Știi a rezolva inecuații de gradul al doilea și a scrie soluțiile lor. Dacă $ax^2 + bx + c > 0$ și $D = b^2 - 4ac$, atunci:



✓ Doresc să învăț a rezolva inecuațiile prin metoda intervalelor.

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este sistemul de ecuații liniare (p. 261).
- Ce este soluția sistemului de ecuații cu două variabile (p. 261).
- Cum se rezolvă sistemul de ecuații prin metoda grafică.
- Care figură este graficul ecuației:

$$y = x^2 \text{ și } y = ax^2 + bx + c \text{ — parabolă}$$

$$y = \frac{k}{x} \text{ — hiperbolă}$$

$$y = \sqrt{x} \text{ — ramură a parabolei}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ și } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ — circumferință}$$

- Câte soluții poate avea sistemul a două ecuații liniare cu două variabile.

§ 13 | Sisteme de ecuații de gradul al doilea

Cu noțiunea de «sistem de ecuații» ați făcut cunoștință în clasa a 7-a. Ați examinat sistemul de două ecuații liniare cu două variabile și procedeele rezolvării lor. În practică deseori trebuie de examinat sisteme ce conțin ecuații de gradul al doilea.

Exemple de ecuații de gradul al doilea cu două variabile:

$$x^2 + 2y^2 = 9, 8z - t^2 = 12, 0,5xy + y = 0.$$

Fiecare ecuație are două variabile și cel puțin un termen de gradul al doilea referitor la aceste variabile. Adică, sau o variabilă este la pătrat, sau produsul a două variabile.

Exemple de ecuații de gradul întâi, al treilea și al patrulea:

$$x - 2y = 0, 5x^2y + 10 = 0, x^2z^2 - x^2 + z = 0$$

➔ **Dacă sistemul este format dintr-o ecuație de gradul al doilea și una de gradul întâi sau al doilea cu aceleași variabile, sistemul se numește *sistem de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile*.**

Reamintim. *Soluție a ecuației* cu două variabile se numește fiecare pereche de numere care transformă această ecuație în egalitate justă.

Soluție a sistemului de ecuații se numește soluția comună a tuturor ecuațiilor lui.

A rezolva sistemul de ecuații înseamnă a afla mulțimea tuturor soluțiilor ei.

De exemplu, pentru ecuațiile $x^2 + y - 5 = 0$ și $x - y + 3 = 0$ soluțiile comune sunt perechile de numere $(-2; 1)$ și $(1; 4)$ (fig. 107). Verificați oral. Alte soluții comune aceste ecuații nu au.

Deci, sistemul $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ are două soluții, el este satisfăcut de două perechi

de numere: $(-2; 1)$ și $(1; 4)$.

Există diferite procedee de rezolvare a sistemelor de ecuații. Principalele sunt:

- procedeul substituției;
- procedeul adunării algebrice;
- procedeul grafic.

Demonstrăm pe exemple concrete cum se aplică aceste metode la rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea.

Exemplu. Rezolvați sistemul de ecuații:

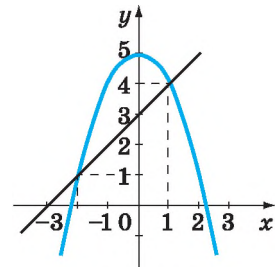


Fig. 107

a) $\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

Rezolvare. a) *Procedeul adunării.* Adunăm sistemele de ecuații, avem $3x^2 = 27$, de unde $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Deoarece $x^2 = 9$, din ecuația a doua aflăm $y_1 = y_2 = 1$.

Deci, sistemul are două soluții: $(3; 1)$ și $(-3; 1)$.

b) *Procedeul substituției.* Exprimăm x^2 din ecuația a doua prin y și substituim în prima ecuație:

$$2(y + 5) - y^2 = 2 \text{ sau } y^2 - 2y - 8 = 0.$$

După teorema lui Viete aflăm soluțiile $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

Dacă $y = 4$, atunci $x^2 = 9$, de unde $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Dacă $y = -2$, atunci $x^2 = 3$, de unde $x_3 = \sqrt{3}$,

$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

Deci, sistemul dat are 4 soluții: $(3; 4)$, $(-3; 4)$, $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$.

c) *Procedeul grafic.* Graficul primei ecuații este circumferința cu centrul în originea de coordonate și raza egală cu 5 unități.

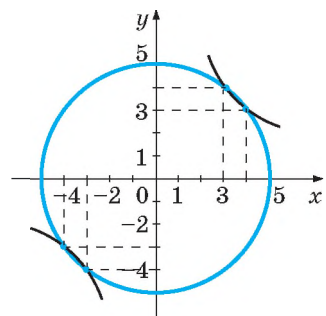


Fig. 108

Graficul ecuației a doua este hiperbola $y = \frac{12}{x}$.

Construim graficele acestor ecuații într-un sistem de coordonate (fig. 108) și determinăm coordonatele punctelor de intersecție.

Din grafic vedem că sistemul are 4 soluții: $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$.

Răspuns. a) $(3; 1)$ și $(-3; 1)$; b) $(-3; 4)$, $(3; 4)$, $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$;

c) $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Pentru rezolvarea unor tipuri de sisteme se aplică *procedeele înlocuirii variabilelor*. Rezolvăm prin această procedeu astfel de sisteme de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 4x + (x - 2y)^2 = 1, \\ (x - 2)^2 + 2y - x = 3. \end{cases}$$

Rezolvare. a) $\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x + y = 11 - xy, \end{cases}$ de unde $xy(11 - xy) = 30$.

Înlocuind $xy = a$ din ultima ecuație, avem: $a^2 - 11a + 30 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt 5 și 6.

Dacă $xy = 5$, atunci $x + y = 6$; dacă $xy = 6$, atunci $x + y = 5$. Obținem două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Rezolvând ambele sisteme, obținem soluțiile sistemului dat:

a) $(5; 1)$, $(1; 5)$; $(3; 2)$, $(2; 3)$.

b) Formăm pătratul complet al binomului în primul sistem de ecuații. Avem:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 - 4 + (x - 2y)^2 = 1, \\ (x - 2)^2 + 2y - x = 3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (x - 2)^2 + (x - 2y)^2 = 5, \\ (x - 2)^2 - (x - 2y) = 3. \end{cases}$$

Introducem variabile noi: $a = x - 2$, $b = x - 2y$. Atunci sistemul dat are forma:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 - b = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Dacă din prima ecuație scădem a doua, obținem ecuația pătrată cu o variabilă $b^2 + b = 2$, care are soluțiile $b_1 = -2$ și $b_2 = 1$.

Înlocuim această valoare în sistemul (*) și aflăm valorile respective ale variabilei a .

Dacă $b_1 = -2$, atunci $a^2 + 2 = 3$, de unde $a_1 = -1$ sau $a_2 = 1$.

Dacă $b_2 = 1$, atunci $a^2 - 1 = 3$, de unde $a_3 = -2$ sau $a_4 = 2$.

Deci, soluțiile sistemului (*) sunt perechile de numere:

$(-1; -2)$, $(1; -2)$, $(-2; 1)$, $(2; 1)$.

Pentru a afla soluțiile sistemului dat trebuie de trecut la variabilele x și y și de rezolvat (se poate oral) sistemele respective:

$$\begin{cases} x-2=-1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=-2, \\ x-2y=1; \end{cases} \begin{cases} x-2=2, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Obținem: (1; 1,5), (3; 2,5), (0; -0,5), (4; 1,5).

Răspuns. a) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3); b) (1; 1,5), (3; 2,5); (0; -0,5), (4; 1,5).

Verificați-vă

1. Dați exemple de ecuații de gradul al doilea cu două variabile.
2. Ce este soluția ecuației cu două variabile?
3. Câte soluții poate avea ecuația cu două variabile?
4. Care figură este graficul ecuațiilor: a) $y = x^2$; b) $x^2 + y^2 = 4$;
c) $(x-1) + (y-2)^2 = 9$; d) $y^2 = x^2$
5. Ce este sistemul de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile?
6. Câte soluții poate avea sistemul de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile?
7. Numiți procedeele principale de rezolvare ale sistemului de ecuații de gradul al doilea cu două variabile.

Efectuăm împreună

1 Rezolvați sistemul de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} xy - x^2 = 2, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

- **Rezolvare.** a) Adunăm membru cu membru ecuațiile sistemului dat, obținem ecuația $2x^2 = 72$, soluțiile cărei sunt -6 și 6 . Înlocuind cu orice valoare din acestea în ecuația a doua a sistemului obținem $36 - y^2 = 11$, care are soluțiile -5 și 5 . Deci, sistemul are patru soluții: (6; 5), (-6; -5), (-6; 5) și (6; -5).

b) Scădem membru cu membru prima ecuație din a doua: $y^2 - 2xy + x^2 = 1$, sau $(y-x)^2 = 1$, de unde $y-x = 1$ sau $y-x = -1$.

Dacă $y-x = 1$, atunci $y = x+1$. Substituim în prima ecuație $xy - x^2 = 2$ în locul lui y expresia $x+1$:

$$x(x+1) - x^2 = 2, x^2 + x - x^2 = 2, x = 2, \text{ atunci } y = 2 + 1 = 3.$$

Dacă $y-x = -1$, atunci $y = x-1$, și din prima ecuație $xy - x^2 = 2$ avem:

$$x(x-1) - x^2 = 2, x^2 - x - x^2 = 2, x = -2 \text{ și } y = -2 - 1 = -3.$$

Deci, sistemul are două soluții: (2; 3), (-2; -3).

Răspuns. a) (6; 5), (-6; -5), (-6; 5), (6; -5); b) (2; 3), (-2; -3).

2 Oare are soluții sistemul de ecuații;

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - x^2? \end{cases}$$

- **Rezolvare.** Construim într-un sistem de coordonate graficele ambelor ecuații. Aceste parabole se intersectează în două puncte (fig. 109).

Răspuns. Sistemul de ecuații are două soluții.

Efectuați oral

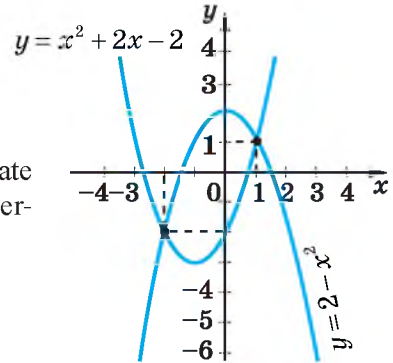


Fig. 109

515. Oare sunt soluție a ecuației $x^2 - 3x = y$ perechile de numere:

- a) (0; 0); c) (0; 3); e) (0; -3);
b) (3; 0); d) (-3; 0); f) (3; 3)?

516. De ce ecuațiile nu au soluții:

- a) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$?

517. Oare este perechea de numere (0; 2), (1; 1), (-1; 1), (2; 0), (3; 3) soluție a sistemului de ecuații:

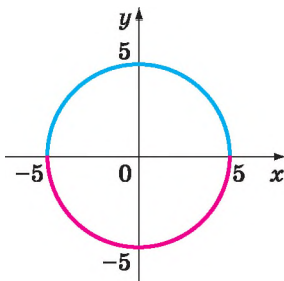
- a) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ xy + 2y = 4? \end{cases}$

518. 1) De ce nu au soluții sistemele de ecuații:

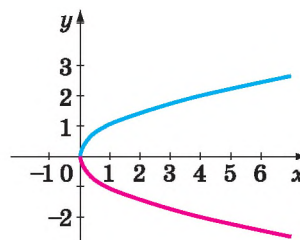
- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4? \end{cases}$

2) *Problemă deschisă.* Alcăuiți un sistem de ecuații de gradul al doilea, care nu are soluții.

519. Care ecuație corespunde graficului (fig. 110): a) cu culoare albastră; b) cu culoare roșie; c) cu culorile albastră și roșie împreună?



a



b

Fig. 110

Nivelul A

520. Construiți graficul ecuațiilor:

a) $x + 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 = 9$; e) $y + \sqrt{x} = 1$;
 b) $xy = 12$; d) $x^2 - y = 2$; f) $y + 1 = (x + 1)^3$.

Oare graficele construite se pot considera grafice ale funcțiilor?

Rezolvați sistemul de ecuații grafic (521–524).

521. a) $\begin{cases} y + x = 1, \\ y + x^2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 6, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$

522. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x - y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 16, \\ x - y = 0. \end{cases}$

523. a) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

524. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

Rezolvați sistemul de ecuații prin procedeul substituției (525–527).

525. a) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy - 2y = 4, \\ y = x - 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ xy = 1. \end{cases}$

526. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - 6 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 1 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

527. a) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 2y^2 = 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x - y = 0; \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda adunării algebrice (528–529).

528. a) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

$$529. \text{ a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 - 2 = xy, \\ y^2 + 1 = xy; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + z^2 = 34, \\ xz = 15; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y = 5xy, \\ x - y = xy. \end{cases}$$

Rezolvați sistemele de ecuații. *Problema lui Diofan*

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 - y^2 = 80. \end{cases}$$

531. Problema lui Ioan din Palerma.

$$\text{a) } \begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} xy - x = 40, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

532. Problema lui Leonardo Fibonacci.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 10, \\ x(x - y) = 24y; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 32y. \end{cases}$$



Diofant din Alexandria

Compuneți sisteme asemănătoare problemelor 530–532 și rezolvați-le

Nivelul B

533. Construiți graficul ecuațiilor:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y^2 - x = 1; & \text{d) } x^2 + y^2 - 2x = 3; \\ \text{b) } x^2 + y^2 = 9; & \text{e) } x^2 - y^2 = 0; \\ \text{c) } (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1; & \text{f) } x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0. \end{array}$$

Oare graficele construite se pot considera grafice ale funcțiilor?

Rezolvați grafic sistemele de ecuații, de asemenea și cel *deschis* (c) (534–536).

$$534. \text{ a) } \begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = |x| - 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 1, \\ y = \frac{3}{x} + 1; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y = x^2 + \Delta + \square, \\ y = \square. \end{cases}$$

$$535. \text{ a) } \begin{cases} y = \sqrt{x - 4}, \\ 3y - x + 2 = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \Delta = 36, \\ xy = \square. \end{cases}$$

$$536. \text{ a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ |x| - y = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ |x| - y = 0; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \Delta - y = 0, \\ y - \square = 0. \end{cases}$$

Rezolvați sistemele de ecuații (537–540).

$$537. \text{ a) } \begin{cases} x^2 - xy = 3,36, \\ 3x + y = 2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 8)(x - 3) = 0; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$$

538. a) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 2x^2-xy=21. \end{cases}$

539. a) $\begin{cases} xy-x-y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x+y-xy=4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5,2, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

540. a) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ x+y^2=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-xy=0, \\ x^2y-4y=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+3y^2=13, \\ 2x^2+y^2=6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

«Dragostea față de științe m-a îndemnat să compun o carte scurtă despre calculele algebrei și al-mukabalei, deoarece acestea sunt necesare oamenilor la împărțirea moștenirii, la alcătuirea testamentelor, la împărțirea averii și în procesele judiciare, în târguială și în diferite contracte, de asemenea, când măsoară pământul, când construiesc canale...».
Al-Horezmi

Rezolvați sistemele de ecuații din lucrările autorilor vestiți (541– 542)

541. Din «Cartea abacului» (a. 1202) a lui Leonardo Fibonacci:

a) $\begin{cases} x+y=12, \\ \frac{xy}{x-y}=4\frac{1}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right)=122\frac{2}{3}. \end{cases}$

542. Din «Algebra» Al-Horezmi (sec. IX):

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}. \end{cases}$

Rezolvați sistemele de ecuații (543–545).

543. a) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y^2+x^2-3xy=4, \\ y^2-x^2+4x=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y^2-4x^2-4x=1, \\ 4x^2+y^2+3xy=1. \end{cases}$

544. a) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+2y^2=6, \\ y^2+4x=9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$



Al-Horezmi

$$545. \text{ a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 90, \\ x(x - 3y) = 0; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 64; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) = 7. \end{cases}$$

Rezolvați sistemele de ecuații prin procedeul substituției variabilelor (546–548).

$$546^*. \text{ a) } \begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2 y + y^2 x = 30; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^3 y^3 = -8, \\ x^3 + y^3 = 7. \end{cases}$$

$$547^*. \text{ a) } \begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}; \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \\ x^2 + y^2 = 160. \end{cases}$$

«Aplicarea substituției variabilelor pentru reducerea obiectelor compuse la mai simple este o idee matematică extraordinară de mănoasă».

A. M. Samoilenko

$$548^*. \text{ a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 12, \\ x^3 + y^3 = 72; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 1,5, \\ y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 6; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 109, \\ x^3 - y^3 = 218; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 26, \\ xy - \frac{y}{x} = 26. \end{cases}$$

549. 3 Aflați numerele a și b , dacă:

$$\text{a) } 3a + 4b = 8ab = 8;$$

$$\text{d) } a^2 + b^2 - 6b = 2a + b = 0;$$

$$\text{b) } a^2 - 0,5b = a - b = 1;$$

$$\text{e) } a^2 + b - 2a = a + b = -1;$$

$$\text{c) } a^2 + ab - 5 = b^2 + ab = 10;$$

$$\text{f) } 3(a - 2)(b + 1) = a - b = 3.$$

550. Aflați distanța dintre punctele de intersecție:

$$\text{a) al dreptei și circumferinței, ecuațiile cărora sunt } x - y = 7 \text{ și } x^2 + y^2 = 169;$$

$$\text{b) al circumferințelor, ecuațiile cărora } x^2 + y^2 = 25 \text{ și } (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1.$$

Construiți graficele respective și verificați prin măsurarea directă sau vizuală, dacă sarcina este efectuată corect. Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare despre hiperbolă.

Exerciții pentru repetare

551. Stabiliți corespondența dintre perechile de funcții $f(x)$ și $g(x)$ (1–4) și distanța dintre punctele (A–E), în care se intersectează graficele acestor funcții.

1 $f(x) = 5 - x$ și $g(x) = 4/x$ A $2\sqrt{17}$

2 $f(x) = \sqrt{x}$ și $g(x) = 0,25(x + 3)$ B $\sqrt{2}$

3 $f(x) = x^2$ și $g(x) = \sqrt[3]{x}$ C $3\sqrt{2}$

4 $f(x) = x^2 - 2x$ și $g(x) = -x^2 + 6x - 6$ D $5\sqrt{3}$

F $2\sqrt{5}$

552. 1) Viteza luminii este egală cu $3 \cdot 10^5$ km/s. Ce distanță parcurge lumina în:
a) 5 s; b) 1 h; c) 1 an?

2) Viteza sunetului în aer este egală aproximativ cu 343 m/s. Ce distanță parcurge sunetul în: a) 5 s; b) 15 s; c) 0,5 min?

3) Ați observat fulgerul, iar peste 10 s ați auzit tunetul. Cum de aflat distanța până la fulger? Oare vă aflați în siguranță la această distanță în aceste condiții?

Atrageți atenția! Fulgerul se deplasează foarte repede și poate lovi oamenii ce sunt la distanța de 15 km până la el.

553. Aflați suma și diferența fracțiilor:

a) $\frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$ și $\frac{1}{2x^2 - 7x + 3}$; b) $\frac{2}{6a^2 - 13a + 6}$ și $\frac{1}{3a^2 - 11a + 6}$.

554. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{2a^2 - 5a + 2}{3a^2 - 3,5a + 1}$; b) $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$; c) $\frac{c^2 + \sqrt{5}c - 10}{c^2 - 3\sqrt{5}c + 10}$.

Comoara succeselor

- ✓ Înteleg ce este sistemul de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile și ce este soluția lui. Pot da exemple.

Sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1 \end{cases}$ are soluțiile (1; 1) și (-1; -1).

- ✓ Știu procedeele principale de rezolvare ale sistemului de ecuații de gradul al doilea cu două variabile:

Substituția

Adunarea algebrică

Grafică

- ✓ Știu câte soluții poate avea sistemul de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile.
- ✓ Pot afla soluția sistemului de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile.

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și însuși tema nouă, ne amintim:

- Ce este problemă aplicată.
- Ce este modelul matematic.
- Etapele principale de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuațiilor:
 - 1) de selectat necunoscuta și de o notat printr-o literă;
 - 2) cu ajutorul acestei litere de exprimat toate celelalte necunoscute și dependențele;
 - 3) de alcătuit ecuația;
 - 4) de rezolvat ecuația;
 - 5) de verificat cum soluția obținută a ecuației corespunde condiției problemei.

§ 14 Rezolvarea problemelor prin compunerea sistemelor de ecuații

Problema este o cerință de a executa ceva sau o întrebare echivalentă cu cerința. În problemele algebrice cel mai mult se cere de calculat, de demonstrat, de transformat, de studiat ceva. Dacă la rezolvarea problemelor ca modele se folosesc expresii algebrice, ecuații, inecuații, sisteme de ecuații, atunci se vorbește despre metodele algebrice.

Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare le-ați învățat în clasa a 7-a. Printr-un procedeu asemănător se rezolvă și problemele care se reduc la sistemul de ecuații de gradul al doilea cu două necunoscute.

Problema 1. Aflați laturile dreptunghiului, diagonala căruia este egală cu 10 cm, iar perimetrul cu 18 cm mai mare.

Rezolvare. Notăm lungimile laturilor căutate ale dreptunghiului x cm și y cm (fig. 111). Atunci pătratul diagonalei este $x^2 + y^2$, iar semiperimetrul este $x + y$. Deoarece diagonala este egală cu 10 cm, iar perimetrul cu 28 cm, avem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Să o rezolvăm. Din ecuația a doua aflăm y și substituim valoarea lui în prima ecuație:

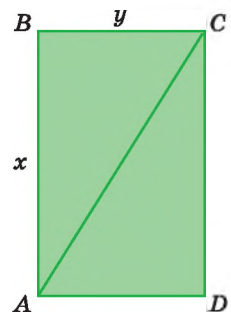


Fig. 111

$$y = 14 - x \text{ și } x^2 + (14 - x)^2 = 100,$$

$$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100, \text{ sau } 2x^2 - 28x + 96 = 0, \text{ atunci}$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0.$$

Soluțiile ecuației sunt: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$. Dacă $x = 8$, atunci $y = 6$; dacă $x = 6$, atunci $y = 8$.

Răspuns. 8 cm și 6 cm.

Problema 2. Un ciclist se mișcă cu o viteză mai mare cu 2 km/h decât altul, de aceea distanța de 28 km el o parcurge cu 20 min mai repede decât al doilea. Aflați vitezele ambilor cicliști.

Rezolvare. Fie vitezele cicliștilor (în kilometri pe oră) egale cu u și v . Viteza primului este mai mare cu 2, de aceea avem ecuația: $u - v = 2$.

Deoarece primul ciclist distanța de 28 km o parcurge în $\frac{28}{u}$, iar al doilea - în $\frac{28}{v}$ h și primul o parcurge cu 20 min sau cu $\frac{1}{3}$ h mai repede, avem ecuația a doua:

$$\frac{28}{v} - \frac{28}{u} = \frac{1}{3}, \text{ abo } 84(u - v) = uv.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 84(u - v) = uv, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} u - v = 2, \\ 168 = uv, \end{cases}$$

de unde $u(u - 2) = 168$, $u^2 - 2u - 168 = 0$.

Soluțiile ecuației pătrate obținute: $u_1 = 14$, $u_2 = -12$.

Valoarea -12 nu satisface condiția problemei. Deci, $u = 14$, iar $v = 14 - 2 = 12$.

Răspuns. 14 km/h și 12 km/h.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

La rezolvarea problemelor cu parametri răspunsul se obține în formă de expresie cu variabile. Rezolvarea completă a acestor probleme cere studierea: trebuie de indicat pentru care valori ale parametrilor problema are soluție și câte.

Problemă. Dintr-un port au plecat în același timp două motonave: una - spre sud, alta - spre vest. Peste 2 h distanța dintre ele era egală cu 60 km. Aflați vitezele motonavelor. Dacă viteza primei era cu a km/h mai mare decât viteza celei de a doua.

Rezolvare. Fie vitezele motonavelor respectiv egale cu x km/h și y km/h. În două ore ele au parcurs (în direcții perpendiculare una față de alta) respectiv $2x$ și $2y$ km (fig. 105). După teorema lui Pitagora $4x^2 + 4y^2 = 60^2$, sau $x^2 + y^2 = 900$. În afară de această avem $x - y = a$.

Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Să-l rezolvăm. Din ecuația a doua aflăm $x = y + a$.

Substituind valoarea aceasta în prima ecuație, avem:

$$(y + a)^2 + y^2 = 900, 2y^2 + 2ay + a^2 - 900 = 0.$$

Să rezolvăm ecuația pătrată referitor de y .

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 1800}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{1800 - a^2}}{2}.$$

Potrivit condiției problemei a și y trebuie să fie pozitivi, de aceea este posibil numai un caz:

$$y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}.$$

Dar trebuie să se îndeplinească condițiile:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1800 - a^2 \geq 0, \\ \sqrt{1800 - a^2} > a, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a > 0, \\ -30\sqrt{2} \leq a \leq 30\sqrt{2}, \\ -30 < a < 30. \end{cases}$$

Deci, problema o satisface numai o valoare a variabilei y :

$$y = 0,5(\sqrt{1800 - a^2} - a), \text{ dacă } 0 < a < 30.$$

$$\text{Atunci } x = y + a = 0,5(\sqrt{1800 - a^2} + a).$$

Răspuns. Dacă $0 < a < 30$, problema are o soluție: $x = 0,5(\sqrt{1800 - a^2} + a)$ km/h și $y = 0,5(\sqrt{1800 - a^2} - a)$ km/h. Dacă $a \leq 0$ sau $a \geq 30$, problema nu are soluții.

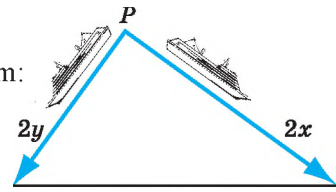


Fig. 112

Verificați-vă

1. Ce este problemă?
2. Ce probleme există?
3. Alcătuiți trei modele diferite pentru problema: «Aflați două numere, suma cărora este 15, iar produsul lor 56».

Efectuăm împreună!

- 1 Aflați numărul de două cifre, care este de 4 ori mai mare decât suma cifrelor lui și de 3 ori mai mare decât produsul lor.
- **Rezolvare.** Notăm cifrele zecilor și unităților prin litere x și y . Atunci numărul căutat este $10x + y$. Deoarece el este de 4 ori mai mare decât suma cifrelor, $10x + y = 4(x + y)$, de unde $6x = 3y$, sau $2x = y$.

Numărul $10x + y$ este de 3 ori mai mare decât produsul cifrelor, de aceea $10x + y = 3xy$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy. \end{cases}$$

Substituim valoarea lui y în ecuația a doua:

$$10x + 2x = 3x \cdot 2x, 12x = 6x^2, \text{ de unde } x = 0 \text{ sau } x = 2.$$

Prima cifră a numărului de două cifre nu este 0. De aceea $x = 2$, iar $y = 2x = 4$.

Verificare. $24 = 4(2 + 4)$ și $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.

Remarcă. Deoarece aici x și y sunt numere naturale, clarificând că $y = 2x$, se poate să nu rezolvăm sistemul, dar să probăm 12, 24, 36 și 48. Problema o satisface numai numărul 48.

Răspuns. Numărul 48.

- 2 Perimetrele triunghiului echilateral și a hexagonului regulat sunt egale, iar suma ariilor lor este egală cu $10\sqrt{3}$ m². Aflați ariile acestor poligoane.
- **Rezolvare.** Fie laturile căutate ale triunghiului și hexagonului egale cu x și y (fig. 113). Deoarece perimetrele sunt egale, $3x = 6y$, de unde $x = 2y$.

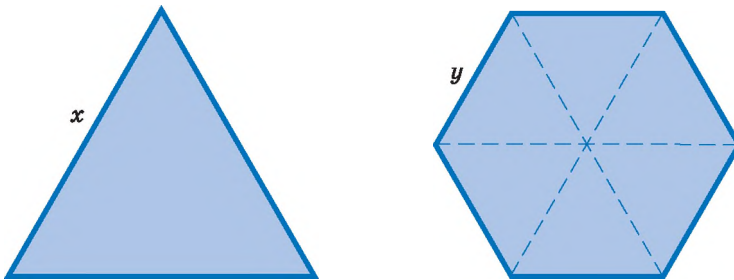


Fig. 113

Aria triunghiului echilateral cu latura x este egală cu $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Hexagonul regulat se compune din șase triunghiuri echilaterale cu latura y , de aceea aria lui este egală cu $6 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Avem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + 6y^2 = 40. \end{cases}$$

Substituind în ecuația a doua valoarea $x = 2y$, obținem ecuația $10y^2 = 40$, de unde $y^2 = 4$, iar $y = 2$. Atunci $x = 4$.

Răspuns. 4 m și 2 m.

EFECTUATI ORAL

555. Problemă deschisă. Compuneți o problemă care ar avea ca model matematic sistemul de ecuații:

$$a) \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

NIVELUL A

556. Aflați două numere, suma cărora este egală cu 21, iar produsul este 90.

557. Aflați două numere, diferența cărora este egală cu 1,1, iar produsul este 0,6.

558. Aflați două numere, suma cărora este egală cu 31, iar suma pătratelor lor este 625.

559. Media geometriă a două numere este egală cu 3. Aflați aceste numere, dacă unul din ele este mai mare decât al doilea cu 9,1.

560. Perimetrul triunghiului dreptunghic este 90 cm, iar ipotenuza este 41 cm. Aflați catetele triunghiului.

561. Aflați două numere, dacă:

a) diferența lor este egală cu 2, iar diferența pătratelor cu 88;

b) semisuma lor este egală cu 9,5, iar suma pătratelor lor 185;

c) suma lor este egală cu 20, iar produsul cu 84.

562. Aflați catetele triunghiului dreptunghic, care are:

a) ipotenuza egală cu 13 dm, iar aria cu 30 dm^2 ;

b) perimetrul egal cu 30 cm, iar suma catetelor cu 17 cm;

c) ipotenuza egală cu 17 cm, iar perimetrul cu 40 cm.

563. Aflați laturile dreptunghiului, diagonala căruia este egală cu 10 m, iar aria cu 48 m^2 .

564. Aflați catetele triunghiului dreptunghic, dacă una din ele este mai mică decât ipotenuza cu 2 cm, iar a doua cu 25 cm.

565. Conturul interior și cel exterior al unei rame sunt pătrate.

Latura unuia din ei este egală cu diagonala celuilalt (fig. 114). Aflați laturile acestor pătrate, dacă aria ramei este egală cu 32 cm^2 .

566. Aflați raza interioară și cea exterioară ale unui inel, dacă diferența lor este egală cu 5 cm, iar aria inelului cu $125\pi \text{ cm}^2$ (fig. 115).

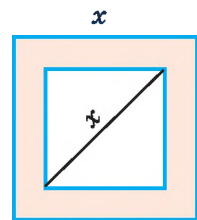


Fig. 114

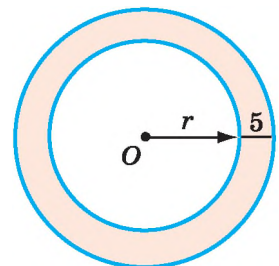


Fig. 115

- 567.** Aflați lungimile muchiilor unui paralelipiped dreptunghic, dacă lungimea uneia din ele, aria suprafeței și volumul paralelipipedului sunt egale respectiv cu 8 cm, 158 cm^2 și 120 cm^3 .
- 568.** Un combiner poate recolta grâu de pe un lot cu 24 h mai repede decât altul. Dacă combinerii vor lucra împreună, atunci pot termina lucrul în 35 h. În câte ore poate recolta toată roada fiecare combiner?
- 569. Problema lui Luca Pacioli.** Suma pătratelor a două numere este egală cu 20, iar produsul cu 8. Aflați numerele.
- 570.** Numărătorul fracției ordinare ireductibile este cu 3 mai mic decât numitorul, iar dacă la ambii membri ai ei vom aduna 10, valoarea fracției se va mări de două ori. Care este fracția aceasta?

Nivelul B

- 571.** Un automat confecționează piese identice. Dacă el va confecționa în fiecare minută cu o piesă mai mult, atunci 720 de piese va confecționa cu 1 h mai repede. Câte piese confecționează automatul într-o oră?
- 572.** O comandă de a produce 150 de mașini uzina trebuia să o execute în câteva zile. Însă, producând zilnic cu 2 mașini mai mult decât se prevedea, cu 2 zile înainte de termen uzina nu numai că a executat comanda deplin, dar a produs încă 6 mașini în plus. În câte zile uzina trebuia să execute comanda?
- 573.** O uzină trebuia să producă un lot de strunguri în câteva zile. Supraîmplinind sarcina zilnică cu 9 strunguri, cu 3 zile înainte de termen ea a produs 588 de strunguri, ce alcătuiește 98 % din comandă. Câte strunguri producea zilnic uzina?
- 574.** O echipă de muncitori forestieri trebuia să pregătească în câteva zile 216 m^3 de lemne. Primele trei zile ea a lucrat cum se prevedea, iar apoi pregătea zilnic cu 8 m^3 mai mult și de aceea deja cu o zi înainte de termen a pregătit 232 m^3 de lemne. Câți metri cubi de lemne pregătea zilnic echipa?
- 575*.** O țevă poate umple un bazin cu apă cu 36 min mai repede decât alta. Dacă la început jumătate de bazin va umple o țevă, iar apoi restul a doua, el se va umple cu jumătate de oră mai târziu decât va umple ambele pompe lucrând împreună. În câte minute fiecare pompă umple bazinul cu apă?
- 576.** Din «Manual de matematică» (a. 1813) pentru școlile militare franceze. Suma a trei laturi ale unui triunghi dreptunghic este egală cu 156 m, iar aria cu 1014 m^2 . Aflați laturile lui.

- 577.** Un tren trebuia să parcurgă drumul de la stația A pâna la stația B în 4 h. Însă la distanță de 150 km de la stația A el a fost reținut 20 min. Pentru a sosi în B după orar el restul distanței a parcurs cu o viteză mai mare decât cea inițială cu 15 km/h. Aflați distanța de la A până la B .
- 578.** Un motociclist a parcurs distanța dintr-un sat până la oraș în 5 h. La întoarcere primii 36 km el se deplasa cu aceeași viteză, iar restul drumului (partea cea mai mare) – cu o viteză mai mare cu 3 km/h și de aceea la întoarcere el a folosit cu 15 min mai puțin. Cu ce viteză se mișca motociclistul spre oraș?
- 579.** Drumul dintre satele A și B constă dintr-un urcuș și coborâș. Un ciclist, mișcându-se pe coborâș cu o viteză cu 6 km/h mai mare decât pe urcuș, drumul de la A până la B îl parcurge în 2h 40 min, iar de la B la A – cu 20 min mai repede. Să se afle viteza ciclistului pe urcuș și pe coborâș și lungimea urcușului de la A la B , dacă distanța de la A până la B este egală cu 36 km.
- 580.** O motonavă în 9 h a parcurs 100 km după curentul apei râului și 64 km contra curentului apei. Altă dată în același timp ea a parcurs 80 km după curentul apei și 80 km – contra curentului. Aflați viteza proprie a motonavei și viteza curentului de apă.
- 581.** Viteza unui avion este cu 100 km/h mai mare decât viteza altuia, de aceea primul parcurge distanța de 980 km cu 0,4 h mai mult, decât al doilea distanța de 600 km. Aflați vitezele avioanelor.
- 582.** De la cheiul A a plecat o plută după curentul apei râului. Peste 3 h de la cheiul B , care se află la o distanță de 60 km de A , a plecat o motonavă care a sosit în A peste 1 h după întâlnirea cu pluta. Aflați viteza curentului de apă, dacă viteza motonavei în apă stătătoare este egală cu 24 km/h.
- 583.** Dintr-un sat spre oraș situat la o distanță de 20 km a plecat un ciclist, iar peste 15 min din urmă altul. Ajungându-l pe primul, ciclistul al doilea s-a întors și a revenit în sat cu 45 min înaintea sosirii primului ciclist în oraș. Aflați viteza primului ciclist, dacă al doilea se mișca cu viteza de 15 km/h.
- 584.** Din punctul A în același timp și în aceeași direcție au plecat doi cicliști cu vitezele de 18 km/h și 24 km/h. Peste 1 h după ei a plecat un automobil care le-a ajuns la început pe un ciclist, iar peste 10 min și pe al doilea. Aflați viteza automobilului.
- 585.** Din punctul A spre B , distanța dintre care este de 90 km, a plecat un ciclist cu viteza de 12 km/h. Peste jumate de oră din A spre B a plecat alt ciclist cu viteza de 15 km/h. În același timp din B în direcția lui A a plecat un motociclist care a întâlnit la început pe primul ciclist, iar peste 2 min pe al doilea. Aflați viteza motociclistului.

Exerciții pentru repetare

586. Pe masă într-un rând sunt patru figuri: triunghi, cerc, hexagon și romb. Ele sunt vopsite în diferite culori: roșie, albastră, galbenă și verde. Se știe că în dreapta de figura galbenă este rombul; cercul este situat la dreapta de triunghi și romb; figura roșie se află între albastră și verde; triunghiul nu este la marginea mesei; figurile albastră și galbenă nu sunt alături. Determinați în ce ordine sunt amplasate figurile și de ce culoare ele sunt.

587. Construiți graficul funcției $y = \frac{12}{x-3}$. Aflați coordonatele punctelor de intersecție acestui grafic cu graficele ecuațiilor $3y - x + 3 = 0$, $y - 3x + 9 = 0$ și $x^2 - 6x + y^2 = 16$.

588. Folosind rezultatele problemei Nr. 587, stabiliți corespondența dintre abscisele punctelor aflate și ordonatele lor respective care sunt date în tabel împreună cu litere. Amplasați abscisele (împreună cu litere respective) în ordine descrescătoare și veți afla denumirea orașului, unde este situată universitatea în care a lucrat M.M.Bogoliubov și pe fațada căruia este instalată placa memorială consacrată lui (fig. 116).

-6	6	-4	4	-3	3	-2	2
I	H	C	P	Ц	E	I	Ч

Demonstrați identitățile (589–590).

589. $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

590. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

591. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{a^2-c^2} - \frac{1}{(a-c)^2}$;

b) $\frac{a+2c}{3a-3c} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-c^2}{(a-c)^2}$.

592. Aflați valoarea funcției $y = 1 - x^2$ pentru primele 5 numere naturale.



Fig. 116

Comoara succeselor

- ✓ Înțeleg, că sistemul de două ecuații de gradul al doilea cu două variabile poate fi modelul matematic al problemelor aplicative.
- ✓ Știu a rezolva probleme prin compunerea sistemelor de ecuații.

SARCINI PENTRU LUCRUL INDEPENDENT**Varianta I**

- 1°. Construiți graficul funcției a) $y = -x^2$; b) $y = 2 + \sqrt{x}$.
- 2°. Rezolvați inecuația $x^2 - 2x < 0$.
- 3°. Aria dreptunghiului este egală cu 180 cm^2 , iar perimetrul cu 54 cm . Aflați laturile dreptunghiului.
- 4°. Construiți graficul funcției $y = x^2 - 2x - 3$, studiați-o.

Varianta II

- 1°. Construiți graficul funcției a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = x^2 - 4$.
- 2°. Rezolvați inecuația $2x - x^2 < 0$.
- 3°. Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic este egală cu 61 cm . Aflați lungimea catetelor triunghiului, dacă aria lui este 330 cm^2 .
- 4°. Construiți graficul funcției $y = x^2 + 2x - 3$, studiați-o.

Varianta III

- 1°. Construiți graficul funcției: a) $y = x^{-1}$; b) $y = x^2 + 2$.
- 2°. Rezolvați inecuația $x^2 + 3x \leq 0$.
- 3°. Suma ariilor a două pătrate este egală cu 65 m^2 , iar suma perimetrelor cu 44 m . Aflați laturile pătratelor.
- 4°. Construiți graficul funcției $y = 4x - x^2$, studiați-o.

Varianta IV

- 1°. Construiți graficul funcției a) $y = -x^3$; b) $y = 4 - x^2$.
- 2°. Rezolvați inecuația $x^2 - 4x \geq 0$.
- 3°. Aria dreptunghiului este egală cu 120 cm^2 , iar perimetrul cu 46 cm . Aflați laturile și diagonala dreptunghiului.
- 4°. Construiți graficul funcției $y = x^2 - 5x + 4$, studiați-o.

DATE ISTORICE

Funcția este una din cele mai importante noțiuni ale matematicii contemporane. Ea s-a format și s-a îmbogățit în decursul multor secole. Savanții babilonieni au calculat tabelele pătratelor și cuburilor încă cu 4 000 de ani în urmă. Dar aceasta este funcția definită în formă de tabel. Arhimede a stabilit dependența ariei cercului și ariei suprafeței sferei de

razele lor. Dar egalitățile $S = \pi r^2$ și $S = 4\pi r^2$ definesc funcții.



Gottfried Leibniz
(1707 – 1783)

În secolele XVI – XVII defuncțiile se defineau verbal, grafic sau cu ajutorul tabelelor. Abia P. Fermat și R. Descartes au demonstrat, cum de definit dependența dintre variabile cu ajutorul ecuațiilor. Pentru reprezentarea grafică a diferitor dependențe, ei au aplicat sistemul de coordonate.

Termenul «funcție» l-a folosit pentru prima dată matematicianul neamț **Gotfrid Leibniz** (din 1673 – în manuscrise, iar din 1692 – în publicații). Simbolurile de notare generală a funcției $f(x)$ și $y = g(x)$ a introdus în a. 1734 matematicianul elvețian **Leonardo Euler**.

Chiar și după apariția cuvântului «funcția» noțiunea corespunzătoare cu timpul se schimba. G. Leibniz numea funcții lungimele segmentelor care se schimbau în dependență de variația lungimilor altor segmente. L. Euler numea funcție expresia alcătuită din variabile și numere. De exemplu, expresia $3x + 5$ este funcție de variabila x , fiindcă valoarea expresiei date depinde de valorile lui x . Matematicianul ceh B. Bolzano (1781–1848) a extins și mai mult noțiunea de funcție, el sub funcție înțelegea orice dependență a unei mărimi de alta.



Leonardo Euler
(1707 – 1783)

Mai târziu majoritatea matematicienilor sub funcție pricepeau o mărime variabilă dependentă, alții – corespondența dintre mulțimile numerelor sau relația (corelația) dintre elementele mulțimilor arbitrare.

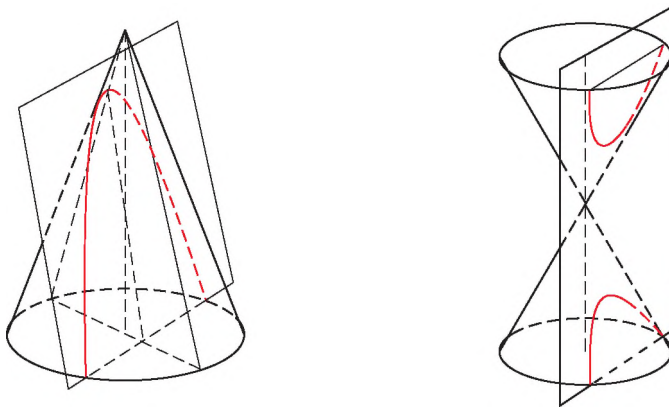
Definiția actuală a funcției în forma cea mai

generală a fost propusă în sec. XX de o grupă de matematicieni, care se prezenta sub pseudonimul N. Bourbaki: «Funcția este relația la care fiecărui element din domeniul de expediere îi corespunde exact un element din domeniul sosirii». Sub domeniul de expediere (domeniul de definiție al funcției), domeniul de sosire (codomeniul ei) se consideră orice mulțimi, nu numai cele numerice.

Deci, în diferite timpuri cu cuvântul «funcție» numeau uneori lungimea segmentului, uneori expresia cu variabile, uneori valoarea variabilă, uneori dependența dintre mărimi, uneori corespondența dintre valorile mărimilor, uneori relația dintre elementele a două mulțimi.

În școala de bază se studiază numai cele mai importante și mai simple exemple de funcții. Ceva mai târziu veți face cunoștință și cu alte clase de funcții: putere, exponențiale, logaritmice, trigonometrice, etc. Savanții studiază și funcții cu două, trei și mai multe variabile.

Denumirile «parabolă», «hiperbolă» le-a introdus matematicianul din Grecia Antică Apollonios (sec. III p. e. n.). El examina aceste curbe ca liniile de intersecție ale suprafeței conice cu un plan.



În matematica contemporană se examinează multe și diferite tipuri de funcții. Ele se studiază detaliat în discipline separate ale matematicii: analiza matematică și teoria funcțiilor. În aceste domenii cu succes au lucrat și matematicienii ucraineni M. V. Ostrogradski, M. P. Cravciuk,

S. N. Bernștein, E. Ia. Remez, G. M. Fihțengolț, M.G.Grein, M. I. Șkili și alți.

Esențialul în capitol

Funcția este corespondența la care fiecărei valori a variabilei x dintr-o mulțime D îi corespunde o singură valoare a variabilei y . Mulțimea D se numește *domeniul de definiție*, iar mulțimea tuturor valorilor respective ale variabilei y este *codomeniul* funcției date. Dacă y este funcției de x , se scrie $y = f(x)$.

$y = ax^2 + bx + c$ este o funcție de gradul al doilea ($a \neq 0$, b, c – numere arbitrare, iar x – argument).

Graficele funcțiilor $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$, și $y = ax^2$ sunt parabole identice care se pot suprapune la o translație.

Zerourile funcției sunt valorile argumentului ei, pentru care valoarea funcției este egală cu zero. Intervalele din domeniul de definiție, pe care funcția nu-și schimbă semnul (adică are numai valori pozitive sau numai negative), se numesc *intervale cu semn constant*. Funcția se numește *crescătoare* (sau *descrescătoare*) pe intervalul dat, dacă fiecărei valori mai mari a argumentului din acest interval îi corepunde valoarea mai mare (mai mică) a funcției.

Funcția $y = f(x)$ se numește *pară*, dacă domeniul ei de definiție este simetric față de zero și pentru toate valorile argumentului $f(-x) = f(x)$.

Funcția $y = f(x)$ se numește *impară*, dacă domeniul ei de definiție este simetric față de zero și pentru toate valorile argumentului $f(-x) = -f(x)$.

Există funcții care nu sunt nici pare, nici impare.

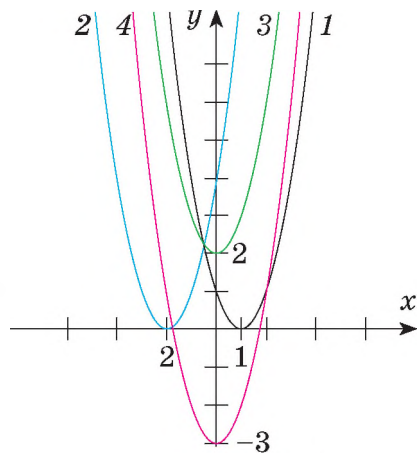
Dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$,

atunci cu ajutorul transformărilor geometrice se poate obține graficele funcțiilor $y = -f(x)$, $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$.

De exemplu, pe figură este arătat, cum cu ajutorul transformărilor și graficului funcției $y = x^2$ se pot obține graficele funcțiilor

$$y = (x - 1)^2, \quad y = (x + 2)^2, \quad y = x^2 + 2, \quad y = x^2 - 3.$$

Inecuație de gradul al doilea se numește fiecare inegalitate de forma $ax^2 + bx + c * 0$, unde a, b, c sunt numere date, x — variabila, iar $*$ — un semn oarecare al inegalității: $<$, $>$, \leq , \geq . Rezolvând așa inecuații, este bine de imaginat, cum este situat graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$ față de axa x .



$$\begin{aligned} 1 &- y = (x - 1)^2 \\ 2 &- y = (x + 2)^2 \\ 3 &- y = x^2 + 2 \\ 4 &- y = x^2 - 3 \end{aligned}$$

Clarificăm succesele

Sarcini în formă de test nr. 2

- 1 R este domeniul de definiției al funcției:
 a) $y = \sqrt{x+1}$; b) $y = 2x^{-1}$; c) $y = -x^2$; d) $y = x^{\frac{1}{2}}$.
- 2 Codomeniul funcției $y = x^2 - 2x - 1$ este intervalul:
 a) $(-\infty; -2)$; b) $(1; \infty)$; c) $[1; 2)$; d) $[-2; \infty)$.
- 3 Pe intervalul $(0; \infty)$ crescătoare este funcția:
 a) $y = -5x$; b) $y = 2 - x^2$; c) $y = 3x^{-1}$; d) $y = \sqrt{x} - 1$.
- 4 Câte zerouri are funcția $y = x(x^2 + 2)(x + 4)$:
 a) unul; b) două; c) trei; d) patru?
- 5 Parabola este graficul funcției:
 a) $y = x^{-2}$; b) $y = x - 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y = \sqrt{x}$.
- 6 Soluția inecuației $x^2 + 2x + 3 > 2$ este intervalul:
 a) $(-\infty; -3)$; b) $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$; c) $(1; 2)$; d) R .
- 7 Simetric față de punctul $(0; 0)$ este graficul funcției:
 a) $y = x^{-2}$; b) $y = 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y = \sqrt{x}$.
- 8 Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ este punctul:
 a) $(-8; -2)$; b) $(8; 2)$; c) $(4; 2)$; d) $(-2; 8)$.
- 9 Pară este funcția:
 a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = 2x$; c) $y = 3x^2$; d) $(x - 2)^2$.
- 10 Funcția $y = 2x - x^2$ obține cea mai mare valoare, dacă: o:
 a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = -2$.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 2

- 1°** Construiți graficul funcției $y = 2x + 3$. Aflați domeniul de definiție și codomeniul ei. Stabiliți zerourile funcției și intervalele cu semnul constant.
- 2°** Funcția este definită prin formula $f(x) = (2x + 3)^2$. Aflați:
 a) $f(0)$; b) $f(-4)$; c) $f(3,5)$.
- 3** Construiți graficul și studiați proprietățile funcției:
 a°) $y = -x^2 + 1$; b°) $y = (x + 1)^2 - 4$.
- 4** Rezolvați inecuația:
 a°) $(x + 5)(x - 3) > 0$; b°) $-5x^2 + 3x + 2 \leq 0$.
- 5°** Construiți graficul funcției:
 a) $y = x^2 + 4x + 3$; b) $y = |6x - x^2 - 5|$.
- 6** Rezolvați grafic sistemul de ecuații:
 a°) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b°) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 - y + 2 = 0. \end{cases}$
- 7°** Rezolvați sistemul de ecuații:
 a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 3x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy - 3 = 0, \\ x^2 - xy + 2 = 0. \end{cases}$
- 8°** Dacă un număr de două cifre v -a fi împărțit la suma cifrelor, încât vom obține 8 și în rest v -a fi 5, iar dacă îl v -a împărți la produsul cifrelor, încât vom obține 10 și în rest v -a fi 1. Aflați acest număr.
- 9**** Rezolvați inecuația:
 a) $(x + 5)^2(x - 3)(1 + x) > 0$; b) $\frac{x^3 - 16x}{x^3 - 5x^2 + 4x} \leq 0$.
- 10**** Aflați pentru care valori c ecuația $(c + 1)x^2 + (3c - 2)x - c = 0$ are două soluții reale diferite.



Capitolul 3

Gauss

Johann Karl Friedrich

(1777 – 1855)

Matematician, astronom,
fizician geodezian german.

unul din cei mai mari

și cu cel mai mare prestigiu din toți
matematicienii din toate timpurile.

Trăsăturile caracteristice ale cercetărilor
lui Gauss sunt variația lor uimitoare
și legătura organică dintre teorie și
matematica aplicativă.

Laureat al medaliei Copley (cea mai înaltă
distincție anuală a societății

Regale din Mare Britanie) (1838).

„Nimic nu este făcut, dacă ceva a rămas neterminat”.

„ Matematicienii stau unul pe umerii altuia”.

„ Astronomia și matematica pură sunt polii magnetici, spre care veșnic se
întoarce busola rațiunii mele”

„Matematica este regina științelor și aritmetica – regina matematicii”

K.F.Gauss

Premiul lui Gauss

este acordat de asociația
Internațională a matematicienilor
și societatea matematicienilor
din Germania o dată în 4 ani, la
congresul matematicienilor, pentru
realizări remarcabile în domeniul
matematicii
aplicative.

Scopul premiului – stimularea
matematicienilor, care favorizează
progresul în alte domenii diferite de
matematică, incluzând tehnologii,
afaceri și viața de toate zilele.

A fost fondată la 30 aprilie anul
2002 în ziua aniversării a 225-a de
la ziua nașterii lui Gauss.

Laureații premiului

Kiioi Itos

Iv Meyer

Stenli Oșer

Șiruri numerice

Șir este o mulțime de obiecte, amplasate într-o anumită ordine. Dacă termenii șirului sunt numere, atunci el se numește *șir numeric*. Cele mai simple și mai importante exemple de șiruri numerice: progresia aritmetică și progresia geometrică.

Studiind acest capitol, veți putea observa frumusețea corelațiilor matematice în diferite tipuri de șiruri și procedeele definirii lor, în dependențe și legități neprevăzute, în figuri stranii și procedeele construirii lor, etc.

În capitolul dat vom studia astfel de teme:

§ 15	Șir Succession	§ 17	Progresie geometrică Geometric Progression
§ 16	Progresie aritmetică Arithmetic Progression	§ 18	Probleme de calcul ale sumelor Sums Calculation Tasks

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce se numește funcție și domeniul ei de definiție.
- Care funcții se numesc crescătoare, iar care – descrescătoare.
- Cum de aflat valoarea funcției într-un punct.
- Care numere sunt naturale.

Primele zece numere naturale 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cel mai mic număr natural este 1.

Numere pare (se împart la 2 fără rest)
2, 4, 6, 8, 10, ...

Numere impare
1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

§ 15 Șir

Să ne închipuim o continuitate de evenimente sau fenomene, ordinea plasării obiectelor, sunetelor, culorilor, etc. – asta și este șir. Amintiți-vă, cum sunt așezate piesele pe tabla de șah (fig. 117, *a*) și notele muzicale (fig. 117, *b*). Se poate vorbi și despre lunile anului, zilele săptămânii, literele în cuvânt, numele în listă, vagoanele în tren, stațiile căilor ferate, etc.



a



Do re mi fa sol la si do

b

Fig. 117

Degetele mâinii omului tot sunt aranjate într-o anumită ordine: mare, arătător, mijlociu, inelar, mezin. Și liniuțele codului, care este pe scoarța acestei cărți, sunt duse într-o anumită ordine. Ce înseamnă ele? Pentru ce ele trebuie?

Acest paragraf ne va ajuta să ne îmbogățim cunoștințele despre șiruri în matematică și să facem cunoștință cu proprietățile lor.

Să ne imaginăm, că în rând sunt scrise toate numerele naturale pare:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,

Acesta este *șirul* de numere naturale pare. Numărul 2 este primul termen al lui, 4 – al doilea, 6 – al treilea, 20 – al zecelea și a.m.d.

Exemple de șiruri numerice:

1, 2, 3, 4, 5, ... – șirul numerelor naturale;

1, 3, 5, 7, 9, ... – șirul numerelor naturale impare;

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... – șirul de numere inverse celor naturale.

Șirurile pot fi *finite* și *infinite*. De exemplu, este finit șirul numerelor naturale de o cifră:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Șirul tuturor numerelor naturale este infinit. Scriind șirul infinit, după câțiva termeni ai lui se pun trei puncte.

Primul, al doilea, al treilea termeni ai șirului de numere naturale pare sunt 2, 4, 6. Se scrie: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. Dar cu ce este egal termenul al n -lea a_n ? Deoarece fiecare termen al șirului numerelor naturale pare este de două ori mai mare decât numărul lui de ordin, termenul al n -lea este egal cu $2n$, adică

$$a_n = 2n.$$

Aceasta este formula termenului al n -lea al șirului numerelor naturale pare.

Formula termenului al n -lea al șirului numerelor naturale impare :

$$a_n = 2n - 1.$$

Această formulă este asemănătoare cu formula $y = 2x - 1$, care definește funcția liniară. În ultima formulă x poate primi orice număr real, iar în formula $a_n = 2n - 1$ variabila n poate primi numai valori naturale. Fiecare termen al șirului corespunde unui număr natural – numărului de ordin al termenului șirului. De aceea **șirul numeric este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale sau pe mulțimea primelor n numere naturale**. Dacă funcția este definită pe mulțimea tuturor numerelor naturale, atunci avem un șir numeric infinit; dacă funcția este definită pe mulțimea primelor n numere naturale, atunci ea este un șir finit care are n termeni.

Dacă este cunoscută formula termenului al n -lea al șirului, atunci este simplu de calculat orice termen al ei. Să scriem câțiva din primii termeni ai șirului, care are termenul al n -lea $a_n = n^2 + 2$. Înlocuind variabila n cu valorile 1, 2, 3, 4, 5, ... , obținem primii termeni ai șirului:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$$

Termenul al miilea al acestui șir:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Cu mult mai dificilă este problema inversă: pentru șirul dat de aflat termenul al n -a. De exemplu, formula termenului al n -lea al șirului de numere prime 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... până în prezent nu este cunoscută, deși matematicienii o caută mai mult de 2 000 de ani.

Câțiva din primii termeni ai șirului nu îl definesc univoc. De exemplu, există multe șiruri care au primii termeni 2, 4, 6, 8.

primii termeni ai șirurilor care au termenul al n -lea

$$a_n = 2n \text{ și } c_n = 2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Din doi termeni vecini a_i și a_{i+1} ai șirului termenul a_{i+1} se numește *următorul* lui a_i , iar a_i este *precedentul* lui a_{i+1} .

➔ Șirul se numește *crescător*, dacă fiecare termen al lui, începând cu al doilea, este mai mare decât precedentul. Șirul se numește *descrescător*, dacă fiecare termen al lui, începând cu al doilea, este mai mic decât precedentul.

Remarcă. Uneori se examinează și șiruri, care au ca termeni expresii, funcții, figuri, etc.

În continuare vom studia numai *șirurile numerice*, deseori le vom numi scurt șiruri.

Șirurile numerice uneori se definesc cu ajutorul formulelor recurente (de la cuvântul latin *recurrentis* – acel, care se întoarce). Formula se numește recurentă, dacă ea indică cum se exprimă orice termen al șirului prin câțiva termeni precedenți.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

De exemplu, formula $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ este recurentă, deoarece ea afirmă că fiecare termen al șirului (începând cu al doilea) este egal cu suma a doi termeni care îl precedă. Formula aceasta șirul nu-l determină, fiindcă sunt necunoscuți primii doi termeni ai lui. Dacă în afară de formulă sunt indicați și primii doi termeni, atunci șirul se poate considera complet definit.

Definim prin formula recurentă șirul care are primul și al doilea termeni 1, iar fiecare următor este egal cu suma a doi termeni precedenți. Acest șir poate fi definit cu egalitățile:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Aplicând această formulă, se poate determina consecutiv al treilea, al patrulea și ceilalți termeni ai șirului:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 3 = 5, \dots$$

Avem șirul: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

El se numește *șirul Fibonacci*, deoarece primul a studiat și a descris proprietățile lui în tratatul „Cartea despre abac” (1202) Leonardo Pisano (Fibonacci).

Formula termenului al n -lea ca funcție de n pentru acest șir a descoperit-o G. Binet abia în sec. XIX (vezi problema 617).

Verificați-vă

1. Dați exemple de șiruri numerice.
2. Formulați definiția șirului numeric.

3. Ce fel de șiruri numerice există?
4. Care șiruri se numesc finite?
5. Care șiruri se numesc crescătoare? Dar care descrescătoare?

Efectuăm împreună

1 Continuați șirul pătratelor numerelor naturale:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

- **Rezolvare.** Fiecare termen al șirului dat este egal cu pătratul numărului lui: primul – cu pătratul numărului 1, al doilea – cu pătratul numărului 2 și a.m.d. De aceea termenul al șaselea este egal cu 6^2 , al șaptelea – 7^2 , al optelea – 8^2 și a.m.d. Deci, avem șirul:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \dots$$

2 Aflați termenul al patruzecilea al șirului definit prin formula:

$$\text{a) } a_n = 3n - 2; \text{ b) } a_n = (-1)^n; \text{ c) } a_n = n - (-1)^{n-3}.$$

- **Rezolvare.** a) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;
b) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$;
c) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Răspuns. a) 118; b) 1; c) 41.

3 Determinați cu care număr toți termenii șirului, definit prin formula $c_n = n^2 + n$, sunt mai mari decât 100.

- **Rezolvare.** Dacă $n^2 + n > 100$, atunci $n^2 + n - 100 > 0$.

Rezolvăm această inecuație de gradul al doilea.

$D = 1 + 400$. Deoarece se cer numai numerele naturale (deci, pozitive) ale lui n , iar soluția pozitivă este $n = \frac{-1 + \sqrt{401}}{2} \approx 9,5$, atunci numărul, care satisface condiția,

trebuie să fie mai mare decât 9.

Răspuns. Începând cu termenul al zecelea.

4 Stabiliți, dacă este crescător sau descrescător șirul definit prin formula $a_n = 1 - 2n^2$.

- **Rezolvare.** Luăm orice doi termeni consecutivi ai șirului, aflăm diferența lor și stabilim semnul ei:

$$\begin{aligned} a_p &= 1 - 2p^2; \quad a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2; \\ a_{p+1} - a_p &= 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) = \\ &= 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2). \end{aligned}$$

Pentru valorile naturale ale lui p expresia $4p + 2$ primește numai valori pozitive. De aceea, $a_{p+1} - a_p < 0$ pentru toate valorile naturale ale lui p . Deci, pentru orice număr p se realizează condiția $a_{p+1} < a_p$. Șirul dat este descrescător, deoarece în el fiecare termen următor este mai mic decât cel precedent.

Răspuns. Șirul este descrescător.

Efectuați oral

593. Numiți primii 5 termeni ai șirului de numere inverse numerelor naturale.

594. Numiți primii 5 termeni ai șirului de numere prime.

595. Continuați șirul numerelor naturale:

a) care se divid cu 3: 3, 6, 9, 12, ... ;

b) care se divid cu 5: 5, 10, 15, ... ;

c) care nu se divid cu 3: 1, 2, 4, 5, 7, ... ;

d) în care fiecare este mai mare cu 3 decât precedentul: 1, 4, 7,

596. Examinați șirurile:

a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ... ;

b) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... ;

c) 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555,

Indicați pentru fiecare șir următorii termeni: 1) al doilea, al cincilea și al șaptelea; 2) următorul după al treilea; 3) precedentul lui șapte; 4) care se conțin între al doilea și al șaselea.

597. Care termen al șirului $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ este:

a) următorul după $x_3, x_7, x_{39}, x_{121}, x_{n+1}, x_{3n}$;

b) precedentul lui $x_5, x_{71}, x_{99}, x_{123}, x_{n+1}, x_{3n}$?

Nivelul A

598. . Finit sau infinit sunt șirurile:

a) numerelor naturale;

b) numerelor opuse celor naturale;

c) fracțiilor regulate cu numitorul 10;

d) fracțiilor neregulate cu numitorul 10;

e) fracțiilor regulate cu numărătorul 10;

f) fracțiilor neregulate cu numărătorul 10;

g) numerelor de două cifre;

h) cifrelor în înscrierea zecimală a numărului π ?

Scrieți primii cinci termeni ai fiecărui șir.

599. Scrieți primii cinci termeni ai șirului, al cărui al n -lea termen se definește prin formula:

$$a) a_n = 2(n - 1); \quad c) y_n = 3n + (-1)^n; \quad e) c_n = 2n^2;$$

$$b) x_n = 12; \quad d) b_n = 1 - n^2; \quad f) z_n = 1 + (-1)^n.$$

600. Șirul este definit prin formula $a_n = 2n + 3$. Aflați:

a) a_3 ;

b) a_6 ;

c) a_{15} ;

d) a_{100} .

601. Scrieți primii șapte termeni ai șirului definit prin formula:

a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = n^2 + 1$; c) $a_n = 2 - 5n$; d) $a_n = n^2 - n$.

- 602.** Scrieți primii câțiva termeni ai șirului pătratelor numerelor naturale. Care este termenul al n -lea?
- 603.** Scrieți primii câțiva termeni și termenul al n -lea ai șirului cuburilor numerelor naturale.
- 604.** Scrieți primii câțiva termeni ai șirului numerelor naturale, care se divid cu 3. Calculați termenul al patruzecilea.
- 605.** Scrieți primii câțiva termeni ai șirului al cărui termen $a_n = n^2 - 1$. Aflați a_{10} , a_{20} , a_{100} .
- 606.** Scrieți șirul finit definit prin formulele:
 a) $a_n = 4n - 3$, unde $1 \leq x \leq 8$; c) $c_n = n^2 + 2n$, unde $1 \leq x \leq 8$;
 b) $b_n = \frac{n}{n+1}$, unde $1 \leq n \leq 10$; d) $y_n = 2^n + 1$, unde $1 \leq x \leq 8$.
- 607.** Aflați al treizecelea termen al șirului definit prin formulele:
 a) $a_n = 2n + 7$; c) $c_n = (-1)^n + 3$;
 b) $b_n = 2n^2 - n$; d) $x_n = 0,5n(n + 1)$.
- 608.** Este dat șirul al cărui termen $a_n = 5n + 8$. Cu cât termenul al douăzecelea este mai mare decât termenul al nouăsprezecelea?
- 609.** Este dat șirul al cărui termen $a_n = n \cdot 3^n$. De câte ori termenul al douăzecelea este mai mare decât al optsprezecelea?
- 610.** Aflați termenii al șaselea, al optulea și al zecelea ai șirului cu termenul $b_n = 2^n$.
- 611.** Oare este adevărat, că $a_n = 5n - 3$ este formula termenului al n -lea al șirului de numere naturale, care împărțite la 5 dau în rest 2?
- 612.** Scrieți formula termenului al n -lea al șirului numerelor naturale care, fiind împărțite la 7, dau în rest 3.
- 613.** Primul termen al șirului este egal cu 7, iar fiecare următorul este cu 2 mai mare decât precedentul. Scrieți primii câțiva termeni ai lui.
- 614.** Primul termen al șirului este egal cu 5, iar fiecare următorul este cu 3 mai mic decât precedentul. Scrieți primii câțiva termeni ai lui. Acest șir este crescător sau descrescător?
- 615.** a) Șirul 1, 3, 6, 10, 15, ... se numește șirul *numerelor triunghiulare* (fig. 118). Scrieți și reprezentați următorii 4 termeni ai acestui șir.

b) *Problemă deschisă.* Aflați care șir se numește șirul pătratelor numerelor. Alcătuiți și rezolvați o problemă despre acest șir.

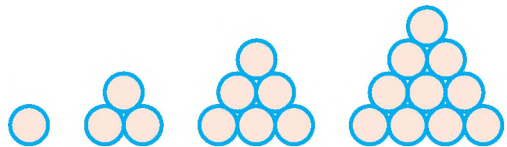


Fig. 118

Nivelul B

616. Scrieți primii cinci termeni ai șirului, care se definește cu formula recurentă:

- a) $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n$;
 b) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;
 c) $a_1 = 15, a_{n+1} = a_n - 5$;
 d) $c_1 = -2, c_2 = 3, c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$.

617. Șirul numerelor Fibonacci poate fi definit prin formula recurentă: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ sau prin formula termenului al n -lea:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Aflați primii cinci termeni ai șirului prin două procedee și comparați-le. Mai detaliat despre creatorii acestor formule aflați independent din surse informaționale.

618. Șirul $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ este astfel, că $a_1 = -5$ și $a_{i+1} - a_i = 3$ pentru fiecare număr natural i . Aflați a_2, a_5, a_{10} .

619. Începând cu care număr toți termenii șirului:

- a) $a_n = 3n + 1$ sunt mai mari decât 50; c) $x_n = 200 - 3n$ sunt mai mici decât 12;
 b) $c_n = n^2 - 5$ sunt mai mari decât 220; d) $b_n = n^2 - n$ nu sunt mai mici decât 110.

620. Pentru care numere termenii șirurilor:

- a) $a_n = 3n - 5$ sunt mai mari decât 40, dar mai mici decât 150;
 b) $b_n = 200 - 2n$ sunt mai mari decât 50, dar mai mici decât 170;
 c) $c_n = 2^n + 1$ sunt mai mari decât 8, dar mai mici decât 30;
 d) $x_n = 4 - 7n$ sunt mai mari decât -40, dar mai mici decât -10;
 e) $y_n = \sqrt{n+2}$ sunt mai mari decât $\sqrt{10}$, dar mai mici decât 10?

621. Câți termeni pozitivi conține șirul definit prin formula: a) $a_n = -3n + 374$;

b) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?

622. Șirul este definit prin formula $a_n = n^2 - 15n$. Câți termeni negativi are șirul?

623. Oare sunt printre termenii șirului $a_n = 7n - 2$ așa termeni care:

- a) se termină cu 0;
 b) se divid cu 13;
 c) se divid cu 2 și nu se divid cu 3;
 d) împărțiți la 27 dau în rest 1?

624. Sunt date două șiruri: $a_n = 7n - 1$ și $c_n = 8n + 3$. Aflați valorile cele mai mici ale lui k și p , pentru care $a_k = c_p$.

625. Este dat șirul finit: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. Definiți-l printr-o formulă.

Selectați (626, 627) una din formulele posibile ale termenului al n -lea al șirurilor. Definiți fiecare șir în formă de tabel și grafic.

626. a) $2, 5, 8, \dots$;

b) $2, 4, 8, \dots$;

c) $1, -1, 1, \dots$;

d) $1, 0, 1, \dots$;

e) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$;

f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$

627. a) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$;

b) $1, 7, 31, 127, 511, \dots$;

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$;

d) $-1, 2, -3, 4, -5, \dots$;

e) $0, -2, -4, -6, \dots$;

f) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$

628*. Scrieți două formule diferite pentru termenul al n -lea al șirului care are primii termeni 1, 3, 5, 7.

629. Demonstrați, că termenul al n -lea al șirului numerelor triunghiulare (vezi problema 615) este egal cu suma primelor n numere naturale.

630. Șirul infinit $0, 2, 0, 2, 0, \dots$ este astfel că suma a orice doi termeni vecini este egală cu 2. Oare este adevărat că termenul al n -lea este $a_n = 1 + (-1)^n$?

631. Șirul este definit prin formula $a_n = (-1)^n$. Aflați suma primilor termeni:

a) o sută; b) o mie; c) o mie unu.

632. Desenați în caiet figura 119 și completați-o cu două pătrate astfel, ca laturile lor să fie egale cu următorii termeni ai șirului lui Fibonacci.

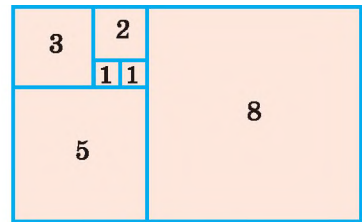


Fig. 119

633. Crescătoare sau descrescătoare sunt șirurile definite prin formulele:

a) $a_n = 9n - 10$; c) $c_n = 5 - n^2$;

e) $z_n = n^2 + 2n - 3$;

b) $b_n = 10 - 9n$; d) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$;

f) $y_n = \frac{3n+4}{n+2}$?

634. Demonstrați că șirul $a_n = 8n - 7$ este crescător.

635. Demonstrați că șirul $a_n = \frac{n+1}{n}$ este descrescător.

636. Aflați cel mai mare termen al șirului:

a) $a_n = 6n - n^2 - 5$;

b) $a_n = -n^2 + 2n + 3$.

637. Aflați cel mai mare termen negativ al șirului definit prin formula termenului al n -lea:

a) $a_n = n^2 - 35$;

b) $a_n = 0,25n^2 - 10,75$.

638. Care din numerele $-20, -10, -5, 4, 9$ sunt termeni ai șirului cu termenul al n -lea $a_n = 2n^2 - 7n$?

639. Al cărui șir numărul -12 este termen:

a) $a_n = 7n^2 - 11$; c) $a_n = 2n - n^2 + 3$; e) $a_n = n - n^2$;

b) $a_n = 3 - 5n$; d) $a_n = \frac{n+1}{n}$; f) $a_n = \frac{5n^2+4}{1-2n}$?

Exerciții pentru repetare

640. O întreprindere comercială a cumpărat de 2 500 grn. două obiecte și după vânzarea lor a obținut 40 % din venit. Cât a plătit întreprinderea pentru fiecare obiect, dacă primul a adus 25 % din venit, iar al doilea – 50 %?

641. Construiți graficele funcțiilor:

a) $y = x^2 + 3$;

c) $y = (x - 4)^2$;

b) $y = x^2 - 2$;

d) $y = (x + 3)^2$.

642. Rezolvați sistemele de ecuații:

a)
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 - 2x = 15; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 4)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 6x = 7. \end{cases}$$

Comoara succeselor

✓ Știu cum se notează șirul și termenii lui.

✓ Pot da exemple de șiruri:

cresătoare

descrescătoare

infinite

finite

✓ Știu cu care formule se definește șirul:

termenul al n -lea

recurente

✓ Știu a calcula termenii șirului

✓ Pot defini șirul după termenii lui dați și corelația dintre ei

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este un șir.
- Ce este termenul precedent și cel următor al șirului:

$$a_n \text{ și } a_{n+1}$$

$$a_n - \text{precedentul, } a_{n+1} - \text{următorul}$$

- Ce este formula termenului al n -lea și formula recurentă
- Care șiruri se numesc crescătoare, iar care – descrescătoare.
- Cum se calculează termenii șirului

§ 16 | PROGRESIE ARITMETICĂ

Fie dat șirul, al cărui primul termen este 5, iar fiecare termen următor este cu 3 mai mare decât precedentul:

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \dots$$

Acest șir se numește progresie aritmetică cu primul termen 5 și rația 3.

Progresie aritmetică se numește șirul, al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent adunat cu unul și același număr. Acest număr constant pentru șirul dat se numește *rația progresiei aritmetice*.

Cu alte cuvinte, progresie aritmetică este șirul care poate fi definit cu formulele recurente:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \text{ unde } n \in \mathbb{N}, a \text{ și } d \text{ sunt numere date.}$$

Primul termen și rația progresiei aritmetice pot fi orice numere. Progresia aritmetică este crescătoare, dacă rația ei este pozitivă, sau descrescătoare, dacă rația ei este negativă. Exemplu de progresie aritmetică descrescătoare este:

$$11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots$$

Pentru a obține orice termen al progresiei aritmetice, începând cu al doilea, trebuie de adunat la numărul precedent rația d . Dacă primul termen și rația progresiei aritmetice sunt egale respectiv cu a_1 și d , atunci primii termeni ale ei sunt:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots$$

Atrageți atenția: coeficientul lui d este cu 1 mai mic decât numărul de ordin al termenului progresiei. La fel aflăm $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ și, în general,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Aceasta este formula termenului al n -lea al progresiei aritmetice.

Exemplul 1. Fie dată progresia aritmetică $a_1 = 4$, $d = 3$. Aflați a_{20} .

Rezolvare. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Răspuns. 61.

Exemplul 2. Fie dată progresia aritmetică $a_{19} = 8$, $d = -1$. Aflați a_1 .

Rezolvare. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Deci, $a_1 = 26$.

Răspuns. 26.

Să examinăm câteva proprietăți ale progresiei aritmetice.

Teorema 6. Orice termen al progresiei aritmetice, cu excepția primului, este egal cu semisuma a doi termeni vecini cu el: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Demonstrație. Conform definiției $d = a_{n+1} - a_n$, $d = a_n - a_{n-1}$. Deci,

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}, \text{ de aici } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Este adevărată și afirmația inversă. Demonstrați-o independent.

Teorema 7. Suma a doi termeni ai progresiei aritmetice finite, egal depărtați de extremitățile ei, este egală cu suma termenilor extremi:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

Fie dați n termeni ai progresiei aritmetice finite:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Adunăm primul și ultimul termeni ale ei, apoi – al doilea și penultimul, apoi – al treilea de la începutul ei și al treilea de la sfârșitul ei, ș.a.m.d. Obținem rezultate egale.

Într-adevăr, dacă $a_1 + a_n = m$, atunci:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m;$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$$

$$\text{i t. f. } \text{Отже, } a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

Teorema 8. Suma termenilor progresiei aritmetice finite este egală cu semisuma termenilor ei extremi înmulțită cu numărul termenilor:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Demonstrație. Fie S_n suma a n termeni ai progresiei aritmetice:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Dacă $a_1 + a_n = m$, atunci $a_2 + a_{n-1} = m$; $a_3 + a_{n-2} = m$ și a. m. d.

Luând în considerație aceasta, adunăm parte cu parte două egalități::

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline \end{aligned}$$

$$2S_n = m + m + m + \dots + m + m + m$$

$$2S_n = mn; 2S_n = (a_1 + a_n)n, \text{ zcifică}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

După această formulă se află suma primilor n termeni ai oricărei progresii aritmetice.

Exemplul 3. Aflați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei aritmetice 5, 7, 9,

Rezolvare. Aici $a_1 = 5, d = 2$. De aceea $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5+43}{2} \cdot 20 = 480.$$

Răspuns. 480.

Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice se poate afla și după formula

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \text{ Demonstrați-o independent.}$$

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Imaginați-vă funcția liniară $y = 0,5x + 1$. Graficul ei este reprezentat pe figura 120. Dacă argumentul x primește numai valori naturale, adică 1, 2, 3, ... , atunci valorile funcției vor fi egale respectiv cu:

$$1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; \dots$$

Avem progresie aritmetică cu primul termen 1,5 și rația 0,5. Acestei progresii îi corespunde figura 121. În general, fiecare funcție $y = ax + b$, definită pe mulțimea numerelor naturale, este o progresie aritmetică cu primul termen $a + b$ și rația a . De aceea se consideră că **progresia aritmetică este o funcție liniară definită pe mulțimea numerelor naturale.**

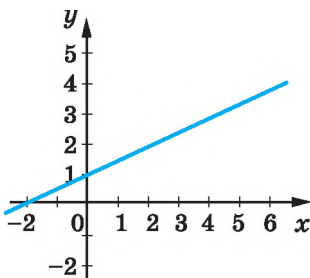


Fig. 120

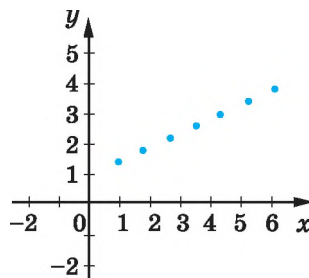


Fig. 121

Dacă o astfel de funcție este definită pe mulțimea tuturor numerelor naturale, atunci avem o progresie aritmetică infinită. Dacă ea este definită pe mulțimea primelor n numere naturale, atunci avem o progresie aritmetică finită care conține n termeni..

Verificați-vă

1. Formulați definiția progresiei aritmetice.
2. Ce este rația progresiei aritmetice?
3. Cum se exprimă termenul al n -lea al progresiei aritmetice prin primul termen și rație?
4. Cu ce este egală suma a doi termeni ai progresiei aritmetice, egal depărtați de extrimitățile ei?
5. Cu ce este egală suma a n termeni ai progresiei aritmetice?

Efectuăm împreună

1 Aflați suma tuturor numerelor naturale de două cifre.

- **Rezolvare.** Aflăm suma numerelor 10, 11, 12, ..., 99. Acest șir este o progresie aritmetică finită. Ea conține 90 de termeni și suma ei este egală cu:

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99) \cdot 90 = 4905.$$

Răspuns. 4 905.

- **Rezolvare.** Dacă 1 000 este termenul al i -lea al progresiei date, atunci $1\ 000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$; $3 \cdot (i - 1) = 995$, deci, i nu este un număr natural, deoarece 995 nu se divide cu 3.

Dacă $200 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, atunci $3 \cdot (i - 1) = 195$, de aici $i = 65$.

Răspuns. 1 000 nu este termen al progresiei aritmetice date, iar 200 este termenul al

65-lea.

3 În progresia aritmetică se știe $a_7 = 43$ și $a_{15} = 3$. Aflați a_{10} .

- **Rezolvare.** Substituim datele problemei în formula $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Avem:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ abo } \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases}$$

$$40 = -8d, \text{ звідки } d = -5, a_1 = 73.$$

Deoarece $a_{10} = a_1 + 9d$, atunci $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.

Răspuns. 28.

Efectuați oral

643. Aflați rația progresiilor aritmetice:

a) 3, 5, 7, ... ; b) 12, 10, 8, ... ; c) -2, 1, 4, ... ; d) -7, -9, -11,

644. Rația progresiei aritmetice este egală cu 2. Aflați primul termen al ei, dacă:

a) $a_2 = 5$; b) $a_2 = -3$; c) $a_2 = 0,3$; d) $\sqrt{2}$.

645. Oare este o progresie aritmetică șirurile:

a) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; b) 0, -1, -3, -5, -8, ... ?

646. Care șir poate fi progresie aritmetică? Indicați primul termen și rația acestor progresii.

a) 0, 3, 6, 9, 12, ... ;

e) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$;

b) -2, -4, -6, -8, -10, ... ;

d) 5, 10, 20, 40, 80, ... ;

c) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ... ;

f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \dots$.

Nivelul A

647. Scrieți primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:

a) $a_1 = 7, d = 2$;

c) $a_1 = -\frac{1}{4}, d = \frac{1}{4}$;

b) $a_1 = 0,5, d = -10$;

d) $a_1 = 9, d = 0$.

648. Scrieți primii șapte termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:

a) $a_1 = 2, d = 5$;

c) $a_1 = 0, d = 7$;

b) $a_1 = -3, d = 4$;

d) $a_1 = 4, d = -1$.

649. În progresiile aritmetice:

a) $a_1 = 5, d = -4$. Aflați a_7, a_{20} .

b) $a_1 = 9, d = 4$. Aflați a_{15}, a_{32} .

650. În progresia aritmetică $a_2 = 14, a_3 = 25$. Aflați d, a_{10}, a_{20} .

651. Aflați rația și termenul al zecelea al progresiilor aritmetice:

a) 2, 7, 12, ... ;

b) 3, 1, -1, ... ;

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots$.

652. Aflați rația progresiilor aritmetice dacă:

a) $a_1 = 5, a_7 = 95$;

c) $a_1 = -15, a_{10} = -24$;

b) $a_1 = 2,3, a_5 = 1,5$;

d) $a_1 = -17, a_7 = 97$.

653. Aflați primul termen al progresiilor aritmetice, dacă:

a) $a_{11} = 25, d = 2;$

c) $a_8 = 9, d = 0,3;$

b) $a_{36} = 5, d = -1;$

d) $a_{21} = -50, d = 3.$

654. În progresia aritmetică $a_{17} = 53, d = 3$. Aflați a_1, a_5, a_{11}, a_{21} .

655. În progresia aritmetică $a_{10} = 5, a_{11} = -4$. Aflați a_1, d, a_5, a_{21} .

656. În progresia aritmetică $a_{25} = 5, a_{27} = 4$. Aflați a_7, a_{20} .

657. În progresia aritmetică $a_4 = 2, a_6 = 3$. Aflați a_{40}, a_{41} .

658. Aflați termenul al n -lea al progresiei aritmetice:

a) 2, 5, 8, ...;

b) 7, 6, 5, ...; c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \dots$

659. Scrieți formula termenului al n -lea al progresiilor aritmetice:

a) 7, 12, ...;

c) -2,5, 0,5, ...;

b) -25, -19, ...;

d) -4,5, -3,7, ...

660. Aflați suma primilor zece termeni ai progresiilor aritmetice:

a) $a_1 = -35, a_{10} = 10;$

c) $a_1 = -2,5, a_{10} = 2;$

b) $a_1 = 66, a_{10} = -6;$

d) $a_1 = 20, a_{10} = 21,8.$

661. Aflați primul termen și rația progresiilor aritmetice, dacă:

a) $a_{10} = 95, S_{10} = 500;$

b) $a_{15} = 47, S_{15} = 1500.$

662. Aflați suma primilor o sută de termeni ai progresiilor aritmetice:

a) 50, 49, 48, ...;

c) 2, 7, 12, 17, ...;

b) -50, -49, -48, ... ;

d) 16, 13, 10, 7, ...

663. Aflați suma primilor patruzeci de termeni ai progresiei aritmetice, dacă:

a) $a_1 = 2, d = 3;$

c) $a_1 = 3, d = -0,2;$

b) $a_1 = -18, d = 5;$

d) $a_1 = 7, a_{50} = 252.$

664. În progresia aritmetică sunt cunoscuți primul termen a_1 și rația d . Aflați suma S_n a primilor n termeni ai ei, dacă:

a) $a_1 = 3, d = 2, n = 32;$

d) $a_1 = -5, d = -7, n = 12;$

b) $a_1 = -4, d = 4, n = 25;$

e) $a_1 = 0, d = 7, n = 35;$

c) $a_1 = 15, d = -2, n = 40;$

f) $a_1 = 8, d = 0, n = 50.$

665. Problemă arabă străveche. Aflați termenul al 20-lea și suma a 20 de termeni ai progresiei aritmetice 3, 7, 11, 15,

666. Problemă evreiască străveche. Aflați suma primelor șazeci de numere naturale.

667. Învățătorul a propus elevilor să afle suma tuturor numerelor naturale de la 1 până la 40, considerând, că elevii mult timp vor aduna patruzeci de numere. Dar micuțul Carl Gauss (mai târziu a devenit vestit matematician neamț) problema a rezolvat-o într-o minută. Cum el a meditat? Încercați să rezolvați oral problema.

668. Aflați suma primelor o sută de numere naturale.

669. Aflați suma primelor o sută de numere naturale impare.

670. Resortul constă din zece arcuri de oțel (fig. 122). Lungimea arcului de sus este de 105 cm, iar fiecare arc următor este cu 9 cm mai scurt decât cel precedent. Aflați suma lungimilor tuturor arcurilor ale resortului.



Fig. 122

671. Problemă străveche. Oamenilor care săpau o fântână li s-a promis că pentru primul metru 30 de ruble, iar pentru fiecare următorul – cu 20 de ruble mai mult decât pentru metrul precedent. Câți bani vor primi ei pentru săparea unei fântâni cu adâncimea de 12 m?

Nivelul B

672. În progresia aritmetică $a_1 = 0,1$, $d = 2$. Aflați a_9 , a_n , a_{3p} .

673. a_1, a_2, a_3, \dots — este o progresie aritmetică. Aflați a_{30} , dacă:

a) $a_3 = 3$, $a_4 = 4$;

c) $a_1 = 8$, $a_5 - a_3 = 6$;

b) $a_5 = 9$, $a_7 = 13$,

d) $a_2 = 5$, $a_5 - a_1 = 12$.

674. $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ — este o progresie aritmetică. Aflați a_1 , d , a_{21} , a_{100} , dacă:

a) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;

c) $a_5 = 8,2$, $a_{10} = 4,7$;

b) $a_5 = 5,2$, $a_9 = 6,8$;

d) $a_8 = 11,2$, $a_{15} = 19,6$.

675. Oare numărul 253 este termen al progresiei aritmetice 15, 23, 31, ... ?

676. Oare numărul 212 este termen al progresiei aritmetice:

a) 3, 14, 25, 36, ...;

b) 275, 269, 263, 257, ...?

677. Care din numerele -23, -14, -3, 1, 3, 14, 23 sunt termeni ai progresiei aritmetice, care are termenul al n -lea:

a) $a_n = 5n - 19$;

b) $b_n = 0,1n + 11$;

c) $c_n = 97 - 2n$?

678. Câți termeni negativi au progresiile aritmetice:

a) -10,3; -8,6; ...;

b) -37,5; -35,7; ...?

679. Câți termeni pozitivi conțin progresiile aritmetice:я:

a) 2,5; 2,3; 2,1, ...;

b) 176; 151; 126; ...?

680. Câți termeni negativi au progresiile aritmetice:

a) -32, -30, -28, ...;

b) $-8\frac{1}{2}$, -8, $-7\frac{1}{2}$, ...?

681. Câți termeni ai progresiei aritmetice 10, 16, 22, ... se conțin între numerele 110 și 345?

682. Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice, definită prin formula termenului al n -lea:

a) $c_n = 5n - 3$;

b) $a_n = 2n + 10$;

c) $a_n = -3 - 0,5n$.

683. Oare este o progresie aritmetică șirul, definit prin formula termenului al n -lea:

- a) $a_n = 3n + 1$;
 b) $b_n = 5 - 4n$;
 c) $c_n = 2^n + 1$?

684. Pe latura CA a unghiului ACB de la vârful lui sunt depuse segmente egale și prin extremitățile lor sunt duse drepte paralele (fig. 123). Aflați lungimea segmentului A_3B_3 , A_7B_7 , A_nB_n , dacă $A_1B_1 = 2,5$ cm.

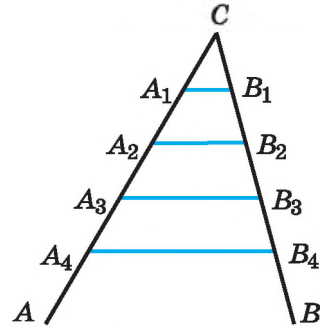


Fig. 123

685. a_1, a_2, a_3, \dots este o progresie aritmetică, c un număr arbitrar. Demonstrați că șirul $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, \dots$ tot este o progresie aritmetică.

686. a_1, a_2, a_3, \dots și x_1, x_2, x_3, \dots sunt progresii aritmetice. Demonstrați, că progresie aritmetică este și șirul

$$a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3, \dots$$

687. Numerele a^2, b^2, c^2 nu sunt egale și formează o progresie aritmetică. Demonstrați, că progresie aritmetică formează și numerele

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}.$$

688. Este dată o progresie aritmetică cu termenul al n -lea a_n . Demonstrați, că:

- a) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; b) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$.

689. *Problemă lui Feofan Procopovici.* Un om are mulți cai și prețul lor este diferit. Calul cel mai slab costă 4 monede de aur, iar cel mai bun – 55 monede de aur, și prețul crește de la un cal la altul cu 3 monede de aur. Întrebăm: câți cai erau în total?

690. Aflați suma primilor n termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:

- a) $a_1 = 1, a_5 = 3, n = 40$; c) $a_2 = 5, a_4 = 6, n = 100$;
 b) $a_1 = -3, a_3 = 1, n = 50$; d) $a_1 = a_{100}, a_3 = 3, n = 100$.

691. Aflați suma tuturor numerelor naturale pare mai mici decât 200.

692. Aflați suma tuturor numerelor naturale impare mai mici decât 200.

693. Aflați suma numerelor naturale mai mici decât 1000, care se divid cu:

- a) 3; b) 5; c) 12.

694. Aflați suma tuturor numerelor întregi care aparțin intervalului:

- a) $[-30; 70]$; b) $[-70; -30]$; c) $(-70; 70)$.

695. În progresia aritmetică sunt zece termeni. Suma termenilor cu numere impare este egală cu 10, iar a celor cu numere pare – 25. Aflați al șaptelea termen.

696. a) Termenul al treisprezecelea al progresiei aritmetice este egal cu 3. Aflați suma primilor 25 de termeni ai ei.

- b) **Problemă deschisă.** Aflați suma primilor ... termeni ai progresiei aritmetice, dacă termenul al ... este egal cu 100.
697. Suma primilor cincisprezece termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 20, iar suma primilor douăzeci de termeni ai ei este cu 6 mai mică. Aflați suma primilor 27 de termeni.
698. Aflați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice, definită prin formula termenului al n -lea:
 a) $a_n = 2 + 5n$; b) $a_n = 2n - 1$; c) $a_n = -3 + n$.
699. Aflați termenul al cincilea al progresiei aritmetice, dacă suma primilor n termeni se poate afla după formula:
 a) $S_n = n^2 - 6n$; b) $S_n = 3n^2 - n$; c) $S = 4n^2 - 2n$.
700. Suma termenilor al patrulea și al șaselea ai progresiei aritmetice este egală cu 14. Aflați suma primilor nouă termeni ai progresiei.
701. **Problema lui Franker.** Câte bătaii va face un ceasornic în decurs de 12 h, dacă el bate la fiecare jumătate de oră?
702. Corpul fizic la căderea liberă în prima secundă parcurge 4,9 m, iar în fiecare următoarea – cu 9,8 m mai mult. Aflați: a) adâncimea minei, dacă o pietricică a ajuns la fund peste 8 s după începerea căderii; b) câte secunde va cădea piulița de la înălțimea de 490 m?
703. a) Mărimile unghiurilor pentagonului formează o progresie aritmetică. Demonstrați, că mărimea unui unghi este egală cu 108° .
 b) Compuneți probleme asemănătoare pentru triunghi și septagon.
704. Extremitățile segmentelor paralele cu bazele unui trapez sunt pe laturile laterale ale lui și le împart, pe fiecare, în 8 părți egale. Aflați lungimile acestor segmente și suma lor, dacă bazele trapezului sunt egale cu a și b (fig. 124).

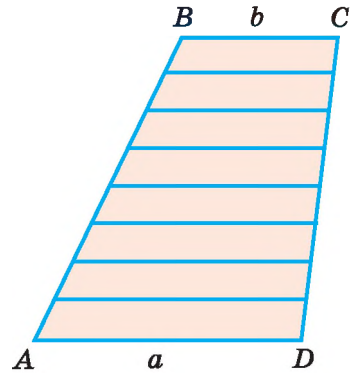


Fig. 124

Exerciții pentru repetare

705. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; b) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; c) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

706. Rezolvați inecuațiile:

a) $x^2 - 8x < 0$; c) $x^2 - 16 < 0$;
 b) $x^2 + 7x < 0$; d) $x^2 - 3 \leq 0$.

707. Pe figura 125 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$. Stabiliți relațiile dintre abscisele punctelor (1–4), care sunt argumentele funcției $y = f(x)$, și intervalele (A–E), căror le aparține valorile acestei funcției în punctele date.

- 1 $x = -1$
 2 $x = 1$
 3 $x = 3$
 4 $x = 5$

- A (1,5; 2]
 B (0; 1)
 C [-1; 0,5)
 D (2; 3]
 F [-2; -1]

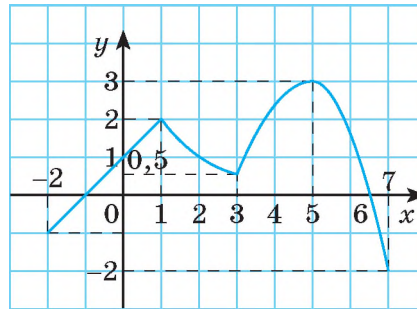


Fig. 125

Comoara succeselor

Înțeleg ce este progresia aritmetică.

- ✓ Pot formula definiția progresiei aritmetice.
- ✓ Pot da exemple de progresii aritmetice și stabili, dacă șirul dat este progresie aritmetică.

- ✓ Știu ce este rația progresiei aritmetice
- ✓ Știu cu care formule se definește progresia aritmetică

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

recurentă

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$$

termenul al n -lea

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- ✓ ✓ Pot explica și formula proprietățile progresiei aritmetice:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_k + a_{n - (k - 1)} = a_1 + a_n$$

- ✓ Știu și pot folosi formula sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

- ✓ Pot defini progresia aritmetică după termenii ei dați sau după corelațiile dintre ei.
- ✓ Pot afla termenii necunoscuți ai progresiei aritmetice.

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este progresie aritmetică.
- Care este termenul precedent și termenul următor.
- Care-i formula termenului al n -lea și formula recurentă.
- Prin care formule se poate defini progresia aritmetică:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d$$

- Care proprietăți posedă progresia aritmetică:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad a_k + a_{n - (k - 1)} = a_1 + a_n$$

Cum se calculează suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

§ 17

Progresie geometrică

Să examinăm o problemă din **folclorul indian**.

Problemă din folclorul indian. Un împărat foarte mult a îndrăgit jocul de șah și a promis inventatorului o răsplată mare. Inventatorul a solicitat pentru primul pătrățel al tablei de șah un grăunte de grâu, pentru al doilea – două grăunțe, pentru al treilea – patru și pentru fiecare pătrățel următor de două ori mai multe grăunțe decât pentru cel precedent. Împăratul s-a mirat mult, că inventatorul așa de puțin solicită. Dar promisiunea împăratul nu a putut s-o îndeplinească. De ce? Despre aceasta veți afla după ce veți studia proprietățile progresiei geometrice

➔ **Progresie geometrică** se numește șirul al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, înmulțit cu unul și același număr. Acest număr q constant pentru șirul dat se numește **rația progresiei geometrice**.

Primul termen b_1 și rația q ai progresiei geometrice pot fi orice numere diferite de zero.

Cu alte cuvinte, progresia geometrică este șirul care poate fi definit cu formula recurentă:

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0 \text{ și } q \neq 0 \text{ sunt numere date.}$$

Exemple de progresii geometrice sunt:

$$\begin{aligned} & 3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots (b_1 = 3, q = 2); \\ & 1, -3, 9, -27, 81, -243, \dots (b_1 = 1, q = -3); \\ & -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots \left(b_1 = -1, q = \frac{1}{2}\right); \\ & 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots (b_1 = 7, q = 1). \end{aligned}$$

Remarcă. Fiecare progresie aritmetică cu rația 0 se poate considera și progresie geometrică cu rația 1.

Progresia geometrică cu primul termen b_1 și rația q are primii termeni:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots$$

Termenul al doilea este $b_2 = b_1q$, al treilea $b_3 = b_1q^2$, iar al n -lea $b_n = b_1q^{n-1}$.

Aceasta este formula termenului al n -lea al progresiei geometrice.

Exemplul 1. În progresia geometrică $b_1 = 5$, $q = 2$. Aflați b_{10} .

Rezolvare. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2\,560$.

Răspuns. 2 560.

Exemplul 2. Termenii primul și al șaptelea ai progresiei geometrice sunt egali respectiv cu 81 și 64;9. Aflați rația q a ei.

Rezolvare. După formula termenului al n -lea al progresiei geometrice:

$$b_7 = b_1q^6, \quad \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6, \quad q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81}, \quad q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

$$\text{Dar dacă } q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6, \text{ atunci } q = \frac{2}{3} \text{ sau } q = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Răspuns. } \frac{2}{3} \text{ sau } -\frac{2}{3}.$$

Să examinăm proprietățile progresiei geometrice.

Teorema 9. Pătratul fiecărui termen al progresiei geometrice, începând cu al doilea, este egal cu produsul a doi termeni vecini a lui: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Demonstrație. După definiție $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, a $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

$$\text{Deci, } b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2.$$

Este adevărată și afirmația inversă. Demonstrați-o independent.

Teorema 10. Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu condiția că $q \neq 1$ se exprimă prin formula: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Demonstrație.

Fie $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}$. Înmulțim ambele părți ale egalității cu q :

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Din această egalitate scădem parte cu parte egalitatea precedentă, termenii asemenea $b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots, b_1q^{n-1}$ se reduc. În rezultat obținem:

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1, \text{ abo } S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1),$$

de aici

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Aceasta este formula sumei a primilor n termeni ai progresiei geometrice cu primul termen b_1 și $q \neq 1$.

Dacă $q = 1$, această formulă nu se poate aplica (de împărțit la 0 nu se poate). În acest caz fiecare termen al progresiei geometrice este egal cu b_1 și $S_n = nb_1$.

Exemplul 3. Aflați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei geometrice 2, 6, 18, 54, ...

Rezolvare. Aici $b_1 = 2$, $q = 3$, de aceea $S_{20} = \frac{2(3^{20} - 1)}{3 - 1} = 3^{20} - 1$.

Răspuns. $3^{20} - 1$.

Suma primilor n termeni a progresiei geometrice se poate afla și după formula

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}.$$

Demonstrați-o independent.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Suma a n termeni ai progresiei geometrice cu mărirea numărului n crește foarte repede. Rezolvăm problema din folclorul indian, care a cercetat-o pe pagina 171.

Rezolvare. Tabla de șah are 64 de pătrățele. De aceea împăratul trebuia să dea inventatorului $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{64}$ grăunțe de grâu. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

Încercați să calculați această sumă. Noi vom evalua numai ultimul termen::

$$2^5 = 32, 2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3.$$

$$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Dacă vom considera, că masa a 400 de grăunțe este de 1 kg, atunci masa a 2^{64} de grăunțe este mai mare decât

$$16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^{15} \text{ (κd)}, \text{ abo } 4 \cdot 10^{12} \text{ τ.}$$

Și aceasta este valoarea aproximativă numai a ultimului termen. Așa cantitate de grâne toate țările lumii nu vor putea recolta de-a lungul veacurilor.

Progresia geometrică 2, 4, 8, 16, 32, ... – acestea-s valorile succesive ale funcției $y = 2^x$, definită pe mulțimea numerelor întregi.

Verificați-vă

1. Dați exemplu de progresie geometrică.
2. Formulați definiția progresiei geometrice.
3. Ce este rația progresiei geometrice?
4. Cum se exprimă termenul al n -lea al progresiei geometrice prin primul termen și rația ei?
5. Formulați proprietățile progresiei geometrice.
6. Cu ce este egală suma primilor n termeni ai progresiei geometrice.

Efectuăm împreună

- 1 În progresia geometrică $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ sunt termenii progresiei geometrice. Aflați b_1 și q .
- **Rezolvare.** După formula termenului al n -lea $b_4 = b_1 \cdot q^3$ și $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Substituim în aceste egalități valorile $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ și rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 2 = b_1 \cdot q^3, \\ -54 = b_1 \cdot q^6. \end{cases}$$

Împărțim parial a doua ecuație la prima parte:

$$\frac{-54}{2} = \frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3}. \text{ Avem: } q^3 = -27 \text{ i } q = -3.$$

Din prima ecuație aflăm b_1 :

$$2 = b_1 \cdot (-3)^3; \quad b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}.$$

Răspuns. $b_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.

- 2 Aflați suma a cinci termeni ai progresiei geometrice în care $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.
- **Rezolvare.** *Primul procedeu.* Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice se poate afla după formula $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Dacă $n = 5$, atunci

$$S_5 = \frac{b_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Procedeu al doilea. Scriem 5 termeni ai progresiei date. 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$.

Aflăm suma lor, adunându-le: $15\frac{1}{2}$.

Răspuns. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

*Atrageți atenția la
acest procedeu!*

Efectuați oral

708. Indicați următorii trei termeni ai progresiilor geometrice:

- | | |
|-------------------|---------------------|
| a) 3, 6, 12, ...; | c) -1, -2, -4, ...; |
| b) 16, 8, 4, ...; | d) -2, 4, -8, ...; |

709. Oare este o progresie geometrică șirurile:

- | |
|---|
| a) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001; |
| b) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$? |

Dacă este progresie, indicați rația ei.

710. Oare este o progresie geometrică șirurile:

- | | |
|----------------------------|--|
| a) 2, 4, 6, 8, ...; | c) 3, 6, 12, 14, ...; |
| b) 1, -3, 9, 27, -81, ...; | d) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ...? |

711. Oare este o progresie geometrică șirul $7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3}$, unde n este orice număr natural? Dar șirul $7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3}$?

Nivelul A

712. Scrieți primii șapte termeni ai progresiilor geometrice, în care:

- | | |
|----------------------------------|------------------------|
| a) $b_1 = 1, q = 3$; | c) $b_1 = -5, q = 2$; |
| b) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$; | d) $b_1 = 1, q = -2$. |

713. Scrieți primii cinci termeni ai progresiilor geometrice, în care:

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| a) $b_1 = 18, q = -1$; | c) $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}$; |
| b) $b_1 = 5, q = 2$; | d) $b_1 = \frac{5}{27}, q = 3$. |

714. Aflați rația și termenul al cincilea ai progresiilor geometrice:

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) -1, 3, ...; | c) 625, 125, ...; |
| b) 0,1, 0,01, ...; | d) 4, -2, ...; |

- 715.** În progresia geometrică $b_1 = -3$, $q = 2$. Aflați b_4 , b_7 , b_n .
- 716.** Aflați primul termen al progresiilor geometrice, în care:
 a) $b_8 = 384$, $q = 2$; b) $b_5 = 31,25$, $q = -2,5$.
- 717.** $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ este o progresie geometrică. Aflați b_{12} , dacă:
 a) $b_1 = 1$, $b_2 = 6$; c) $b_3 = 1$, $b_4 = 0,5$;
 b) $b_1 = 25$, $b_2 = -50$; d) $b_2 = 2$, $b_4 = 4$.
- 718.** Aflați termenul al șaptelea al progresiei geometrice, dacă:
 a) $b_3 = 3$, $b_4 = 6$; c) $b_5 = 80$, $b_6 = -160$;
 b) $b_3 = -1,5$, $b_5 = -6$; d) $b_6 = 18$, $b_4 = 72$.
- 719.** Scrieți formula termenului al n -lea al progresiilor geometrice:
 a) 2, 6, 18, ...; c) 1, $\sqrt{2}$, 2, ...;
 b) $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 1, ...; d) 64, -32, 16, ...
- 720.** Aflați numărul termenului n al progresiilor geometrice, în care:
 a) $b_1 = 4$, $q = 3$, $b_n = 324$; b) $b_1 = -8$, $q = 2$, $b_n = -256$.

721. A_1C_1 este linia medie a $\triangle ABC$, A_2C_2 este linia medie a $\triangle A_1BC_1$, A_3C_3 este linia medie a $\triangle A_2BC_2$ și a.m.d. (fig. 126). Oare este adevărat, că lungimile segmentelor AC , A_1C_1 , A_2C_2 , ... formează o progresie geometrică?

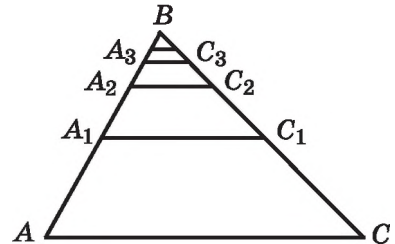


Fig. 126

- 722.** În progresia geometrică primul termen este b_1 și rația q . Aflați suma primilor termeni, dacă:
- a) $b_1 = -3$, $q = 3$, $n = 6$; c) $b_1 = 4$, $q = -2$, $n = 10$;
 b) $b_1 = 2,5$, $q = 0,4$, $n = 4$; d) $b_1 = \frac{5}{27}$, $n = 6$.
- 723.** Aflați suma primilor n termeni ai progresiilor geometrice, dacă:
 a) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$; c) $b_1 = -2$, $q = 2$, $n = 12$;
 b) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$; d) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$.
- 724.** Aflați suma primilor șase termeni ai progresiilor geometrice:
 a) -2, 10, ...; d) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...;
 b) 5, 10, ...; e) 5, 10, 20, 40, 80, ...
 c) 32, -16, ...;
- 725.** Aflați suma primilor cincisprezece termeni ai progresiilor geometrice:
 a) 1, 2, 4, 8, ...; c) 1, -2, 4, -8, ...;
 b) 1024, 512, 256, ...; d) 1024, -512, 256, ...

726. Problemă din vechime. Odată un sărac înțelept l-a rugat pe un om bogat zgârcit să-i dea adăpost pe două săptămâni cu condițiile următoare: «Pentru aceasta eu voi plăti în prima zi 1 rublă, a doua -2, a treia - 3 și a.m.d., măbind plata zilnic cu câte 1 rublă. Însă tu vei da pomană: în prima zi 1 copeică, a doua - 2, a treia - 4 și a.m.d., măbind pomana zilnic de două ori». Bogatul cu bucurie a acceptat condițiile, considerându-le rentabile. Câți bani a primit cel bogat?

727. Problema lui Euler. Un bărbat, vânzând un cal, i-a propus cumpărătorului să plătească numai pentru cuiele cu care erau bătute potcoavele pe copitele calului. Pentru primul cui - 1 pfenig, pentru al doilea - 2, pentru al treilea - 4, ș.a.m.d.: pentru fiecare de două ori mai mult decât pentru cel precedent. Cu cât el a vândut calul, dacă erau 32 de cuie?

Nivelul B

728. b_1, b_2, b_3, \dots — este o progresie geometrică. Aflați b_1 și q , dacă:

a) $b_3 = 625, b_7 = 81;$

c) $b_4 = \frac{9}{32}, b_8 = \frac{1}{18};$

b) $b_5 = 3, b_{10} = -27\sqrt{3};$

d) $b_4 = -6, b_8 = -1\frac{115}{128}.$

729. Scrieți formula termenului al n -lea al progresiei geometrice:

a) 3, -6, ... ; b) -0,1, -1, ... ; c) 12, 8, ... ; d) $\frac{2}{5}, 4, \dots$.

730. Oare este numărul 384 termen al progresiei geometrice:

a) 3, 6, ... ;

b) $\frac{4}{81}, \frac{8}{27}, \dots ?$

731. Care din numerele -27, -9, 18, 20, 27 este termen al șirului cu termenul al n -lea:

a) $b_n = 5 \cdot 2^n;$

c) $y_n = -36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n;$

b) $x_n = (-3)^{n+1};$

d) $c_n = -12 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^n ?$

732. Aflați primul termen și rația progresiilor geometrice în care:

a) $b_1 + b_3 = 10, b_2 + b_4 = 30;$

b) $b_5 - b_1 = 15, b_4 - b_2 = 6.$

733. Oare este șirul definit prin formula $c_n = (-3)^{n+2}$ o progresie geometrică? Dacă este, atunci aflați primul termen și rația ei.

734. Demonstrați, că șirul dat (x_n) este o progresie geometrică:

a) $x_n = 3 \cdot 7^n;$

b) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1};$

c) $x_n = 0,4^{1+n}.$

735. Demonstrați: dacă a, b, c este o progresie geometrică, atunci:

$$(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a.$$

736. Este dată progresia geometrică $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$. Demonstrați, că progresiile geometrice sunt și șirurile:

- a) $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, \dots$;
- b) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_4, \dots$;
- c) $b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_4, \dots$.

737. Termenul al cincilea al progresiei geometrice este egal cu 1. Cu ce este egal produsul primilor nouă termeni ai ei?

738. Termenul al șaselea al progresiei geometrice este egal cu -2 . Cu ce este egal produsul primilor unsprezece termeni ai ei?

739. Aflați trei numere care formează o progresie geometrică, știind că suma lor este egală cu 21, iar produsul – cu 216.

740. Termenii progresiei geometrice 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 de le plasat în nouă pătrățele ale unui pătrat astfel, ca produsele lor în fiecare rând, în fiecare coloană și după fiecare diagonală să fie egale.

741. După fiecare mișcare a pistonului pompei de rarefiere din vas se evacuează 5 % din aerul prezent în el. Determinați presiunea aerului în interiorul vasului după zece mișcări ale pistonului, dacă presiunea inițială era 760 mm a coloanei de mercur.

742. Oare pot lungimile laturilor triunghiului dreptunghic forma o progresie geometrică?

743. Într-un unghi ascuțit sunt înscrise n circumferințe, care sunt tangente una alteia (fig. 127). Demonstrați, că lungimile razelor lor formează o progresie geometrică. De ce depinde rația ei?

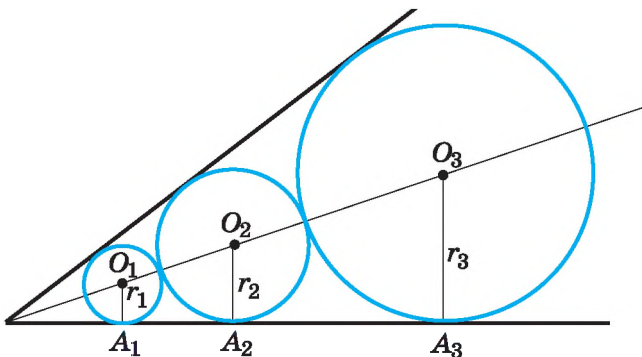


Fig. 127

744. Scrieți primii câțiva termeni ai șirului cu următoarele proprietăți: $b_1 = 1, b_n = 3b_{n-1}$. Scrieți formula termenului al n -lea. Aflați b_5 și S_{10} .

745. Între numerele $40\frac{1}{2}$ și $5\frac{1}{3}$ intercalați așa patru numere, care împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică. Aflați suma ei prin două procedee.

746*. Aflați numărul termenilor ai progresiilor geometrice, în care:

a) $b_1 = 3, b_n = 96, S_n = 189;$

b) $b_1 = 1, b_n = -512, S_n = -341;$

c) $q = -\frac{1}{3}, b_n = \frac{1}{3}, S_n = 20\frac{1}{3};$

d) $q = \sqrt{3}, b_n = 18\sqrt{3}, S_n = 26\sqrt{3} + 24.$

747. Aflați patru numere, din care primele trei sunt termeni consecutivi ai progresiei geometrice, iar ultimele trei sunt termeni ai progresiei aritmetice, dacă suma numerelor extreme este egală cu 21, și suma numerelor medii este egală cu 18.

748. Aflați astfel de numere x, y, z, t , ca șirul $x, y, -2, z, -8, t$ să formeze o progresie geometrică.

749. Cu care număr al termenului progresiei geometrice:

a) 729, 243, ... toți termenii ei vor fi mai mici decât 0,01;

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$ toți termenii ei vor fi mai mari decât 5?

750. Deduceți formula pentru calculul produsului al primilor n termeni ai progresiei geometrice.

751. Aceasta s-a întâmplat aproape cu o sută de ani în urmă. Un țaran vindea 20 de oi cu 200 de ruble. Când un cumpărător a început prea mult să se târguiască, țaranul i-a propus: „Dă pentru prima oaie 1 copeică, pentru a doua – 2 c., pentru a treia – 4 c., și pentru fiecare oaie următoare de 2 ori mai multe copeici decât pentru cea precedentă”. Cumpărătorul s-a învoit. Cât a plătit el pentru acele 20 de oi?



752. Bacteria, nimerind în organism, până la sfârșitul minutei a 20-a se divide în două, fiecare din ele până la sfârșitul minutei a 20-a tot se divide în două ș.a.m.d. Câte bacterii vor fi în organism în decursul a 24 de ore?

753. Să ne imaginăm, că la începutul erei noastre o femeie M a născut două fiice, fiecare din ele până la 30 de ani de asemenea a născut două fiice, ș.a.m.d. Oare este posibil aceasta? În aceste condiții câți, urmași a femeii M ar fi trăit în timpurile noastre?

Exerciții pentru repetare

754. Aflați domeniul de definiție al funcției $y = x^2$, definită pe intervalul:

- a) $(0; 3)$; b) $(-5; -3)$; c) $[-2; 3)$; d) $[-4; 4)$.

755. Pe figura 128 sunt reprezentate câteva figuri alcătuite din chibrite (F_1, F_2, F_3). Imaginați-vă, că consecutivitatea acestor figuri este continuată. Câte chibrituri trebuie pentru a compune figura F_9 ?

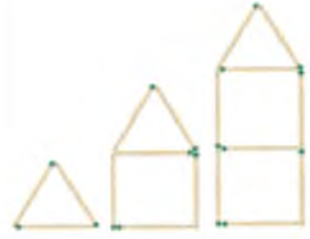


Fig. 128

756. Masa unei bucăți dintr-un metal este de 440 g, iar a altei din alt metal – 429 g. Aflați densitatea fiecărui metal, dacă densitatea primului este cu 1 g/cm^3 mai mare, iar volumul cu 5 cm^3 mai mic decât al bucății a doua.

757. Rezolvați grafic sistemele de ecuații:

a)
$$\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy + 6 = 0, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Comoara succeselor

- ✓ Înțeleg ce este progresie geometrică.
- ✓ Pot formula definiția progresiei geometrice.
- ✓ Pot da exemple de progresii geometrice și pot stabili, dacă șirul dat este progresie geometrică.

- ✓ Știu ce este rația progresiei geometrice

$$q = b_{n+1} : b_n$$

- ✓ Știu care formule definesc progresia geometrică

recurentă

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_n \cdot q$$

termenul al n -lea

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

- ✓ Pot explica și formula proprietatea progresiei geometrice

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

- ✓ Știu și pot folosi formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice

$$\text{Dacă } q \neq 1, \text{ atunci } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

$$\text{Dacă } q = 1, \text{ atunci } S_n = n \cdot b_1$$

- ✓ Pot defini progresia geometrică după termenii ei dați sau după corelațiile dintre ei și pot afla termenii necunoscuți ai progresiei geometrice

Aplicăm cunoștințele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este șirul infinit.
- Care șir se numește crescător, iar care – descrescător.
- Ce este progresie geometrică.
- Ce este termenul precedent și următor al progresiei.
- Cu care formulă se definește progresia geometrică $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
- Cum se calculează suma primilor n termeni ai progresiei geometrice:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1 \qquad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$

- Ce este fracție zecimală periodică și cum se scrie ea:
 $0,666666 = 0,(6)$
- Ce este modulul numărului.

§ 18 Probleme de calcul al sumelor

Până aici nu s-au calculat sumele, care au un număr infinit de termeni, dar uneori are sens studierea acestor sume. Cu ce, de exemplu, este egală suma termenilor progresiei geometrice infinit descrescătoare $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$?

Fie aria pătratului reprezentat pe figura 129 b_1 egală cu 1, iar ariile dreptunghiurilor b_2, b_3, b_4, \dots – respectiv cu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Dacă numărul acestor dreptunghiuri se va mări până la infinit, atunci suma ariilor lor se va apropia oricât de mult de numărul 2. De aceea se consideră că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

Să generalizăm exemplul studiat. Fie dată progresia geometrică infinită $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots$, rația căreia $|q| < 1$.

După formula cunoscută,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ sau}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1q^n}{1 - q}.$$

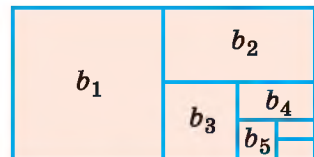


Fig. 129

Aici numărul $\frac{b_1}{1-q}$ este constant, iar n este o variabilă. Dacă $|q| < 1$, atunci la mărirea nemărginită a lui n puterea q^n tinde către 0 (se scrie: dacă $n \rightarrow \infty$, atunci $q^n \rightarrow 0$). În acest timp și fracția tinde spre 0.

Deci, dacă $n \rightarrow \infty$, atunci $S_n \rightarrow \frac{b_1}{1-q}$. De aceea s-a convenit, că suma progresiei geometrice infinite cu primul termen b_1 și rația $|q| < 1$ de considerat numărul $\frac{b_1}{1-q}$.

Cu alte cuvinte, dacă $|q| < 1$ și $b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots = S$, atunci

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Exemplul 1. Aflați suma progresiei geometrice $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \dots$.

Rezolvare. Aici $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$, de aceea suma căutată $S = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 3$.

Răspuns. $S = 3$.

Cu ajutorul formulei $S = \frac{b_1}{1-q}$ fracțiile zecimale infinite periodice se pot scrie sub formă de fracții ordinare.

Exemplul 2. Scrieți în formă de fracție ordinară fracția zecimală infinită periodică:

a) $0,(2)$; b) $1,(6)$; c) $0,(23)$.

Rezolvare.

$$\text{a) } 0,(2) = 0,2222\dots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{2}{9};$$

$$\text{b) } 0,(6) = 0,6666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Deci, } 1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\frac{2}{3};$$

$$\text{c) } 0,(23) = 0,2323\dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \dots = \frac{0,23}{1-0,01} = \frac{23}{99}.$$

Răspuns. a) $\frac{2}{9}$; b) $1\frac{2}{3}$; c) $\frac{23}{99}$.

Atrageți atenția! Frația zecimală infinită periodică, care are partea întreagă egală cu 0, iar perioada este imediat după virgulă, este egală cu fracția ordinară, al cărei numărător este numărul ce constituie perioada, iar numitorul conține atâtea cifre de nouă câte cifre sunt în perioadă.

Meditați cum se poate scrie în formă de fracție ordinară, de exemplu, numărul 1,5(6).
 Până acum am aflat suma termenilor celor mai simple șiruri: progresiilor aritmetice și geometrice. Uneori apare necesitatea de a calcula suma termenilor altor șiruri. Examinăm exemple.

Exemplul 3. Aflați suma S a primilor o sută de termeni ai șirului

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

Rezolvare. Fiecare termen al șirului dat poate fi reprezentat în formă de diferență:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \dots$$

Deci,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}. \end{aligned}$$

Răspuns. $S = \frac{100}{101}$.

Exemplul 4. Aflați suma pătratelor primelor n numere naturale.

Rezolvare. După formula „cubul binomului”, avem:

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1, \text{ de unde } 3a^2 = (a + 1)^3 - a^3 - 3a - 1.$$

Atribuind variabilei a consecutiv valorile 1, 2, 3, ..., n , obținem n egalități numerice adevărate:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$

$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$

$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$

$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$3 \cdot n^2 = (n + 1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

Adunând parte cu parte toate aceste egalități (numerele $2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ se reduc reciproc), obținem identitatea:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n + 1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n - 1,$$

de aici

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n \cdot (n+1) - (n+1) = \frac{n}{2} \cdot (n+1)(2n+1).$$

Deci, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1)$.

Răspuns. $\frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1)$.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Atrageți atenția la expresia $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$. Aceasta este suma a primilor cinci termeni ai progresiei geometrice cu primul termen a^4 și rația $\frac{b}{a}$.

După formula sumei termenilor progresiei geometrice avem:

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \frac{a^4 \left(\frac{b^5}{a^5} - 1 \right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

Deci, $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Tot așa se pot demonstra identitățile:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6).$$

$$\text{Și în genere: } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Formulele „diferența pătratelor” și „diferența cuburilor” sunt cazuri particulare ale acestei formule generale.

Verificați-vă

1. Cum de aflat suma primelor n numere naturale?
2. Cu ce este egală suma tuturor numerelor întregi de la -100 până la 100 ?
3. Oare există suma termenilor progresiei geometrice infinite, rația căreia este mai mare decât 1 ?
4. Cu ce este egală suma termenilor progresiei geometrice infinite, modulul rației căreia este mai mic decât 1 ?
5. Cu ce este egală suma numărului infinit de termeni:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots ?$$

Efectuăm împreună

- ① Aflați suma $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$, termenii căreia sunt termeni ai progresiei geometrice.

- **Rezolvare.** Primul termen al progresiei este numărul 3 , iar rația $\frac{1}{3}$, de aceea

$$\text{suma căutată } S = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 1} = 4,5. \quad \text{Răspuns. } 4,5.$$

2 Simplificați expresia: $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

• **Rezolvare.** Înmulțim și împărțim suma dată la 4. Obținem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \\ & = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{4}{(4n-1)(4n+3)} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)} - \frac{1}{(4n+3)} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(4n+3)} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n+3-3}{3 \cdot (4n+3)} = \frac{n}{3 \cdot (4n+3)}. \end{aligned}$$

Răspuns. $\frac{n}{3 \cdot (4n+3)}$.

3 Reprezentați fracția periodică $0,2(35)$ în formă de fracție ordinară:

$$0,2(35) = \frac{2}{10} + \left(\frac{35}{1000} + \frac{35}{100\,000} + \dots \right) = \frac{2}{10} + \frac{0,035}{1-0,01} = \frac{2}{10} + \frac{35}{990} = \frac{233}{990}.$$

Răspuns. $\frac{233}{990}$.

Efectuați oral

758. Aflați suma termenilor șirului:

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

759. Aflați suma a o sută de termeni ai progresiei aritmetice în care $a_1 = 3$, $d = 0$.

760. Cu ce este egală suma: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$?

Nivelul A

761. Aflați suma progresiilor geometrice infinite:

a) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$;

c) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$;

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$;

d) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \dots$

762. Aflați suma, termenii căreia sunt termeni consecutivi ai progresiilor geometrice:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$;

c) $16 - 8 + 4 - 2 + \dots$;

b) $2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{25} - \frac{2}{125} + \dots$;

d) $-1 - \frac{3}{4} - \frac{9}{16} \dots$

763. *Problema lui Arhimede.* Aflați suma progresiei geometrice infinite:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

764. Aflați suma progresiilor geometrice infinite:

$$\text{a) } 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots; \quad \text{b) } 6 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$$

765. Exprimați în formă de fracție ordinară fracția zecimală infinită periodică:

$$\text{a) } 0,3333\dots; \quad \text{b) } 0,6666\dots; \quad \text{c) } 0,111111\dots$$

766. Scrieți în formă de fracție ordinară fracția zecimală infinită periodică:

$$\text{a) } 0,(4); \quad \text{b) } 0,(5); \quad \text{c) } 0,(12); \quad \text{d) } 0,(25).$$

767. Se dă triunghiul echilateral cu latura de 1 cm. Mijlocurile laturilor lui sunt vârfurile triunghiului al doilea, mijlocurile laturilor lui sunt vârfurile triunghiului al treilea, etc (fig.130). Aflați suma perimetrelor tuturor acestor triunghiuri.

768. *Problema deschisă.* Formulați o problemă despre pătrate asemănătoare cu problema 767 și rezolvați-o.

769. *Problema lui Oresme.* Demonstrați că:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \dots = \frac{7}{4}.$$

Nivelul B

770. Aflați suma termenilor progresiilor geometrice infinite:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots; & \text{c) } & 1, \pi - 3, \\ & (\pi - 3)^2, \dots; & & \\ \text{b) } & 5, \sqrt{5}, 1, \dots; & \text{d) } & \frac{1}{2 - \sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}, \dots \end{aligned}$$

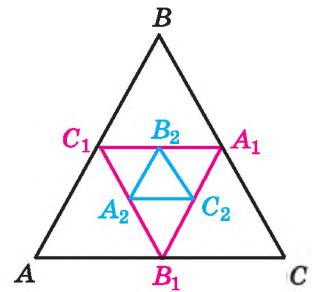


Fig. 130

771. Într-o circumferință cu raza r este înscris un triunghi regulat, în triunghi este înscrisă o altă circumferință, în care iarăși este înscris un triunghi regulat, etc. Aflați suma perimetrelor tuturor triunghiurilor și suma lungimilor tuturor circumferințelor.

772. Scrieți în formă de fracție ordinară fracțiile zecimale infinite periodice: a) 10,(4); b) 3,0(6); c) 0,(24); d) 1,4(7).

773. Scrieți în formă de fracție ordinară numerele:

$$\text{a) } 3,(5); \quad \text{b) } 21,(21); \quad \text{c) } 1,1(6); \quad \text{d) } 10,00(52).$$

774. În 1833 Gauss împreună cu un tânăr fizician talentat, au inventat în Germania primul telegraf electromagnetic și au construit modelul lui, cu ajutorul căruia au unit cabinetul de fizică al universității din Göttingen cu observatorul. Stabiliți corespondența dintre expresiile numerice (1–5) și valorile lor (A–E) și veți afla numele acestui fizician renumit, veți înțelege a cui statuie este alături cu Gauss lângă universitatea din Göttingen.

1 $0,(6) + 0,(7)$	A $1\frac{5}{9}$	P
2 $0,(12) + 1,(5)$	B $1\frac{67}{99}$	E
3 $2,(36) - 1,(12)$	C $1\frac{8}{11}$	B
4 $2,1(6) - 0,(45)$	D $1\frac{4}{9}$	C
5 $0,(3) + 1,(2)$	F $1\frac{47}{66}$	E



775. Se știe că $|a| < 1$, $|x| < 1$. Aduceți la o formă mai simplă sumele:

a) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$;

b) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

776. Aflați suma unui număr infinit de termeni:

$$(8+4\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+\dots,$$

în care fiecare este mai mic de două ori decât precedentul.

777. Scrieți o progresie geometrică infinită descrescătoare, care are primul termen 3 și suma termenilor egală cu 4.

778. Primul termen al progresiei geometrice infinite descrescătoare este cu 8 mai mare decât al doilea, iar suma termenilor este egală cu 18. Aflați termenul al patrulea al acestei progresiei.

779. Suma termenilor progresiei geometrice infinite descrescătoare este egală cu 1,5, iar suma pătratelor lor este 1,125. Aflați primul termen și rația acestei progresiei.

780. Aflați sumele primilor o sută de termeni

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + n(-1)^{n+1} + \dots$;

b) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2(-1)^{n+1} + \dots$

781. Aflați sumele primilor patruzeci de termeni ai șirului:

a) $\frac{41}{1 \cdot 2}, \frac{41}{2 \cdot 3}, \frac{41}{3 \cdot 4}, \frac{41}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{41}{n(n+1)}, \dots;$

b) $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 7}, \frac{3}{7 \cdot 10}, \frac{3}{10 \cdot 13}, \dots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \dots;$

782. Demonstrați identitatea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2.$$

Clarificați conținutul ei geometric după figura 131.

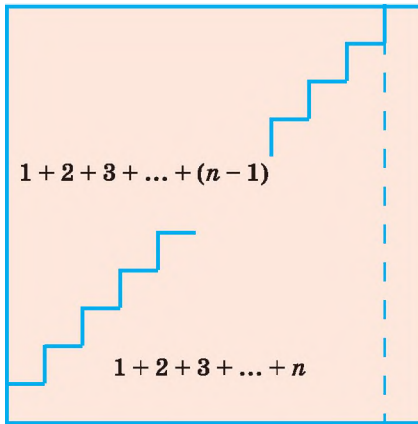


Fig. 131

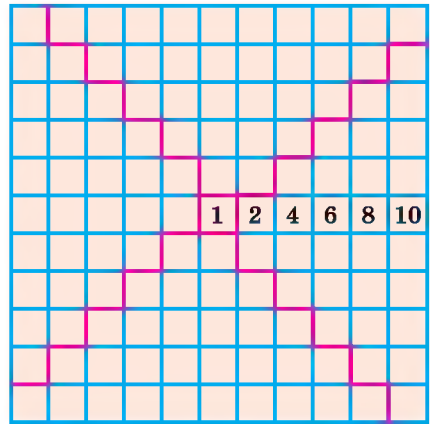


Fig. 132

783. Demonstrați identitatea: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.

Clarificați conținutul ei geometric după figura 132.

Rezolvați ecuațiile, care are în partea stângă suma termenilor progresiei geometrice (784–785).

784. $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^4 + \dots = \frac{7}{2}$, dacă $|x| < 1$.

785. $1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}$, dacă $|x| < 1$.

Demonstrați identitățile (786–787)

786. a) $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3;$

b) $3(2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \dots + (2n-2) \cdot 2n + 2n \cdot (2n+2)) = 4n(n+1)(n+2).$

787. a) $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^2(n+1)^2;$

b) $3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots) + n(n+1) = n(n+1)(n+2).$

788. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)};$ b) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$

789. Perimetrul triunghiului echilateral este egal cu $3a$ (fig. 133, *a*). Împărțim latura lui în trei părți egale și înlocuim fiecare parte din mijloc cu o linie frântă compusă din astfel de segmente și unghiul dintre ele egal cu 60° , așa, cum este arătat pe figura 133, *b*. Fiecare latură a poligonului stelar format o împărțim în trei segmente egale și din nou fiecare segment din mijloc înlocuim cu o frântă asemănătoare ș. a. m. d. Linia închisă, formată prin acest procedeu, se numește *fulgul lui Koch*. Considerând triunghiul echilateral ca primul termen al șirului fulgului lui Koch, scrieți șirul: a) cantității laturilor fulgilor; b) lungimilor laturilor lor; c) perimetrelor lor. Care din aceste șiruri este progresie aritmetică sau geometrică?

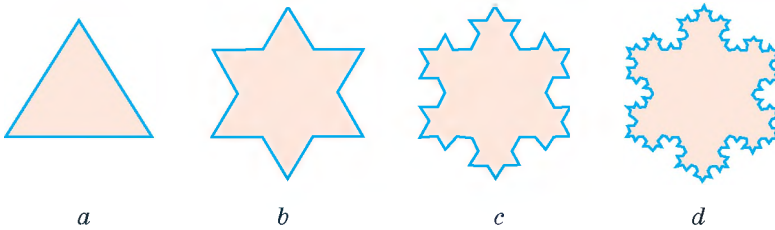


Fig. 133

790. Aflați lungimea laturii, perimetrul și aria fulgului al treilea a lui Koch (fig. 133, *c*), format din triunghiul echilateral cu latura de 3 cm. Oare există fulgul lui Koch, perimetrul căruia este de două ori (de trei ori) mai mare decât perimetrul triunghiului echilateral, din care a fost format el?

Comoara succeselor

Pricep ce este progresie geometrică infinită.

✓ Pot da exemple de progresie geometrică infinită.

✓ Înțeleg ce este suma progresiei geometrice infinite ($|q| < 1$).

✓ Știu și pot folosi formula sumei progresiei geometrice infinite:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}, \text{ якщо } |q| < 1$$

✓ Știu a scrie fracția zecimală periodică în formă de fracție ordinară:

$$0,(13) = \frac{0,13}{1-0,01} = \frac{13}{99}$$

✓ Vreau să știu să află suma termenilor unor șiruri numerice.

PENTRU LUCRUL INDEPENDENT

Varianta I

1°. Șirul 3, 7, 11, 15, ... este o progresie aritmetică. Determinați termenul al n -lea, al 50-lea și suma primilor cincizeci de termeni.

2°. Șirul 2, -6, 18, -54, ... este o progresie geometrică. Determinați termenul al n -lea și suma primilor șapte termeni.

3°. Aflați rația progresiei geometrice crescătoare, dacă primul, al doilea și al patrulea termeni formează o progresie aritmetică.

Varianta II

1°. Șirul 2, 7, 12, 17, ... este o progresie aritmetică. Determinați termenul al n -lea, al 40-lea și suma primilor patruzeci de termeni.

2°. Șirul 2, -4, 8, -16, ... este o progresie geometrică. Determinați termenul al n -lea și suma primilor zece termeni.

3°. Aflați rația progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al doilea, al treilea și al cincilea formează o progresie aritmetică.

Varianta III

1°. Șirul 5, 9, 13, 17, ... este o progresie aritmetică. Determinați termenul al n -lea, al 50-lea și suma primilor cincizeci de termeni.

2°. Șirul 3, -6, 12, -24, ... este o progresie geometrică. Determinați termenul al n -lea și suma primilor zece termeni.

3°. Aflați rația progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al treilea, al patrulea și al șaselea formează o progresie aritmetică.

Varianta IV

1°. Șirul 4, 7, 10, 13, ... este o progresie aritmetică. Determinați termenul al n -lea, al 60-lea și suma primilor șaiszeci de termeni.

2°. Șirul 3, -9, 27, -81, ... este o progresie geometrică. Determinați termenul al n -lea și suma primilor opt termeni.

3°. Aflați rația progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al patrulea, al cincilea și al șapelea formează o progresie aritmetică.

DATE ISTORICE

În papyrusul egiptean al lui Ahmes (mileniul II p. e. n.) este următoarea problemă: „Fie că ți s-a spus: împarte zece măsuri de orz la zece oameni astfel ca fiecare să obțină cu o $\frac{1}{8}$ de măsură mai mult decât vecinul”. Se vorbește despre aflarea a zece termeni ai progresiei aritmetice $a, a + , a + , \dots , a +$ suma cărora este egală cu 10 $a + \frac{1}{8}, a + \frac{2}{8}, \dots, a + \frac{9}{8}$.

Babilonienii antici calculau, printre altele, suma termenilor progresiei geometrice $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$.

Matematicenii din Grecia Antică știau încă în sec. V p. e. n. că

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1),$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2.$$

Regulile de aflare a sumei progresiei geometrice sunt în „Bazele” lui Euclid.

Arhimede a dedus regulile de aflare a sumei pătratelor primelor n numere naturale, de asemenea știa să calculeze suma termenilor progresiilor geometrice infinite descrescătoare. Corelația

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2,$$

care dă posibilitatea de a calcula suma cuburilor primelor n numere naturale a descoperit-o în sec. XI matematicianul din Bagdad Abu Becri.

Termenul progresia provine de la cuvântul latin *progredior* – „merg înainte”; *progression* – „progresare”, „succes”, „întărire treptată”.

În secolul XVII pentru notarea progresiei aritmetice și geometrice au început să folosească respectiv semnele $\ddot{\dots}$ (a introdus V. Otred, 1631) și \div (a răspândit T. Lanii, 1692).

Formula sumei progresiei geometrice infinite a dedus E. Torricelli, iar A. Take a publicat acest rezultat în lucrarea „Teoria și practica aritmeticii, argumentată scrupulos” (1656).

O metodă originală de aflare a sumelor a n termeni a multor șiruri numerice, ce

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2),$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

a elaborat matematicianul ucrainean V. Ia. Buneakovski (vezi p. 68)

Esențialul în capitol

Șir numeric este funcția dată pe mulțimea tuturor sau a primelor n numere naturale.

Progresie aritmetică se numește șirul al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu precedentul, la care se adună unul și același număr constant pentru aceeași progresie. Acest număr se numește *rația* progresiei aritmetice date și se notează cu litera d .

Primii termeni consecutivi ai progresiei aritmetice se marchează prin literele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

Termenul al n -lea: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Suma termenilor progresiei aritmetice finite este egală cu semisuma termenilor ei extremi, înmulțită cu numărul termenilor:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ sau } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Progresie geometrică se numește șirul numeric al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent înmulțit cu unul și același număr constant pentru progresia dată. Acest număr se numește *rația* progresiei și se notează cu litera q . Se consideră că $b_1 \neq 0$ și $q \neq 0$.

Dacă primii termeni ai progresiei geometrice sunt $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, atunci termenul al n -lea este $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu condiția că $q \neq 1$ se află după formulă:

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1} \text{ sau } S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1.$$

Dacă $q = 1$, atunci $S_n = nb_1$.

Dacă modulul rației progresiei geometrice infinite este mai mic decât 1, atunci suma tuturor termenilor se determină după formula:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Cu ajutorul ultimei formule fracțiile zecimale infinite periodice se pot scrie sub formă de fracții ordinare:

$$0,(\overline{5}) = 0,555\dots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \dots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9}.$$

CLARIFICĂM SUCESELE

Sarcini în formă de test nr. 3

- 1 Aflați termenul al șaptelea al progresiei aritmetice, dacă $a_6 + a_8 = 20$.
a) 5; b) 20; c) 10; d) 15.
- 2 Calculați primul termen al progresiei geometrice, dacă $b_3 = 4$, a $b_4 = 2$.
a) 2; b) 4; c) 8; d) 16.
- 3 Aflați termenul al cincilea al șirului, definit prin formula $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.
a) 162; b) 54; c) 18; d) 93.
- 4 Aflați suma progresiei geometrice infinite:
 $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$
a) $\frac{3}{2}$; b) $1\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) 1.
- 5 Aflați suma tuturor numerelor pare de două cifre.
a) 2408; b) 2450; c) 2440; d) 2430.
- 6 Aflați produsul termenilor progresiei geometrice $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$, dacă $b_4 = 2$.
a) 4; b) 14; c) 8; d) 60.
- 7 Scrieți formula termenului al n -lea al progresiei aritmetice 2, 6,
a) $a_n = n^2 + n$; b) $a_n = 4n - 2$; c) $a_n = 4n + 2$; d) $a_n = n - n^2$.
- 8 Aflați suma primilor șase termeni ai progresiei geometrice, dacă $b_1 = 3$, $q = 2$.
a) 197; b) 90; c) 189; d) 93.
- 9 Care două numere trebuie intercalate între numerele 2 și 31,25 ca ele împreună să formeze o progresie geometrică?
a) 1 și 7; b) 3 și 4,5; c) 2,5 și 8; d) 3,5 și 4.
- 10 Sub care număr în progresia geometrică 3, 6, ... se conține numărul 384?
a) 7; b) 9; c) 8; d) 10.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 3

- 1°** În progresia aritmetică $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
Aflați: a) d ; b) a_5 ; c) S_{10} .
- 2°** În progresia geometrică $b_1 = 16$, $b_2 = 8$.
Aflați: a) q ; b) b_6 ; c) S_5 .
- 3°** Aflați termenul al optulea al progresiei aritmetice, dacă
 $a_2 + a_{14} = 20$.
- 4°** Aflați suma progresiei geometrice infinite:
 $16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \dots$
- 5°** Reprezentați în formă de fracție ordinară:
a) $0,(2)$; b) $0,(25)$; c) $0,3(8)$.
- 6°** Aflați numărul termenilor n al progresiei geometrice în care
 $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 768$, $S_n = 1534,5$.
- 7°** Începând cu care număr termenii progresiei aritmetice $-3,6; -3,3; -3, \dots$
vor fi pozitivi?
- 8°** Aflați suma tuturor numerelor naturale mai mici decât 100 și care se divid cu 6.
- 9**** O fetiță într-o livadă a rupt o piersică, a doua – două, iar fiecare următoare –
cu o piersică mai mult. Apoi toate fetițele, care au rupt piersice, le-au împărțit
egal între ele și fiecare a primit câte șase piersice. Câți copii au rupt piersice?
- 10**** Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice se poate afla după formula
 $S_n = 2(5^n - 1)$.
- Aflați: a) S_4 ; b) a_5 .

Capitolul 4

Bazele combinatoriei, teoriei probabilităților și statisticii

În practică oamenii permanent au de lucru cu diferite fenomene aleatorii sau cu speranța lor. De fiecare dată apare întrebarea, dacă se va realiza acel fenomen sau altul și în ce condiții. În societatea infomațională contemporană e important de știut a obține repede informații din diferite surse și corect de le analizat. În timpul rezolvării multor probleme practice apare problema selecției unei totalități de obiecte din cele date după anumite proprietăți ale lor, calcularea combinațiilor posibile, etc. Aceste și alte întrebări se examinează în domenii separate ale matematicii – teoria probabilităților, statistică și combinatorie.

Studiind acestt capitol, aveți posibilitatea să vă familiarizați cu noțiunile fundamentale ale combinatoriei, teoriei probabilităților și statisticii.

În acest capitol veți studia așa teme:

§ 19	Reguli principale ale combinatoriei Basic Rules for Combinatorics
§ 20	Frecvență și probabilitate ale evenimentului aleatoriu The Frequency and Probability of a Random Event
§ 21	Cunoștințe despre statistică Information on Statistics

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

- Ce este mulțime și submulțime.
- Ce e cifră și număr.
- Ce este suma numerelor a și b . $a + b$
- Ce este produsul numerelor a și b . $a \cdot b$

§ 19 Reguli principale ale combinatoriei

Combinatoria este un capitol al matematicii, consacrat rezolvării problemelor selecției și amplasării elementelor mulțimii finite conform regulilor date.

Examinăm două reguli principale, cu ajutorul cărora se rezolvă multe probleme din combinatorie.

Exemplul 1. În orașul N sunt 2 universități – politehnică și economică. Un abiturient preferă trei facultăți la universitatea politehnică și două la cea economică. Câte posibilități are abiturientul pentru a intra la universitate?

Rezolvare. Marcăm prin litera A mulțimea facultăților, pe care abiturientul le-a ales în universitatea politehnică, iar cu litera B – în cea economică. Atunci $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Deoarece aceste mulțimi nu au elemente comune, atunci abiturientul are în genere $3 + 2 = 5$ posibilități, pentru a intra la universitate.

Situația descrisă poate fi generalizată în formă de afirmație care se numește *regula sumei*.

Dacă elementul unei mulțimi oarecare A se poate alege prin m procedee, iar elementul mulțimii B – prin n procedee, atunci elementul din mulțimea A sau din mulțimea B poate fi ales prin $m + n$ procedee.

Regula sumei poate fi răspândită și pe o cantitate mai mare de mulțimi.

Exemplul 2. O familie, planificând odihna de vară, a ales următoarele locuri: în Odesa – 1, în Scadovsk – 3, în Iaremcea – 2, în Zatoca – 2. Câte posibilități de alegere pentru odihna de vară are familia?

Rezolvare. Deoarece toate bazele de odihnă sunt diferite, atunci pentru a rezolva problema este suficient de aflat suma elementelor tuturor mulțimilor: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Deci, familia poate alege o variantă de odihnă din cele 8 posibile.

Examinăm probleme, care se referă la altă regulă.

Exemplul 3. Din punctul A în punctul B duc trei cărări, iar din B în C – două. Pe câte trasee se poate trece din A în C ?

Rezolvare. Pentru a trece din A la B trebuie aleasă una din trei cărări: 1, 2 sau 3 (fig. 134). După aceasta trebuie aleasă una din alte două cărări: 4 sau 5. În total, din A în C duc 6 trasee, deoarece $3 \cdot 2 = 6$. Toate traseele pot fi marcate cu ajutorul perechilor:

(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)



Fig. 134

Generalizăm situația descrisă.

Dacă prima componentă a perechi se poate alege prin m procedee, iar a doua prin n procedee, atunci o astfel de pereche se poate alege prin mn procedee.

Aceasta este *regula produsului*, care deseori este numită regula principală a combinatoriei. Atrageți atenția: se cercetează perechile ordonate compuse din diferite componente.

Regula produsului se respândește și pe grupe ordonate din trei, patru și orice alte mulțimi finite ordonate. Printre altele, *dacă prima componentă a unei grupe ordonate din trei elemente se poate alege prin m procedee, a doua – prin n procedee, iar a treia – prin k procedee, atunci o astfel de grupă ordonată de trei se poate alege prin $m \cdot n \cdot k$ procedee.* De exemplu, dacă o ospătărie pentru prânz a pregătit două mâncări la felul întâi – borș (b) și supă (sp), 3 la felul doi – chiftele (c), colțunași (co), sarmale (s) și 2 deserturi – prăjituri (p) și înghețată (i), atunci în total mâncări din trei feluri ospătăria poate propune 12 diferite combinații, deoarece $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Situației descrise îi corespunde diagrama reprezentată pe figura 135. Astfel de diagrame se numesc *diagrame-arbori*.

Exemplul 4. Câte trenuri diferite pot fi formate din 6 vagoane dacă fiecare vagon se poate plasa pe orice loc?

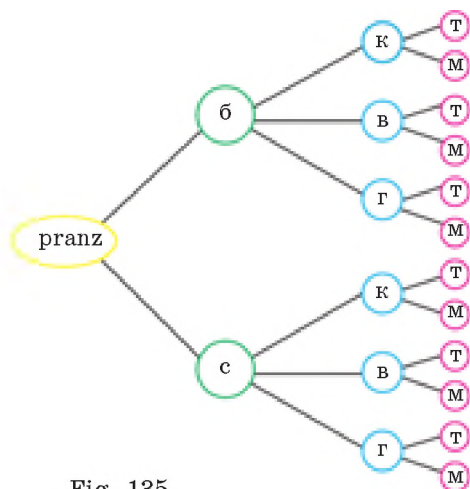


Fig. 135

Rezolvare. Primul se poate plasa orica-

re din 6 vagoane. Avem 6 alegeri. Al doilea vagon se poate alege din 5 vagoane rămase. De aceea, conform cu regula înmulțirii, primele două vagoane se pot alege prin $6 \cdot 5$ procedee. Al treilea vagon se poate alege din cele 4 care au rămas. De aceea primele trei vagoane se pot alege prin $6 \cdot 5 \cdot 4$ procedee. Continuând cugetările asemănătoare, obținem răspunsul: în total se pot forma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ trenuri diferite.

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Atrageți atenția la rezolvarea ultimei probleme. Ea s-a redus la calculul produsului tuturor numerelor naturale de la 1 până la 6. În combinatorie produse asemănătoare se calculează des.

Produsul tuturor numerelor naturale de la 1 până la n se numește n -factorial și se notează $n!$

De exemplu,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120; \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

S-a convenit că $1! = 1$ și $0! = 1$.

Verificați-vă

1. Care probleme se numesc de combinatorie?
2. Ce este analiza combinatorie?
3. Formulați regula sumei.
4. Formulați regula principală a combinatoriei.
5. Dați exemple de diagrame-arbori.
6. Ce este factorialul unui număr? Cum se notează el?

Efectuăm împreună

1. La întrecerile de baschet pentru ocuparea locului întâi au participat echipe din 12 școli. Prin câte procedee pot fi distribuite primele două locuri?
 - **Rezolvare.** Primul loc poate obține una din 12 echipe. După ce s-a determinat posesorul primului loc, locul doi îl poate obține una din 11 echipe. Deci, cantitatea totală a procedeelelor prin care pot fi distribuite primele două locuri este egal cu $12 \cdot 11 = 132$.
2. Câte numere de patru cifre pot fi formate din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă nici o cifră nu se repetă?
 - **Rezolvare.** Prima cifră a numărului poate fi una din cinci cifre: 1, 2, 3, 4, 5. Dacă prima cifră este aleasă, atunci a doua se poate alege prin 5 moduri, a treia

prin 4, a patra prin 3 moduri. Conform regulii produsului, cantitatea totală a modurilor este egală cu $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Răspuns: 300.

Efectuați oral

791. Sunt două cifre: 1 și 9. Prin câte procedee din aceste cifre se pot compune:

- a) un număr de o cifră; b) un număr de două cifre, dar cifrele în număr nu se repetă;
c) un număr de două cifre, dar cifrele în număr pot să se repet.

792. Într-o clasă sunt 11 băieți și 10 fete. În câte moduri se poate delega un elev în comitetul școlar pentru autoadministrare?

793. Într-o clasă sunt 11 băieți și 10 fete. În câte moduri se pot delega doi elevi în comitetul școlar pentru autoadministrare?

794. Într-o clasă sunt 11 băieți și 10 fete. În câte moduri se pot delega o fată și un băiat în comitetul școlar pentru autoadministrare?

Nivelul A

795. Într-un magazin sunt trei feluri de prăjituri și zece feluri de bomboane. Vasile vrea să cumpere surioarei o prăjitură sau bomboane. În câte moduri el poate face aceasta?

796. Pentru terminarea completării expediției în Antarctida suplimentar s-au examinat cererile de la 10 candidați la funcția de medic, de la 5 candidați la funcția de bucătar și de la 3 candidați la funcția de tehnician. Nici unul din ei nu a pretins la două sau mai multe posturi. Prin câte procedee se poate completa un loc liber în expediție?

797. În câte feluri se pot așeza patru copii pe o bancă?

798. Spre culmea muntelui duc 4 cărări. Pe câte trasee un turist se poate urca pe munte și coborî de pe el, dacă va alege diferite cărări pentru urcare și coborâre?

799. Lenuța are 2 fustițe și 3 bluze brodate. Câte seturi diferite de îmbrăcăminte ea poate selecta, pentru a cânta în cor?

800. O ospătărie a pregătit pentru micul dejun 3 feluri de mâncări (A , B , C) și două de băuturi (M , K). Câte mâncări din două feluri diferite se pot alege la micul dejun? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

801. În câte moduri 5 persoane pot forma rândul la casierie?

802. Câte propoziții diferite se pot scrie cu cuvintele «noi», «iubim», «să citim»? Dar cu cuvintele «noi», «mult», «iubim», «să citim»?

Nivelul B

803. În câte feluri o fetiță poate înșira pe ață 8 mărele diferite?

804. Câte numere de trei cifre se pot forma din cifrele 1, 2, 3, 4, 5?

805. Problemă deschisă. Compuneți o problemă după figura 136 și rezolvați-o.

806. Opt prieteni au hotărât să petreacă un turnir de șah astfel, ca fiecare să joace cu fiecare o partidă. Câte partide de șah vor juca?

807. O ospătărie a pregătit pentru prânz 3 mâncări la felul întâi (A, B, C), 3 la felul doi (a, b, c) și 3 la felul trei (x, p, y). Câte mâncări diferite din trei feluri se pot alege la prânz? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

808. Se crează emblema școlii, elementul căreia trebuie să fie un poligon de o culoare. Câte astfel de embleme se pot compune, dacă vom examina trei figuri (triunghiul, pătratul, hexagonul) și 4 culori (albastru, verde, galbenă, roșie)?

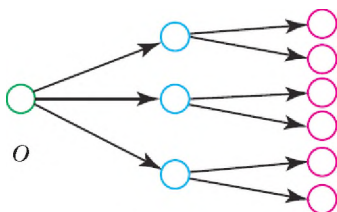


Fig. 136

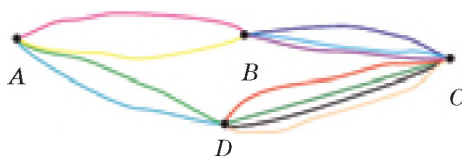


Fig. 137

809. Câte «cortegii» diferite poate alcătui un băiețel din patru jucării–automobile de culorile albă, galbenă, albastră și roșie? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

810. Problemă deschisă. Compuneți o problemă după figura 137 și rezolvați-o.

811. Spre mare duc 7 drumuri. În câte moduri o persoană aflată la odihnă poate ajunge la mare și veni înapoi? Examinați cazurile, când mișcarea spre mare și de la mare se efectuează:

- pe un drum;
- pe drumuri diferite;
- pe unul din două moduri precedente?

812. La oficiul poștal sunt trei feluri de plicuri, două feluri de timbre și patru feluri de felicitări, care se pun în aceste plicuri. Câte procedee diferite există, pentru a alcătui o felicitare?

813. Miercuri după orar în clasa a 9-a sunt 6 lecții diferite, printre care algebra și geometria. În câte feluri se poate alcătui orarul astfel, ca algebra și geometria să fie alături?

814. Marți după orar în clasa a 11-B sunt 7 lecții diferite, printre care fizica și astronomia. În câte feluri se poate alcătui orarul astfel, ca:

- fizica și astronomia să fie alături;
- fizica și astronomia să nu fie alături?

815. Câte:

- numere pare de patru cifre se pot compune din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă cifrele nu pot să se repete?
- numere impare de patru cifre se poate compune din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă cifrele nu pot să se repete?

816. Într-o pizzerie se pregătește pizza mare și mică cu bază groasă și subțire. Câte tipuri de pizza se poate comanda în această pizzerie, dacă pentru pizza subțire se folosesc trei feluri de umpluturi, iar pentru cea groasă – patru?

817. Calculați:

- $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; В) $20! : 25!$; Г) $100! : 97!$.

818. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

- $n! : (n - 1)$; б) $(n - 1)! : n!$; В) $(n + 1)! : (n - 1)!$.

Exerciții pentru repetare

819. O librărie a încasat în primul cvartal 700,46 mii grn. Se știe, că în ianuarie a încasat cu 49,8 mii grn. mai mult decât în februarie, iar în martie – cu 178,92 mii grn. mai puțin decât în februarie. Ce venit a avut librăria în martie?

820. Rezolvați ecuațiile:

- $x^2 = 5$; б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

821. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

- $2a^3b \left(-\frac{1}{2}ab\right) a^2b$; 3) $\left(-\frac{2}{3}a^2b\right) b^2a \cdot \frac{9}{4}(a^2b^2)^3$;
- $3ak^2(-2kx^3)k^3$; 4) $-2\frac{1}{3}a^3c^2 \cdot \frac{1}{7}ac^2 \cdot 6abc$.

Comoara succeselor

- ✓ Știu regulile principale ale combinatoriei.
- ✓ Deosebesc regula sumei și regula produsului.
- ✓ Știu a aplica regula sumei combinatoriei.
- ✓ Știu a aplica regula produsului combinatoriei.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși bine tema nouă, ne amintim:

— ce este raportul numerelor m și n $m : n$ sau $\frac{m}{n}$

— proprietățile fracției ordinare $\frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$:

dacă $m < n$, atunci $\frac{m}{n} < 1$, dacă $m = n$, atunci $\frac{m}{n} = 1$.

§ 20

Frecvență și probabilitate ale evenimentului aleatoriu

Teoria probabilităților este una din ramurile matematicii actuale. Noțiunile cele mai importante ale ei sunt experiența (proba, observația), *evenimentul* (rezultatul probelor) și *probabilitatea evenimentului*. În tabel sunt date exemple de experiențe și rezultate separate ale evenimentelor.

Experiența	Evenimentul
Aruncarea monedei	Moneda a căzut cu stema în sus
Scrierea lucrării de control	Ați primit 12 puncte
Așteptarea dimineții	Dimineața a început
Aruncarea zarului	Au apărut 7 puncte

Ultimul eveniment este imposibil, deoarece pe fețele zarului nu sunt șapte puncte. Evenimentul 3 este cert (sigur, incontestabil), deoarece după noapte totdeauna urmează dimineața. Evenimentele 1 și 2 sunt aleatorii.

În genere, evenimentul se numește *imposibil*, dacă el nu se poate realiza niciodată, iar eveniment *sigur* – acel care se realizează totdeauna. Dacă evenimentul se poate realiza sau nu se poate realiza el se numește *aleatoriu*.

Evenimentele se notează cu litere mari ale alfabetului latin A, B, C, \dots , sau cu o literă a alfabetului latin cu index: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Conținutul evenimentului se dă în acolade. De exemplu, evenimentul al 3-a poate fi scris așa:

$$A_3 = \{\text{dimineața a început}\}.$$

A spune la început că evenimentul aleatoriu va avea loc sau nu va avea loc, nu se poate. Dacă evenimentul dat are caracter de masă, se realizează de multe ori și în aceleași condiții, atunci probabilitatea apariției lui poate fi caracterizată printr-un număr.

Să examinăm experiența care constă în aruncarea monedei omogene simetrice și fixarea părții cu care a căzut moneda în sus. Ea poate fi petrecută în unele și aceleași condiții de un număr arbitrar de ori. În tabel se arată rezultatele a opt serii de încercări de acestea:.

Numărul seriei	1	2	3	4	5	6	7	8
Numărul aruncărilor, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Numărul stemeilor, $n(r)$	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Frecvența relativă a apariției stemei, $\frac{n(r)}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Numărul din ultimul rând al tabelului pentru fiecare serie se determină ca raportul numărului de apariții al stemei la numărul total de aruncări ale monedei în această serie de probe. El denumește *frecvența relativă a apariției evenimentului*. Dacă vom reprezenta datele tabelului grafic (fig. 138), atunci putem observa, că frecvența relativă a apariției stemei oscilează lângă numărul 0,5 și puțin se deosebește de el.

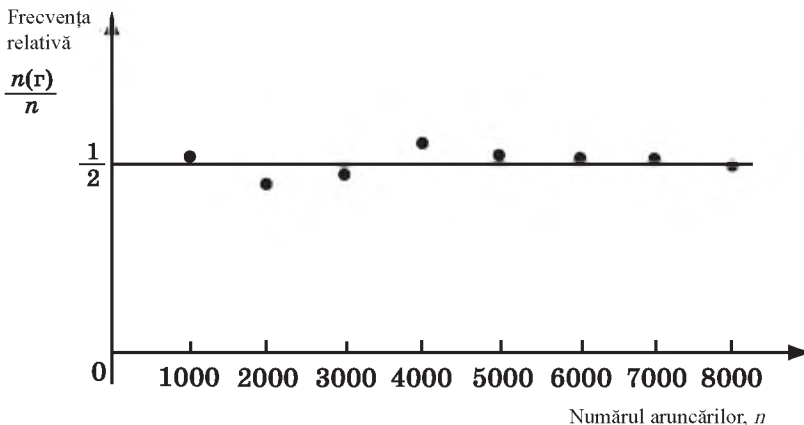


Fig. 138

Dacă în n probe evenimentul X se realizează de m ori, atunci fracția $\frac{m}{n}$ determină frecvența relativă a apariției evenimentului X . Numărul lângă care oscilează frecvența relativă a evenimentului exprimă *probabilitatea* acestui eveniment și se notează prin litera P (de la cuvântul englez *probability* – probabilitate).

Acest termen l-a introdus B. Pascal. În scrisoarea adresată lui P. Fermat de la 28 octombrie a. 1654 el scria: «Majoritatea oamenilor consideră, că dacă ei nu au cunoștințe depline despre ceva (dar noi niciodată nu avem cunoștințe depline), atunci ei în genere despre aceasta nu știu nimic. Eu sunt convins, că aceste idei sunt profund greșite. Cunoștințele parțiale sunt tot cunoștințe și convingerile incomplete tot au o valoare oarecare, mai ales când îmi este cunoscut gradul acestei convingeri. Cineva poate întreba: «Oare se poate măsura cu un număr măsura convigerii?». «Firește, – voi răspunde eu, – persoanele care joacă în cărți justifică încrederea lor anume așa. Când jucătorul aruncă zarul, el nu știe câte puncte vor apărea. Însă ceva el tot știe. De exemplu, aceea, că toate șase numere – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – au aceeași șansă la succes. Dacă ne vom înțelege să considerăm posibilitatea apariției evenimentului sigur drept unitate, atunci posibilitatea apariției ei lui șase, ca și a fiecărui din celelalte cinci, se va exprima prin fracția $\frac{1}{6}$ » Deodată

menționez, că măsura posibilității (convingerii) evenimentului eu am numit-o probabilitate. M-am gândit mult la selectarea cuvântului respectiv și, în sfârșit, consider că anume el este cel mai expresiv».

B. Pascal determina probabilitatea unor evenimente fără efectuarea probelor. Aceasta se poate face atunci, când rezultatele probelor formează o mulțime finită și sunt egal posibile, adică în condițiile probei petrecute nu erau motive de a considera posibilitatea apariției unei consecințe mai mari sau mai mici în comparație cu altele.

Examinăm un **exemplu**. Se aruncă o dată zarul (cub omogen) (fig. 139) și se fixează suma punctelor de pe fața cu care a căzut în sus. Rezultatul probei pot fi 6 evenimente diferite:

- $E_1 = \{\text{va cădea un punct}\};$
- $E_2 = \{\text{vor cădea două puncte}\};$
- $E_3 = \{\text{vor cădea trei puncte}\};$
- $E_4 = \{\text{vor cădea patru puncte}\};$
- $E_5 = \{\text{vor cădea cinci puncte}\};$
- $E_6 = \{\text{vor cădea șase puncte}\}.$



Fig. 139

Aceste șase evenimente cuprind și epuizează toate rezultatele posibile ale experienței. Ele sunt *reciproc incompatibile*, fiindcă de fiecare dată cade numai un număr de puncte. Toate șase evenimente sunt *egal posibile*, deoarece cubul se consideră omogen de o formă regulată și sprinteneala jucătorului se exclude. În acest caz se spune, că pentru realizarea fiecărui eveniment există o șansă din șase.

Fiecare eveniment E_1-E_6 din probele descrise se numesc elementare, iar toată mulțimea lor – spațiul evenimentelor elementare

.*Eveniment elementar* se numește fiecare consecință posibilă a experienței probabilistice.

Mulțimea tuturor rezultatelor experienței se numește *spațiul evenimentelor elementare* și se notează prin litera grecească Ω (omega).

Dacă spațiul evenimentelor elementare pentru un experiment oarecare este compus din n evenimente reciproc incompatibile egal posibile, atunci probabilitatea fiecărui eveniment este egală cu $\frac{1}{n}$.

De exemplu, probabilitatea, că pe fața zarului aruncat vor fi 5 puncte, este egală cu $\frac{1}{6}$. Iar probabilitatea, că moneda aruncată va cădea cu stema în sus, este egală cu $\frac{1}{2}$.

Probabilitatea evenimentului A se notează cu simbolul $P(A)$. Dacă vom nota cu litera

A primul eveniment, iar al doilea cu B , atunci $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

Există evenimente care nu sunt elementare. Examinăm, de exemplu, următorul eveniment: $C = \{\text{apariția piesei de domino cu 8 puncte}\}$.

Deoarece sunt 28 de piese de domino, evenimentul legat cu selectarea unei piese se epuizează cu 28 de rezultate egal posibile și independente. Deci, spațiul evenimentelor elementare pentru probele date se compune din 28 de evenimente elementare E_i , unde $i = 1, 2, \dots, 28$. Evenimentul C se poate realiza, dacă se realizează unul din trei evenimente elementare (fig. 140):

- 1) $E_1 = \{\text{apariția piesei } \}$;
- 2) $E_2 = \{\text{apariția piesei } \}$;
- 3) $E_3 = \{\text{apariția piesei } \}$.

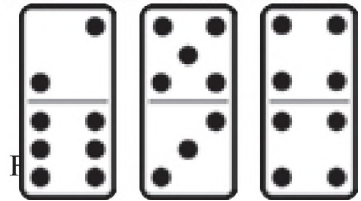


Fig. 140

Se spune că evenimentului C îi favorizează trei evenimente elementare (E_1, E_2, E_3) din 28 posibile, de aceea $P(C) = \frac{3}{28}$.

Examinăm cazul general. Fie că experiența are un număr finit (n) de rezultate egal posibile și incompatibile și A – un eveniment aleatoriu oarecare legat cu experiența dată. Vom numi evenimentul elementar E_n favorizabil pentru evenimentul aleatoriu A , dacă apariția evenimentului E_n în rezultatul probelor aduce la apariția evenimentului A . Dacă vom nota numărul evenimentelor elementare favorizabile evenimentului A cu $n(A)$, atunci probabilitatea evenimentului aleatoriu A se determină după formula:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Exemplu. Din 28 de piese de domino răsturnate se ia la întâmplare una. Care este probabilitatea evenimentului, că pe ea în total vor fi:

a) 2 puncte (evenimentul A); b) 4 puncte (evenimentul B); c) 11 puncte (evenimentul C)?

Rezolvare. Există 2 piese de domino cu două puncte $\left(\frac{0}{2}; \frac{1}{1}\right)$, 3 piese cu patru puncte $\left(\frac{0}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2}\right)$, 1 piesă cu 11 puncte. În total sunt 28 de posibilități de a alege, doar se poate lua orice piesă din 28. Deci,

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \quad P(B) = \frac{3}{28}, \quad P(D) = \frac{1}{28}.$$

Să enumerăm cele mai importante proprietăți ale probabilității evenimentului aleatoriu:

1. Dacă C este un eveniment imposibil, atunci $P(C) = 0$.
2. Dacă B este un eveniment sigur, atunci $P(B) = 1$.
3. Dacă X este un eveniment aleatoriu, atunci $0 \leq P(X) \leq 1$.
4. Dacă $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ sunt evenimente elementare, care epuizează probele unei experiențe, atunci:

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = 1.$$

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Teoria probabilităților, ca și geometria, se poate construi pe baza *sistemului de axiome*. Se introduc noțiunile fundamentale, relațiile dintre ele și se formulează axiomele. Toate celelalte noțiuni și afirmații se bazează pe sistemul de axiome, alcătuit fără a ține cont de intuiție și experiență. Sistemul de axiome ale teoriei probabilităților se poate construi prin diferite procedee. Aceasta în diferite timpuri au făcut-o G. Bolman (1908), S. N. Bernștein (1917), R. Mizes (1919, 1928), A. Lomnițki (1923). Cel mai bun sistem de axiome se consideră sistemul propus în

a. 1929 de A. M. Kolmogorov, cu care vă veți familiariza în clasele superioare și în instituțiile superioare de învățământ.

Procedeele axiomatică dă posibilitate de a aplica teoria probabilităților la rezolvarea diferitor probleme teoretice și practice, dar și a determina limita aplicării ei.

Verificați-vă

1. Care evenimente se numesc aleatorii?
2. Dați exemple de evenimente aleatorii.
3. Care evenimente se numesc imposibile, sigure?
4. Dați exemplu de spațiu al evenimentelor elementare.
5. Care evenimente se numesc elementare? Dați exemple.
6. Cu ce este egală probabilitatea evenimentului aleatoriu?
7. Cu ce este egală probabilitatea evenimentului sigur? Dar a celui imposibil?
8. Ce este frecvența relativă a evenimentului?

Efectuăm împreună!

1 Avem două cuburi, care au câte 2 fețe respectiv de culoare roșie, galbenă și verde. Ele sunt aruncate împreună și se fixează culorile fețelor, pe care cad ambele cuburi. Scrieți spațiul evenimentelor elementare pentru această experiență.

- **Rezolvare.** Dacă ambele cuburi au căzut pe fețele galbene, atunci acest eveniment îl vom marca cu simbolul gg . Dacă unul cade pe fața galbenă, dar al doilea – pe roșie, atunci evenimentul îl vom marca gr . Atunci spațiul evenimentelor elementare pentru experiența dată va fi $W = \{gg, rr, vv, gr, gv, vr\}$.

2 Formând un număr de telefon, un abonat a uitat ultima cifră și a format-o la întâmplare. Care este probabilitatea faptului că el a format corect acest număr?

- **Rezolvare.** Numărul tuturor cazurilor posibile $n = 10$, iar numărul cazurilor favorabile $m = 1$. De aceea probabilitatea căutată este $P = \frac{1}{10}$.

3 Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea evenimentului, că pe ele vor cădea punctele, suma cărora va fi egală cu: a) 4; b) 5; c) 8?

- **Rezolvare.** Fiecărui eveniment examinat îi punem în corespondență un număr de două cifre, cifrele cărui corespund punctelor, care au apărut la căderea primului și celui de al doilea zaruri. Sunt posibile următoarele cazuri:

11,	12,	13,	14,	15,	16,
21,	22,	23,	24,	25,	26,
31,	32,	33,	34,	35,	36,
...
61,	62,	63,	64,	65,	66.

Deci, pentru experiența dată spațiul evenimentelor elementare W conține 36 de elemente.

a) Suma punctelor egală cu 4 o dau trei numere: 13, 22 și 31. Avem 3 evenimente elementare favorabile din 36. De aceea probabilitatea căutată:

$$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

b) Suma punctelor egală cu 5 dau patru perechi: 14, 23, 32 și 41, deci:

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

c) Suma punctelor egală cu 8 dau 5 perechi: 26, 35, 44, 53, 62, deci:

$$P(8) = \frac{5}{36}$$

Efectuați oral

822. Cum este din punctul de vedere al teoriei probabilităților evenimentul: a) la căderea zarului vor apărea cinci puncte; b) copilul s-a născut la 30 februarie; c) la permutarea literelor în cuvântul «cal» s-a obținut cuvântul «lac»; d) la extragerea aleatorie un număr de două cifre va fi mai mic decât 100; e) va ieși la iveală, că graficul funcției impare construit este simetric față de originea de coordonate.

823. Care este probabilitatea evenimentului că la aruncarea zarului el va indica: a) două puncte; b) un număr par de puncte; c) un număr de puncte ce se divide cu 3?

824. Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea evenimentului că ea va fi: a) dublet; b) nu va fi dublet?

825. Descrieți spațiul evenimentelor elementare pentru experiența dată:

a) stabilirea zilei de naștere a unui elev selectat arbitrar; b) determinarea numărului soluțiilor ecuației pătrate; c) stabilirea numărului de puncte comune ale circumferinței și hiperbolei construite într-un sistem de coordonate.

Nivelul A

826. Aflați probabilitatea evenimentului că prietenul s-a născut:

a) miercuri; b) primăvara; c) în septembrie; d) pe 1 ianuarie.

827. În clasa a 9–A învață 20 de elevi din care 25 % sunteminenți. Este invitat un elev la întâmplare, pentru a demonstra teorema sinusurilor. Care este probabilitatea evenimentului că el va fi eminent?

828. Formând un număr de telefon, un abonat a uitat prima cifră și a format-o la întâmplare. Care este probabilitatea faptului că el a format corect acest număr?

829. Un cub din lemn vopsit din toate părțile a fost tăiat în 125 de cuburi egale și s-au amestecat într-o traistă. Care este probabilitatea evenimentului, că, luând din traistă un cub la întâmplare, veți lua cubul la care sunt vopsite: a) trei fețe; b) numai două fețe; c) numai o față (fig. 141)?

830. Din litere scrise pe fișe separate s-a alcătuit cuvântul IDENTITATE. Apoi aceste fișe s-au întors, s-au amestecat și s-a luat la întâmplare una din ele. Care este probabilitatea evenimentului că pe ea s-a descoperi: a) litera T; b) litera I; c) litera A?

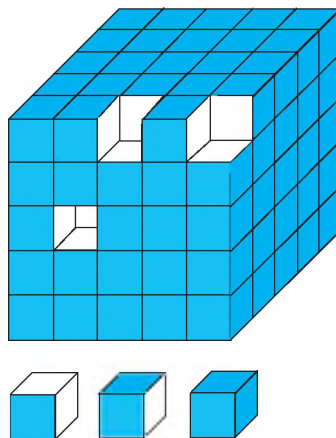


Fig. 141

- 831.** Într-o traistă sunt 5 bile albe și 7 negre. Care este probabilitatea evenimentului că, luând la întâmplare, se va scoate: a) o bilă albă; b) o bilă neagră?
- 823.** Într-un saculeț sunt 10 hârtiuțe înfășurate. Pe două din ele este scris «da», iar pe restul – «nu». Care este probabilitatea evenimentului că pe hârtiuța luată la întâmplare va fi cuvântul «da»?
- 833.** Într-o lădiță sunt 10 bile roșii și 5 galbene. Din ea s-a luat o bilă roșie și s-a pus într-o parte. După aceasta din lădiță se ia încă o bilă la întâmplare. Care este probabilitatea evenimentului că ea va fi galbenă?
- 834.** La o competiție au participat 25 de elevi din prima școală, 15 – din școala a doua și 10 – din a treia. Care este probabilitatea evenimentului, că primul se va încadra în competiții un elev din prima școală?
- 835.** Un pasager așteaptă tramvaiul nr. 1 sau nr. 3 la stația, prin care trec traseele a patru tramvaie: nr. 1, 3, 4 și 9. Considerând, că tramvaiele de pe aceste trasee trec prin stația dată cu aceeași frecvență, aflați probabilitatea evenimentului, că primul la stație va sosi tramvaiul pe care îl așteaptă pasagerul.

Nivelul B

- 836.** La 1 000 de bilete de loterie revine 1 câștig de 1000 gm., 10 câștiguri de câte 200 gm., 50 – câte 100 gm., 100 – câte 50. Restul biletelor sunt fără câștig. Aflați probabilitatea câștigului nu mai mic decât 100 gm. pe un bilet.
- 837.** Într-un lot din 100 de piese 75 erau de prima categorie, 15 – de a doua, 8 – de a treia și 2 piese defecte. Care este probabilitatea faptului că piesa luată la întâmplare va fi de prima categorie sau a doua?
- 838.** Din 10 fișe numerotate de la 1 până la 10 se extrage una. Care este probabilitatea faptului, că numărul fișei va fi mai mic decât 7 și mai mare decât 3?
- 839.** Într-o urnă sunt 30 de insigne cu numerele de la 1 până la 30. Care este probabilitatea faptului, că prima insignă luată din urnă la întâmplare nu va conține cifra 6?
- 840.** Din 15 fișe numerotate de la 1 până la 15 se extrage una. Care este probabilitatea faptului că numărul fișei extrase: a) se va divide cu 3; b) se va divide cu 4?
- 841.** Din 100 de savanți a unei instituții limba engleză o posedă 90, germana – 85, 80 de persoane posedă ambele limbi. Aflați probabilitatea faptului că savantul ales la întâmplare din această instituție: a) posedă engleza sau germană; b) nu știe nici engleza, nici germana.
- 842.** Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea apariției cel puțin a unei fețe cu 6 puncte?

- 843.** Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea evenimentului că pe ea sunt: a) în total 9 puncte; b) mai multe decât 9 puncte; c) mai puține decât 9 puncte?
- 844.** Un cub de lemn vopsit s-a tăiat în 1 000 de cuburi egale și s-au amestecat într-o traistă. Care este probabilitatea evenimentului că luând la întâmplare din traistă un cub, va fi luat acel care are: a) cel puțin o față vopsită; b) numai două fețe vopsite?
- 845.** Aflați probabilitatea faptului că numărul de două cifre selectat la întâmplare se divide cu 5.
- 846.** În același timp se aruncă două monede identice. Aflați probabilitatea evenimentului: a) $A = \{\text{a căzut o stemă și un revers}\}$; b) $B = \{\text{a căzut nu mai puțin decât o stemă}\}$.
- 847.** S-au verificat 500 de piese selectate arbitrar și s-a constat că 5 din ele sunt rebut. Câte piese rebut se poate de așteptat într-un set de 3 500 de bucăți?
- 848*.** Examinați repartizarea băieților și fetelor în familiile, care au trei copii de vârstă diferită. Considerați că probabilitatea nașterii baiatului și a fetei sunt la fel?

Exerciții pentru repetare

- 849.** Funcția este definită prin formula $f(x) = -5x + 3$. Aflați $f(0,1)$; $f(-2,5)$; $f(-10)$; $f(0,3)$; $f(-1,2)$.
- 850.** Rezolvați inecuațiile:
a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; b) $x^2 + 8x + 8 < 3x^2$.
- 851.** Construiți graficul funcțiilor:
a) $y = |x^2 - x|$; b) $y = x^2 - |x|$.

Comoara succeselor

- ✓ Pot da exemple de evenimente:
 - imposibile;
 - sigure;
 - aleatorii.
- ✓ Pot explica ce este:
 - frecvența evenimentului aleatoriu;
 - probabilitatea evenimentului aleatoriu.
- ✓ Știu a rezolva probleme care prevăd:
 - aflarea probabilității evenimentului aleatoriu;
 - calcularea frecvenței evenimentului aleatoriu.

Aplicăm competențele obținute

Pentru a înțelege și a însuși tema nouă, ne amintim:

— Ce este media aritmetică

a două numere a și b

$$\frac{a+b}{2}$$

sau a n numere a_1, a_2, \dots, a_n

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

— Cum se construiesc diagramele prin coloane și sectoriale.

§ 21 | Cunoștințe despre statistică

Știința care studiază caracteristicile cantitative ale fenomenelor de masă se numește *statistică matematică* (de la cuvântul latin *status* – stare, situație).

Exemplul 1. Din 87 de elevi din clasa a 9-a ai unei școli 7 au note, care corespund nivelului I al succeselor la învățătură, 33 – nivelului II, 31 – nivelului III și 16 – nivelului IV. Acestea sunt caracteristicile cantitative ale lucrării de control petrecute. Ele pot fi prezentate în formă de tabel.

Nivelul succeselor la învățătură	I	II	III	IV
Numărul elevilor	7	33	31	16

Ilustrativ aceste date pot fi reprezentate cu ajutorul diagramei cu bare (fig. 142).

Diagramele cu bare în statistică se numesc *histogramă* (de la cuvintele grecești *histos* – stâlp, *gramma* – scriere).

În exemplul studiat se vorbește despre 87 de elevi. Problema se complică, dacă se studiază *fenomene de masă*, care cuprind mii sau și milioane de obiecte ce se studiază. De exemplu, producătorii de încălțăminte trebuie să știe câtă încălțăminte de o mărime sau alta trebuie să producă. Cum de clarificat aceasta? De-i întreat pe toți, adică, zeci de milioane de bărbați și femei, este foarte scump și durează mult timp. De aceea se formează *selecția* – o mulțime finită de observări ale rezultatelor independente. În cazul dat, cercetării sunt supuse numai câteva zeci sau sute de oameni.

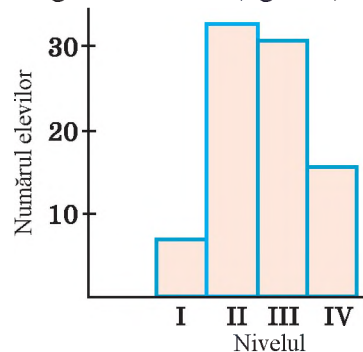


Fig. 142

Exemplul 2. Presupunem, că întrebând 60 de femei, mărimea încălțăminteii lor a fost scrisă în tabel:

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

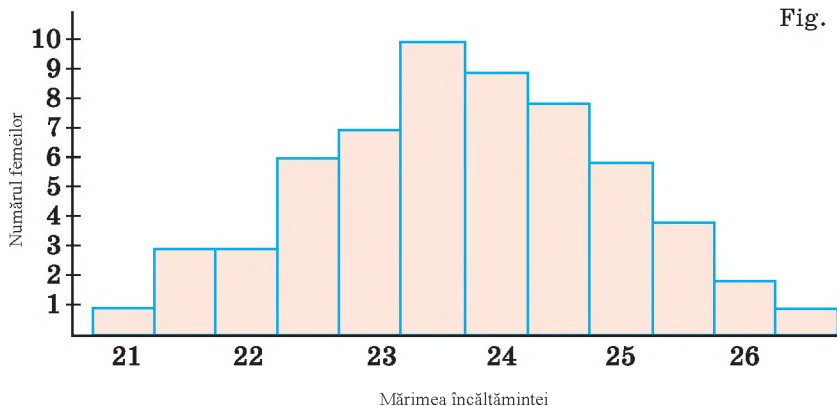
Această selecție este din 60 de valori (date). Pentru comoditate ele se grupează în clase (după mărimea încălțăminteii) și se determină câte valori ale selecției conține fiecare clasă.

Mărimea încălțăminteii	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Numărul de femei	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Astfel de tabele se numesc ale *frecvențelor*. În ele numerele din rândul al doilea sunt *frecvențe*, ele indică cât de frecvent se întâlnesc în selecție unele sau altele valori ale ei. *Frecvență relativă* a valorilor selecției se numește raportul valorii frecvenței către numărul tuturor valorilor ale selecției, exprimat în procente. În exemplul studiat frecvența mărimii 24 a încălțăminteii este egală cu 9, iar frecvența relativă este 15 %, deoarece $9 : 60 = 0,15 = 15 \%$.

După tabelul frecvențelor se poate construi histograma (fig. 143). Ea ilustrează intuitiv ce parte de încălțăminte de o mărime sau altă este de dorit de produs. Este clar, că concluziile obținute printr-un astfel de procedeu sunt probabile, aproximative, dar pentru cerințele practice aceasta este suficient.

Unele date statistice este convenabil de le prezentat cu ajutorul graficelor ca, de exemplu, pe p. 91.



Selecțiile se caracterizează prin *tendințe centrale*: moda, mediana, valoarea medie.

Moda selecției sunt acele valori ale selecției care se întâlnesc cel mai frecvent.

Mediana selecției este numărul care «împarte» în jumătate mulțimea ordonată a tuturor valorilor selecției.

Valoarea medie a selecției se numește media aritmetică a tuturor valorilor ei.

Fie dată selecția: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

S-o ordonăm: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Moda selecției date este egală cu 4, deoarece 4 se întâlnește cel mai des (de trei ori).

Mediana selecției date este egală cu 3, fiindcă numărul 3 «împarte» selecția ordonată în jumătate: în fața ei și după ea este același număr de termeni ai selecției ordonate.

Dacă selecția ordonată are un număr par de valori, mediana ei este egală cu semisuma a două valori din mijlocul ei. De exemplu, pentru selecția 1, 2, 3, 3, 3, 4,

4, 5, 6, 6 mediana este $m = \frac{3+4}{2} = 3,5$.

Valoarea medie a selecției (*) est $\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}$.

Există selecții fără modă, de exemplu: 4, 5, 6, 7, 8;

și selecții cu două mode: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.

Verificați-vă

1. Ce studiază statistica matematică?
2. Ce este histograma?
3. Care fenomene se numesc de masă?
4. Ce este selecția? Frecvența selecției?
5. Numiți tendințele centrale ale selecției.
6. Ce este media valorilor selecției? Dar mediana, moda?

Efectuăm împreună!

- 1 Controlul calității a 20 bucăți de cașcaval din varietatea «Ucrainean» (după conținutul grăsimii) de către inspecție a dat următoarele rezultate:

Conținutul grăsimii, %	44	45	46	47	48
Numărul probelor	1	4	5	7	3

Aflați tendințele centrale ale selecției.

- **Rezolvare.** Moda selecției date este 47, deoarece această valoare se întâlnește cel mai des (de 7 ori).

Selecția are un număr par de valori, de aceea mediana ei este egală cu semisuma a două valori ale ei din mijloc – sub numerele 10 și 11, deoarece în selecție sunt 20 de termeni.

Pe aceste locuri în selecție (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 46; 47; ...) sunt valorile 46 și 47. Deci, $(46 + 47) : 2 = 46,5$ este mediana selecției.

Aflăm valoarea medie a selecției:

$$\frac{44 \cdot 1 + 45 \cdot 4 + 46 \cdot 5 + 47 \cdot 7 + 48 \cdot 3}{20} = \frac{927}{20} = 46,35.$$

Răspuns. Moda este 47; mediana este 46,5; valoarea medie – 46,35.

- 2 Cinci participanți la o olimpiadă pentru rezolvarea problemelor au obținut de la 0 până la 3 puncte, zece – de la 4 până la 6, treizeci – de la 7 până la 9, patruzeci și patru – de la 10 până la 12, șaisprezece – de la 13 până la 15, zece – de la 16 până la 18, doi – de la 19 până la 21, trei – de la 22 până la 24 de puncte. Alcătuiți tabelul frecvențelor și construiți histograma respectivă.

- **Rezolvare.** Tabelul frecvențelor are următoarea formă:

Cantitatea punctelor	0–3	4–6	7–9	10–12	13–15	16–18	19–21	22–24
Numărul participanților	5	10	30	44	16	10	2	3

Histograma respectivă este reprezentată pe figura 144.

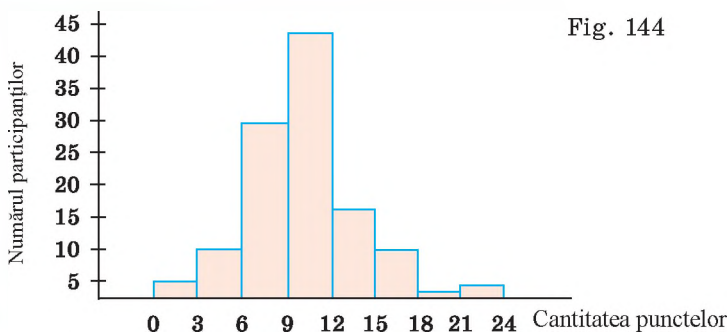


Fig. 144

Efectuați oral

852. Analizați diagrama, care demonstrează componența chimică a produselor alimentare (fig. 145). Faceți concluzii.

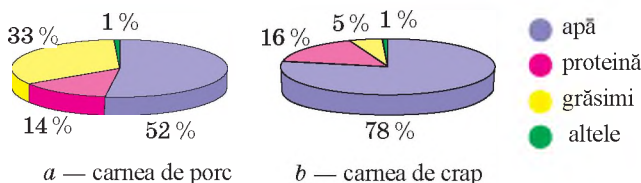


Fig. 145

853. Aflați moda, mediana și valoarea medie ale selecțiilor:
- 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11;
 - 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17.

854. La concursul «Cangurul» la nivelul «Cadet» au participat 2 000 de persoane. Pe fig. 146 este reprezentată corespondența dintre numărul participanților (%) și numărul punctelor, pe care ei l-au obținut. Ce informație despre rezultatele concursului se poate obține cu ajutorul histogramei date?

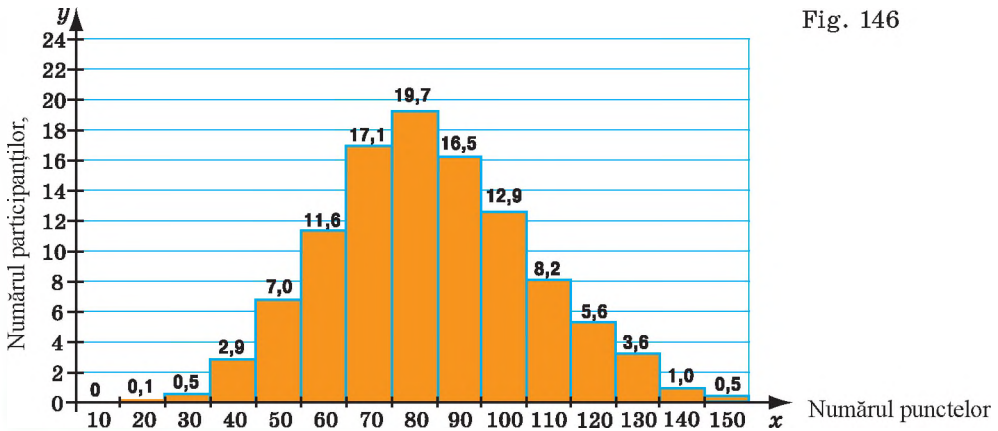


Fig. 146

Nivelul A

855. Indicați tendințele centrale ale selecției și frecvența relativă a fiecărei valori ale ei, dacă selecția este dată în forma următorului tabel al frecvențelor.

-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
1	3	6	17	13	8	2

856. Sunt date 100 de numere; din ele numărul 2 se repetă de 15 ori, numărul 4 – de 40, numărul 8 – de 20, numărul 9 – de 20, numărul 10 – de 5 ori. Aflați media aritmetică a acestor numere.

857. După măsurarea staturii a 40 de elevi în centimetri s-a obținut următorul tabel de frecvențe.

Statura. cm	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Numărul elevilor	3	5	4	2	6	10	6	3	1

Construiți histograma respectivă. Determinați frecvența relativă a fiecărei valori.

858. În tabelă sunt date procentele, care caracterizează numărul elevilor din clasele a 10-a din SUA care fumează zilnic. Cu ajutorul computerului construiți histograma respectivă și graficul. Ce concluzii se poate face după aceste date?

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
12,2	10,1	8,9	8,3	7,5	7,6	7,2	5,9	6,3	6,6	5,5	5,0	4,4	3,2

859. Pe figura 147 se dă rația medie a indexului mesei omului independent de vârstă, gen și alte caracteristici individuale. Aflați, după care formulă se determină indexul mesei omului. Calculați-l pentru sine și verificați după grafic, ce corespunde vârstei voastre, genului, etc.

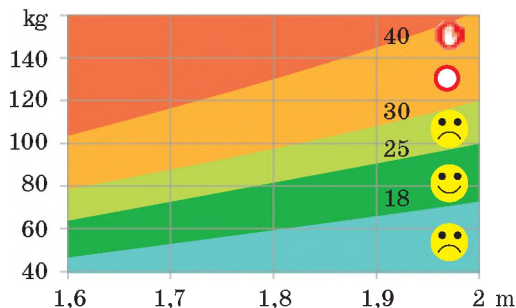


Fig. 147

860. Alcătuiți tabela despre consumul energiei electrice pe anul trecut în familia voastră. Calculați cât consumă familia în mediu energie electrică: a) într-o lună; b) în fiecare cvartal; c) în fiecare anotimp al anului.

861. Aflați moda, mediana și valoarea medie ale selecției:

a) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;

b) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.

862. Elevii unei clase au scris o lucrare de control la algebră. 4 elevi au primit note corespunzătoare nivelului patru, 16 – nivelului trei, 12 – nivelului doi și 3 – primului nivel. Introduceți aceste date în tabelă și construiți după ea diagrama circulară și cea cu bare.

863. Efectuați interogarea a 30 de băieți din școală despre mărimea încălțămintei lor. Rezultatele scrieți-le într-o tabelă identică cu cea din problema precedentă. Alcătuiți tabela frecvențelor și construiți histograma respectivă.

864. Determinând mărimea îmbrăcăminte a 50 de femei, rezultatele au fost scrise în t

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Alcătuiți tabelul frecvențelor și construiți histograma respectivă.

Nivelul B

865. Pentru a clarifica câte și ce fel de căciuli trebuie de cusut, s-a măsurat în centimetri conturul capului la 35 de cursanți. S-au obținut următoarele rezultate.

Mărimea	53	54	55	56	57	58	59
Numărul cursanților	1	7	10	12	3	1	1

Construiți histograma respectivă și calculați tendințele centrale ale selecției. Aflați frecvența relativă a fiecărei valori din selecția dată.

- 866.** Efectuați interogarea elevilor din clasa voastră și clarificați, câte becuri economice se folosesc în locuința fiecărui coleg. După datele obținute alcătuiți tabela frecvențelor și construiți histograma respectivă. Determinați frecvența relativă a fiecărei valori a selecției.
- 867.** La lecția de sport la sărituri în înălțime 11 fete din clasa a 9-a au arătat următoarele rezultate: 90 cm, 125 cm, 125 cm, 130 cm, 130 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 140 cm, 140 cm. Aflați moda, mediana și valoarea medie a valorii selecției. Care rezultat caracterizează cel mai bine pregătirea sportivă a fetelor din această clasă?
- 868.** Șase participanți la o olimpiadă de matematică după rezolvarea problemelor au obținut mai puțin de 3 puncte, zece – de la 3 până la 6, treizeci și doi – de la 7 până la 9, patruzeci și cinci – de la 10 până la 12, șaptesprezece – de la 13 până la 15, opt – de la 16 până la 18, cinci – mai mult de 18 puncte. Alcătuiți după aceste rezultate tabela frecvențelor și construiți histograma respectivă.
- 869.** O brutărie coace colaci de 1 kg. În timpul controlului s-a constatat, că masa a trei colaci din o sută este mai mică decât 1 kg cu 31 – 40 g, a cincisprezece – cu 21 – 30 g, a douăzeci – cu 11 – 20 g, a treizeci – cu 1 – 10 g, masa a șaptesprezece colaci este mai mare decât 1 kg cu 1 – 9 g, iar a doi – cu 10 – 19 g. Construiți diagrama de frecvențe și histograma respectivă.
- 870.** Într-o zi mărimea încasării (în mii de grivne) în 30 de magazine selectate la întâmplare a fost următoarea:

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

Alcătuiți tabelul frecvențelor pe 5 intervale și construiți histograma respectivă.

Comoara succeselor

- ✓ Pot afla, selecta și ordona informația din diferite surse accesibile.
- ✓ Știu procedeele prezentării datelor și prelucrării lor.
- ✓ Pot prezenta datele statistice în formă de tabele, diagrame, grafice.
- ✓ Știu a rezolva probleme, care prevăd prezentarea datelor și prelucrarea lor.

Date istorice

Unele proprietăți ale evenimentelor aleatorii le-au descoperit savanții italieni L. Pacioli (1445–1514) și G. Cardano (1501–1576), studiind jocurile de noroc.

Începutul *teoriei probabilităților* ca ramură a matematicii l-au pus savanții francezi P. Fermat (1601 – 1665) și B. Pascal (1623–1662).

Oamenii de mult timp au început a aduna și a analiza datele statistice. În China recensământul populației s-a făcut cu mai bine de 4 mii de ani în urmă. În Rusia Kieveană recensământele se realizau din a. 1245.

În dezvoltarea statisticii matematice o mare contribuție au făcut savanții U. Petty, A. Moivre, L. Euler, Ia. Bernoulli, P. Laplace, S. Poisson și alții.

În imperiul Rus în sec. XIX problemele statisticii le-au studiat și matematicienii ucraineni V. I. Buneakovski și M. V. Ostrogradski.

M. V. Ostrogradski s-a născut în satul Pașena din reg. Poltava, a învățat la gimnaziul din Poltava, la universitatea din Harkov și în Paris; era membru al academiilor de științe din Rusia, Turin, Roma, Americană, membru – corespondent al academei din Paris.

M. V. Ostrogradski a obținut rezultate fundamentale în domeniul analizei matematice, mecanicii teoretice, teoriei probabilităților, fizicii matematice, balistică, teoria căldurii, a scris «Cursul mecanicii cerești». Acorda multă atenție calculelor aproximative, procentelor. A elaborat metodele statistice de rebutare (brăcuire) a mărfii.

În or. Poltava este construit monumentul lui M. V. Ostrogradski.

În domeniul matematicii aplicative mult a lucrat și matematicianul ucrainean **M. P. Kravciuk**.

S-a născut în satul Ciovnâțea din Volânia, a terminat gimnaziul din Luțk, universitatea din Kiev. Din a. 1925 este profesor, iar din 1929 este academician al Academiei de științe din Ucraina, secretarul științific, a condus Comisia statisticii matematice. În a. 1938 a fost represat fiind nevinovat. A murit pe Kolâma.

În orașul Kiev este construit monumentul lui M. P. Kravciuk.



M. V. Ostrogradski
(1801–1862)



M. P. Kravciuk
(1892–1942)

ESEȚIALUL ÎN CAPITOL

Combinatoria este un capitol al matematicii, consacrat rezolvării problemelor selecției și amplasării elementelor mulțimii finite conform regulilor date.

Examinăm două reguli principale, cu ajutorul cărora se rezolvă multe probleme din combinatorie.

Regula sumei combinatoriei:

Dacă elementul unei mulțimi oarecare A se poate alege prin m procedee, iar elementul mulțimii B – prin n procedee, atunci elementul din mulțimea A sau din mulțimea B poate fi ales prin $m + n$ procedee.

Regula produsului combinatoriei:

Dacă prima componentă a perechii se poate alege prin m procedee, iar a doua prin n procedee, atunci o astfel de pereche se poate alege prin mn procedee.

Evenimente aleatorii sunt acelea care pot să se realizeze sau pot să nu se realizeze.

Dacă în n probe evenimentul X se realizează de m ori, atunci fracția $\frac{m}{n}$ determină frecvența relativă a apariției evenimentului X . Numărul lângă care oscilează frecvența relativă a evenimentului exprimă *probabilitatea* acestui eveniment, ea se notează cu litera P (de la cuvântul englez *probability* – probabilitate).

Proprietățile ale probabilității evenimentului aleatoriu:

1. Dacă C este un eveniment imposibil, atunci $P(C) = 0$.
2. Dacă B este un eveniment sigur, atunci $P(B) = 1$.
3. Dacă X este un eveniment aleatoriu, atunci $0 \leq P(X) \leq 1$.
4. Dacă $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ sunt evenimente elementare care epuizează probele unei experiențe, atunci:

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = 1.$$

Statistica matematică este un compartiment al matematicii aplicative, în care se studiază caracteristicile cantitative ale fenomenelor de masă. Datele statistice se determină cel mai des cu ajutorul *selecției*, care este o mulțime finită a rezultatelor observărilor independente. Selecția se ordonează, se alcătuieste tabelul frecvențelor, pe baza lui se construiește diagrama sau histograma corespunzătoare.

Tendințele centrale ale selecției:

- a) *valoarea medie a selecției* este media aritmetică a tuturor valorilor ei;
- b) *moda selecției* sunt acele valori ale ei care se întâlnesc cel mai frecvent;
- c) *mediana selecției* este valoarea din mijloc care «împarte» în jumătate totalitatea ordonată a tuturor valorilor selecției.

Pentru caracterizarea rezultatelor prelucrării statistice a datelor în masă, se aplică tabele, grafice, diagrame, histograme.

CLARIFICĂM SUCESELE

Sarcini în formă de test nr. 4

- 1** Câte numere de două cifre se pot alcătui din cifrele 5 și 6, dacă cifrele în număr pot să se repete?
a) unul; b) două; c) trei; d) patru.
- 2** Din numerele întregi de la 1 până la 20 se numește unul. Care este probabilitatea evenimentului, că el va fi divizor al numărului 20?
a) 0,3; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6.
- 3** Media aritmetică a tuturor numerelor întregi din intervalul $-10 < x < 40$ este egală cu:
a) 10; b) 15; c) 20; d) 30.
- 4** Pe parcursul primelor zece zile ale lui octombrie temperatura la ora 7 dimineața era: $6^\circ, 8^\circ, 8^\circ, 7^\circ, 5^\circ, 8^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 8^\circ$. Aflați moda selecției.
a) 7° ; b) 6° ; c) 8° ; d) 5°
- 5** Aflați mediana selecției 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3.
a) 1; b) 7; c) 5; d) 3.
- 6** Pe o farfurie sunt pateuri diferite după formă. Printre ele sunt 5 pateuri cu cașcaval și 3 cu vișine. Câte posibilități are un copil să ia un pateu?
a) una; b) două; c) trei; d) patru.
- 7** În care caz evenimentul X se numește imposibil?
a) $P(X) = 1$; b) $P(X) = -1$; c) $P(X) < 1$; d) $P(X) = 0$.
- 8** Opt prieteni au hotărât să facă schimb cu cărți de vizită. Câte cărți de vizită în total vor fi împărțite:
a) 64; b) 72; c) 32; d) 56?
- 9** Din litere, scrise pe fișe pătrate separate, este compus cuvântul „MATEMATICA”. Apoi aceste fișe au fost întoarse, amestecate și s-a luat la întâmplare una. Care este probabilitatea că pe ea va fi scrisă litera „A”:
a) 0,1; b) 0,2; c) 0,3; d) 0,4?
- 10** Andrei a pierdut o figură de șah. Care este probabilitatea faptului că ea este tura?
a) 0,5; b) 0,025; c) 0,0625; d) 0,125.

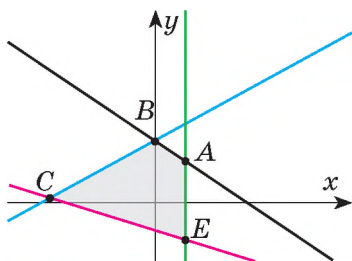
Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 4

- 1°** Într-o cutie sunt 20 de bomboane cu înveliș albastru și 80 – cu înveliș roșu. Care este probabilitatea evenimentului, că bomboana luată la întâmplare va fi cu înveliș albastru?
- 2°** Câte numere de trei cifre există care se divid cu 5?
- 3°** Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea faptului că pe ea vor fi mai mult de 10 puncte?
- 4°** În iunie, iulie și august o familie a folosit respectiv 88, 70 și 72 kvt·h de energie electrică. Care a fost consumul mediu de energie electrică al familiei într-o lună de vară?
- 5°** Aflați moda, mediana și media valorilor selecției: 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5.
- 6°** . La 100 000 de bilete de loterie le revin 662 de câștiguri. Din ele: 2 câte 5 000 gm., 10 câte 1 000 gm., 50 câte 200 gm., 100 câte 50 gm., 500 câte 10 gm. Restul biletelor sunt fără câștig. Aflați probabilitatea câștigului mai mare decât 200 gm. pe un bilet.
- 7°** Analizând numărul biletelor la avion vândute în aprilie, s-au obținut așa date:
- | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 57 | 55 | 60 | 46 | 55 | 54 | 57 | 54 | 49 | 52 |
| 51 | 65 | 60 | 56 | 45 | 59 | 53 | 61 | 47 | 42 |
| 47 | 58 | 56 | 53 | 59 | 64 | 49 | 58 | 59 | 63 |
- Alcătuieți tabelul frecvențelor și construiți histograma respectivă. Calculați tendințele centrale ale selecției.
- 8°** Fie că anul are 365 de zile. Care este probabilitatea, că pe foaia ruptă din calendar la întâmplare va fi numărul: a) divizibil prin 10; b) egal cu 29?
- 9**** Un elev are 4 manuale de literatură ucraineană și 3 manuale de matematică. Prin câte procedee el poate aranja cărțile pe raft așa, ca: a) manualele de la un obiect să fie alături; b) manualele de la un obiect să nu fie alături?
- 10**** Un arcaș face 5 serii de împușcături în condiții neschimbate. În fiecare serie face câte 100 de împușcături. Rezultatele tragerii sunt incluse în tabel. Aflați frecvența relativă a nimeririi în țintă: a) în fiecare serie; b) în primele 300 de împușcături; c) în ultimele 300 de împușcături; d) în toate 500 de împușcături. Formulați ipoteza despre probabilitatea nimeririi în țintă.

Numărul seriei	1	2	3	4	5
Numărul de nimeriri în țintă	69	64	72	78	65

Inegalități în algebră

Inegalități cu două
variabile

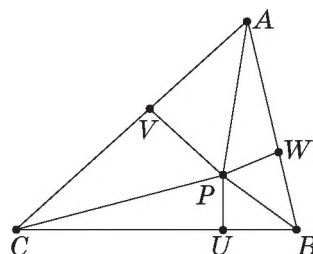


Inegalități
interesantei

Inegalități în geo-
metrie

Inegalitatea lui Barro

$$PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW)$$



Clasa se împarte în trei grupe: „istorici”, „matematicieni”, „practicieni”. Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiect. Elevii formează grupe, lucrează individual sau în perechi la una din temele propuse mai jos.

Temele pentru activitatea de proiectare se anunță la sfârșitul primului semestru. Elevilor li se recomandă să se familiarizeze independent cu materialul teoretic, care se conține în § 7 din manual.

Rezultatele lucrului asupra proiectului trebuie de pregătit în formă de portfolio al grupei cu prezentarea la calculator. Susținerea proiectelor e rațional de petrecut în afara orelor de curs, invitând elevi din alte clase, învățători și părinți.

Historicii studiază apariția și aplicarea inegalităților în diferite etape ale dezvoltării matematicii. La apărare pregătesc o relatare scurtă și prezentarea cu exemple concrete.

Matematicienilor li se propune să-și îmbogățească cunoștințele despre inecuații, examinând inecuațiile în algebră și geometrie.

Tematica cercetărilor individuale (sau cercetărilor în grupe mici) poate fi următoarea:

- rezolvarea inecuațiilor cu două variabile;
- rezolvarea inecuațiilor care conțin moduli;
- rezolvarea inecuațiilor care conțin parametri;
- metode diferite de demonstrație ale inegalităților;
- inegalități cu denumire;
- inegalități geometrice.

Examinăm detaliat inegalitatea care se referă la algebră, și la geometrie. Această este *inegalitatea a trei pătrate*, care este justă pentru orice numere reale a , b și c :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Să o demonstrăm. Aflăm diferență dintre partea stângă și cea dreaptă a inecuației și evidențiem pătratele depline. Avem

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0, \text{ adică}$$

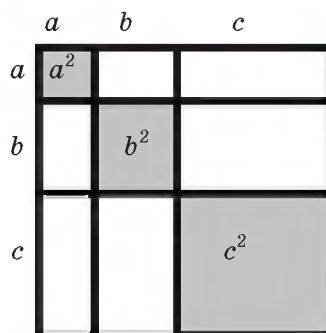
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0, \text{ sau } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Ceea ce trebuia de demonstrat.

Modelul geometric al inegalității din trei pătrate este interesant. Încercați să demonstrați această afirmație geometric.

În matematică inegalitatea a trei pătrate se poate aplica pentru:

- demonstrarea altor inegalități;
- determinarea valorilor celor mai mari și celor mai mici a multor expresii cu trei variabile;
- rezolvarea ecuațiilor interesante, inecuațiilor și ale sistemelor lor.



În mod analog se poate demonstra *inegalitatea a n pătrate*:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2}{n-1} (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n).$$

Practicienii clarifică, că cu ajutorul inegalităților și proprietăților lor se modelează relația „mai mic” și „mai mare” din mediul ambiant. Grupa de elevi examinează:

- probleme aplicative, care se reduc la rezolvarea inecuațiilor;
- inegalități și calcule aproximative;
- folosirea TIC pentru rezolvarea inecuațiilor.

Examinăm mai detaliat întrebarea, care se referă la inegalități și calcule aproximative.

Calcule aproximative. Oare se poate măsura lungimea unui leaț absolut exact? Nu. Chiar dacă veți auzi, că lungimea unui leaț este egală, de exemplu, cu 9,42783 m, nu credeți aceasta. Deoarece lungimea unui leaț nu se poate măsura cu exactitatea de sutimi de milimetru. Rezultatul fiecărei măsurări este valoarea aproximativă a mărimii.

• Clarificați, care din exemplele date pot fi repartizate la exacte, iar care – la aproximative:

- în școală învață 900 de elevi;
- masa Lunii – $7,35 \cdot 10^{22}$ kg;
- aria bazinului – 600 m^2 ;
- trenul de marfă este alcătuit din 60 de vagoane;
- acelerația căderii libere este egală cu $9,8 \text{ m/s}^2$;
- claviatura computerului conține 113 clape, iar claviatura pianului – 87;
- urmașii unui infuzor într-un an este $75 \cdot 10^{108}$ de indivizi;
- antilopa africană impala poate sări în lungime la 7,5 m, iar cangurul – la 12 m;
- rețeta budincii din legume are 9 componente.

Dacă la măsurarea lungimii x a unui leaț vom obține, că ea este mai mare decât 6,427 m și mai mică decât 6,429 m, atunci se scrie:

$$6,427 \text{ m} \leq x \leq 6,429 \text{ m} \text{ sau } x = 6,428 \pm 0,001 \text{ m}.$$

Se spune, că valoarea lungimii riglei e aflată cu precizia de până la 0,001 m (1 milimetru) sau eroarea absolută a valorii aproximative 6,428 nu depășește 0,001.

Eroare absolută a valorii aproximative se numește modulul diferenței dintre valoarea aproximativă și cea exactă.

Dacă valoarea exactă a mărimii este necunoscută, atunci necunoscută este și eroarea absolută a valorii aproximative a ei. În acest caz se indică *limita erorii absolute*, adică numărul, pe care nu-l depășește eroarea absolută. În exemplul studiat limita erorii absolute a valorii aproximative 6,428 este egală cu 0,001. Aici cifrele 6, 4 și 2 sunt exacte, iar 8 este dubioasă, de la cifra exactă ea se deosebește nu mai mult decât cu o unitate.

Dacă $x = 3,274 \pm 0,002$, adică $3,272 \leq x \leq 3,276$, atunci limita erorii absolute a valorii aproximative 3,274 este egală cu 0,002.

• Transformând fracția ordinară $\frac{2}{3}$ în zecimală, obținem 0,6667. Aflați eroarea absolută a acestei aproximații. Aflați valoarea aproximativă a numărului $\frac{2}{3}$ cu exactitate până la miimi și eroarea absolută a ei.

• Ghepardul dezvoltă o viteză de 34,5 m/s. Exprimați această viteză în kilometri pe oră, rotunjiți până la întregi și aflați eroarea absolută a aproximației.

• Viteza luminii în vid (în metri pe secundă) este $299\,792\,456 \pm 2$ m/s, iar viteza sunetului în aer – $331,6 \pm 0,1$ m/s. Numiți valoarea aproximativă a vitezei luminii și a vitezei sunetului și limitele erorilor absolute respective.

Valorile absolute se pot scrie și fără limita erorilor. S-a căzut de acord a le scrie așa, ca toate cifrele, cu excepția ultimei, să fie adevărate, iar ultimele (dubioase) să se deosebească de cele adevărate nu mai mult decât cu o unitate. De exemplu, dacă se scrie $x = 6,428$ m, atunci se înțelege că $6,427 \text{ m} \leq x \leq 6,429 \text{ m}$ sau $x = 6,428 \pm 0,001$ m.

Dacă $y = 3,247 \pm 0,002$ kg, nu este acceptat a scrie $y = 3,247$ kg. Este de dorit de rotunjit: $y = 3,25$ kg.

Imaginați-vă, că s-a măsurat (în centimetri) grosimea h a unei cărți și lungimea l a geamului: $h = 1,6$ – cu precizia de 0,1, $l = 71,5$ – cu precizia de 0,1.

Limitele erorilor absolute ale ambelor mărimi sunt la fel: 0,1. Dar într-un caz această eroarea revine la un număr nu prea mare 1,6, iar în al doilea – la un număr cu mult mai mare 71,5. Pentru aprecierea calității măsurării se calculează erorile relative.

Eroare relativă a valorii aproximative se numește raportul erorii absolute către modulul valorii aproximative.

De exemplu, erorile relative ale aproximațiilor h și l sunt egale respectiv cu:

$$0,1 : 1,6 = 0,0625 \approx 6,3 \%; \quad 0,1 : 71,5 = 0,0014 = 0,14 \%$$

Valoarea l este mai calitativă, cu eroare relativă mai mică.

• Comparați exactitatea măsurărilor a grosimii d a părului omului și diametrul D a Soarelui, dacă $d = 0,15 \pm 0,005$ mm, iar $D = 1\,392\,000 \pm 1000$ km.

• Masă Terrei este egală cu $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{27}$ g, iar masa mingii pentru copii – $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$ g. Care măsurare este mai exactă?

Operațiile cu valori aproximative se pot efectua cu respectarea strictă a erorilor și fără respectarea strictă a erorilor. Respectarea strictă a erorilor se poate efectua pe baza proprietăților inegalităților duble. Fie, de exemplu, masa unui șurub în grame de $x = 325 \pm 2$, iar masa piuliței – $y = 117 \pm 1$, adică $323 \leq x \leq 327$ și $116 \leq y \leq 118$.

Adunând membru cu membru aceste inegalități duble, obținem:

$$439 \leq x + y \leq 445 \text{ sau } x + y = 442 \pm 3.$$

Și celelalte operații cu valorile aproximative se pot efectua în mod analog. Așa se procedează în cele mai importante calcule.

- Oare se poate introduce într-un circuit un aparat cu rezistența de $44 \pm 0,5$ Ohm la tensiunea de 215 ± 15 V, ca intensitatea curentului să nu fie mai mare de 6 A?
- Trebuie transportat 1000 ± 20 m³ de beton. Câte curse trebuie să facă un autocamion basculant, pentru a efectua acest lucru, dacă caroseria conține $2,25 \pm 0,02$ m³?

În cazurile mai puțin importante se aplică *regulile de calcul ale cifrelor*.

Amintim, că *semne zecimale ale numărului se numesc toate cifrele lui, care sunt la dreapta de virgula zecimală*.

Cifre semnificative ale numărului se numesc toate cifrele lui, cu excepția zerourilor de la stânga de prima cifră diferită de zero și a zerourilor de la dreapta ce stau pe locul cifrelor înlocuite la rotunjire.

De exemplu, în valoarea aproximativă 0,03074 sunt cinci semne zecimale și patru cifre semnificative: 3, 0, 7, 4. Dar în valoarea aproximativă a diametrului Terrei $d = 12\,700$ km nu sunt semne zecimale, iar cifre semnificative sunt trei: 1, 2 și 7.

Fie date valorile aproximative $x = 3,24$ și $y = 1,4$. Notăm primele cifre omise la rotunjire prin semnul întrebării: $x = 3,24?$, $y = 1,4?$. Aflăm suma și diferența acestor valori aproximative:

$$\begin{array}{r} 3,24? \\ + 1,4? \\ \hline 4,6?? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,24? \\ - 1,4? \\ \hline 1,8?? \end{array}$$

În genere, *la adunarea și scăderea valorilor aproximative la rezultat trebuie de păstrat atâtea semne zecimale, câte le are componenta operației cu cel mai mic număr de semne zecimale*.

La înmulțirea valorilor aproximative la rezultat trebuie de păstrat atâtea cifre semnificative, câte le are factorul cu cel mai mic număr de cifre semnificative.

La împărțirea valorilor aproximative se aplică o regulă asemănătoare.

Regulile evidențiate cu caracter aldin se numesc *reguli de calcul ale cifrelor*. Ele nu asigură exactitate mare a calculelor aproximative, dar sunt suficiente pentru majoritatea problemelor aplicate.

- Știind, că diametrul tulpinei teiului este egal cu 57 cm, elevul a calculat aria secțiunii transversale a tulpinei: 2550,5 cm². Oare este adevărat acest răspuns? Dacă fals – corecțai-l.
- Aflați aria trapezului, bazele căruia sunt $a \approx 1,7$, $b \approx 0,43$ și înălțimea $h \approx 0,841$.

Oamenii au frică de aproximații, deși în practică zilnic au de lucru exclusiv cu numere aproximative.

A. B. Empacher

Calculule trebuie efectuate cu același ordin de exactitate care este necesar pentru practică, însă orice cifră greșită formează o greșală, iar fiecare cifră de prisos – jumătate de greșală.

O. M. Krâlov

Proiectul de învățământ Nr. 2



Funcțiile în jurul nostru



Acest proiect de învățământ este compus din două părți. *Prima parte* este consacrată examinării întrebărilor teoretice generale, care se referă la funcții. Elevii selectează direcția cercetării și se împart pe grupe: „designeri”, „istorici”, „jurnaliști”, „IT-specialiști”, „matematicieni”, etc. Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiectare.

Designerii clarifică unde și cum se aplică elementele graficelor funcțiilor în proiectarea cu măiestrie a obiectelor și a complexelor lor în diferite domenii ale cunoștințelor – în arhitectură, în înfrumusețarea îmbrăcăminte, etc. Dau exemple de astfel de funcții.

Istoricii studiază apariția și folosirea noțiunii „funcția”. Pentru apărare pregătesc o relatare scurtă și o prezentare cu definiții concrete și date despre autorii lor. De exemplu:

➤ În jumătatea a doua a sec. XIX (după crearea teoriei mulțimilor) în definiția funcțiilor afară de ideea corespondenței era inclusă încă și ideea mulțimii: „Dacă fiecărui element x din mulțimea A îi este pus în corespondență un element anumit y din mulțimea B , atunci se spune că pe mulțimea A este dată funcția $y = f(x)$ sau că mulțimea A se aplică pe mulțimea B ”. Astfel de definiție a funcției se poate aplica nu numai la mărimi și numere, dar și la alte obiecte matematice, de exemplu, la figurile geometrice.

Jurnaliștii caută opere artistice sau citate, în care se amintește despre funcții și proprietățile lor. De exemplu:

Nu este nici un domeniu de cunoștințe al omului, unde nu se va intercala noțiunea de funcții și reprezentarea lor grafică.

K. F. Lebedințev

IT-specialiștii cercetează cum cu ajutorul tehnologiilor informaționale se poate construi graficele funcțiilor compuse, se poate studia proprietățile lor și se poate rezolva ecuații, inecuații și sistemele lor. De exemplu, construiesc graficele funcțiilor în programul MS Excel, GRAN sau GeoGebra.

Matematicienii studiază funcțiile, care nu se examinează în școala de bază. De exemplu, funcțiile părții întregi și fracționare a numărului, exponențiale, trigonometrice, etc.

Partea a doua a proiectului este consacrată modelării a diferitor procese în timpul rezolvării problemelor aplicative. Se prevede că funcțiile, figurile geometrice, expresiile, ecuațiile și sistemele lor, diagramele, etc. Vor fi aplicate ca modele matematice. Elevii se vor familiariza cu materialul teoretic „modelarea matematică” expus mai jos și vor rezolva problemele stabilite de învățător.

Se recomandă elevilor să prelucreze independent materialul teoretic expus mai jos.

Modelarea matematică

Metodele matematice rezolvă nu numai probleme abstracte despre numere, figuri, ecuații, funcții, etc, dar și multe altele. *Probleme aplicative* se numesc acele, condițiile cărora conțin noțiuni care nu sunt matematice. La rezolvarea problemei aplicative cu metode matematice, la început se alcătuiește modelul ei matematic.

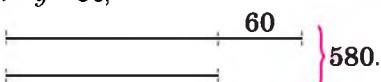
Problema 1. În două magazine sunt 580 kg de mere. Câte mere sunt în fiecare magazin, dacă în primul sunt cu 60 kg mai mult, decât în al doilea? Alcătuiți modele matematice diferite pentru această problemă.

Rezolvare. Fie în primul magazin x kg de mere, atunci în al doilea $-(x - 60)$ kg, iar împreună $-(x + x - 60)$ kg. Avem ecuația $x + x - 60 = 580$. De unde $2x = 640$, $x = 320$, $x - 60 = 320 - 60 = 260$.

Răspuns. 320 kg și 260 kg.

Ecuația $x + x - 60 = 580$ este unul din modelele matematice ale problemei cercetate.

Se poate alcătui și alte modele, printre altele în formă de:

- ecuație $y + y + 60 = 580$;
- sistem de ecuații $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$
- schemă 

Model se numește obiectul special creat, care redă proprietățile obiectului studiat (de la cuvântul francez *modèle* – copie, exemplu). Modelul micșorat al avionului, automobilului, barajului sunt exemple de modele fizice.

Modelul matematic este sistemul corelațiilor matematice care aproximativ în formă abstractă descrie obiectul, procesul sau fenomenul studiat.

Modelele matematice se alcătuiesc din noțiuni matematice și relațiile: figurilor geometrice, numerelor, expresiilor, etc. În majoritatea cazurilor ca modele matematice sunt funcțiile, ecuațiile, inecuațiile, sistemele lor.

Modelare matematică este procesul alcătuirii modelului matematic din noțiuni matematice și aplicarea lui în continuare pentru rezolvarea problemelor concrete.

Rezolvarea problemei aplicative cu metode matematice se realizează în trei etape:

- 1) alcătuirea modelului matematic al problemei date;
- 2) rezolvarea problemei matematice;
- 3) analiza răspunsului.

Problema 2. Oare este suficient un milion de litri de apă pentru petrecerea întrecerilor la înot într-un bazin cu fundul orizontal de formă dreptunghiulară cu lungimea 100 m și lățimea de 25 m?

Rezolvare. I. Alcătuirea modelului matematic al problemei. Apa în bazin cu fundul orizontal ia forma paralelepipedului dreptunghic, care pentru problema dată este modelul matematic al obiectului real. În acest paralelipiped o muchie corespunde înălțimii apei (a este valoarea căutată), alte muchii sunt lungimea (b) și lățimea (c) bazinului.

II. Rezolvarea problemei matematice. $V = a \cdot b \cdot c$ este volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile a , b și c . Conform condiției problemei:

$$b = 100 \text{ m}, c = 25 \text{ m}; V = 1\,000\,000 \text{ l} = 1\,000\,000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ m}^3.$$

$$\text{Avem: } 1000 = a \cdot 100 \cdot 25, \text{ de unde } a = \frac{1000}{2500} = 0,4 \text{ (m)}.$$

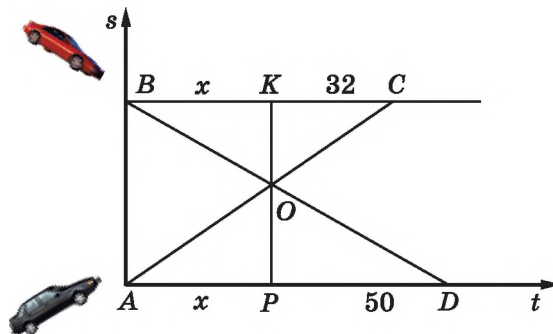
III. Analiza răspunsului. Pentru desfășurarea întrecerilor la înot adâncimea de 0,4 m este foarte mică. Deci, un 1 000 000 l de apă în bazinul dat sunt insuficiente pentru petrecerea întrecerilor la înot.

Răspuns. Insuficient.

Pentru multe probleme de mișcare cel mai potrivit model matematic sunt graficele construite în sistemul de coordonate cartezian. Pe axa absciselor se notează timpul mișcării t , iar pe axa ordonatelor – distanța parcursă s . Odată cu trecerea timpului distanța dintre orașe nu se schimbă și acestui fapt îi corespund drepte paralele. Examinăm o problemă.

Problema 3. Din orașele A și B au plecat în același timp unul în întâmpinarea altuia două automobile. Primul a sosit în B peste 32 min după întâlnire, iar al doilea a sosit în A peste 50 min după întâlnire. Câte minute ei au fost în drum până la întâlnire?

Rezolvare. Fie AC și BD graficele mișcării ale primului și a celui de al doilea automobil. Dacă fiecare din ele s-a aflat în drum x min până la întâlnire, adică $AP = BK = x$, atunci $KC = 32$, $PD = 50$.



$\triangle AOP \sim \triangle COK$ și $\triangle POD \sim \triangle KOB$, de aceea

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

$$\text{Deci, } \frac{x}{32} = \frac{50}{x}, \text{ de unde } x = 40.$$

Răspuns. 40 min.

Modelele matematice ale problemei sunt sistemul de grafice reprezentate pe figura 111 și ecuația $x : 32 = 50 : x$. Încercați să alcătuiți și alte modele matematice.

De exemplu, atrageți atenția, că $AD \parallel BC$, iar tangentele unghiurilor de înclinație ale dreptelor AC și BD față de aceste drepte sunt vitezele mișcării obiectelor respective.

1. Dați exemple de relații dintre mărimile fizice care pot fi modelate prin egalitatea: $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$.

2. Formulați problema aplicativă care are ca model matematic formulele

$$\text{a) } l = 2 \pi r \quad \text{b) } S = \pi r^2; \quad \text{c) } S = \frac{a+b}{2} h.$$

Efectuăm împreună!

1 Doi fermieri, lucrând pe combine, pot recolta împreună roada de grâu în 12 h. În câte ore poate recolta această roadă fiecare, lucrând singur, dacă productivitatea muncii a primului este de 1,5 ori mai înaltă decât a celui de al doilea?

Rezolvare. Fie că primul fermier poate recolta tot grâul în x h, al doilea în $1,5x$ h. În 1 h primul poate recolta $\frac{1}{x}$ parte din lan, iar al doilea $\frac{1}{1,5x}$ parte. Împreună ei pot recolta

în 1 h a $\frac{1}{12}$ parte din lan. Deci,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1,5x} = \frac{1}{12}, \text{ de unde } \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{1,5}\right) = \frac{1}{12}, \quad x = \frac{2,5}{1,5} \cdot 12, \quad x = 20; \quad 1,5 \cdot 20 = 30.$$

Răspuns. 20 h; 30 h.

2 Pentru realizarea fiecărei trageri de loterie se cheltuiește 55 000 grn. Un bilet de loterie costă 1 grn. A treia parte din incasarea de la vânzarea билетelor se livrează în fondul câștigurilor, a patra – pentru plățirea impozitelor și restul este beneficiul organizatorilor loteriei. Care a fost beneficiul, dacă s-au vândut 180 000 de bilete? Câte bilete trebuie vândute pentru a obține un beneficiu mai mare decât 30 000 grn.? În ce condiții organizatorii nu vor obține beneficiu?

Rezolvare

I. Fie S incasarea de la vânzarea билетelor, iar P – beneficiul. Atunci $S = \frac{S}{3} + \frac{S}{4} + P + 55\,000$, iar $P = \frac{5S}{12} - 55\,000$.

II. 1. Dacă $S = 180\,000$ grn. atunci $P = \frac{5 \cdot 180\,000}{12} - 55\,000 = 20\,000$ grn.

2. Dacă $P > 30\,000$, atunci $\frac{5S}{12} - 55\,000 > 30\,000$, iar $S > 204\,000$ grn.

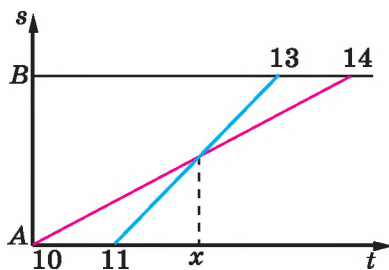
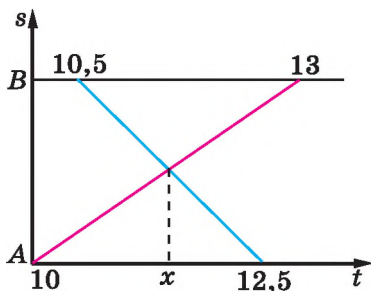
3. Dacă $P \leq 0$, atunci $\frac{5S}{12} - 55\,000 \leq 0$, iar $S \leq 132\,000$.

III. Deoarece prețul biletului de loterie este 1 grn., cantitatea билетelor vândute (K) este egală numeric cu incasația. Deci, dacă $K > 204\,000$ de bilete, atunci beneficiul va fi mai mare decât 30 000 grn., iar dacă $K \leq 132\,000$ de bilete, organizatorii nu vor avea beneficiu.

Răspuns. 20 000 grn.; mai mult de 204 000 de bilete.

Problemele de mai jos rezolvați oral, examinând modelele grafice ale lor.

3 La ora 10 din orașul A spre orașul B a plecat un motociclist, iar peste 30 min din B în întâmpinarea lui a plecat un automobil. La ce oră ei s-au întâlnit, dacă automobilul în A a sosit la ora 12 și 30 min, iar motociclistul în B – la ora 13 (figura din stânga)?



4 La ora 10 din orașul A spre orașul B a plecat un motociclist, iar la ora 11 tot așa din A spre B a plecat un automobil. La ce oră automobilul îl va ajunge pe motociclist, dacă el a sosit în B la ora 13, dar motociclistul – la ora 14 (figura din dreapta)?

Alcătuieți modelele matematice ale problemelor și rezolvați-le.

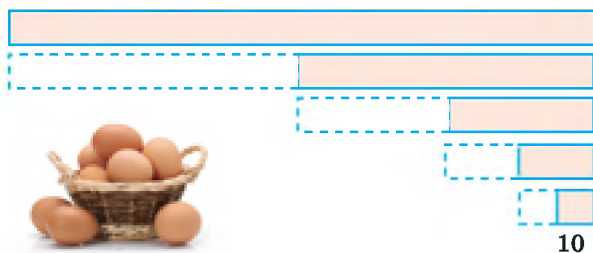
1. O vacă era legată într-o poiană de un țăpuș cu o funie cu lungimea de 8 m. Ce arie ea va paște?
2. Pentru a ridica căldarea din fântână trebuie de făcut 12 rotații cu coarba. Aflați adâncimea fântânii, dacă diametrul valului este de 24 cm.
3. Tata este mai în vârstă decât fiul de 4 ori, dar peste 5 ani el va fi mai în vârstă decât fiul numai de trei ori. Câți ani are fiul acum?

4. **Problema lui Bezout.** Unui muncitor i s-a spus că va primi câte 24 su pentru fiecare zi de lucru, dar i se vor reține câte 6 su pentru fiecare absență. Peste 30 de zile s-a clarificat că el nu va primi nimic. Câte zile el a lucrat?

5. La un depozit era de 2 ori mai mult cărbune decât la al doilea. Dacă la primul depozit s-ar aduce încă 80 t, iar la al doilea – 145 t, la ambele depozite va fi aceeași cantitate de cărbune. Câte tone de cărbune sunt la fiecare depozit?

6. Într-un sac erau 60 kg de zahăr, în al doilea – 80 kg. Din sacul al doilea s-a luat zahăr de 3 ori mai mult decât din primul și atunci în primul sac a rămas de 2 ori mai mult zahăr decât în al doilea. Câte kilograme de zahăr s-au luat din fiecare sac?

7. Dintr-un coș s-a luat jumătate din toate ouăle, apoi – jumătate din rest, apoi – jumătate din noul rest, în fine – jumătate din noul rest. După asta în coș au rămas 10 ouă. Câte ouă erau la început în coș?



10

Pentru problemele 8–9 compuneți modele asemănătoare celei aplicate în problema

7. Dați răspunsul la întrebări.

8. Oltea a copt pateuri și două a mâncat singură. Cu jumătate din cele rămase ea a servit părinții, cu jumătate din rest – prietenele. Trei pateuri, ce rămăsesse după aceasta, ea le-a dat fratelui mai mic. Câte pateuri a copt Oltea?

9. Luni elevii au luat jumătate din toate manualele noi, marți – jumătate din rest, miercuri – jumătate din noul rest. După asta în bibliotecă au rămas 25 de manuale noi. Câte manuale noi erau în bibliotecă?

Rezolvați problemele 10 și 11, comparați modelele matematice ale lor.

10. Doi fierari, lucrând împreună, execută un lucru în 8 zile. În câte zile ar executa acest lucru fierarul al doilea, dacă primul îl poate executa în 12 zile?

11. a) O brigadă poate executa un lucru în 3 h, alta în 5 h. În câte ore ar executa acest lucru ambele brigăzi lucrând împreună?

b) Un bazin se umple pîntr-o țevă în 3 h, prin alta în 5 h. În câte ore se va umple bazinul, dacă vor fi deschise ambele țevi?

c) De la stația A spre stația B și din B spre A în același timp au plecat două automobile. Peste câte ore ele se vor întâlni, dacă se știe că primul automobil parcurge distanța AB în 3 h, iar al doilea în 5 h?

12. Ce dimensiuni au lingourile de aur și argint în formă de cub, dacă masa fiecăruia este de 3 kg? Densitatea aurului este de $19,3 \text{ g/cm}^3$, iar densitatea argintului este de $10,5 \text{ g/cm}^3$.

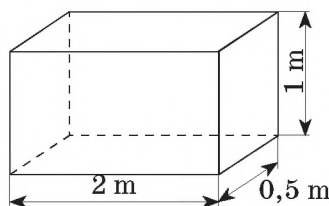
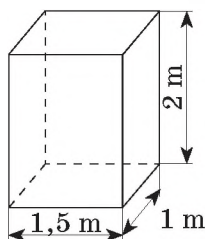
13. **Problema lui Maclaurin.** Câțiva oameni au luat prânzul împreună și trebuiau să plătească 175 de șilingi. S-a clarificat, că doi nu aveau cu ei bani, de aceea ceilalți au plătit cu 10 șilingi mai mult decât se cuvenea. Câți oameni au luat prânzul?

14. Pe figură sunt reprezentate două rezervoare, care au forma de paralelipipede dreptunghice și sunt date dimensiunile lor. $\frac{3}{5}$ din volumul primului rezervor și $\frac{3}{4}$ din volumul celui de al doilea sunt umpluți cu apă. Din primul rezervor zilnic se ia 112 litri de apă, iar din al doilea – 31 litri.

a) Scrieți fracția, care indică de câte ori peste x zile în primul rezervor va rămâne mai multă apă decât în al doilea.

b) Calculați de câte ori peste 9 zile în primul rezervor va rămâne mai multă apă, decât în cel de al doilea.

c) Ce înseamnă egalitatea $\frac{1800 - 112x}{750 - 31x} = 3$? Rezolvați ecuația și faceți concluzie.



15. **Problemă deschisă.** Compuneți o problemă asemănătoare cu cea precedentă.

16. O uzină a primit o comandă să producă 105 motoare. Uzina zilnic producea cu 6 motoare mai multe decât se prevedea, de aceea a executat comanda cu 2 zile mai devreme. Câte motoare producea uzina zilnic?

17. La competițiile de fotbal au avut loc 55 de meciuri, fiecare echipă a jucat cu fiecare cealaltă câte un meci. Câte echipe au participat la competiții?

18. **Problema lui Fibonacci.** Două turnuri, unul cu înălțimea de 40, iar al doilea – de 30 de picioare, sunt situate la o distanță de 50 de picioare unul de altul. Două păsări în același timp își iau zborul de pe ambele turnuri spre fântâna amplasată între ele. Dacă păsările zboară cu aceeași viteză, ele ajung la fântână în același timp. Aflați distanța de la fântână până la turnuri.

19. Două brigăzi de zugravi, lucrând împreună, pot executa un lucru în 4 zile. În câte zile ar executa acest lucru fiecare brigadă separat, dacă prima brigadă îl execută cu 6 zile mai devreme decât a doua?

20. Cu două excavatoare cu puteri diferite care lucau împreună s-a săpat o groapă de fundație în 6 h. Dacă cu unul s-ar fi săpat jumătate din groapă, iar apoi cu al doilea restul, atunci tot lucrul ar fi fost terminat în 12,5 h. În câte ore cu fiecare excavator aparte se putea executa acest lucru?

21. Cu două pompe ce lucau împreună s-a umplut cu petrol un vas petrolier în 5 h. Dacă puterea I pompe era de două ori mai mică, iar puterea pompei II de două ori mai mare decât cea inițială, atunci vasul petrolier ar fi fost umplut în 4 h. În câte ore cu fiecare pompă, care ar lucra separat cu puterea inițială, se poate umplea vasul cu petrol?

22. Sunt soluții de sare de 10% și de 15%. Cât trebuie de luat din fiecare soluție pentru a obține 100 g de soluție de sare cu concentrația de 12 %?

23. Sunt două soluții de sare. Concentrația primei soluții este de 0,25, iar a soluției a doua – 0,4. Cu câte kilograme mai mult trebuie de luat dintr-o soluție decât din cealaltă pentru a obține o soluție cu masa de 100 kg și concentrația de 0,37?

24. Prețul mobilei după două reduceri succesive cu $p\%$ s-a micșorat de la 12 500 grn. până la 8 000 grn. Cu câte procente s-a micșorat prețul de fiecare dată?

25. În cafeneaua pentru copii salata de fructe „Exotica”, care se compune din piersici, costă 24 grn. Care va fi prețul salatei, dacă înlocuim piersicile cu: a) prune care sunt de două ori mai ieftine decât piersicile; b) fructe care sunt de k ori mai scumpe decât piersicile? Luați în considerație, că prețul componentelor din salată alcătuiește 50 % din prețul total.

26. Cererea și propunerea unei mărfi se descriu cu ecuațiile:

$$Q_D = 750 - 23p, \quad Q_S = 150 + 97p,$$

unde Q_D este volumul cererii (mil. bucăți pe an), Q_S este volumul propunerii (mln. bucăți pe an), p – prețul mărfii, grn. Aflați volumul și prețul echilibrat al vânzării. Cum se vor schimba cererea și propunerea, dacă prețul mărfii va fi 6 grn.?

27. Pentru fabricarea producției o firmă a cumpărat utilaj de 200 000 grn. Se prevede, că termenul de exploatare al utilajului este de 10 ani și după terminarea termenului de exploatare el poate fi vândut numai ca deșeuri cu prețul de 19 700 grn. Stabiliți care va fi prețul curent al utilajului peste 2 și peste 5 ani de exploatare, dacă decontările anuale pentru amortizare rămân constante.

28. Un fermier are 600 m de plasă metalică cu care dorește să îngrădească un ocol pentru vite. Ce formă trebuie să aleagă pentru ocol, ca aria lui să fie cea mai mare?

Eficiență energetică și economisire energetică

Proiectul de învățământ Nr. 33

Calculce financiare



Aplicarea matematicii



Scopul proiectului dat constă în aceea, ca elevii în procesul activității de învățământ independente să dezvăluie însemnătatea matematicii în viața de toate zilele, de asemenea aplicarea calculcelor procentuale și a cunoștințelor statistice. Se prevede, că activitatea de proiectare va fi însoțită de alcătuirea și rezolvarea problemelor cu procente, precum și analiza și construirea diagramelor.

Elevii clasei formează grupe câte 2-3 persoane. După dorința elevilor se poate efectua activitatea individuală de proiectare. Fiecare grupă alege pentru activitatea proiectării una din temele propuse mai jos:

- 1) Matematica în profesia părinților mei.
- 2) Matematica în transport.
- 3) Matematica în gospodăria agrară.
- 4) Matematica în bucătărie.
- 5) Cum eu folosesc timpul liber.
- 6) Căror cărți eu dau prioritate.
- 7) Ce citesc în familia mea.
- 8) Sportul în familia mea.
- 9) Indexul de masă și alimentarea balansată a familiei mele.
- 10) Rețele sociale.
- 11) Internetul în familia mea – aplicarea eficientă.
- 12) În care bancă de depozitat banii pentru păstrare.
- 13) Impozitele care plătește familia mea.
- 14) Cum de economisit energia electrică.
- 15) Cât se poate economisi la folosirea rațională a aparatelor telefonice.
- 16) Apa care noi o folosim fără rost.
- 17) Folosirea apei în diferite țări ale lumii.
- 18) Avantajele și neajunsurile diferitor surse de lumină.
- 19) Avantajele și neajunsurile diferitor surse de energie.
- 20) Eficiența energetică a locuinței noastre.
- 21) Eficiența energetică a școlii noastre.
- 22) Folosirea eficientă a lotului de pământ de lângă casă.

Temele pentru activitatea de proiectare se anunță elevilor la sfârșitul sfertului al treilea. După selectarea temei de cercetare fiecare elev trebuie să prelucreze materialul obligatoriu („Calcul procentuale”), care se conține mai jos, și să selecteze cunoștințe suplimentare, care se referă la tema selectată.

Rezultatele lucrului asupra proiectului este de dorit de prezentat în formă de portfolio individual cu prezentarea proiectului la calculator în grupă. După rezultatele studierii se pot face placarde, ziare, culegeri de probleme (în formă electronică sau pe hârtie).

Apărarea proiectelor este util de petrecut la câteva ore tematice extrașcolare, invitând elevi din alte clase, învățători și părinți.

Elevilor li se recomandă independent să repete și se prelucreze materialul teoretic dat mai jos.

Calcul procentuale

Procentul este o sutime:

$$1\% = 0,01; \quad 50\% = 0,5; \quad 100\% = 1.$$

Cele mai simple probleme cu procente ați studiat mai devreme. Să ne amintim aceste tipuri de probleme și procedeele rezolvării lor.

Există trei tipuri de probleme cu procente:

1) aflarea procentelor dintr-un număr;

• p procente din numărul a : $a \cdot 0,01p$;

2) aflarea numărului după procentele lui: • numărul, ale cărui

p procente sunt egale cu b : $b : (0,01p)$;

3) aflarea raportului procentual: • raportul procen-

tual a lui a și b : $(a : b) \cdot 100\%$.

Examinăm exemple de aceste probleme.

Exemplu 1. Trebuie arat un ogor, aria căruia este egală cu 300 ha. În prima zi tractoriștii au executat 40 % din sarcină. Câte hectare ei au arat în prima zi?

Exemplu 2. În prima zi tractoriștii au arat 120 ha, ce alcătuiesc 40 % din ogor. Aflați aria ogorului întreg.

Exemplu 3. Trebuie arat un ogor cu aria de 300 ha. În prima zi tractoriștii au arat 120 ha. Câte procente din tot ogorul au arat ei în prima zi?

Încercați să rezolvați fiecare problemă prin câteva procedee, înlocuind 40 % cu fracția 0,4 sau $\frac{2}{5}$.

Astfel de probleme este comod de le rezolvat prin *procedeele proporției*. Rezolvarea problemelor poate fi prezentată așa:

$$(1) \quad 300 \text{ ha} - 100\%, \quad \frac{300}{x} = \frac{100}{40}, \quad x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120 \text{ (ha)}.$$

$$x \text{ ha} - 40\%.$$

$$(2) \quad 120 \text{ ha} - 40\%, \quad \frac{120}{x} = \frac{40}{100}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300 \text{ (ha)}.$$

$$x \text{ ha} - 100\%.$$

$$(3) \quad 300 \text{ ha} - 100\%, \quad \frac{300}{120} = \frac{100}{x}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40 (\%).$$

$$120 \text{ ha} - x\%.$$

În probleme mai compuse cu procente deseori se spune despre mărirea s-au micșorarea mărimii cu câteva procente. În aceste cazuri trebuie bine de priceput de la ce se iau

procentele. De exemplu, când se spune că salariul s-a mărit cu 10 %, atunci se subînțelege că el s-a mărit cu 10 % de la salariul precedent. Dacă valoarea x este mai mare decât y cu p %, atunci valoarea y este mai mică decât x , dar nu cu p %. Măririi de 2 ori îi corespunde mărirea cu 100 %, iar micșorării de 2 ori – micșorarea cu 50 % (fig. 118). Prețul mărfii teoretic poate să se mărească cu un număr arbitrar de procente, dar să se micșoreze, de exemplu, cu 120 % nu poate.

Examinăm încă o problemă cu procente.

Exemplu 4. După ce s-au uscat 55 t de grâu cu umiditatea de 16 % s-au obținut 50 t. Aflați procentul umidității grâului uscat.

Rezolvare. Grâul conținea la început $0,16 \cdot 55 = 8,8$ (t) de apă.

Apa care s-a evaporat este de 5 t ($55 - 50 = 5$).

Apa care a rămas în grâu $8,8 - 5 = 3,8$ (t).

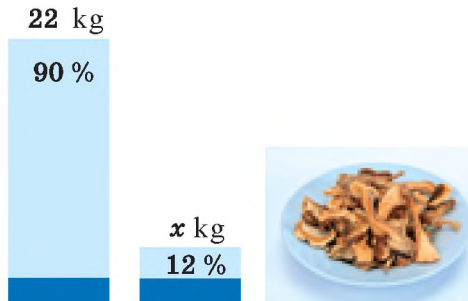
Deci, procentul umidității grâului uscat este $3,8 : 50 = 0,076 = 7,6$ %.

Răspuns. 7,6 %.

Problema poate fi rezolvată și altfel, de exemplu, compunând ecuația:

$$0,16 \cdot 55 - 0,01x \cdot 50 = 5.$$

Exemplu 5. Ciupercile proaspete conțin 90 % de apă, iar cele uscate – 12 %. Câte ciuperci uscate se vor obține din 22 kg proaspete?



Rezolvare. Fie că vom obține x kg de ciuperci uscate. În ele 88 % din masă va fi fără apă, adică $0,88x$. În ciupercile proaspete 10 % din masă este fără apă, adică 2,2 kg. Masa fără apă a ciupercilor proaspete și a celor uscate sunt egale, de unde obținem ecuația:

$$0,88x = 2,2; x = 2,5.$$

Răspuns. 2,5 kg.

Exemplu 6. Din două soluții de sare cu concentrația de 10 % și de 15 % trebuie de alcătuit 40 g de soluție cu concentrația de 12 %. Câte grame din fiecare soluție trebuie de luat?

Rezolvare. Construim și completăm tabelul, notând masa totală a primei soluții prin x , a soluției a doua – prin y .

Soluția	Masa totală.g	Conținutul sării, %	Masa sării. g
I	x	10	$0,10x$
II	y	15	$0,15y$

II	y	15	$0,15y$
III (alcătuită)	40	12	4,8

După valorile din colonițele «Masa totală» și «Masa sării» alcătuim sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0,10x + 0,15y = 4,8, \end{cases} \text{ de unde } x = 24, y = 16.$$

Răspuns. Din prima soluție trebuie de luat 24 g, din a doua – 10 g.

Contabilii, lucrătorii financiari foarte des trebuie să rezolve probleme cu procente. Examinăm exemple legate cu calculul banilor care le revin investitorilor (deponenților).

E vorba de **dobândă simplă** dacă calculul procentelor se face numai pentru *suma investită* inițial.

De exemplu, la începutul anului deponentul depune pe contul bancar suma P sub r procente anuale. Într-un an el obține suma P_1 , care este egală cu depunerea P plus procente calculate $\left(\frac{Pr}{100}\right)$, sau $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Peste doi sau trei ani suma de pe cont va alcătui:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ i } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

În mod analog se reprezintă suma P_n pe care o va primi deponentul peste n ani:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right), \quad (1)$$

unde P este suma depozitului inițial, P_n este suma depozitului peste n ani.

Calculul după schema procentelor simple se aplică, de regulă, în operațiile financiare de scurtă durată, când după fiecare interval de calcul deponentului i se plătește procentele.

În contractele financiare și credit de lungă durată mai des se aplică **dobândă compusă**. Ele se calculează nu numai pentru suma inițială, dar și pentru procentele calculate mai devreme. În acest caz se spune că are loc *capitalizarea procentelor*.

Presupunem că deponentul a depus în banca de economii 1 000 grn. sub 9 % anuale. Acesta este *capitalul inițial*. Peste 1 an banca va calcula în plus deponentului 90 grn. de **bani din procente** (9 % din 1 000 grn.). După aceasta pe contul deponentului vor fi 1 090 grn.; deoarece $1\,000(1 + 0,09) = 1\,090$. În anul al doilea banii de la procente se vor calcula acum 9 % din 1 090 grn.; **capitalul acumulat** al deponentului după 2 ani va fi egal cu $1\,000(1 + 0,09)^2$ grn. Este clar, că după n ani acest capital va alcătui $1\,000(1 + 0,09)^n$ grn.

Deci, capitalul inițial depus la banca de economii sub $r\%$ anuale peste n ani s-a transformat în capital acumulat:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Aceasta este **formula dobânzii compuse**. Ea este una din formulele fundamentale ale calculului financiar.

Exemplu 7. Un deponent a depus în bancă 200 000 grn. sub 7 % anuale. Câți bani de la procente va primi peste 5 ani?

Rezolvare. Să aplicăm formula procentelor compuse $P_n = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$. În cazul dat $r = 7$, $n = 5$.

Deci, $P_5 = P(1,07)^5$. Pentru $P = 200\ 000$ avem:

$$P_5 = 200\ 000 \cdot (1,07)^5 = 280\ 510.$$

În comparație cu capitalul inițial:

$$280\ 510 - 200\ 000 = 80\ 510.$$

Răspuns. 80 510.

Factorul $\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$, care asigură creșterea sumei de bani se numește **factor multiplu**. Valoarea lui se calculează pentru diferite valori r și n care se introduc în tabele speciale.

Selectați problemele care se referă la tema de cercetare și rezolvați-le. Compu-neți probleme proprii pe tema proiectului selectat.

1. Salariul unui funcționar este de 4 000 grn. În anul nou îi promit să-l mărească cu 20 %. Care va fi salariul funcționarului?

2. La pregătirea saramurei pentru conservarea castraveților trebuie 0,75 kg de sare la o căldare de apă (12 kg). Exprimați în procente concentrația soluției.

3. Din 1050 boabe de grâu 1000 de boabe au răsărit. Ce procent de încolțire au semințele?

4. O bancă deservește 50 000 de clienți: 21 000 persoane juridice, iar restul fizice. Ce procent alcătuiesc: a) persoanele juridice; b) persoanele fizice?

5. Aria suprafeței Terrei alcătuiește 510,1 mln km², din ei 149,2 mln km² ocupă uscatul. Câte procente din aria Terrei este acoperită cu apă?

6. Un tractorist trebuia să are 25 ha, dar a arat 27 ha. Cu câte procente el a executat sarcina? Cu câte procente el a supraîmplinit sarcina?

7. Din lapte se obțin 10 % de cașcaval. Cât lapte trebuie pentru a pregăti 20 kg de cașcaval?

8. Din sfecla de zahăr se obțin 12 % de zahăr. Câtă sfeclă trebuie de prelucrat pentru a obține 1 t de zahăr?

9. Într-o carte sunt cu 20 % mai puține pagini decât în a doua. Cu câte procente sunt mai multe pagini în cartea a doua decât în prima?

10. Care era prețul mărfii până la reevaluare, dacă după mărirea ei cu 20 % această marfă costă 450 grn.?

11. Prețul unei mărfi s-a micșorat prima dată cu 10 %, iar apoi încă o dată cu 10 %. Cu câte procente s-a schimbat prețul după două reevaluări?

12. Prețul unui automobil la început s-a mărit cu 20 %, iar apoi s-a micșorat cu 20 %. Cum s-a schimbat prețul automobilului după aceste două reevaluări?

13. În două rezervoare se conțin 140 l de benzină. Dacă din primul rezervor 12,5 % din benzină de turnat în al doilea, atunci în ambele rezervoare va fi aceeași cantitate de benzină. Câți litri de benzină sunt în fiecare rezervor?

14. O uzină a mărit producerea în primul an cu 20 %, iar în al doilea – cu 25 %. Cum s-a mărit producerea uzinei în acești doi ani?

15. Volumul lucrărilor la o construcție s-a mărit cu 50 %, iar productivitatea muncii – cu 20 %. Cum s-a schimbat numărul muncitorilor?

16. În 18 kg de soluție de acid cu concentrația de 10 % s-au turnat 2 kg de apă. Determinați concentrația în procente a soluției obținute.

17. Câtă soluție de sare cu concentrația de 10 % și de 20 % trebuie de amestecat pentru a obține 1 kg de soluție cu concentrația de 12 %?

18. Câte kilograme de soluție de 7 % trebuie de turnat în 5 kg de soluție de 5 % ca ea să fie de 6 %?

19. Câtă apă dulce trebuie de turnat în 100 kg de apă de mare, care conține 5 % de sare, ca concentrația sării în ea să fie egală cu 1,5 %?

20. Alama este un aliaj din 60 % de cupru și 40 % de zinc. Cât cupru și zinc trebuie topit pentru a obține 500 t de alamă?

21. Bronzul este un aliaj din cupru și plumb. Câte procente de cupru sunt într-un lingou de bronz care conține 17 kg de cupru și 3 kg de plumb?

22. Câtă apă trebuie de turnat în 10 kg de soluție de sare cu concentrația de 5 % pentru a obține o soluție cu concentrația de 3 %?

23. Câtă soluție de sare cu concentrația de 2 % trebuie de amestecat cu soluție de sare cu concentrația de 10 % pentru a obține 800 g de soluție cu concentrația de 7 %?

24. Cât aur cu titlul 375 trebuie de topit împreună cu 30 g de aur cu titlul 750 pentru a obține un aliaj de aur cu titlul 500?

25. Din lapte cu grăsimea de 5 % se produce cașcaval cu grăsimea de 15,5 %, iar zerul separat are grăsimea de 0,5 %. Cât cașcaval se obține din 100 kg de lapte?

26. 65 % din aria primului lan sunt semărate cu secară. Pe lanul al doilea 45 % din arie s-au rezervat pentru secară. Se știe că pe ambele lanuri cu secară sunt semărate 53 % din aria totală. Ce parte alcătuiește primul lan din aria totală însemăntată?

27. Din lapte se obțin 20 % de smântână, iar din smântână – 25 % de unt. Cât lapte trebuie pentru a obține 10 kg de unt?

28. Minereul conține 60 % de fier. Din el s-a topit fontă care conține 98 % de fier. Din câte tone de minereu se vor topi 1 000 t de fontă?

29. Ciupercile proaspete conțin 90 % de apă, iar cele uscate – 12 %. Câte ciuperci uscate se vor primi din 44 kg proaspete?

30. Umiditatea ciupercilor proaspete era egală cu 99 %. După puțină uscare umiditatea lor s-a micșorat până la 98 %. Cum s-a schimbat masa ciupercilor?

31. O firmă a luat în bancă un credit de 250 000 grn. pe 5 ani sub 3 % simple. Determinați: a) câte grivne va restitui firma peste 5 ani băncii; b) ce venit va obține banca?

32. Un întreprinzător a depozitat într-o bancă 15 000 grn. sub 5 % compuse. Care va fi suma depozitului lui peste 5 ani?

33. Unei fabrici i s-a dat credit 50 000 grn. pe 6 luni sub 8 % anuale. Ce sumă fabrica trebuie să restituie băncii peste jumătate de an?

34. Pentru un depozit cu mărimea de 90 000 grn. pe un termen de 5 ani o bancă calculează 18 % dobândă. Care sumă va fi pe cont la sfârșitul termenului, dacă calculele dobânzii se vor efectua după schema procentelor compuse: a) în fiecare jumătate de an; b) în fiecare cvartal?

În problemele 35–36 examinați diferite condiții de calcul ale procentelor.

35. Un deponent a depus în bancă 200 000 grn. sub 17 % anuale. Ce dobândă va avea peste doi ani?

36. În ce condiție capitalul depus în bancă peste doi ani se va mări cu 44 %?

Probleme și exerciții pentru repetare

Numere și operații cu ele

Efectuați operațiile (871, 872).

871. a) $40\,784 + 846 - (13\,843 + 787)$;

b) $(52 - 36 + 320 - 96) : 4$.

872. a) $12,54 : (44,8 - 38,2) + 5,4 \cdot 1,5$;

b) $507,24 : 36 + 0,8(21,7 - 15,8)$.

Aflați valoarea expresiilor (873, 874)..

873. a) $\left(2\frac{3}{4} - 2\frac{3}{8} - 0,3\right) : 6$;

b) $\left(5\frac{9}{25} - 2,36\right) : \left(3\frac{4}{5} + 0,2\right)$.

874. a) $\frac{2}{3}(0,3 - 0,5 : 4) : 1,75 - \frac{1}{6}$;

b) $2\frac{1}{6} : 13 + \left(3,25 + 2\frac{1}{6}\right) : 2\frac{3}{5}$.

Calculați (875, 876).

875. a) $\frac{47^2 - 41^2}{28^2 - 16^2}$; b) $\frac{57^2 - 42^2}{29^2 - 26^2}$; c) $\frac{51^2 - 12^2}{90^2 - 9^2}$; d) $\frac{61^2 - 11^2}{36^2 - 24^2}$.

876. a) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;

b) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$.

Calculați valorile expresiilor (877 – 881).

877. a) $\sqrt{64 \cdot 900}$;

b) $\sqrt{25 \cdot 196}$;

c) $\sqrt{49 \cdot 676}$.

878. a) $\sqrt{0,01 \cdot 121}$;

b) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$;

c) $\sqrt{0,09 \cdot 441}$.

879. a) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

b) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$;

c) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

880. a) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15}$;

b) $\sqrt{15 \cdot 21 \cdot 35}$;

c) $\sqrt{20 \cdot 28 \cdot 35}$.

881. a) $\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{10}{49}}$;

b) $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{35}{27}}$;

c) $\sqrt{1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{7}{10}}$.

Calculați produsele (882, 883).

882. a) $\sqrt{44,1} \cdot \sqrt{12,1}$;

b) $\sqrt{28,9} \cdot \sqrt{32,4}$.

883. a) $\sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{80}{135}}$;

b) $\sqrt{8\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Divizibilitatea numerelor. Raporturi și proporții

884. Scrieți toate numere prime mai mari decât 15 și mai mici decât 35.
885. Scrieți toate numere x compuse, care satisfac condiția $21 < x < 31$.
886. Adăugați la numărul 278 din stânga o cifră astfel, ca numărul de patru cifre să se dividă cu 9.
887. Descompuneți în factori primi numerele: a) 240; b) 350.
888. Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor: a) 18 și 32; b) 42 și 105; c) 60, 80 și 140.
889. De câte ori CMMDC a numerelor 36 și 48 este mai mic decât CMMMC al lor?
890. Descompunând în factori primi numerele 140, 175 și 210, aflați:
 a) CMMDC (140, 175), CMMDC (140, 210), CMMDC (140, 175, 210);
 b) CMMMC (140, 175), CMMMC (175, 210), CMMMC (140, 175, 210);
 c) suma tuturor divizorilor primi ai numărului 210;
 d) suma tuturor divizorilor numărului 175.
891. Folosind cifrele 1, 2, 3 scrieți toate numerele de trei cifre, în care fiecare cifră se întâlnește numai o dată. Câte numere din ele sunt pare, impare, divizibile cu 3, 6, 9?
892. Aflați suma numerelor mai mici decât 20 și reciproc prime cu numărul 20.
893. Care din numerele mai mici decât 40 sunt reciproc prime cu numărul 60?
894. Aflați cinci numere naturale pare divizibile cu 7.
895. Oare poate suma a patru numere naturale consecutive să fie număr prim?
896. Aduceți la o formă mai simplă raporturile:

a) $20 : 60$; b) $0,4 : 1,2$; c) $1 : 0,125$; d) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; f) $1\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$.

897. Scrieți câteva proporții, alcătuite din numerele 2, 4, 3 și 1,5.

898. Aflați termenul necunoscut al proporțiilor

a) $x : 3 = 7 : 6$; c) $11 : 1001 = 0,3 : x$; e) $\frac{18}{x} = \frac{1,2}{5}$;

b) $1,2 : 5 = x : 15$; d) $\frac{x}{7} = \frac{2}{3,5}$; f) $9 = \frac{16,2}{x}$.

Expresii întregi

Exprimați expresiile în formă de polinom (899, 900).

899. a) $(0,4a^2 - 5ab)^2$;

c) $(x^2y^2 - 1)^2$;

b) $(6,5xy + 8y^2)^2$;

d) $(2 + a^6b^4)^2$.

900. a) $(-x + y^2)^2$;

c) $(-2a^2 + 3y^3)^2$;

e) $(-0,1xy + 5)^2$;

b) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^5\right)^2$;

d) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0,2n\right)^2$;

f) $(-6x^2y - 0,5y)^2$.

901. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$;

c) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;

b) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$;

d) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Descompuneți în factori polinoamele (902, 903).

902. a) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$;

c) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;

b) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;

d) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$.

903. a) $a^2 - b^2 - a + b$;

c) $4a^2 - 9 - 2a - 3$;

b) $x + y + x^2 - y^2$;

d) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

904. Reprezentați în formă de produs:

a) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$;

c) $x^2 - y^2 + 8y - 16$;

b) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;

d) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

905. Reprezentați în formă de produs a trei factori:

a) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$;

c) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$;

b) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;

d) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Expresii raționale

906. Ce valori ale variabilei sunt admisibile pentru fracții?

a) $\frac{a+2}{a(3-a)}$;

b) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$;

c) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

Simplificați fracțiile:

907. a) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$;

b) $\frac{x^2y(2-x)^7}{(xy^2(2-x))^6}$;

c) $\frac{(3+c)^5}{(c^2+6c+9)^4}$;

d) $\frac{(a^2-1)^3}{(a-1)^5}$.

Aduceți la forma cea mai simplă expresiile (908 -- 911)

908. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2} + \frac{9x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

909. $\frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-2y}{2x-y} + \frac{6x-3y}{2x-y} + \frac{x-2y}{2x-y}$.

910. a) $\frac{1}{m} - \frac{5}{4m}$;

b) $\frac{a}{2x} - \frac{4a}{x}$;

c) $\frac{1}{0,5c} - \frac{2}{c}$.

911. a) $\frac{1}{3ax^2} + \frac{2}{5az^2}$;

b) $\frac{4m}{3p^2x} - \frac{1}{5m^2x}$;

c) $\frac{4}{a} - \frac{3}{2ac^2x}$.

Efectuați împărțirea și înmulțirea fracțiilor (912 --915).

$$912. \text{ a) } \frac{2ax}{3c^2} : \frac{4ax^2}{9c^3}; \quad \text{b) } \frac{a^3c^2}{5xy} : \frac{2a^2c^3}{3x^2y}; \quad \text{c) } \frac{12mn^3}{5ac^2} : \frac{3mn^2}{10a^2}.$$

$$913. \text{ a) } \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a+3b}{4a-4b}; \quad \text{b) } \frac{5-5a}{(1+a)^2} : \frac{10-10a^2}{3+3a}.$$

$$914. \text{ a) } \left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{4a} \right) \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1 \right); \quad \text{b) } \left(\frac{a^2b^{-3}}{6c} \right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-5}}{9c} \right)^{-2}.$$

$$915. \frac{m^3 - mn^2}{m^2 + n^2} \cdot \left(\frac{n}{m^3 - m^2n + mn^2} + \frac{m-2n}{m^3 + n^3} \right).$$

Expresii iraționale

Aduceți la forma cea mai simplă expresiile (916 -- 922).

$$916. \text{ a) } 2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x}; \quad \text{c) } \sqrt{27x} + 2\sqrt{12x} - 5\sqrt{3x};$$

$$\text{b) } \sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81}; \quad \text{d) } \sqrt{18a} - \sqrt{50a} + \sqrt{8a}.$$

$$917. \text{ a) } (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2); \quad \text{c) } (\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3);$$

$$\text{b) } (\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{x}); \quad \text{d) } (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

$$918. \text{ a) } \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)+2\sqrt{a}; \quad \text{b) } (3-2\sqrt{x})\sqrt{x}-3\sqrt{x}.$$

$$919. \text{ a) } \sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})+\sqrt{ax}; \quad \text{b) } \sqrt{xy}-\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$$

$$920. \text{ a) } \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}; \quad \text{c) } \frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}.$$

$$921. \text{ a) } \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}; \quad \text{c) } \frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}.$$

$$922. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}} + \frac{1}{x-x\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{y-1}.$$

Ecuatii și sisteme de ecuații

Rezolvați ecuațiile (923 -- 929).

$$923. \text{ a) } 7x - 39 = 2(x + 3) + 6 - 2x + 5;$$

$$\text{b) } 3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(2 - 3x).$$

924. a) $5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103$;

b) $8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69$.

925. a) $7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23$;

b) $5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19$.

926. a) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

b) $x^2 - 8x - 20 = 0$;

c) $3y^2 - 2y - 8 = 0$;

d) $0,25x^2 - 2x + 3 = 0$.

927. a) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x-1}{x-5} = 2$;

b) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1-2x}{x-2} + 4$;

c) $\frac{x-1}{x+4} - 2 = \frac{1-x}{x-4}$;

d) $\frac{2x-1}{2x+4} = \frac{1-2x}{2x-4} + 2$.

928. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

929. a) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;

b) $5y^4 + 7y^2 - 12 = 0$.

Rezolvați sistemele de ecuații (930 -- 932).

930. a)
$$\begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14. \end{cases}$$

931. a)
$$\begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 11; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14. \end{cases}$$

932. a)
$$\begin{cases} \frac{5+y}{3} - \frac{3x+4y}{4} = 3x+1, \\ \frac{7x+2}{3} + \frac{4x-3}{2} + \frac{11}{6} = 1-3x; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y-7}{2} - \frac{3-4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}$$

933. Rezolvați sistemele de ecuații prin procedeul substituției:

a)
$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$$

934. Rezolvați sistemele de ecuații prin procedeul adunării algebrice:

a)
$$\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

935. Rezolvați sistemele de ecuații prin procedeul înlocuirii variabilelor:

a)
$$\begin{cases} 5(x+y) + 2xy = -19, \\ x+y+3xy = -35; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy + x + y = -11, \\ x^2y + y^2x = 30. \end{cases}$$

Probleme pentru compunerea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații

936. Pe două arii erau în total 990 t de grâu. Câte chintale de grâu erau pe fiecare din ele, dacă pe prima erau cu 20 % mai mult decât pe a doua?

937. Într-un magazin s-au adus 1800 kg de crupe de două calități. După ce s-a vândut 60 % crupe categoria 1 și 70 % crupe categoria 2-a, în magazin au rămas 640 kg de crupe. Câte kilograme de crupe de categoria 1 și de a 2 separat s-au adus în magazin?

938. La examenul de admitere la matematică 15 % din candidați n-au rezolvat nici o problemă, 144 de candidați au rezolvat problemele cu greșeli, iar numărul celor care au rezolvat toate problemele corect se raportează la numărul celor care nu au rezolvat nici o problemă ca 5 : 3. Câți candidați au dat examenul la matematică?

939. Un tren rapid distanța de 400 km o parcurge cu o oră mai repede decât un marfar. Care este viteza fiecărui tren, dacă viteza marfarului este cu 20 km/h mai mică decât a trenului rapid?

940. Un turist după ce a parcurs 1200 km a calculat, că dacă era în drum cu 6 zile mai mult, atunci parcurgea zilnic cu 10 km mai puțin. Ce distanță parcurgea turistul zilnic?

941. Două țesătoare, lucrând împreună, pot îndeplini o comandă în 12 zile. În câte zile ar executa comanda fiecare țesătoare separat, dacă se știe, că productivitatea muncii uneia din ele este de 1,5 de ori mai mare decât productivitatea celeilalte?

942. Un tren într-un timp anumit trebuia să parcurgă 250 km. Dar după 2 h de la începutul mișcării el a fost reținut pentru 20 min și, pentru a sosi la timp la locul de destinație, el a mărit viteza cu 25 km/h. Care era viteza trenului după orar?

943. În merele «Antonivka» zahărul constituie 10,7 % din masă. Cât zahăr conțin 50 kg de mere de acestea?

944. O bancă a deservit 45 de clienți, ce alcătuiește 15 % din toți clienții. Câți clienți are banca?

945. Prețul unei mărfi la început l-a micșorat cu 10 %, apoi încă cu 5 %, și în rezultat el a devenit de 34,2 grn. Care era prețul inițial al mărfii?

946. Cu câte procente s-a mărit aria dreptunghiului, dacă lungimea s-a mărit cu 20 %, iar lățimea – cu 10 %?

947. Prețul unei mărfi a fost micșorat cu 20 %. Cu câte procente trebuie de mărit prețul, ca să obținem prețul precedent?

948. Cheltuielile pentru producerea unei mărfi alcătuiesc 1250 grn., iar prețul ei – 1750 grn. Calculați majorarea prețului în procente.

Inecuații

Rezolvați inecuațiile și reprezentați mulțimea soluțiilor lor pe dreapta de coordonate

(949, 950).

949. a) $3x - 5 < x + 7$; c) $0,3y + 1 > 3 - 0,2y$;

b) $x + 15 \geq 5x + 3$; d) $1,5z - 2 < z + 8$.

950. a) $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x - 2) > 3x - 4 \cdot (2x - 7)$;

b) $4 \cdot (3 - 2y) - 3 \cdot (4y + 5) < 5y + 3 \cdot (y - 4)$.

951. Rezolvați ecuațiile

a) $\sqrt{5 - 7}$; b) $\sqrt{1 - 2x}$; c) $\frac{1}{x} + \sqrt{3x - 1}$?

952. Rezolvați ecuațiile

a) $y = \sqrt{-2x}$; b) $y = \sqrt{3 - 7x}$; c) $y = \sqrt{x^2 + 3}$;
 d) $y = \sqrt{-x^2 - 1}$; e) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; f) $y = \frac{2}{x} - \sqrt{1 - x}$.

Rezolvați sistemele de inecuații (953, 954).

953. a)
$$\begin{cases} 5x + 1 > 6x - 18, \\ 3x - 7 < 5x - 13; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7y + 3 > 8y - 17, \\ 3y - 2 < 6y - 12. \end{cases}$$

954. a)
$$\begin{cases} 1 + 2x > \frac{9x - 2}{4}, \\ 7 + 2x > 3x - 1; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2 - 6x}{5} \geq 3x + 13, \\ 5x - 8 \leq \frac{3x + 2}{4}. \end{cases}$$

955. Rezolvați inecuațiile duble.

a) $9 < 2x + 3 < 17$;

c) $0 \leq 2 - x \leq 2$;

b) $-8 < 3x - 2 < 25$;

d) $-8 \leq 3 - 11x < 58$.

Funcții și grafice

956. Aflați $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, dacă funcția este definită prin formula:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$; b) $f(x) = 3x^3 - 2$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

957. Funcția este definită prin formula $y = \frac{6x}{1+x}$ pe mulțimea numerelor naturale ale primei zeci. Definiți-o sub formă de tabel.

958. Funcția este definită prin formula $y = 2\sqrt{x+5}$ pe mulțimea de definiție $D = \{-4; -2,75; -1; 1,25; 4; 11\}$. Definiți-o sub formă de tabel și grafic.

959. Construiți graficul funcției $y = x^2 - 4$, dacă $D = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Aflați codomeniul ei.

960. Aflați domeniul de definiție al funcțiilor:

$$\text{a) } y = 5x - 1; \quad \text{b) } y = \sqrt{x+1}; \quad \text{c) } y = \sqrt{4-x}.$$

961. Pentru care valori ale lui x , funcțiile date au cea mai mică valoare::

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2 - 6x + 9; & \text{c) } y = 4x^2 - 12x - 3; \\ \text{b) } y = x^2 + 4x + 7; & \text{d) } y = 4x^2 - 4x + 1? \end{array}$$

962. Aflați cea mai mare valoare a funcțiilor:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 3 - (x - 2)^2; & \text{c) } y = 6x - x^2 - 10; \\ \text{b) } y = -0,25(x + 5)^2; & \text{d) } y = -5x^2 + 4x + 1. \end{array}$$

963. Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axa

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2 + 10x - 11; & \text{c) } y = -2x^2 + 7x - 3; \\ \text{b) } y = 2x^2 + 3x - 9; & \text{d) } y = -2x(x + 3). \end{array}$$

964. Construiți parabola prin procedeul separării pătratului binomului:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2 + 4x + 5; & \text{c) } y = 1 + 4x - x^2; \\ \text{b) } y = x^2 - 6x + 5; & \text{d) } y = 4x^2 - 4x + 5. \end{array}$$

Construiți graficul funcției (965, 966).

$$\begin{array}{ll} \text{965. a) } y = (x + 2)^2 - 3; & \text{c) } y = 2(x + 1)^2 - 1; \\ \text{b) } y = (x - 1)^2 + 3; & \text{d) } y = 0,5(x - 2)^2 - 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{966. a) } y = 3x^2 + 3x - 1; & \text{c) } y = -x^2 + x - 3; \\ \text{b) } y = 2x^2 - 4x + 5; & \text{d) } y = -2x^2 + 3x + 2. \end{array}$$

Rezolvați inecuațiile de gradul al doilea (967 – 973).

$$\begin{array}{ll} \text{967. a) } x^2 + 2x > 0; & \text{b) } x^2 - x \geq 0. \\ \text{968. a) } x^2 - 3x + 2 > 0; & \text{b) } x^2 + 5x + 6 < 0. \\ \text{969. a) } 3x^2 - x - 4 \geq 0; & \text{b) } 5x^2 - 2x - 3 > 0. \\ \text{970. a) } -x^2 + 2x - 1 < 0; & \text{b) } -x^2 - 2x - 5 > 0. \\ \text{971. a) } (x - 3)(x + 5) > 0; & \text{b) } (x + 2)(x + 7) < 0. \\ \text{972. a) } (2x + 1)(x + 1) > 0; & \text{b) } (3x - 2)(2x + 3) \geq 0. \\ \text{973. a) } (x - 1)(2 - x) > 0; & \text{b) } (3 + x)(x + 7) < 0. \end{array}$$

974. Rezolvați inecuațiile:

$$\text{a) } \frac{x+3}{x-7} > 0; \quad \text{b) } \frac{x}{x+2} > 0; \quad \text{c) } \frac{2+x}{x+3} < 0; \quad \text{d) } \frac{3-x}{x} < 0.$$

Șiruri numerice

975. Scrieți primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice cu termenul al n -lea definit prin formula:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = 2(n + 1); & \text{c) } y_n = n^3 + 3n - (-1)^n; & \text{e) } c_n = 2n - n^2; \\ \text{b) } x_n = 6 : n; & \text{d) } b_n = 1 + n^2; & \text{f) } z_n = 1 + (-1)^n. \end{array}$$

976. Șirul este definit prin formula $a_n = 2n^2 + 3$. Aflați :

$$\text{a) } a_3; \quad \text{b) } a_6; \quad \text{c) } a_{15}; \quad \text{d) } a_{100}.$$

977. Aflați termenii al șaptelea, al zecelea și al douăzeci și cincilea al șirului cu termenul al n -lea definit prin formula:

$$\text{a) } c_n = (1 - n)^2; \quad \text{b) } c_n = 350 + n; \quad \text{c) } c_n = 2n - (-1)^n.$$

978. Scrieți primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice în care:

$$\text{a) } a_1 = 17, d = 2;$$

$$\text{c) } a_1 = -\frac{1}{4}, \frac{1}{4};$$

$$\text{b) } a_1 = 0,5, d = 10;$$

$$\text{d) } a_1 = 6, d = 0.$$

979. Sunt dați primul termen a_1 și rația q ai progresiei aritmetice. Aflați suma S_n a primilor n termeni, dacă:

$$\text{a) } a_1 = 5, d = 3, n = 31;$$

$$\text{c) } a_1 = -\frac{3}{2}, d = \frac{1}{2}, n = 35;$$

$$\text{b) } a_1 = 14,5, d = 0,7, n = 26;$$

$$\text{d) } a_1 = 111, d = -\frac{2}{5}, n = 56.$$

980. Suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 56, iar suma ultimilor patru – cu 112. Aflați numărul termenilor progresiei, dacă primul termen este egal cu 11.

981. Suma primului termen și cu al cincilea ai progresiei aritmetice crescătoare este egală cu 14, produsul termenului al doilea cu al patrulea este egal cu 45. Câți termeni ai progresiei trebuie luați, pentru a obține în sumă 24?

982. Sunt date două progresii aritmetice. Primul și al cincilea termeni ai primei progresii sunt egali respectiv cu 7 și -5 . Primul termen al progresiei a doua este egal cu 0, iar ultimul – cu 3,5. Aflați suma termenilor progresiei a doua, dacă se știe că a treia parte din termenii ambelor progresii sunt egali între ei.

983. În progresia geometrică $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Aflați b_1 , q și b_5 .

984. În progresia geometrică $b_4 = 72$, $b_6 = 18$. Aflați b_1 , q .

985. Scrieți progresia geometrică compusă din șase termeni, dacă suma primilor trei termeni este egală cu 168, iar suma ultimilor trei – cu 21.

986. În progresia geometrică crescătoare suma primului termen și a ultimului este egală cu 66, produsul termenului al doilea cu penultimul – cu 128, iar suma tuturor termenilor este egală cu 126. Câți termeni sunt în progresie?

987. *Problema lui Dgemiș al-Cași.* Într-o livadă primul a rupt o rodie, al doilea – două, iar fiecare următorul – cu o rodie mai mult. Apoi toți, cine au rupt rodii, le-au împărțit între ei egal și fiecare a obținut câte 6 rodii. Câți oameni au rupt rodii?

988. *Problemă indiană din vechime.* Un drumeț în prima zi parcurge două unități de drum, iar în fiecare din următoarele zile cu 3 unități mai mult decât în cea precedentă. Alt drumeț parcurge în prima zi trei unități de drum, iar în fiecare următoarea – cu 2 unități mai mult. Când primul îl va ajunge pe al doilea, dacă ei au plecat în același timp dintr-un loc și într-o direcție?

989. Șirul b_1, b_2, b_3, b_4 este o progresie geometrică. Oare sunt progresii geometrice șirurile:

a) $5b_1, 5b_2, 5b_3, 5b_4, \dots$;

c) $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5, \dots$;

b) $b_1 + 5, b_2 + 5, b_3 + 5, b_4 + 5, \dots$;

d) $\frac{5}{b_1}, \frac{5}{b_2}, \frac{5}{b_3}, \frac{5}{b_4}, \dots$?

Probleme și exerciții de o complexitate sporită

990. Ce este mai mare $\sqrt{14} + \sqrt{6}$ sau $2\sqrt{3} + \sqrt{7}$?

991. Demonstrați inegalitatea $4 < \sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} < 5$.

992. Demonstrați, că pentru orice valori a, b, c :

a) $2a^2 + b^2 + c^2 > 2a(b + c)$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + 2b + 3c - 7)$.

993. Demonstrați, că pentru orice valori x, y :

a) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$;

b) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4xy + 5 > 0$.

994. Demonstrați, că pentru orice valoare a :

a) $a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1 \geq 0$;

b) $a^4 - 3a^2 - 2a + 5 > 0$.

995. Demonstrați, că pentru orice valori a, b, c, d :

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 4abcd$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$.

996. Demonstrați:

a) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$, dacă $x + y = 1$;

b) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$, dacă $x + 2y = 1$.

Rezolvați inecuațiile (997 -- 999)

997. a) $\frac{x^2 + 4}{x - 4} < x$;

b) $\frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + 4x - 4} < 1$.

998. a) $\frac{4x}{3 - x} < x - 1$;

b) $\frac{x + 4}{x + 1} > 2 - x$.

999. a) $(x + 3)^3(x + 5)(x - 2) < 0$;

b) $(8 - x)^5(x + 8)^2(x + 4) \leq 0$.

1000. Demonstrați că inecuațiile $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} > 1$ și $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} > 2$ au aceleași mulțimi de soluții.

Construiți graficul funcțiilor (1001–1002).

1001. a) $y = 3 - |x|$; b) $y = \frac{1}{|x|}$; c) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

1002. a) $y = \frac{x}{|x|}$; b) $y = x|x|$; c) $y = \frac{|x|}{|x-3|}$.

1003. Construiți graficul ecuațiilor:

a) $x^2 + xy = 0$; c) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;
b) $(x + 1)(y - 3) = 0$; d) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$.

1004. Scrieți printr-o formulă mai simplă funcția:

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2x} + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2x} + 2}.$$

Construiți graficul ei.

Construiți graficul funcțiilor (1005–1007).

1005. a) $y = |2x - 3|$; b) $y = 2|x| - 3$.

1006. a) $y = 2|x^2 - 3|$; b) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

1007. a) $y = |2x^2 - 6|x| + 5|$; b) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

1008. Câte soluții are ecuația $|x^2 - 6x + 5| = a$, dacă a este egal cu: -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ?

1009. Rezolvați inecuațiile:

a) $|x - 1| + |x - 5| \geq 0$; b) $|x - 1| + |x - 5| < 3$.

1010. *Problemă grecească din vechime.* Demonstrați, că în progresia aritmetică cu un număr par de termeni suma termenilor unei jumătăți este mai mare decât suma restului de termeni cu un număr multiplu pătratului jumătății de termeni.

1011. *Problemă din vechime.* Unui ostaș i s-a plătit o recompensă: pentru prima rană – 1 c., pentru a doua – 2c., pentru a treia – 4 c. ș.a.m.d., în total 655 rub. 35 c. Câte răni a avut acel ostaș?

1012. *Problemă cahineză din vechime.* Un cal de trap și o mârtoagă aleargă din Cianiani spre cnezatul Ți, care se află la 3000 li de la Cianiani. În prima zi calul de trap alergând parcurge 193 li, iar în fiecare zi următoare cu 13 li mai mult decât în cea precedentă. Mârtoaga în prima zi a parcurs alergând 97 li, iar în fiecare celelalte cu jumătate de li mai puțin decât în cea precedentă. Trăpașul a ajuns până la Ți și s-a întors înapoi. Peste câte zile calul a întâlnit mârtoaga?

1013. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice. Aflați raportul catetelor acestui triunghi.

1014. Aflați astfel de numere x, y, z ca șirul $2, x, y, z, 9$ să fie o progresie aritmetică.

1015. Aflați suma numerelor naturale mai mici decât 1000, care:

- a) se divid cu 7;
- b) sunt reciproc simple cu numărul 7;
- c) se divid cu 3 și nu se divid cu 6.

1016. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt primii n termeni ai progresiei geometrice cu rația q . Aflați suma:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots + a_n^n.$$

1017. q, q^2, q^3, q^4, \dots formează o progresie geometrică infinită. Aflați suma $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots$.

1018. Aflați progresia geometrică infinită, dacă suma termenilor ei este egală cu 4, iar suma cuburilor termenilor ei este 192.

1019. Termenii al doilea, primul și al treilea ai progresiei aritmetice sunt termeni succesivi ai progresiei geometrice. Aflați rația ei.

1020. a, b, c sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice. Demonstrați, că numerele $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ tot sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice.

1021. Scrieți formula termenului al n -lea pentru șirurile:

- a) 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... ; b) -1, 2, -3, 4, -5,

1022. Aflați sumele:

- a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1)$;
- b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n - 1)$.

1023. Aflați numărul natural, care este egal cu suma tuturor numerelor naturale precedente.

1024. În care progresie aritmetică suma primilor n termeni este egală cu $2n^2 + n$?

1025. Problema lui Newton. Un comerciant anual mărea capitalul cu a treia parte, micșorat cu 100 de lire sterline, care anual el le cheltuia pentru întreținerea familiei. Peste trei ani capitalul lui s-a dublat. Câți bani avea el la început?

1026. Între numerele 7 și 35 plasați 6 astfel de numere, ca toate 8 numere să formeze o progresie aritmetică.

1027. Scrieți termenul al n -lea al șirului 3, 6, 11, 18, ... , ale cărui diferențe succesive dintre termenii vecini formează o progresie aritmetică.

1028. Rezolvați ecuația

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+2}{x} + \dots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 3,$$

în care termenii din partea stângă formează o progresie aritmetică.

1029. Găsiți termenii comuni ai progresiilor aritmetice

1, 4, 7, ... și 6, 11, 16, ...

Oare este adevărat, că șirul termenilor lor comuni este o progresie aritmetică?

1030. Demonstrați, că pentru fiecare număr natural se realizează egalitatea:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2; \\ \text{b) } & 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1). \end{aligned}$$

1031. *Problema lui Al-Cași.* Demonstrați, că pentru orice valoare naturală a lui n are loc egalitatea:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

1032. *Problema lui Fermat.* Demonstrați, că

$$5 \cdot (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (n+2) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

1033. Aflați sumele:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}; \\ & \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

1034. Din orașul A spre satul B a plecat un pieton, în același timp din B spre A a plecat un motociclist. Întâlnind pietonul, motociclistul l-a luat și s-a întors spre B , și, aducând pietonul în sat, imediat a plecat spre oraș. În rezultat motociclistul s-a aflat în drum de 2,5 ori mai mult timp decât prevedea. De câte ori mai puțin timp a cheltuit pietonul în drum până în sat mulțumită ajutorului acordat de motociclist (fig. 148)?

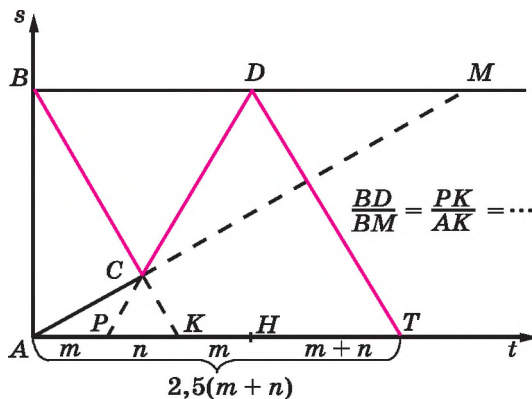


Fig. 148

Teste pentru antrenament

Varianta 1

Selectați UN răspuns, care după părerea voastră, este corect și introduceți litera respectivă în tabela răspunsurilor.

1. Care din numerele date nu este divizor al numărului 231?

- | | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|---|---|
| A | 11 | B | 7 | C | 13 | D | 3 |
|---|----|---|---|---|----|---|---|

2. Care fracție este regulată?

- | | | | | | | | |
|---|-------------------|---|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|
| A | $\frac{121}{112}$ | B | $\frac{21}{12}$ | C | $\frac{12}{12}$ | D | $\frac{11}{12}$ |
|---|-------------------|---|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|

3. Reprezentați în formă de polinom expresia $(2x + 1)(2x + 1)$.

- | | | | | | | | |
|---|--------------|---|------------|---|-----------------|---|-----------------|
| A | $(2x + 1)^2$ | B | $4x^2 + 1$ | C | $4x^2 + 4x + 1$ | D | $4x^2 + 2x + 1$ |
|---|--------------|---|------------|---|-----------------|---|-----------------|

4. Calculați $|\sqrt{3} - 2^5|$.

- | | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|---|-----|
| A | -5 | B | 5 | C | 27 | D | -27 |
|---|----|---|---|---|----|---|-----|

5. Graficul funcției $y = x^{-1} - 1$ intersectează axa absciselor în punctul ...

- | | | | | | | | |
|---|--------|---|---------|---|--------|---|---------|
| A | (0; 1) | B | (0; -1) | C | (1; 0) | D | (-1; 0) |
|---|--------|---|---------|---|--------|---|---------|

6. Aflați termenul al cincilea al șirului, definit prin formula $a_n = 3n - 1$.

- | | | | | | | | |
|---|-----|---|----|---|----|---|-----|
| A | -14 | B | 12 | C | 14 | D | -12 |
|---|-----|---|----|---|----|---|-----|

7. Cărui interval îi aparține soluția ecuației $0,4x = 9$?

- | | | | | | | | |
|---|---------------|---|--------|---|---------|---|----------|
| A | $[-0,4; 0,4]$ | B | (4; 9] | C | (9; 40] | D | (40; 90) |
|---|---------------|---|--------|---|---------|---|----------|

8. Aflați termenul necunoscut al proporției $2,5 : 3 = x : 1,2$.

- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|---|------|
| A | 1 | B | 6 | C | 10 | D | 12,5 |
|---|---|---|---|---|----|---|------|

9. Aflați numărul, dacă 15% din el alcătuiesc 150.

- | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|------|---|-----|
| A | 100 | B | 225 | C | 1000 | D | 150 |
|---|-----|---|-----|---|------|---|-----|

10. Calculați $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{0,6}$.

- | | | | | | | | |
|---|------|---|-----|---|------|---|------|
| A | -3,6 | B | 4,4 | C | -4,4 | D | 4,04 |
|---|------|---|-----|---|------|---|------|

Rezolvați sarcinile și dați răspuns la fiecare.

11. Parcul dendrologic național „Sofiivca”, care este situat la periferia orașului Umani, a fost fondat în a. 1796 de graful Potoțki. În a. 1802 construirea parcului a fost terminată definitiv și graful l-a dăruit soției sale Sofia. Câți ani a durat construcția parcului?

12. Aflați domeniul de definiție al funcției $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$.

13. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 3x + y = 13. \end{cases}$

14. Construiți graficul funcției $y = x^2 - 4x$.

Rezolvarea problemelor 15, 16 trebuie prezentată cu argumentarea deplină.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$.

16. Rezolvați inecuația $\frac{8-3x}{3x^2-2x-16} \leq 1$.

Varianta 2

Selectați UN răspuns, care după părerea voastră este corect și introduceți litera respectivă în tabela răspunsurilor.

1. Calculați valoarea expresiei $5 - 3 \cdot 7$.

A

B

C

D

2. Aflați 20% din numărul 144.

A

B

C

D

3. Rotunjiți până la sutimi numărul 1234,9876.

A

B

C

D

4. Suma soluțiilor ecuației $2x^2 - 7x + 3 = 0$ este egală cu ...

A

B

C

D

5. Graficul funcției $y = -2x + 6$ intersectează axa absciselor în punctul ...

- A** (0; 6) **B** (3; 0) **C** (-3; 0) **D** (6; 0)

6. Aflați cubul monomului $-2x^2y$.

- A** $-8x^6y$ **B** $-8x^6y^3$ **C** $8x^6y$ **D** $-8x^5y^3$

7. Câte soluții întregi are inecuația $x^2 < 4$.

- A** 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2

8. Numărul $\sqrt{3}$ aparține intervalului ...

- A** [2; 3] **B** [3; ∞) **C** $(-\infty; \sqrt{3})$ **D** $(-3; \infty)$

9. Descompuneți în factori expresia $x^2 - 18x + 81$.

- A** $(x - 18)x$ **C** $(x - 9)(x - 9)$
B $(x - 9)(x + 9)$ **D** $(x + 9)^2$

10. Calculați cu exactitatea până la sutimi 25 : 15.

- A** 1,6 **B** 1,7 **C** 1,67 **D** 1,66

Rezolvați sarcinile și dați răspuns la fiecare.

11. Care din funcțiile $g(x) = x^4 + 1$ și $f(x) = x^5 + 2$ este pară?

12. Descompuneți în factori polinomul $x^3 + 2x^2 + x$.

13. Rezolvați ecuația $(x - 5)(2x + 1) - 2x(x - 7) = 1 - x^2$.

14. Construiți graficul funcției $y = \sqrt{x - 2}$.

Rezolvarea problemelor 15, 16 trebuie prezentată cu argumentarea deplină.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+2}{1-a^3}$.

16. Rezolvați sistemul de inecuații $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 \geq 0, \\ (3 - x)(1 - 2x) \leq 3. \end{cases}$

Cunoștințe din clasele precedente

Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., care se folosesc la numărare, se numesc *naturale*. Cel mai mic număr natural este 1, cel mai mare număr natural nu există.

Cifrele 0, 2, 4, 6, 8 se numesc *pare*, iar toate celelalte – *impare*.

La 2 se divid acele și numai acele numere, care se termină cu cifre pare. Numerele care se divid cu 2 se numesc *pare*, iar celelalte – *impare*.

Cu 5 se divid acele și numai acele numere, care se termină cu cifra 5 sau 0.

Cu 10 se divid acele și numai acele numere, care se termină cu cifra 0.

Cu 3 se divid acele și numai acele numere, suma cifrelor cărora se divide cu 3.

Cu 9 se divid acele și numai acele numere, suma cifrelor cărora se divide cu 9.

N o t ă. Spunând „suma cifrelor”, se are în vedere suma numerelor de o cifră, cu care este scris numărul dat.

Dacă numărul a se divide cu m , atunci numărul a se numește *multiplul numărului m* , iar m – *divizorul numărului a* . De exemplu, 5 – divizorul numărului 35, iar 35 – multiplul numărului 5.

Numărul 35 are patru divizori: 1, 5, 7 și 35.

Numărul 5 are o mulțime de multipli: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Numărul, care are numai doi divizori – unitatea și el însuși, se numește *prim*. Cel mai mic număr prim – 2, cel mai mare nu există. Șirul numerelor prime:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... infinit.

Numărul natural, care are mai mulți decât doi divizori, se numește *compus*. Numere compuse sunt o mulțime: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... Numărul 1 nu-i nici prim, nici compus.

Fiecare număr compus se poate descompune în factori primi. De exemplu:

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Numerele 18 și 81 au trei divizori comuni: 1, 3 și 9. Numerele 81 și 1001 au numai un divizor comun: 1.

Cel mai mare divizor comun (CMMDC) a câtorva numere este cel mai mare dintre divizorii comuni ai acestor numere. Pentru a afla CMMDC al câtorva numere, trebuie fiecare din ele să descompunem în factori primi și de înmulțit factorii primi comuni, luați la puterea cea mai mică la care se găsesc.

Cel mai mic multiplu comun (CMMMC) al câtorva numere se numește cel mai mic număr care se divide cu fiecare din numerele date. Pentru a afla CMMMC al câtorva numere, trebuie să le descompunem în factori primi și la descompunerea unui număr să scriem acei factori, care în ea lipsesc, factorii de luat la cel mai mare exponent la care se găsesc. Să aflăm, de exemplu, CMMDC și CMMMC al numerelor 20, 60 și 90.

20	2	60	2	90	2
10	2	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

$$\text{CMMDC}(20; 60; 90) = 2 \cdot 5 = 10,$$

$$\text{CMMM}(20; 60; 90) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180.$$

Dacă CMDC a două sau câteva numere este egal cu 1, atunci aceste numere se numesc *prime între ele*. De exemplu, numerele 8 și 9 sau 4, 7 și 25 sunt prime între ele.

NUMERE RAȚIONALE

Numerele, care se deosebesc numai cu semnul, se numesc *opuse*. De exemplu, numărul -7 este opus numărului 7 și invers. Numerele opuse celor naturale, se numesc *întregi negative*. Numerele naturale, întregi negative și zero formează împreună *numere întregi*. Numerele naturale se numesc de asemenea numere *întregi pozitive*.

Negative sunt nu numai numerele întregi, dar și fracționare, de exemplu:

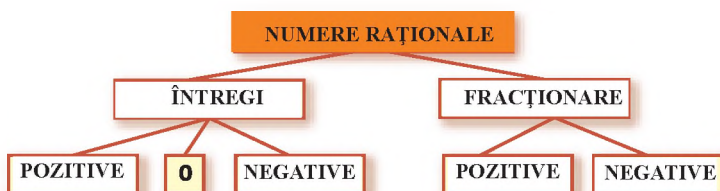
$$-2,5, -\frac{7}{8}, -3\frac{2}{5}.$$

Câtul de la împărțirea numerelor naturale a și b se poate scrie în formă de fracție ordinară $\frac{a}{b}$ linia fracționară înlocuiește semnul împărțirii. *Numărătorul* a și *numitorul* b se numesc *termenii fracției*.

Fracția se numește *regulată*, dacă numărătorul ei este mai mic decât numitorul. Dacă numărătorul fracției este mai mare decât numitorul sau egal cu numitorul, atunci ea se numește *neregulată*. Valoarea fracției neregulate nu-i mai mică decât 1, iar a celei regulate – mai mică decât 1.

Proprietatea fundamentală a fracției. Valoarea fracției nu se schimbă, dacă numărătorul și numitorul ei de înmulțit sau de împărțit la unul și același număr natural.

Folosind această proprietate, fracția se poate simplifica. Numerele întregi și fracționare (pozitive și negative) împreună se numesc numere raționale. Corelația dintre aceste tipuri de numere este indicată pe schemă.



Mulțimea numerelor naturale este o parte (submulțime) a mulțimii numerelor întregi, iar mulțimea numerelor întregi – o parte (submulțime) a mulțimii numerelor raționale. Pe dreapta de coordonate fiecărui număr rațional îi corespunde un singur punct.

Numerele pozitive (întregi și fracționare) și zeroul nu sunt numere negative.

Modulul numărului care nu e negativ este egal cu însuși numărul; modulul numărului negativ este egal cu numărul opus lui. De exemplu:

$$|3,7| = 3,7; \quad |-12| = 12; \quad |0| = 0; \quad \left| -\frac{2}{15} \right| = \frac{2}{15}.$$

Din două numere raționale *mai mic* se consideră acel, care pe dreapta de coordonate corespunde punctului situat mai la stânga. De aceea fiecare număr negativ este mai mic decât fiecare număr, care nu-i negativ. Din două numere negative mai mic se consideră acela, modulul cărui este mai mare. De exemplu:

$$-12 < 0; \quad -12 < 7; \quad -12 < -9.$$

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

Câtul de la împărțirea a două numere se numește de asemenea raportul lor:

$$3 : 7, \quad 0,5 : 0,3.$$

Proprietatea fundamentală a raportului. Valoarea raportului nu se schimbă, dacă ambii termeni ai lui îi vom înmulți sau împărți la unul și același număr, diferit de zero. De aceea, de exemplu, valorile rapoartelor $300 : 200$ și $3 : 2$ sunt egale.

Raportul numerelor fracționare totdeauna poate fi înlocuit cu raportul numerelor întregi. Pentru aceasta este suficient de înmulțit ambii termeni ai raportului cu multiplul comun al numitorilor lor. De exemplu,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Fiecare fracție ordinară este raportul numărătorului ei la numitor:

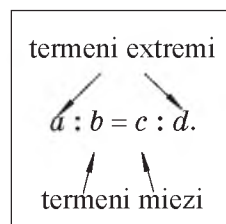
$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Egalitatea a două rapoarte se numește *proporție*. Exemple de proporții:

$$45 : 15 = 21 : 7; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; \quad x : 3 = 20 : 30.$$

Numerele care formează proporția se numesc *termenii* ei (miezi (mijlocii) și extremi).

Proprietatea fundamentală a proporției. Dacă proporția este justă, atunci produsul termenilor extremi ai ei este egal cu produsul miezilor. Deci, dacă



$$a : b = c : d, \text{ atunci } ad = bc.$$

NUMERE REALE

Numerele întregi și fracționare, pozitive, negative și zeroul formează împreună mulțimea *numerelor raționale*. Fiecare număr rațional poate fi reprezentat sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, unde m este număr întreg, iar n este natural.

Fiecare număr rațional poate fi reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită periodică. Și fiecare fracție zecimală infinită periodică reprezintă un oarecare număr rațional.

Exemple. $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$; $-\frac{13}{11} = -1,181818 \dots$.

Numerele, care reprezintă fracțiile zecimale infinite neperiodice, se numesc *iraționale*.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{2} = 1,4142136 \dots$, $\pi = 3,1415926 \dots$

Numerele iraționale împreună cu cele raționale formează mulțimea *numerelor reale*. Mulțimile numerelor naturale, întregi, raționale și reale se notează respectiv prin litere **N, Z, Q, R**.

Numerele reale se pot aduna, scădea, înmulți, ridica la putere și împărți (la numere diferite de 0). La adunarea și înmulțirea numerelor reale arbitrare sunt adevărate legile comutativă, asociativă și distributivă:

$$a + b = b + a, ab = ba, a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (bc) = (ab) \cdot c, \\ (a + b)c = ac + bc.$$

La rezolvarea problemelor aplicative numerele iraționale de obicei se rotunjesc, înlăturând «cozile» lor infinite de semne zecimale. Pentru aceasta se aplică *regulile de rotunjire*. Dacă prima cifră din cele înlăturate este cifra 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci ultima cifră care rămâne nu se schimbă. Dacă prima din cele înlăturate este cifra 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci ultima cifră ce rămâne se mărește cu 1.

EXPRESII

Numerele, variabilele, de asemenea diferite înscrisuri compuse din numere sau variabile și semnele operațiilor se numesc *expresii*. Expresiile sunt *numerice* (de exemplu, $3 - 0,5 : 6$) și cu *variabile* (de exemplu, $3x, 2ab, c^2 - 3$). Expresia, care conține numai operațiile adunarea, scăderea, înmulțirea, ridicarea la o putere cu exponent întreg și împărțirea se numește *expresie rațională*. Expresia rațională, care nu conține operația împărțirii la o expresie cu variabilă se numește *expresie întregă*.

Exemple de expresii întregi: $32,5$; a ; $\frac{2}{5}x + y$; $0,3(x - z^2)$.

Două expresii întregi, ale căror valori respective sunt egale pentru orice valori ale variabilelor, se numesc *identice egale* sau *identice*. Două expresii identice egale unite cu semnul egal formează o *identitate*.

Înlocuirea unei expresii cu alta identic egală se numește *transformare identică* a expresiei date.

Cele mai simple expresii: numerele, variabilele, puterile sau produsul lor se numesc *monoame*. Exemple de monoame: $4x$, $2,5$, $-3x^2$, $-3\frac{1}{2}am^3$, $2ax \cdot 3ax^2$.

Dacă monomul conține numai un factor numeric, care stă pe primul loc și dacă fiecare variabilă se conține numai într-un factor, atunci acest monom se numește *monom de formă standard*. Factorul numeric al monomului, scris în formă standard, se numește *coeficientul* monomului.

Suma a câteva monoame se numește *polinom*. Pentru comoditate fiecare monom se consideră tot polinom.

Termeni asemenea ai polinomului se numesc acei termeni care se deosebesc numai prin coeficienți sau absolut nu se deosebesc unul de altul. Polinomul este scris în formă standard, dacă toți termenii lui sunt monoame de forma standard și printre ei nu sunt asemenea.

A descompune polinomul în factori înseamnă a-l înlocui cu produsul a câteva polinoame, identic egal cu polinomul dat. Cele mai simple procedee de descompunere a polinomului în factori sunt: scoaterea factorului comun în afara parantezelor, metoda grupării, aplicarea formulelor înmulțirii prescurtate.

Exemple.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$

$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$

$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Câtul de la împărțirea expresiei A la expresia B poate fi scris în formă de *fracție* $\frac{A}{B}$.

Fracția are sens numai atunci, când numitorul este diferit de zero. *Fracție algebrică* se numește fracția, numărătorul și numitorul căreia sunt polinoame. Pentru orice valori a ,

b și $c \neq 0$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{ac}{bc}$ (*proprietatea fundamentală a fracției*). Pe baza acestei proprietăți

fracțiile se pot simplifica sau aduce la numitorul comun. De exemplu,

$$\frac{3a - 6x}{a^2 - 4x^2} = \frac{3(a - 2x)}{(a - 2x)(a + 2x)} = \frac{3}{a + 2x}.$$

Operațiile cu orice fracții se efectuează la fel ca fracțiile ordinare. Dacă numitorii nu sunt egali cu 0, atunci totdeauna

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{cb}.$$

expresia fracționară $\frac{1}{a^n}$ se scrie și sub forma a^{-n} .

Rădăcină pătrată din numărul a se numește numărul, pătratul căruia este egal cu a . De exemplu, numărul 16 are două rădăcini pătrate: 4 și -4 . Valoarea care nu este negativă a rădăcinii pătrate din numărul a se numește *valoarea aritmetică a rădăcinii* și se notează cu simbolul \sqrt{a} .

ECUAȚII

Ecuția este o egalitate, care conține numere necunoscute notate prin litere. Numerele care satisfac ecuația se numesc *soluțiile* ei (sau *rădăcini*). A rezolva ecuația înseamnă a afla toate soluțiile ei sau a demonstra că ele nu există.

Două ecuații se numesc *echivalente* dacă fiecare din ele are unele și aceleași soluții. Ecuațiile care nu au soluții se consideră tot echivalente între ele.

Ecuația de forma $ax = b$, unde a și b sunt numere arbitrare, se numește *ecuație liniară* cu variabila x . Dacă $a \neq 0$ ecuația se numește *ecuație de gradul întâi* cu o variabilă. Fiecare ecuație de gradul întâi $ax = b$ are o singură soluție $x = b/a$. Ecuația liniară poate avea o soluție, o infinitate sau nici una.

De exemplu, ecuația $12x = 6$ are o soluție; $0x = 0$ are o infinitate de soluții; $x = \frac{b}{a}$ nu are nici o soluție.

Ecuație de gradul doi se numește ecuația de formă $ax^2 + bx + c = 0$, unde x este variabilă, a, b, c sunt numere date și $a \neq 0$. Expresia $D = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației de gradul doi. Dacă $D > 0$, atunci ecuația dată are două soluții:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Dacă $D = 0$, atunci aceste soluții sunt egale. Pentru $D < 0$ ecuația nu are soluții reale.

Teorema lui Viète. Dacă ecuația de gradul al doilea redusă $x^2 + px + q = 0$ are două soluții, atunci suma lor este egală cu $-p$, iar produsul este egal cu q .

Teorema inversă teoremei lui Viète. Dacă suma și produsul numerelor m și n sunt egale respectiv cu $-p$ și q , atunci m și n sunt soluțiile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Ecuațiile fracționare se pot rezolva, folosind faptul că fracția este egală 0, dacă numărătorul ei este egal cu 0, iar numitorul diferit de zero. Dar la început se pot înmulți ambele părți ale ecuației cu numitorul comun al tuturor fracțiilor, de rezolvat ecuația obținută și de exclus acele soluții care transformă numitorul în zero.

SISTEME DE ECUAȚII

Ecuția de formă $ax + by = c$, unde a, b, c sunt numere date se numește *ecuație liniară cu două variabile* x și y . Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, ea se numește *ecuație de gradul întâi cu două variabile*.

Fiecare pereche de numere care satisface ecuația cu două variabile se numește *soluție* a acestei ecuații. De exemplu, perechea de numere $(3; -2)$ este soluția ecuației $5x + 3y = 9$. Fiecare ecuație de gradul întâi cu două

variabile are o infinitate de soluții. În sistemul cartezian de coordonate fiecărei ecuații de gradul întâi cu două variabile îi corespunde o dreaptă care este graficul acestei ecuații. Pe figura 149 este reprezentat graficul ecuației $2x - y = 3$. Coordonatele fiecărui punct al acestui grafic satisfac ecuația dată. Coordonatele oricărui alt punct nu satisfac ecuația.

Dacă trebuie de aflat soluțiile a două sau mai multe ecuații, se spune că aceste ecuații formează *un sistem de ecuații*. *Soluție a sistemului de ecuații* se numește soluția comună a tuturor ecuațiilor.

Fiecarui sistem de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute în sistemul cartezian de coordonate îi corespunde o pereche de drepte. Deoarece două drepte din plan se pot intersecta, coincide sau să fie paralele, atunci și sistemul de ecuații corespunzător poate avea o soluție, o infinitate de soluții sau nici o soluție.

De rezolvat sistemul de ecuații cu două variabile se poate prin procedeele: substituției, adunării sau grafic.

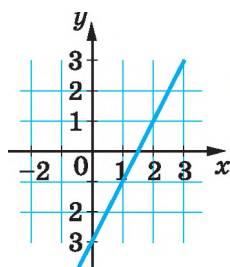
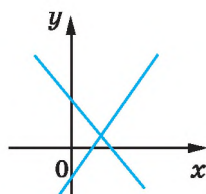


Fig. 149

Sistemul de ecuații liniare

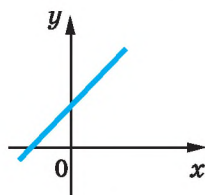
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



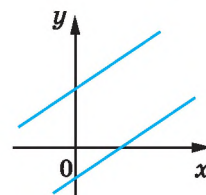
Are o soluție

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Are o infinitate de soluții

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Nu are nici o soluție

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA PROBLEME ȘI EXERCITII

9. a) $m > n$. 10. a) $y < x$. 17. a) $2x + 3 > 3x - 2$. 19. c) $y(-8) > y(0)$. 23. a) Da; b) nu.
28. a) $5m + 1 < 19 - 3m$. 30. Prima; de 2019 ori. 33. $x = 1,5$. 34. $x = 1,5$. 37. 2. 39. a)
 $b > a$. 40. a) $x > y$. 44. b) $a = b$. 45. a) 186,5; c)

-0,5. 46. a) 1; c) -2; e) 10. 47. b) 5; d) 12. 48. a) c^2 ; b) 1; f) 0. 49. b) 0. 50. a) $6\sqrt{2}$; c)
8; e) 2. 51. a) -5 și -3; b) -2 și 9; f) -0,25. 52. a) (-2; 5). 55. 20%. 59. a) Pozitiv. 65. a)
 $a > b$. 69. b) $1,5a > 1,5b$. 70. b) Negativ. 71. c) $5 + x < 6 + z$. 72. a) $10 < 24$. 74. b) $-0,1m$
 $> -0,1n$; d) $1 - m > 1 - n$; e) $5m - 1 < 5n - 1$. 75. b) $x^2 > xy$. 76. c) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$. 78.

$\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$. 81. a) Da. 83. 1 - C, 2 - E, 3 - D, 4 - A. 86. a) Nu. 89. b) $(3x + 1)(2x$
 $- 1)$; d) $(c + 2\sqrt{2})(c - \sqrt{2})$. 94. a) 0. 97. a) $3 < x < 12$. 99. a) $7 < n < 8$.

103. a) $6 < x - y < 8$. 104. a) $15 < xy < 28$. 105. a) $2 < \frac{x}{y} < 3$. 106. a) $-3 < 2x$
 $+ 3 < 13$; c) $-3 < 2 - x < 5$. 108. c) $3,58 \cdot 10^6 < V < 3,66 \cdot 10^6$. 113. e) 1. 122. a) -1
 $< x < 2$. 123. La ora 12. 125. a) (4; 2). 127. b) $x < -3$; f) R. 128. a) Nici una; f)
o mulțime. 131. a) $x > 3$; e) $y < 9$. 132. a) $x > 5$; d) $x \leq -5$. 133. c) $x > 0$; e)
 $x < 1$. 134. a) $x < 1$; c) $x > 0$; e) $z > 0,25$. 135. b) Da; d) nu. 136. a) $x > 3$; b)
 $y < 2$; c) $x \geq 5$; d) $x < -6$. 137. a) $x \leq -13$; b) $x > 1$; c) $x > 3$; d) $x \leq -2$. 138. a)
 $x > 1$; b) $x < 5$; c) $x < 3$; d) $x > 0$; e) N-are soluții. 140. b) $x > 20$. 141. a) $x \geq$
 -5 ; b) $x \geq -2,6$. 142. a) $x > 1$. 143. a) $x > 8$; b) $x < -2,5$. 144. a) $x \leq 4,2$. c) $x <$
 0 ; d) $x > -7,5$; e) $x \geq -2$; $x > 8$. 145. b) $x < 7$; c) $x < -6$; d) $x \leq 0$; g) $x > 24$.
146. a) $x < 4$; b) $x \leq 9$; c) $x > 0$. 147. a) $x > 1,8$; c) $x > -2$. 149. a) 4. 150. b) -4.
153. c) $x \geq 2$, f) $x \leq 2$. 154. a) $x > -2$; b) $x \leq 11,5$. 155. b) $x \geq 7$; c) $z \geq 0,65$.
157. a) $x > 5$. 158. a) $c > 2$; b) $z \geq 1$. 159. a) $x < 1,2$; b) $x < 17,5$; f) $x \leq 0$.
160. c) R; d) Nu are soluții. 161. b) $x < 0$, $x > 1,5$. 162. [0; 4). 163. a) $x >$
 4 ; b) [0; 1]; c) $x \geq 4$. 165. Nu mai mult decât 252,3km. 166. a) $x < -0,5$; b)
 $x \geq -1$; c) R; d) $x \leq 5,8$. 167. a) $-0,4 \leq x \leq 1$; b) $-1 < x < 1$; c) $1 < x \leq 4$; d)
 $-0,05 < x < 0,7$; e) $-0,1 < x < 0,1$; f) $-1,6 \leq x \leq 4,2$; g) $2 < x < 3$. 168. a) 3; b)
3; c) 1; d) -10. 169. a) $-5 < x < 5$; b) $-4 \leq x \leq 10$; c) $1 < x < 2$. 170. b) $-10 < x$
 < -4 ; c) $-0,2 \leq x \leq 0,6$. 171. b) Dacă $a < 0$, atunci $x \geq 0$; dacă $a = 0$, atunci $x \in$
R; dacă $a > 0$, atunci $x \leq 0$; c) dacă $a < 0,5$, atunci $x > 2a - 1$; dacă $a = 0,5$,
atunci soluții nu are; dacă $a > 0,5$, atunci $x < 2a - 1$; d) dacă $a < 0$, atunci x
 < 1 ; dacă $a = 0$, atunci soluții nu are; dacă $a > 0$, atunci $x > 1$; e) dacă $a = 0$,
atunci $x \in R$; dacă $a \neq 0$, atunci $x \leq 0$. 173. a) $1,2 \cdot 10^6$; b) $-7,5 \cdot 10^{-7}$; c) $1,764$
 $\cdot 10^{19}$; d) $8,88 \cdot 10^{13}$. 175. Cu 50 %. 177. a) (0; 2); b) (0; 1); c) (1; 5); d) $(-\infty; 3)$.
178. a) (0; 1); b) (0,5; 1); c) {2}; d) \emptyset .

188. a) $[2; 5]$ și $\{3\}$; b) $[-5; 0]$ și $[-3; 0]$; c) $[-7; 7]$ și $[-5; 5]$; d) $[-3; -1]$ și $(-2; -1)$; e) $(-2; 2)$ și \emptyset ; f) $(-\infty; \infty)$ și $[-2; 2]$. 190. a) $a > c$; b) $a < c$; c) $a > c$; d) $a < c$. 191. a) $x > 3$; b) $x \geq 3$; c) $x > 0,8$; d) $x < 3$; e) $x > 1$; f) $x \geq 10$. 192. a) $x \leq 0,2$; b) $x > -0,5$; c) $x > -0,5$; d) $x > 3$; e) $x \geq -0,6$; f) $x \geq -50$. 194. a) $x \geq 0,2$; c) $x > 6,6$; d) $x < 2,25$. 195. a) $x > 1$; b) $x < -1$. 196. a) $m < a, b < n$. 197. a) $x < a, y > c$; b) $x > a, y < c$; c) $x > a, y < c$; d) $x > a, y > c$. 198. a) $x < a < y$; b) $a < x < y$; c) $x < a < y$.

200. a) $-4 < x < 5$; b) $-9 < x < 1$. 201. a) $-1 \leq x \leq 1$; d) $-3 < x < -1$. 203. a) $(-\infty; \infty)$. 204. b) $x \geq 4$. 206. b) $R; [-13; 1)$. 209. f) $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$. 210. a) R . 219. c) 2 și 3. 221. a) $(-3; 1)$. 222. a) Soluții nu are. 224. a) (6; 8). 226. b) $(10; \infty)$. 227. c) $-0,25$. 228. a) (2; 16]. 229. a) $\{3, 4, 5, 6\}$. 230. b) $(-3; -1)$. 232. a) (1,5; 2,5). 234. b) $(-\infty; -0,4)$. 235. a) $[3; 5]$. 236. a) $0,625 < x < 0,875$. 238. a) $(-2; 7)$. 239. c) $(-5; \infty)$. 240. a) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. 241. d) $(-\infty; -9) \cup (-2; \infty)$. 242. $(-1; 1)$. 244. a) (4; 10). 247. a) Da; b) da.

248. a) $(-1; 3)$. 249. a) $(-4; 1)$; b) $[-2,5; 4,5]$. 250. a) $(\infty; 4,5) \cup (5,5; \infty)$. 251. a) (2; 3). 256. b) 19, 257. b) 200. 262. c) $a^2 + 65 - 16a = (a - 8) + 1 > 0$. 263. a) $(a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$. 264. a) Pentru fiecare număr negativ x numerele $x - 1$ și $x - 2$ sunt negative, iar produsul lor pozitiv; b) pentru x negativ numărul $x^2 + 9$ pozitiv, iar $10x$ negativ. 267. a) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,5(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2b - 2ac - 2bc) = 0,5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$. 269. b) Pătratul sumei a două numere negative este mai mare, decât suma pătratelor lor. 281. a) -2 și -1 ; b) -4 și 0 . 282. -3 și 3 . 283. 1633,4 t. 284. a) 0,8. 285. 1-B, 2 -D, 3-A, 4 - B. 288. a) Dreaptă; d) hiperbolă. 291. a) R ; e) $x \geq 2$. 296. $f(2) = 14$. 297. $f(-3) = 22$. 298. a) 8. 299. a) 12.

301. a) R ; d) $x \neq 3$ și $x \neq 4$. 302. b) b) $x \neq -1$ și $x \neq 4$; c) $x \leq 4$. 305. a) $\{7\}$; b) R . 306. Punctul A aparține. 307. Prin punctul A trece. 308. a) Aparțin punctele A și C . 309. a) (0; 0); b) (1,5; 0) și (0; 3). 311. Da. 312. Da. 313. a) $f(-2) = 11, f(-1) = 5, f(0) = 3, f(2) = 11, f(1) = 5$. 316. (2; 2). 321. a) $(-6; 0)$ și (0; 3); d) $(-2; 0)$, (2; 0) și (0; 4). 325.

$m = 20$; da. 326. 1 -A, 2 -D, 3 -G, 4 -B. 328. a) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$; [0; ∞); d) $[-5; 5]$. 329. a) $0 \leq x \leq 1$. 332. $p = 5$ un. de bani; $Q_s = Q_D = 4$ mln bucăți pe an; s-a micșorat cu 8 %. 335. b) $x > 1$. 338. a) Nu. 345. a) R ; c) $x \geq -4$; e) R . 346. a) R ; e) $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; f) R . 347. a) R și $[-1; \infty)$; d) $[0; \infty)$ și $(-\infty; 1]$; f) R și $[2; \infty)$. 349. $[-2; 5]$ și $[-5; 5,5]$. 353. a) Nu; b) da; -1 și 0 . 359. a) Crescătoare; b) descrescătoare. 363. a) R și $[4; \infty]$. 365. a) $x < 2,5$; b) $x > -4$. 366. b) $0 \leq x \leq 16$; c) $-3 \leq x \leq 0$; e) $x \leq -2$. 369. a) $(-\infty; 0]$; b) $(-\infty; 3)$. 370. a) R . 372. Nu. 375. d) Pară; e) impară. 388. a) -3 și $1,5$. 389. a) -5 și 3 . 390. a) $7,8 \cdot 10^3$; f) $4,5 \cdot 10^{-4}$. 393. a) Crescătoare. 398. a) $(a; b)$. 399. a) $(-\infty; -c)$.

410. b) De traslat cu 3 unități în direcția axei x . **414.** a) $y = (x - 2)^2 + 3$. **429.** a) 0,5. **431.** a) -6 și 2,5. **432.** a) $(x - 3)^2 + 6$; d) $(x - 0,5)^2 - 1,25$. **436.** a) (3; 0); c) (5; 2). **440.** a) (0, 0) și (2; 0). **442.** a) (0;4); c) (2; -4).

447. $m = -6, n = 14$. **450.** Nu. **452.** a) $x = 3$. **453.** a) $c = 0$; c) $c = 6$. **454.** a) -4 și 4. **463.** a) $x = 3$; b) $x = -2$. **464.** a) $y = 3$; b) $y = -1$. **466.** b) (-1; 2) și (1; 2). **467.** a) 7. **469.** $b = -6$. **471. Indicație.** Construiești un pătrat cu latura x și pe două laturi alăturate construiești dreptunghiuri cu laturile x și 3. **473.** b) $x \leq 4$. **474.** b) $-7 \leq x \leq -3$. **475.** a) Două. **481.** a) (0; 4); b) [-6; 0]. c) [-7; 1]; e) $(-\infty; -3,5] \cup [0; \infty)$. **482.** a) $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$; b) soluții nu are; c) $\{-2\}$; d) $\{-0,5\}$; f) R . **483.** a) [1; 2]; b) Soluții nu are; c) $(-\infty; 1] \cup [3; \infty)$. **484.** a) $(-\infty; 0,5] \cup [1; \infty)$; b) (2; ;4); d) (-2; 6); f) $(-\infty; 2] \cup [9; \infty)$. **485.** b) $(-\infty; 6) \cup (6; \infty)$; d) (-2,5; 1,5). **486.** a) (1; 2); b) $(-\infty; 2) \cup (2,5; \infty)$; c) Soluții nu are; f) (-7; 2). **487.** a) $(-\infty; -7] \cup [1; \infty)$; b) [3; 5]; c) (-3; 2); f) $(-\infty; 2] \cup [2; \infty)$. **490.** a) $(-\infty; 2] \cup [2; \infty)$. **491.** a) -5; -4; -3; -2; -1; 0; c) -1; 0; 1; 2; d) -2; -1; 0; 1; 2; f) $\{2\}$. **492.** a) [1; 4]; b) (-5; 6); c) (-1; 0); d) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$. **493.** a) (1,5; 2); c) $(-\infty; -0,5) \cup (1; \infty)$; d) Soluții nu are. **494.** a) (-2; 3); b) $(-\infty; -2) \cup (7; \infty)$; f) (0,25; 1,5). **495.** a) (-3; ∞); b) (1; 9); f) $(-\infty; 2) \cup (10; \infty) \setminus \{6\}$. **496.** a) $(-\infty; -7] \cup [-5; \infty)$; b) (2; 3); c) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$; d) (-8; 7). **497.** a) $(0,5; 3)$; b) [-4; 0,5]; d) (-; 5). **498.** a) [-7;1] \cup [2; ∞); b) (-5; -4) \cup (4; 5); c) (-3; 1). **499.** a) [-2; 3]; b) [-1; 1) \cup [2; 3]; c) $(-\infty; -3) \cup (-1; 4) \cup (5; \infty)$.

500. a) $\{-1\} \cup [1; 2,5]$; b) $(-\infty; -5) \cup (-2; 2) \cup (2, \infty)$; c) $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$. **501.** b) $(-\infty; 0,25) \cup [6; \infty)$. **502.** a) $(-0,2; 2) \cup (2; 0,2)$; c) (1; ∞). **503.** a) (-1; 6). **504.** a) [-1; 8]; c) $[-5; -3] \cup (-3; 1] \cup [5; \infty)$; d) [-3; 0,5]. **505.** a) $b \in [-1; 1]$; b) $b \in [9; \infty]$; c) $b \in (-\infty; 0]$. **506.** a) $m \in (-4; 4)$; b) $m \in [9; \infty)$; c) $m \in (-\infty; -4)$. **507.** a) [3; 4). **508.** a) $(-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; \infty)$. **509.** a) (-1; 0) \cup (5; 6). **511.** Trei. **512.** 10. **513.** a) a) $-5x^4y^2$. **521.** a) (0; 1), (0; 1); b) (0;0), (4; 2); c) (-3; 2). **522.** a) (3;3), (-3; -3); b) (0; 1), (1; 0); c) (4; 4), (-4; -4). **523.** a) (0;0), (1; 1); b) Sistemul nu are soluții; c) (2; 4). **524.** a) (0; -5), (3; 4), (-3; 4); b) (3; 3), (-3; -3); c) (0; 2), (-2; 0). **525.** a) (3; 0), (0; -3); b) (-1; -4), (4; 1); c) (0; -2), (4; 2). **526.** a) (6; 8), (8; -6); b) $(-1; \sqrt{3})$, $(-1; -\sqrt{3})$; c) (2; -1), (1; -2); d) (5; 3). **527.** b) (12; 16), (4; 0); c) (-3; -3), (2; 2); d) (2; 0), (0; 2). **528.** a) (13; 3); b) (3; 2), (-3; -2); c) (3; 1), (3; -1), (-3; 1), (-3; -1); d) $(\sqrt{5}; \sqrt{0})$, $(\sqrt{5}; -\sqrt{0})$, $(-\sqrt{5}; \sqrt{0})$, $(-\sqrt{5}; -\sqrt{0})$. **529.** a) (-5; -4), (-4; -5), (5; 4), (4; 5); b) (5; 3), (3,5), (-5; -3); (-3; -5); c) (2; 1), (-2; -1); d) (0; 0). **530.** a) (2; 8), (8; 2); b) 9 (12; 8). **531.** a) (8; 6), (-5; -7), b) (-5; -7), (8; 6). **532.** a) (8; 2), (-15; 25); b) (8; 2), (-40; 50). **534.** a) (2; 1), (3; 2); b) (3; 2). **535.** a) (5; 1), (8; 2); b) (8; 2), (-40; 50). **534.** a) (2; 1), (3; 2); b) (3; 2). **535.** a) (5; 1), (8; 2); b) (8; 2), (-40; 50). **534.** a) (2; 1), (3; 2); b) (3; 2). **535.** a) (5; 1), (8; 2); b) (8; 2), (-40; 50).

- (-3; -4), (-4; -3). **536.** a) (4; 4), (-4; 4); b) (-1; 1), (0; 0), (1; 1).
537. a) (1,2; -1,6), (-0,7; 4,1); b) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$; c) (3; 4), (3; -4); d) $(\sqrt{51}; -1)$,
 $(-\sqrt{51}; -1)$. **538.** a) $(4-\sqrt{10}; 4+\sqrt{10})$, $(4+\sqrt{10}; 4-\sqrt{10})$; b) (3; 6);
c) (4; 2), (4; -2); d) (3; -1), (3,5; 1). **539.** a) (3; 5); c) (5; 3), (3; 5),
(-5; -3), (-3; -5); d) (5; 1), (-5; -1). **540.** (1; 1), (1; -1); b) (1; 2), (-1; 2),
(1; -2), (-1; -2); c) (2; 2), (-2; -2); d) (3; 2), (2; 3), (-3; -2), (-2; -3).
541. a) (0; 10), (8; 2); b) (4; 6), (6; 4). **542.** a) (-6; 18), (9; 3); b) (6; 4),
(4; 6). **543.** a) (-5; -1), (5; 1); b) (3; 2), (-3; -2), (-2; 3), (2; -3);
c) (0; -2), (0; 2), (2; 0); d) (0; 1), (0; -1), $(-\frac{1}{2}; 0)$. **544.** a) (1; 1), (-2; -2);
b) (2; 1), (2; -1); c) (4; 1), (1; 4); d) (9; 4), (4; 9). **545.** a) (9; 3), (-9; -3),
 $(0; 3\sqrt{10})$, $(0; -3\sqrt{10})$; b) $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$,
 $(-4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; c) (4; 2), (2; 4), $(3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2})$, $(3+3\sqrt{2}; 3-3\sqrt{2})$;
d) (7; 2), (2; 7). **546.** a) (4; -3), (-3; 4); b) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2);
c) (1; 3), (3; 1); d) (-1; 2), (2; -1). **547.** a) (6; 2), (-6; -2); b) (1; 4), (4; 1);
c) (1; 2), (2; 1); d) (4; 12), (12; 4). **548.** a) (2; 4), (4; 2); b) (7; 5), (-5; -7);
c) (1; 2), (3; -6); d) $(3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$. **549.** b) $a = 1$ și $b = 0$ sau $a =$
 -1 ; 2 și $b = -3$; 2; c) $a = 3$ și $b = 2$ sau $a = -3$ și $b = -2$; f) $a = 3$ și $b = 0$; $a = 1$ și
 $b = -2$. **550.** a) 17; 2 un. lin.; b) ; 2 un. lin. **551.** 1 - C, 2 - A, 3 - B, 4 - E.
552. 1 a) $1,5 \cdot 10^6$ km; b) $10,8 \cdot 10^8$ km; 2) a) 1 km 715 m; b) 5 km 145 m. **553.**

$$\text{a) } \frac{x}{\text{sau } \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 9)}; \frac{-8}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 9)}. \quad \text{554. b) } \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}; \text{ c) } \frac{c + 2\sqrt{5}}{c - 2\sqrt{5}}. \quad \text{559. } -10 \text{ și } -0,9$$

- 561.** a) 23 și 21. **562.** a) 12 dm și 5 dm. **563.** 6 m și 8 m. **564.** 35 cm și 12 cm.
565. 8 cm și 4,2 cm. **566.** 15 cm și 10 cm. **567.** 3, 5 și 8 cm. **568.** 84 h și 60 h. **571.**
180 piese. **572.** 15 zile. **573.** 49 de strunguri. **574.** 32 m^3 . **575.** 36 min și 72 min.
576. 39 m, 52 m și 65 m. **577.** 300 km sau 360 km. **578.** 48 km/h. **579.** 12 km/h,
18 km/h, 24 km. **580.** 18 km/h, 2 km/h. **583.** 10 km/h. **584.** 72 km/h. **585.** 60 km/h
sau 93 km/h. **598.** a) Infinită; b) Finită.

- 600.** a) 9; b) 15. **606.** a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. **607.** a) 67; c) 4. **608.** Cu 5. **609.**
De 10 ori. **610.** $b_6 = 64$; $b_8 = 256$; $b_{10} = 1024$. **611.** Nu. **612.** $a_n = 7n - 4$. **613.** 7, 9,
11, 13, 15, ... **616.** a) 2, -4, 8, -16, 32; c) 15, 10, 5, 0, -5. **618.** $a_2 = -2$; $a_5 = 7$; a_{10}
 $= 22$. **619.** a) $n = 17$; b) $n = 16$. **620.** a) $16 \leq n \leq 51$; c) $3 \leq n \leq 4$; e) $9 \leq n \leq 97$. **621.**
a) 124; b) 79. **622.** 14. **624.** $k = 4$, $p = 3$. **625.** $a_n = (4 - n)^2$. **626.** a) $a_n = 3n - 1$; b)
 $2n$. **633.** a) Crescătoare; b) Descrescătoare. **636.** a) $a_3 = 4$. **637.** a) $a_5 = -10$. **640.** 1000
gm., 1500 gm. **642.** a) (5; 0), (1; 4); b) (-3; 4), (3; -4), (-4; 3), (4; -3). **647.** a) 7, 9,
11, 13, 15. **649.** a) $a_7 = -19$, $a_{20} = -71$; b) $a_{15} = 65$, $a_{33} = 133$. **650.** $d = 11$, $a_{10} = 102$,
 $a_{20} = 212$. **651.** $d = 5$, $a_{10} = 47$. **652.** $d = 15$; b) $d = -0,2$. **653.** a) $a_1 = 5$; b) $a_1 =$
40; d) 19. **654.** $a_1 = 5$, $a_2 = 17$, $a_{11} = 35$, $a_{21} = 65$. **655.** $d = -9$, $a_1 = 86$, $a_5 = 50$.

$a_{21} = -94$. **656.** $a_7 = 14$, $a_{20} = 7,5$. **657.** $a_{40} = 20$, $a_{41} = 20,5$. **658.** a) $a_n = 3n - 1$. **659.** a) $a_n = 5n + 2$; c) $a_n = 3n - 5,5$. **660.** a) -125 ; c) $-2,5$. **661.** a) $a_1 = 5$, $d = 10$; b) $d = -7$, $a_1 = 153$. **662.** a) 50; b) -50 ; d) 13 250. **663.** a) 2420; b) 3180; d) 4180. **664.** a) 1088; b) 1100; d) -522 ; f) 400. **665.** $a_{20} = 79$; $S_{20} = 820$. **666.** 1830. **668.** 5050. **669.** 10 000. **670.** 645 cm. **671.** 1680 gm. **672.** $a_9 = 16,1$; $a_n = 2n - 1,9$, $a_{3p} = 6p - 1,9$. **673.** c) 95. **674.** a) $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{21} = 61$, $a_{100} = 298$; d) $a_1 = 2,8$, $d = 1,2$, $a_{21} = 26,8$, $a_{100} = 121,6$. **678.** a) 7. **679.** a) 13. **680.** b) 16. **681.** 39. **682.** a) $c_1 = 2$, $d = 5$. **684.** $A_3B_3 = 7,5$ cm, $A_nB_n = 2,5n$ cm. **689.** 18 cai. **690.** a) 430; d) 300. **691.** 9900. **693.** a) 166 833. **694.** a) 2020. **695.** $a_7 = 8$. **696.** $S_{25} = 75$. **697.** $S_{27} = 54$. **698.** a) $S_{20} = 1090$. **699.** a) $a_5 = 3$.

700. $S_9 = 63$. **701.** De 90 ori. **702.** a) ≈ 314 m. **703.** Studiați progresie $a - 2d$, $a - d$, $a + d$, $a + 2d$, suma membrilor căreia 180(5 - 2). **704.** $3,5(a + b)$. **705.** a) $\frac{3}{2x+1}$; c) $\frac{c+2}{c-1}$. **706.** a) (0; 8). **707.** 1 - C, 2 - A, 3 - B, 4 - D. **714.** b) $q = 0,1$, $b_5 = 0,00001$. **715.** $b_4 = -24$, $b_7 = -192$, $bn = -3 \cdot 2n^{-1}$. **716.** a) $b_1 = 3$. **717.** d) $b_{12} = 64$. **718.** a) $b_7 = 48$; b) $b_7 = -24$. **719.** a) $b_n = 2 \cdot 3n^{-1}$. **720.** a) $n = 5$. **721.** Da. **722.** a) $S_6 = -1092$. **723.** a) 511. **724.** a) $S_6 = 5208$; c) $S_6 = 21$. **725.** a) $S_{15} = 32 767$. **727.** 4 294 967 295 sau $(2^{32} - 1)$ pfenigi. **728.** $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **731.** a) 20. **732.** a) $b_1 = 1$, $q = 3$. **737.** 1. **738.** -2048 . **739.** 3, 6, 12. **741.** ≈ 455 mm col. de mercur. **742.** Da. **745.** 27, 18, 12, 8. **746.** a) $n = 6$; b) $n = 10$. **747.** 3, 6, 12, 18 sau 18,75, 11,25, 6,75, 4,05. **748.** $-0,5$, -1 , -4 , -16 sau $-0,5$, 1, 4, 16. **749.** a) b_{12} . **750.**

$P_n = b_1^n q^{0,5n(n-1)}$. **752.** Peste 10 000 rub. **752.** $\approx 2^{72}$ bacterii. **753.** 2^{65} , această este cu mult mai mult, decât numărul oamenilor pe Pământ. **754.** a) (0; 9). **756.** 8,8 și 7,8 g/cm³. **761.** a) 3; d) $-\frac{16}{3}$. **762.** a) 1,5. **763.** $\frac{4}{3}$. **764.** a) $\frac{4}{3}$. **765.** b) $\frac{2}{3}$. **766.** a) $\frac{4}{9}$. **767.** 6 cm. **770.** a) $2 + \sqrt{2}$; c) $\frac{1}{4-\pi}$. **771.** $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. **772.** c) $\frac{24}{99}$. **773.** c) $\frac{7}{6}$. **775.** b) $\frac{1}{1+x}$. **776.** $16 + 8\sqrt{2}$. **777.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, **778.** $b_4 = \frac{4}{9}$. **779.** 1 i $\frac{1}{3}$. **780.** a) -50 ; b) -5050 . **781.** a) 40. **784.** a) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **789.** a) 3, 12, 48... **871.** a) 27 000. **873.** a) $\frac{1}{80}$. **874.** a) $-\frac{1}{15}$. **875.** a) 1.

876. a) 25. **879.** a) $3\frac{1}{4}$. **881.** a) $\frac{2}{21}$. **883.** a) $\frac{8}{15}$. **884.** 17, 19, 23, 29, 31. **885.** 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30. **888.** CMMDC (18, 32) = 2; CMMMM (18, 32) = 288. **892.** 80. **893.** Astfel de numere sunt 10. **895.** Nu. **898.** b) 3,6; f) 1,8. **901.** a) $25y^2$. **902.** a) $x(x+y)(x+2)$. **904.** $(x-y-z)(x-y+z)$. **905.** a) $(a-b)(b-2)(b+2)$. **906.** a) $a \neq 0$ și $a \neq 3$. **907.** b) $\frac{2-x}{x^4y^{11}}$; d) $\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}$. **908.** 11. **909.** 5. **911.** a)

$$\frac{5z^2}{15ax^2z^2} \quad 912. \text{ a) } \frac{3c}{2x} \dots 914. \frac{a+b}{a-b} \dots 917. \text{ a) } a + \sqrt{a} - 2. \quad 919. \text{ a) } a. \quad 922. \text{ a) } 2(a-b).$$

923. a) 8. 924. a) 3. 927. a) 25. 929. a) -2 și 2. 930. a) (2; 3). 931. a) (15; 5). 932. a) (0; 1). 933. a) (3; 0) și (0; -3). 935. a) (-3; 4) și (4; -3). 937. 1000 kg și 800 kg. 938. 240. 939. 100 km/h, 80 km/h. 940. 50 km. 941. 30 și 20 zile. 942. 75 km/h. 944. 300. 945. 40 grn. 946. 32 %. 947. 25 %. 948. 40 %. 950. a) $x > 7,25$. 954. a) $x < 6$. 955. a) $3 < x < 7$. 960. a) R; c) $x \leq 4$. 961. a) $x = 3$. 962. a) $y = 3$; d) $y = 1,8$. 963. a) (0; -11) și (1; 0). 967. a) $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$; b) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. 968. a) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$; b) (-3; -2). 969. a)

$(-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{3}; \infty\right)$. 970. a) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; b) soluții nu are. 971. a) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; b) $(-7; -2)$. 972. a) $(-\infty; -1) \cup (-0,5; \infty)$; b) $(-\infty; -\frac{3}{2}] \cup \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$. 973. a) (1; 2);

b) (-7; -3). 974. a) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. 980. 11. 981. 4. 982. 14. 985. 96, 48, 24, 12, 6, 3. 986. 6. 989. a) Da; b) Nu.

PROBLEME ȘI EXERCIȚII DE O COMPLEXITATE SPORITĂ

990. Ridicați expresiile date la pătrat. 991. Demonstrați, că $\sqrt{9 \pm 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} \pm 2$. 992. a) $2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac = (a-b)^2 + (a-c)^2$. 993. a) $x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = (x-y)(x^3 - y^3)$, dar numerele $x-y$ și $x^3 - y^3$ sunt de același semn; b) $(x-1)^2 + (x-2y)^2 + (y-2)^2 + 1 > 0$. 996. $x^2 + (1-x)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)^2$. 997.) $\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right) \cup \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$. 999.

$(-\infty; -4) \cup (8; \infty)$. 1000. Cea mai mică valoare a lui x , pentru care expresia $\sqrt{x-6}$ are valoare, este egală cu 6. Mulțimea soluțiilor fiecărei inecuații $(6; \infty)$. 1004.

$y = |x + \sqrt{2}| + |x - \sqrt{2}|$. 1008. 0, 2, 4, 3, 2; construiți graficul funcției $y = |x^2 - 6x + 5|$. 1009. a) $(-\infty; 0] \cup [6; \infty)$; b) Nu are soluții. 1012. ≈ 16 zile. 1013. 3 : 4. 1014. $x = 3\frac{3}{4}$;

$y = 5\frac{1}{2}$; $z = 7\frac{1}{4}$. 1015. a) 71071; b) 428429. 1016. $a_1^n(q^{n^2} - 1) : (q^n - 1)$. 1017. $q : (1$

$- q)^2$. 1118. 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, 1119. 1 sau -2. 1020. Demonstrați, că pentru $a + c = 2b$

diferența dintre trinoamele al treilea și al doilea este egală cu diferența dintre al doilea și primul. 1021. a) $a^n = 1,5 + (-1)^n \cdot 0,5$; b) $a^n = (-1)^n n$. 1122. a) $1; 3n(n+1)(n+2)$; b) $n^2(n+1)$. 1024. 3, 7, 11, 1025. 1480 lire sterline. 1026. 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35. 1027. $a^n = n^2 + 2$. 1028. $x = 7$. 1029. Da, aceasta este progresie aritmetică 16, 31, 46, ..., $15n + 1$, 1034. De 2 ori.

INDICE DE MATERIE

- Aprecierea valorilor 25
- Argumentul funcției 75
- Bani din procente 236
- Calculul sumelor 181
- Cifre semnificative 225
- Codomeniu funcției 75
- Coefficient 259
- Combinatorie 196
- Demonstrația inecuațiilor 60
- Discriminant 260
- Domeniu de definiție al funcției 75
- Ecuatii 260
 - de gradul al doilea 260
 - echivalente 260
 - liniare 260
- Eroare absolută 223
 - relativă 224
- Evenimente 204
 - de masă 211
 - egal posibile 204
 - elementare 204
 - reciproc incompatibile 204
- Expresii 258
 - cu variabile 258
 - identice 258
 - întregi 258
 - raționale 258
- Factorial 198
- Formula procentelor compuse 236
 - soluțiilor ecuației de gradul al doilea 260
- Frecvență 212
 - evenimentului aleatoriu 202
 - relativă 212
- Funcție 74
 - crescătoare 86
 - descrescătoare 87
 - de gradul al doilea 109
 - impară 87
 - liniară 76
 - pară 87
- Graficul ecuației 261
 - funcției 75
- Histograma 211
- Identitate 259
- Inecuații 8
 - cu necunoscute 31
 - cu variabile 9
 - de gradul al doilea 118
 - duble 24
 - echivalente 31
 - identice 31
 - liniare 33
 - nestricte 8
 - stricte 8
- Inegalități numerice 8
- Interval 32
 - cu semn constant 86
 - de creștere al funcției 87
 - de descreștere al funcției 87
 - numeric 43
- Intersecție a mulțimilor 42
 - intervalelor numerice 43
- Medie aritmetică 61
 - geometrică 61
- Mediana selecției 213
- Moda selecției 213
- Model 227
- Modelare matematică 227
- Monom 359
- Mulțime 41
 - numerelor reale 258
 - vidă 43

- Numere iraționale 258
 — raționale 256
 — reale 258
- Parabolă 111
 Polinom 259
 Probabilitate 202
 — evenimentului 202
 — — aleatoriu 202
 — — imposibil 202
 — — sigur 202
 Probleme aplicative 227
 Procente 234
 — compuse 236
 — simple 236
 Progresie aritmetică 161
 — geometrică 171
 Proporționalitate directă 75
 — inversă 76
 Proprietatea fundamentală
 a fracției 256
 — — a proporției 257
 Proprietăți ale:
 — funcțiilor 85
 — inecuațiilor numerice 17
 Rația progresiei aritmetice 221
 — — geometrice 171
 Rădăcină pătrată 260
 Rădăcinile ecuației de gradul
 al doilea 260
 Regula combinatoriei
 — a produsului 197
 — a sumei 196
 Reguli de rotunjire
 ale numerelor 258
 — numărării cifrelor 225
 Reuniune a mulțimilor 42
 — intervalelor numerice 43
 Selecție 211
 Semne zecimale 225
 — inegalității 9
 — nestricte 8
 — — stricte 8
 Sistem de ecuații 126
 — de inecuații 52
 Soluție a ecuației 260
 — inecuației 31
 — sistemului de ecuații 127
 — sistemului de inecuații 52
 Spațiul evenimentelor elementare 205
 Statistică 211
 Suma progresiei geometrice
 infinite 182
 — termenilor progresiei
 aritmetice 162
 — — — geometrice 172
 Șir 152
 — crescător 154
 — descrescător 154
 — finit 153
 — infinit 153
 Tabel al frecvențelor 212
 Tendințe centrale 212
 Teorema lui Viète 260
 Totalitate de inecuații 45
 Transformarea expresiilor
 — graficelor 98
 Valoare medie a selecției 213
 Valori aproximative 223
 — calculul 223
 Valori ale funcției 75, 85
 — cea mai mare 87
 — cea mai mică 87
 Zerourile funcției 86

CUPRINS

Stimați elevi din clasa a 9-a!	3
Cum de lucrat cu manualul	4

Capitolul 1 INECUAȚII

§1. Cunoștințe generale despre inegalități	8
§2. Proprietățile inegalităților numerice	17
§3. Inegalități duble	24
§4. Rezolvarea inecuațiilor cu o variabilă	31
§5. Reuniunea și intersecția mulțimilor. Intervale numerice	41
§6. Sisteme de inecuații cu o variabilă	52
§7. Demonstrarea inegalităților	60
<i>Sarcini pentru lucrul independent</i>	62
<i>Date istorice</i>	63
<i>Esențialul în capitol</i>	64
<i>Clarificăm realizările</i>	
<i>Sarcini în formă de test nr. 1</i>	70
<i>Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 1</i>	67

Capitolul 2 FUNCȚIA DE GRADUL DOI

§8. Funcții	74
§9. Proprietățile funcției	85
§10. Transformarea graficelor funcțiilor	98
§11. Funcția de gradul doi	109
§12. Inecuații de gradul doi	118
§13. Sisteme de ecuații de gradul doi	126
§14. Rezolvarea problemelor prin compunerea sistemelor de ecuații	136
<i>Sarcini pentru lucrul independent</i>	144
<i>Date istorice</i>	145
<i>Esențialul în capitol</i>	147
<i>Clarificăm realizările</i>	
<i>Sarcini în formă de test nr. 2</i>	148
<i>Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 2</i>	149

Capitolul 3 ȘIRURI NUMERICE

§ 20. Șir	152
§ 21. Progresie aritmetică	161
§ 22. Progresie geometrică	171
§ 23. Probleme de calcul al sumelor	181

<i>Sarcini pentru lucrul independent</i>	190
<i>Date istorice</i>	191
<i>Esențialul în capitol</i>	192
<i>Clarificăm realizările</i>	
<i>Sarcini în formă de test nr. 3</i>	193
<i>Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 3</i>	194

Capitolul 4 BAZELE COMBINATORIEI, TEORIEI PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICII

§19. Regulile principale ale combinatoriei	196
§20. Frecvență și probabilitate ale evenimentului aleatoriu	202
§21. Cunoștințe despre statistică	211
<i>Date istorice</i>	218
<i>Esențialul în capitol</i>	219
<i>Clarificăm realizările</i>	
<i>Sarcini în formă de test nr. 4</i>	220
<i>Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 4</i>	221

Anexe

Proiectul de învățământ nr. 1. Inegalități interesante.....	222
Proiectul de învățământ nr. 2. Funcțiile în jurul nostru.....	226
Proiectul de învățământ nr. 3. Aplicarea matematicii.....	233

PROBLEME ȘI EXERCIȚII PENTRU RECAPITULARE

Numere și operații cu ele.....	239
Divizibilitate a numerelor. Rapoarte și proporții.....	240
Expresii întregi.....	240
Expresii raționale.....	241
Expresii iraționale.....	242
Ecuatii și sisteme de ecuații.....	242
Probleme pentru compunerea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații.....	244
Inecuații.....	245
Funcții și grafice.....	245
Șiruri numerice.....	246
Probleme și exerciții de o complexitate ridicată	248
Teste pentru antrenament	252
Cunoștințe din clasele precedente	255
Răspunsuri și indicații la probleme și exerciții	262
Indice de materie	268

Informații despre starea manualului

№	Nume, prenume elev	An de învățământ	Starea manualului		Nota
			la început de an	la sfârșit de an	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням румунською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладачі *Лазарович Штефан Георгійович, Лазарович Георгій Штефанович*

Румунською мовою

Редактор *К.В. Даскалюк*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *М. Г. Курчул*

Формат 70x100/16.

Ум. друк. арк. 22.032. Обл.-вид. арк. 21.37 + 0.55 форзац.

Тираж 1971 пр. Зам. № 59П

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”

79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014

www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,

svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ “Патент”

88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

Inegalități

$a > b$, dacă numărul $a - b$ este pozitiv, $a < b$, dacă numărul $a - b$ este negativ

Proprietățile inegalităților numerice

Dacă $a < b$, atunci $b > a$

Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$

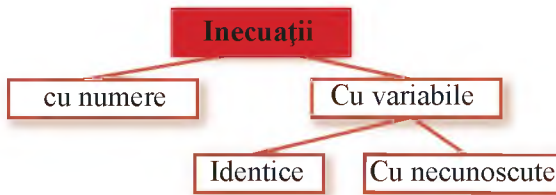
Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$


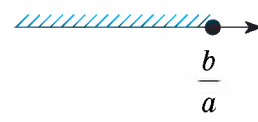

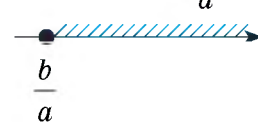
Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$

Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$

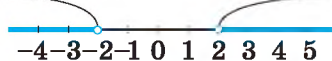
Dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$


Dacă $0 < a < b$ și $0 < c < d$, atunci $ac < bd$



$ax > b$	$ax \leq b$
<p>Dacă $a > 0$, atunci $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$</p> 	<p>Dacă $a > 0$, atunci $x \leq \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$</p> 
<p>Dacă $a < 0$, atunci $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$</p> 	<p>Dacă $a < 0$, atunci $x \geq \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$</p> 

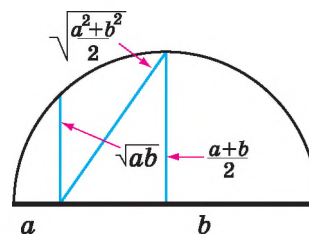
$|x| < 2$  $(-2; 2)$

$|x| > 2$  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$|x - 3| < 2$  $(1; 5)$

Dacă $0 < a < b$,

atunci $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$



Funcția de gradul al doilea

$$y = ax^2 + bx + c$$

Trinomul de gradul al doilea

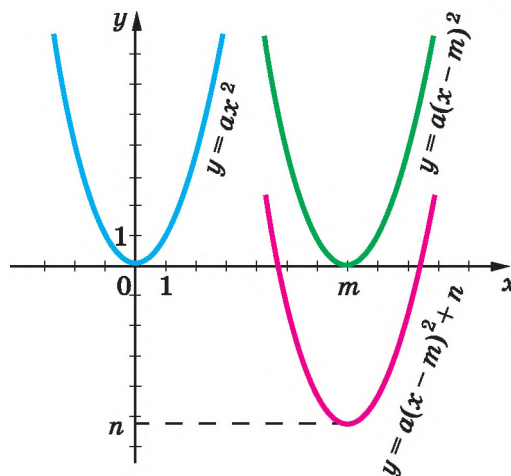
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ecuția de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0$$

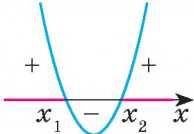
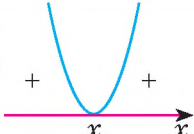
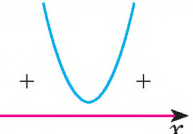
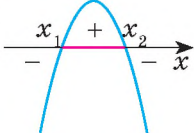
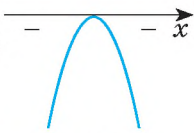
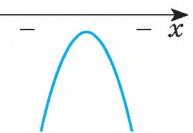
$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



Inecuația de gradul al doilea

Dacă $ax^2 + bx + c > 0$ și $D = b^2 - 4ac$, atunci:

$a > 0$ $D > 0$  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$a > 0$ $D = 0$  $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$	$a > 0$ $D < 0$  $x \in \mathbb{R}$, adică $x \in (-\infty; \infty)$
$a < 0$ $D > 0$  $x \in (x_1; x_2)$	$a < 0$ $D = 0$  Nu are soluții	$a < 0$ $D < 0$  Nu are soluții

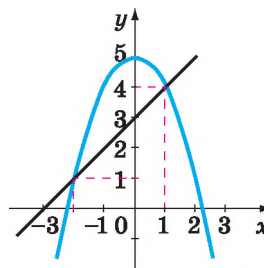
Rezolvarea grafică

a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul are două soluții:

$(-2; 1)$ și $(1; 4)$.



Șirurile:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... — numerelor naturale;

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... — numerelor pare;

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... — pătratelor numerelor naturale;

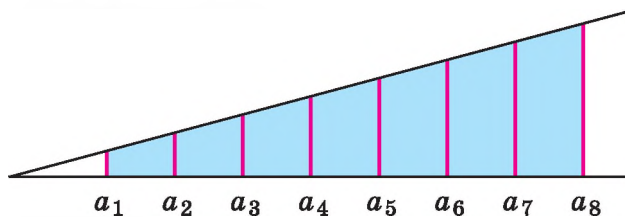
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... — numerelor prime

Progresia aritmetică: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

$$d = a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_n \text{ — rația;}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \text{ — formula termenului al } n\text{-lea;}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ — formula sumei primilor } n \text{ termeni}$$



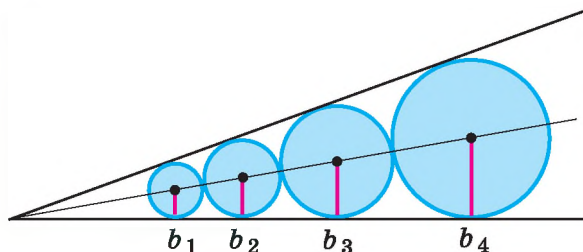
Progresia geometrică: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots$

$$q = b_2 : b_1 = b_{n+1} : b_n \text{ — rația } (q \neq 0, b_1 \neq 0);$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ — formula termenului al } n\text{-lea;}$$

$$S_n = \frac{b_1 - (b_n \cdot q)}{1 - q} \text{ — formula sumei primilor } n \text{ termeni } (q \neq 1);$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ — formula sumei termenilor pentru } |q| < 1$$



Legile operațiilor

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, \\(a + b) + c &= a + (b + c), \\ab &= ba, \\(ab)c &= a(bc), \\a(b + c) &= ab + ac,\end{aligned}$$

Proprietățile fracțiilor

$$\begin{aligned}\frac{am}{bm} &= \frac{a}{b}, \\ \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} &= \frac{a \pm b}{m}, \\ \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} &= \frac{ab}{mn}, \\ \frac{a}{m} : \frac{b}{n} &= \frac{an}{bm}\end{aligned}$$

Formulele înmulțirii prescurtate

$$\begin{aligned}1. (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & 3. a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2), \\ 2. (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2, & 4. (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3\end{aligned}$$

Proprietățile puterilor

$$\begin{aligned}a^m a^n &= a^{m+n}, \\(a^m)^n &= a^{mn}, \\(ab)^n &= a^n b^n, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}\end{aligned}$$

Proprietățile rădăcinilor

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \\ \sqrt{a^{2n}} &= |a^n|, \\ (\sqrt{a})^2 &= a, \\ \sqrt{a^2} &= |a|\end{aligned}$$

Probleme cu procente

Aflarea:

- 1) a p procente din numărul a — $a \cdot 0,01p$;
- 2) numărului, din care p procente sunt egale cu b — $b : (0,01p)$;
- 3) raportului procentual a și b — $(a : b) \cdot 100\%$.

$$\text{Formula procentelor simple: } P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100} \cdot n\right)$$

$$\text{Formula procentelor compuse: } A_n = A_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$