

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. З множини $\{13, 18, 24, 37, 48, 111\}$ виділіть підмножину парних чисел.

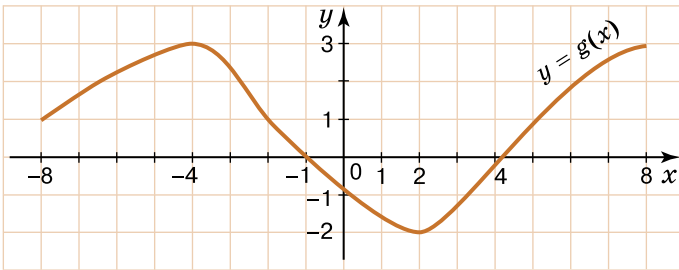
- А. $\{18, 37, 48\}$ Б. \emptyset
В. $\{18, 48, 111\}$ Г. $\{18, 24, 48\}$

2. Дано $f(x) = (x - 1)^2$. Знайдіть $f(3)$.

- А. 4 Б. 3 В. 2 Г. 1

3. На малюнку 4.26 зображено графік функції $y = g(x)$, яку визначено на проміжку $[-8; 8]$. Укажіть проміжок спадання функції.

- А. $[-4; 8]$ Б. $[-4; 2]$ В. $[-2; 3]$ Г. $[-8; 2]$



Мал. 4.26

2 4. Знайдіть переріз множин $A = \{2, 4, 6, 9\}$ і $B = \{1, 2, 4, 7\}$.

- А. $\{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ Б. \emptyset В. $\{2, 4\}$ Г. $\{2, 4, 6\}$

5. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 2x}}$.

- А. $(-\infty; 3)$ Б. $(-\infty; 3]$
В. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ Г. $(3; +\infty)$

6. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 5 - 2x$.

- А. $y = 5 + 2x$ Б. $y = \frac{1}{5 - 2x}$
В. $y = \frac{x + 5}{2}$ Г. $y = \frac{x - 5}{2}$

3 7. Яка з функцій є парною?

- А. $y = 3x^7$ Б. $y = 2x^8$ В. $y = \frac{2x}{x - 2}$ Г. $y = x^2 + x^3$

8. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } 1 \leq x < 5, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases}$ Знайдіть $f(3)$.

А. 4, 5 або 9 Б. 4 В. 5 Г. 9

9. Яка з функцій є оборотною?

А. $y = x^2, x \in [-2; 2]$ Б. $y = x^2, x \in [-1; 2]$

В. $y = x^2, x \in (-2; 1]$ Г. $y = x^2, x \in (1; 2)$

4 10. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{24}{x^2 + 3}$.

А. $[0; +\infty)$ Б. $[6; 8]$ В. $[3; 4]$ Г. $[6; +\infty)$

11. При якому значенні c найменшим значенням функції $y = 4x^2 - 8x + c$ є число 5?

А. 5 Б. 1 В. 10 Г. 9

12. Дослідіть функцію $y = |x + 3| + |x - 3|$ на парність.

А. Неможливо визначити

Б. функція парна

В. функція непарна

Г. функція ні парна, ні непарна

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 1-4

1 1. З множини $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{7}{8}, \frac{4}{3}, \frac{10}{2}, \frac{9}{19}, \frac{7}{1} \right\}$ виділіть підмножину:

1) правильних дробів;

2) неправильних дробів.

2. Для функції $f(x) = (x + 3)^2$ знайдіть:

1) $f(-2)$;

2) $f(0)$;

3) $f(-1)$;

4) $f(2)$.

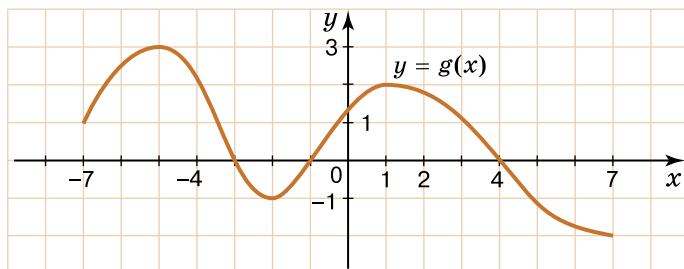
3. На малюнку 4.27 зображено графік функції $y = f(x)$, яку визначено на проміжку $[-7; 7]$. Знайдіть:

1) нулі функції;

2) проміжки знакосталості функції;

3) проміжки зростання функції;

4) проміжки спадання функції.



Мал. 4.27

- 2 4. Знайдіть об'єднання та переріз множин $A = \{1, 3, 5, 7\}$ і $B = \{3, 4, 5, 9\}$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{7}{4 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{4 - 2x}$.

6. Знайдіть функцію, обернену до:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \frac{12}{x}$.

- 3 7. Дослідіть функцію на парність:

1) $y = 3x^2 + 5x$; 2) $y = x^4 - 2x$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-x} + 2$; 2) $y = \sqrt{x - 2} + 1$.

- 4 9. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{6}{x^2 + 2}$; 2) $y = x^2 - 6x - 1$.

Додаткові завдання

- 3 10. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{якщо } x < -1, \\ 4, & \text{якщо } -1 \leq x < 2, \\ 5 - x^2, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$ Знайдіть:

1) $f(-2)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$.

- 4 11. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -2x^2 + 12x + c$ дорівнює 7?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1 1. Укажіть рівняння, що рівносильне рівнянню $4x = -8$.

А. $0x = -2$ Б. $-2x = 8$ В. $x + 3 = 5$ Г. $x - 1 = -3$

2. Розв'яжіть нерівність $-3x > -12$.

А. $(-\infty; 4]$ Б. $(-\infty; 4)$ В. $(4; +\infty)$ Г. $(-\infty; 4)$

3. Укажіть число, що є коренем многочлена $x^3 + x^2 + 4$.

А. 1 Б. 0 В. -2 Г. -1

- 2 4. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння

$$\frac{a}{x - 2a} = 3.$$

А. Якщо $a = 0$, коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{7a}{3}$;

Б. Якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{7a}{3}$;

В. $x = \frac{7a}{3}$ для будь-якого значення a ;

Г. Якщо $a = 0$, коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{5a}{3}$.

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x+1}{x-3} \leq 0$ методом інтервалів.

А. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$ Б. $(-1; 3)$

В. $[-1; 3)$ Г. $[-1; 3]$

6. Яку остачу отримаємо при діленні многочлена $x^3 + x^2 - 2x + 7$ на двочлен $x + 1$?

А. 7 Б. 9 В. 1 Г. 0.

3 7. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x-1} + \frac{x-4}{(x-1)(x+2)} = 2$.

А. -1; 1 Б. -1 В. 1 Г. коренів немає

8. Укажіть множину коренів рівняння $x^3 - 19x + 30 = 0$.

А. -5; 2; 3 Б. -5; 1; 3 В. -3; -2; 5 Г. -5; 2; 6

9. Розв'яжіть нерівність $2x \geq \frac{x+1}{2-x}$.

А. $[0,5; 1] \cup [2; +\infty)$; Б. $[0,5; 1] \cup (2; +\infty)$;

В. $(-\infty; 0,5] \cup [1; 2)$; Г. $(0,5; 1) \cup (2; +\infty)$.

4 10. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному з яких рівняння $\frac{x^2 - 6x + 4a + 5 - a^2}{7 - x} = 0$ має єдиний розв'язок.

А. 2; 6 Б. -2; 6 В. -2; 2; 6 Г. -2; 2

11. При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + 12$ ділиться на многочлен $x^2 + x - 6$?

А. $a = 1; b = 8$ Б. $a = -1; b = -8$

В. $a = 1; b = -8$ Г. $a = -1; b = 8$

12. Укажіть множину розв'язків нерівності $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \leq 0$.

А. $[-3; 1] \cup [5; +\infty)$ Б. $(-\infty; -5] \cup [-3; -1]$

В. $(-\infty; -3) \cup (1; 5)$ Г. $(-\infty; -3] \cup [1; 5]$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 5-8

1 1. Чи рівносильні рівняння:

1) $x - 3 = 7$ та $x : 2 = 5$; 2) $x + 5 = 9$ та $x \cdot 2 = 10$?

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $3x \geq 12$; 2) $-2x < 8$.

3. Чи є коренем многочлена $x^3 - 7x + 6$ число:

- 1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 2?

2 4. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{a}{4a - x} = 5$; 2) $(a - 1)x = 3$.

5. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x + 2)(x - 3) > 0$; 2) $\frac{x - 1}{x + 5} \leq 0$.

6. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$, якщо:

1) $A(x) = x^3 + x^2 + x$, $B(x) = x - 1$;

2) $A(x) = x^3 - 2x^2 + 16$, $B(x) = x + 2$.

3 7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x + 2} + \frac{x + 7}{(x + 2)(x - 3)} = 2$; 2) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$.

8. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n , де $n \geq 2$, справджується нерівність $4^n > 1 + 3n$.

4 9. Знайдіть усі значення параметра a , при кожному з яких

рівняння $\frac{x^2 - 5x + 6 - a - a^2}{x + 2} = 0$ має єдиний розв'язок.

Додаткові завдання

3 10. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $x \geq \frac{5 - x}{x + 3}$; 2) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 < 0$.

11. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n число $8^n - 1$ ділиться на 7.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 1. Раціональним чи ірраціональним є число? Якщо число раціональне, то запишіть його без знака кореня.

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{17}$; 3) $\sqrt{23}$; 4) $-\sqrt{16}$.

2. Запишіть множину, називаючи її елементи:

1) одноцифрові парні натуральні числа;

2) непарні натуральні числа, менші за 16;

3) літери слова «куб»;

4) дні тижня.

3. Для множини $\{\sqrt{11}, 3, -\sqrt{13}, -5, 0\}$ запишіть підмножину:
1) раціональних чисел; 2) ірраціональних чисел.

2 4. Що являє собою множина дійсних коренів рівняння $\sqrt{x} = -2$?

5. Чи правильно, що $M \subset T$, якщо:

1) $M = \{1\}$, $T = \{2, 3, 4\}$; 2) $M = \{\emptyset\}$, $T = \{K, L\}$;

3) $M = \{+, -\}$, $T = \{+, \times\}$; 4) $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right\}$, $T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$?

6. Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B , якщо:

1) $A = \{2, 4\}$, $B = \{0, 2, 4\}$;

2) $A = \{!, *\}$, $B = \{!, ?\}$;

3) A – множина складених чисел, менших за число 10,

B – множина парних натуральних чисел, менших за число 10;

4) A – множина коренів рівняння $x^2 = 1$,

B – множина коренів рівняння $\frac{x}{5} = \frac{1}{5}$.

3 7. Множина A складається з коренів рівняння $x^2 - 9 = 0$, а множина B – з коренів рівняння $2x - 6 = 0$. Чи правильно, що множина A є підмножиною множини B ? А навпаки?

8. Запишіть усі підмножини множини $C = \{1, 2, 3, 4\}$, які б містили:

1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

9. Зобразіть на числовій прямій проміжки та знайдіть їх переріз і об'єднання:

1) $(-7; 11)$ і $(10; 13)$; 2) $(-\infty; 5]$ і $(-\infty; 0]$;

3) $[1; 3)$ і $(1; 3]$; 4) $(-\infty; 1]$ і $[2; +\infty)$.

4 10. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера–Венна множини A , B , C і D , якщо $A \subset B$, $B \subset C$ і $C \cap D = B$.

11. Нехай A – множина парних натуральних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних числу 3, C – множина натуральних чисел, кратних числу 5. Запишіть за допомогою знаків операцій над множинами множину:

1) натуральних чисел, кратних числам 3 або 5;

2) чисел, кратних числу 15;

3) парних чисел, кратних числу 3.

До § 2

1 12. Чи залежить периметр квадрата від довжини його сторони? Чи є периметр квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Як можна задати цю функцію, якщо довжина сторони квадрата дорівнює a ?

13. Дано $f(x) = x^2 - 2x$. Знайдіть $f(-1) + f(0) + f(1)$.

2 14. Дано функції $f(x) = \sqrt{x} - x$ і $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Порівняйте:

1) $f(1)$ і $g(1)$; 2) $f(4)$ і $g(2)$.

15. Поїзд, рухаючись зі швидкістю 70 км/год, проходить за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t . Обчисліть значення функції для значень аргументу 1; 2,5; 3; 5.

16. Кожному натуральному значенню n відповідає число N , яке у 5 разів більше за n . Задайте функціональну залежність N від n . Знайдіть значення цієї функції, що відповідають значенням аргументу 2; 7; 13; 20.

3 17. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$;

2) $f(x) = \sqrt{5 + |x|}$;

3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$;

4) $f(x) = \frac{x + 1}{x + 1}$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

6) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$.

18. Знайдіть значення функції $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 3x - 7, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$

для $x = -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

19. Обладнання в процесі експлуатації зношується, і вартість його при цьому зменшується. Нехай початкова вартість обладнання A_0 зменшується на p % за рік. Запишіть формулу для обчислення вартості обладнання A_n через n років експлуатації і обчисліть цю вартість, якщо:

1) $A_0 = 500\ 000$ грн, $p = 3$, $n = 10$;

2) $A_0 = 1\ 000\ 000$ грн, $p = 2$, $n = 5$.

20. На початку нагрівання вода мала температуру 15 °С. Під час нагрівання температура води підвищувалася щохвилини на 5 °С.

1) Задайте формулою залежність температури T води від часу t її нагрівання.

2) Знайдіть значення T , що відповідає значенню $t = 5; 7; 10$.

3) Знайдіть значення t , якому відповідає значення $T = 35; 65; 80$.

4) При якому значенні t вода закипить?

4 21. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{4x - 8}{2x - x^2}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{4 - 2x}$;

3) $f(x) = \frac{|x|-1}{|x|-1}$;

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$.

22. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат:

1) $y = \sqrt{x^2 + 4}$;

2) $y = \frac{x}{x^2 + 2x}$;

3) $y = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - x}$;

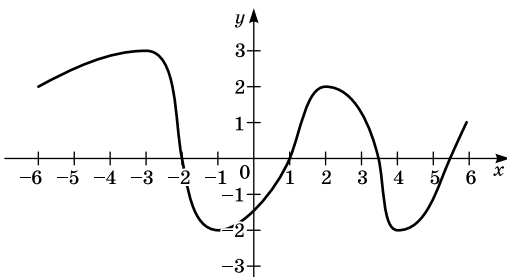
4) $y = \frac{1 - \frac{1}{|x|}}{1 - x}$;

5) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$;

6) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$.

До § 3

1 **23.** На малюнку 8.1 зображено графік функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Які з тверджень правильні:



Мал. 8.1

- 1) $f(x)$ зростає на проміжку $[-1; 2]$;
- 2) $f(x)$ зростає на проміжку $[2; 4]$;
- 3) $f(x)$ монотонна на проміжку $[2; 4]$;
- 4) $f(x)$ спадає на проміжку $[-6; -3]$;
- 5) $f(x)$ спадає на проміжку $[-3; -1]$;
- 6) $f(x)$ спадає на проміжку $[-6; -1]$;
- 7) $f(x)$ монотонна на проміжку $[-6; -1]$;
- 8) $f(x)$ зростає на проміжку $[-1; 3]$;
- 9) $x = -2$ є нулем функції;
- 10) $x = 3$ є нулем функції;
- 11) найбільшим значенням функції $f(x)$ на проміжку $[-6; 6]$ є число 4;
- 12) найменшим значенням функції $f(x)$ на проміжку $[-6; 6]$ є число -2 ?

24. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$;

2) $y = 2x - 7$;

3) $y = x(x - 1)$;

4) $y = \frac{x}{x - 2}$.

25. 1) $f(x)$ – парна функція. Знайдіть $f(-3)$, якщо $f(3) = 7$.

2) $g(x)$ – непарна функція. Знайдіть $g(4)$, якщо $g(-4) = 10$.

26. 1) Функція $y = t(x)$ – спадна на $(-\infty; +\infty)$. Запишіть у порядку зростання значення функції $t(-7)$, $t(5)$, $t(-9)$.

2) Функція $y = \varphi(x)$ – зростаюча на $(-\infty; +\infty)$. Запишіть у порядку зростання значення функції $\varphi(0)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$.

27. Побудуйте схематично графік функції $y = g(x)$, область визначення якої є проміжок $[-4; 5]$, так, щоб:

1) нулем функції було число 3;

2) нулями функції були числа 2 і 1;

3) функція зростала на проміжку $[4; 0]$ і спадала на проміжку $[0; 5]$.

28. Доведіть, що функції:

1) $f(x) = x^6 - x^2$ і $g(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}$ є парними;

2) $f(x) = 2x^3$ і $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ є непарними.

3 29. Дослідіть функцію на парність:

1) $f(x) = \sqrt{x}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x} + 5$;

3) $f(x) = x^2 + |x|$;

4) $f(x) = \frac{x^5}{x^2}$;

5) $f(x) = (x + 2)^2 + (x - 2)^2$;

6) $f(x) = (x^2 - x)^2 - (x^2 + x)^2$.

30. Відомо, що функція $y = f(x)$ є парною і $f(2) = 0$, $f(-7) = 4$. Знайдіть значення функції $f(x)$ у тих точках, у яких це можливо.

31. Відомо, що функція $y = g(x)$ є непарною і $g(-1) = 5$, $g(4) = -1$. Знайдіть значення функції $g(x)$ у тих точках, у яких це можливо.

32. Про функцію $g(x)$ відомо, що $g(x) = \frac{1}{2}x$ при $0 \leq x \leq 4$ і $g(x) = \frac{8}{x}$ при $x > 4$. Побудуйте графік цієї функції, якщо $g(x)$ є функцією:

1) парною;

2) непарною.

4 33. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = \frac{x(|x| - 2)\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$;

2) $f(x) = \frac{x(3 - |x|)\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$.

34. Функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені на множині всіх дійсних чисел. Чи є функція $f(x)$ парною або непарною, якщо:

- 1) $f(x) = u(x) - v(x)$, $u(x)$, $v(x)$ – непарні;
- 2) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, $u(x)$ – парна, $v(x)$ – непарна;
- 3) $f(x) = u^4(x) + v(x)$, $u(x)$ – непарна, $v(x)$ – парна;
- 4) $f(x) = u^5(x) \cdot v^2(x)$, $u(x)$, $v(x)$ – парні.

35. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \frac{x(|x-3|)}{x-3}, \text{ якщо } x \in [-1; 2].$$

36. На яких проміжках функція $y = |x-3| + |x+1|$ є сталою?

До § 4

1 37. Графіком яких з даних функцій є пряма:

- 1) $y = 7$;
- 2) $y = \frac{7}{x}$;
- 3) $y = 7x$;
- 4) $y = 7\sqrt{x}$;
- 5) $y = 7x + 7$;
- 6) $y = 7x^2$?

38. Як треба перетворити графік функції $y = x^3$, щоб отримати графік функції:

- 1) $y = x^3 - 1$;
- 2) $y = x^3 + 1$;
- 3) $y = (x+2)^3$;
- 4) $y = (x-1)^3$?

39. Зростаючою чи спадною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є функція:

- 1) $y = \frac{3}{x}$;
- 2) $y = -\frac{6}{x}$;
- 3) $y = -\frac{0,02}{x}$;
- 4) $y = \frac{0,47}{x}$?

2 40. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = 2x$, $y = 2x - 4$, $y = 2x + 4$;
- 2) $y = x^2$, $y = (x-4)^2$, $y = (x+4)^2$.

41. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції, попередньо схематично побудувавши її графік:

- 1) $y = -5x$;
- 2) $y = 4$;
- 3) $y = \sqrt{x} + 1$;
- 4) $y = x^2 - 2$.

42. Знайдіть функцію, обернену до:

- 1) $y = \frac{x}{4}$;
- 2) $y = -0,01x$;
- 3) $y = \frac{1}{2}x - 7$;
- 4) $y = \frac{3}{x}$.

43. Схематично побудуйте графік функції та вкажіть її область значень:

- 1) $y = 2x - 7$;
- 2) $y = -\frac{8}{x}$;
- 3) $y = x^2 - 6x + 8$;
- 4) $y = -2x^2 + 12x - 15$.

3 44. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 1| + 2$; 2) $y = -|x| + 1$; 3) $y = |x + 3| - 1$;
4) $y = |x - 3| - 1$; 5) $y = |x + 1| + 2$; 6) $y = -|x| - 3$.

45. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$; 3) $y = -3\sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

46. Знайдіть функцію, обернену до $y(x)$, якщо:

1) $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$; 2) $y(x) = -2\sqrt{x} + 3$.

Побудуйте графіки прямої та оберненої функцій.

4 47. Побудуйте графік функції та сформулюйте її основні властивості:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -2, \\ 1,5x, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & x > 2; \end{cases} \quad 2) g(x) = 2x + |x|.$$

48. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; 2) $g(x) = \frac{3x - 6}{x^2 - 2x}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$; 4) $p(x) = \frac{|x| - 1}{|x| - 1}$.

49. Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4x|$. Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $|x^2 - 4x| = a$:

- 1) не має коренів; 2) має єдиний корінь;
3) має тільки два корені; 4) має тільки три корені;
5) має тільки чотири корені.

50. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \sqrt{2x + 1}$, $x \in [0; 4]$; 2) $y = \frac{x}{x - 2}$, $x < 2$.

До § 5

1 51. Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 2 = 0$ і $\frac{x + 2}{x - 3} = 0$; 2) $x - 5 = 0$ і $\frac{x + 3}{x - 5} = 0$?

2 52. Розв'яжіть рівняння:

1) $4(x-1) - 2x = 2(x-2)$; 2) $\frac{x^2 - 3x}{x + x^2} = 0$.

53. Чи є рівняння $x^2 + 2x = 0$ наслідком рівняння $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = 0$?

54. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + 3}{x - 2} = \frac{3x + 1}{x - 2}$; 2) $\frac{3}{x - 3} - \frac{2}{x + 3} = \frac{15}{x^2 - 9}$.

55. При яких значення параметра c рівняння $cx + 2 = c - 7$ рівносильне рівнянню $3x + 2 = 8$?

56. При яких значення параметра a рівняння $x^2 + 2ax + a^2 - 2a + 6 = 0$ має:

1) два різних корені; 2) не має коренів?

57. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $\frac{a}{a + x} = \frac{5}{7}$.

3 58. Розв'яжіть рівняння з параметром:

1) $(a + 2)x = 0$; 2) $(a - 1)x = 7a - 7$;
3) $(a + 1)x = a^2 + a$; 4) $a(a + 1)x = a + 1$.

59. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x^3 - 4x}$;
2) $\frac{x + 3}{9x^2 + 3x + 1} - \frac{3}{1 - 27x^3} + \frac{1}{1 - 3x} = 0$.

60. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + \frac{1}{x(x-1)} = x + \frac{1}{x(x-1)}$;
2) $x^2 + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} - x + 6$.

4 61. При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $ax^2 + 3x - 8 = 0$ має розв'язки?

62. Розв'яжіть рівняння з параметром:

1) $a^2x^2 - 4ax + 5 = 0$; 2) $(a - 1)x^2 + 8x + 4 = 0$.

63. При яких значення параметра a рівняння

$$\frac{x^2 - 4x + 2a + 3 - a^2}{2 + x} = 0$$

має єдиний розв'язок?

До § 6

1 64. Серед нерівностей $4x > 8$, $-4x > -8$, $x < 2$ та $x > 2$ знайдіть пари рівносильних.

65. Розв'яжіть нерівність:

1) $2x \geq 0$; 2) $-3x < 0$; 3) $4x > 16$; 4) $-2x \leq 4$.

2 66. Розв'яжіть нерівність:

1) $4(x + 5) - 7x \geq -2(x + 5)$; 2) $\frac{3-x}{2} < 8$.

67. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $-5 < x + 2 \leq 7$; 2) $10 < x - 5 \leq 11$;

3) $4 \leq 2x \leq 8$; 4) $-1 < \frac{x}{5} < 2$.

68. Розв'яжіть квадратну нерівність, використовуючи схематичне зображення графіка функції:

1) $x^2 + 5x + 6 > 0$; 2) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

69. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x - 3)(2x + 8) \geq 0$; 2) $x(2x - 1) < 0$; 3) $\frac{3x + 1}{x} > 0$;

4) $\frac{x + 7}{3x - 9} \leq 0$; 5) $\frac{1}{x + 1} > 2$; 6) $\frac{x + 3}{5 - x} \leq 7$.

3 70. Знайдіть натуральні розв'язки нерівності:

1) $x(x + 3) - x^2 > 5x - 7$; 2) $-x^2 + 8,2x - 16 \geq 0$.

71. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $-(2x - 4)(x + 3)(x - 7) \geq 0$; 2) $(x + 5)(x^2 - 4x) < 0$;

3) $x^3 + 2x^2 - 3x > 0$; 4) $\frac{x^2 + 7x}{x - 3} \leq 0$;

5) $\frac{1}{3x} < \frac{1}{x + 1}$; 6) $x \geq \frac{6}{x - 1}$.

72. Розв'яжіть нерівність із параметром a :

1) $ax \leq 5$; 2) $(a + 1)x > a + 1$.

4 73. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x^2 - 4x + 4)(x - 5)^3 x \geq 0$; 2) $\frac{x^4 - 4x^2}{x - 1} \leq 0$.

74. Розв'яжіть нерівність із параметром a :

1) $x^2 - 6x + 8 - 2a - a^2 < 0$; 2) $ax^2 - (2 + a)x + 2 \geq 0$.

75. При якому значенні параметра a нерівність:

1) $ax^2 + 2ax + 3 \leq 0$ не має розв'язків;

2) $-ax^2 + 4x - (a + 3) > 0$ справджується для будь-якого x ?

До § 7

- 1** 76. Чи є коренем многочлена $x^3 - 7x - 6$ число:
1) -3 ; 2) -2 ; 3) -1 ; 4) 1 ; 5) 2 ; 6) 3 ?
- 2** 77. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$;
1) $A(x) = x^3 - x^2 + 2$, $B(x) = x + 1$;
2) $A(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $B(x) = x - 2$;
3) $A(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 + x$, $B(x) = x - 1$;
4) $A(x) = 2x^4 - 9x^2 + 11$, $B(x) = x + 3$.
78. Виконайте ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 39$, $B(x) = x - 3$;
2) $A(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $B(x) = x^2 - 1$.
79. Виконайте ділення з остачею многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$ і знайдіть неповну частку та остачу:
1) $A(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 4x + 1$, $B(x) = x + 2$;
2) $A(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 2$, $B(x) = x^2 - 2x$.
80. Чи ділиться многочлен $A(x)$ на двочлен $B(x)$, якщо:
1) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 145$, $B(x) = x - 5$;
2) $A(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$, $B(x) = 1 + x$?
- 3** 81. Знайдіть вільний член і суму всіх коефіцієнтів многочлена $C(x)$, який тотожно дорівнює виразу $(x^2 - 1)^{18}(x + 2)^3$.
82. При якому значенні параметра a многочлен $ax^3 + 2x^2 + ax - 5$ при діленні на $x - 1$ дає в остачі 7 ?
83. При якому значенні параметра b многочлен $x^3 + bx^2 - 2x + b$ ділиться на многочлен $x + 2$.
84. Виділіть цілу частину з неправильного дробу:
1) $\frac{5x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{x - 2}$; 2) $\frac{2x^3 + 5x^2 - 3x - 7}{x^2 + x - 4}$.
85. Чи ділиться вираз $(x + 1)^{2020} - 1$ на многочлен $x^2 + 2x$?
86. При яких значення параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + 1$ ділиться на $x - 1$, а при діленні на $x + 3$ дає в остачі -8 ?
87. Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^3 - 5x^2 - 13x - 7$; 2) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.
88. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 + 2x^2 + 10x + 9 = 0$; 2) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$;
3) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 18 = 0$;
4) $x^4 + x^3 - 11x^2 + 5x + 4 = 0$.
- 4** 89. При яких значення параметрів a і b многочлен $ax^3 + x^2 - 5x + b$ ділиться на многочлен $x^2 - x - 2$?

90. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 9x$;

2) $x^5 + 2x^4 + 5x^2 + 4x - 12$.

91. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^3 + 5x^2 + 13x + 3 = 0$; 2) $5x^3 + 4x^2 - 6x + 1 = 0$.

92. Многочлен $B(x)$ при діленні на $x + 1$ дає в остачі 4, а при діленні на $x + 2$ дає в остачі 2. Яку остачу отримаємо від ділення многочлена $B(x)$ на $x^2 + 3x + 2$?

До § 8

2 93. Виписавши кілька чисел, кратних числу 3, наприклад 33, 15, 93, 105, помічаємо, що вони закінчуються цифрою 3 або 5. Чи можна з цього дійти висновку, що число, яке закінчується цифрою або 5, кратне числу 3?

94. Доведіть методом математичної індукції, що для будь-якого натурального значення n справджується рівність $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (1 + n)n$. У який ще спосіб можна довести цю формулу?

3 95. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n справджується рівність:

1) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n+1)^2$;

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n+1)^2$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

4) $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$.

96. Доведіть, що при будь-якому натуральному n , де $n \geq 2$, справджується рівність $4^n > 3n^2 + 1$.

97. Доведіть, що при будь-якому натуральному n , де $n \geq 10$, справджується рівність $2^n > n^3$.

4 98. Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

99. Доведіть, що для будь-якого натурального n справджується нерівність:

1) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$; 2) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

100. Доведіть, що для будь-якого натурального n число:

1) $4^n - 1$ ділиться на 3;

2) $5^{2n-1} + 1$ ділиться на 6;

3) $8^{n+1} - 7^n + 41$ ділиться на 49;

4) $7^n + 3^n - 2$ ділиться на 8.

101. Доведіть, що для будь-якого n число $n^3 + 5n$ ділиться на 6.

★ 102. Числа a_1, a_2, \dots, a_n такі, що $a_1 = 5, a_2 = 7$ і $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Доведіть, що $a_n = 2n + 3$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Чому дорівнює $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$?

- А. $-\frac{1}{2}$ Б. 2 В. $\frac{1}{2}$ Г. -2

2. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \dots$

- А. $\sqrt[6]{25}$ Б. $\sqrt[6]{5}$ В. $\sqrt[5]{5}$ Г. $\sqrt[3]{25}$

3. Знайдіть множину значень функції $y = 18\sqrt{x}$.

- А. $[0; +\infty)$ Б. $(0; +\infty)$ В. $(-\infty; +\infty)$ Г. $[1; +\infty)$

2 4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{3-x}$.

- А. $[-\infty; -3)$ Б. $(-\infty; +\infty)$ В. $[3; +\infty)$ Г. $(-\infty; 3]$

5. $\sqrt[4]{(-3)^4} + (-\sqrt[5]{3})^5 = \dots$

- А. -6 Б. 0 В. 3 Г. 6

6. Укажіть множину коренів рівняння $x^6 = 729$.

- А. \emptyset Б. -3; 3 В. 3 Г. -9; 9

3 7. Спростіть вираз $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, якщо $a \leq 1$.

- А. $(a-1)^4$ Б. $a-1$ В. $1-a$ Г. $a-1$ або $1-a$

8. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[4]{32a^{12}}, a \geq 0$.

- А. $4a^3\sqrt[4]{2}$ Б. $2a^3\sqrt{2}$ В. $-2a^3\sqrt[4]{2}$ Г. $2a^3\sqrt[4]{2}$

9. Внесіть множник під знак кореня: $p\sqrt[8]{-p}$.

- А. $-\sqrt[8]{-p^9}$ Б. $-\sqrt[8]{p^9}$ В. $\sqrt[8]{p^9}$ Г. $\sqrt[8]{-p^9}$

4 10. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} + \sqrt[6]{|x|-2} + \sqrt[4]{x^2+3x}$$

- А. $(2; +\infty)$ Б. $(-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$

- В. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ Г. $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$

11. При яких значеннях параметра a рівняння $(a^2 - 1)x^6 = a + 1$ не має розв'язків?

- А. Таких значень a немає Б. $a < 1$ В. $a > 1$ Г. $a \leq 1$

12. Обчисліть $\frac{x+1-\sqrt{x^2-1}}{x+1+\sqrt{x^2-1}} + \frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}}$, якщо $x = 2020$.
- А. -4040 Б. 4040 В. 2020 Г. -2020

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 9-12

- 1** 1. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{0,49}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$; 3) $\sqrt[4]{16}$; 4) $\sqrt[5]{1}$.

2. Виконайте дію:

1) $14\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5}$; 2) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2}$.

3. Знайдіть область визначення і множину значень функції:

1) $y = \sqrt[5]{x}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$.

- 2** 4. Знайдіть значення виразу:

1) $(-\sqrt[8]{7})^8$; 2) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; 3) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt[6]{(-3)^6}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 = \frac{1}{81}$; 2) $x^3 = -27$; 3) $x^6 = -1$; 4) $x^5 = 17$.

6. За допомогою геометричних перетворень побудуйте схематично графік функції:

1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = \sqrt[3]{x-3}$.

- 3** 7. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{27p^9}$; 2) $\sqrt[8]{(x-2)^8}$, якщо $x \geq 2$;

3) $\sqrt[4]{(m+3)^4}$, якщо $m < -3$; 4) $\sqrt[6]{(3-\sqrt{10})^6}$.

8. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{5}$, якщо $a \geq 0$; 2) $c\sqrt[6]{-c}$.

- 4** 9. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{12}{\sqrt[6]{|x|-1}} + \sqrt[4]{x^2+2x} + \frac{10}{\sqrt[7]{x}}$$

Додаткові завдання

- 3** 10. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{8}$; 2) $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$.

- 4** 11. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x+3+\sqrt{x^2-9}}{x+3-\sqrt{x^2-9}} + \frac{x+3-\sqrt{x^2-9}}{x+3+\sqrt{x^2-9}}, \text{ якщо } x = 2019.$$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x} = 3$.
А. -81 або 81 Б. 81 В. 9 Г. $\sqrt[4]{3}$
2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x} < 4$.
А. $[0; 2)$ Б. $(-\infty; 16)$ В. $(0; 16)$ Г. $[0; 16)$
3. Укажіть правильну рівність.
А. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a^3}$ Б. $b^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{b^4}$ В. $c^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{c}$ Г. $m^{\frac{1}{3}} = \sqrt{m}$
- 2** 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2-2}$.
А. -1; 4 Б. -1 В. 4 Г. коренів немає
5. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{x^2-3x} < 2$.
А. $(-1; 0] \cup [3; 4)$ Б. $(-1; 0) \cup (3; 4)$
В. $(-1; 4)$ Г. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$
6. Укажіть функцію, яка спадає на проміжку $(0; +\infty)$.
А. $y = x^2$ Б. $y = x^{\frac{2}{3}}$ В. $y = x^{\frac{3}{2}}$ Г. $y = x^{-\frac{3}{2}}$
- 3** 7. Знайдіть усі корені рівняння $\sqrt[3]{11 - \sqrt{x^2 - 7}} = 2$.
А. Коренів немає Б. -4; 4 В. 4 Г. -2; 2
8. Подайте вираз $(\sqrt[3]{a^{-7}} : \sqrt[4]{a^3})^{12}$ у вигляді степеня.
А. a^{-37} Б. a^{-19} В. a^{19} Г. a^{37}
9. Укажіть множину коренів рівняння: $(x^2 - 2x)^{\frac{4}{3}} = 16$.
А. \emptyset Б. 2; 4 В. -4; 2 Г. -2; 4
- 4** 10. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{x^2 - y^2}{x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}}} - \frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{y}{x} \right)^{-1}$, якщо $x = 81$, $y = 25$.
А. 14 Б. 4 В. 10
Г. серед відповідей А–В правильної відповіді немає
11. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} > \sqrt{x+7}$.
А. $(-\infty; -2) \cup (2; 6]$ Б. $(2; 6]$
В. $(2; +\infty)$ Г. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
12. Укажіть усі значення параметра a , при яких рівняння $(a^2 - 16)\sqrt[6]{x+3} = a - 4$ не має коренів.
А. $a = -4$ Б. $a < -4$
В. $a \leq -4$ Г. таких значень немає

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 13-16

- 1** 1. Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt[4]{x} = 2$; 2) $\sqrt[3]{x+1} = -4$.
2. Розв'яжіть нерівність:
1) $\sqrt{x} \leq 5$; 2) $\sqrt[5]{x} > -1$.
3. Запишіть степінь з дробовим показником у вигляді ко-
рня: 1) $a^{\frac{1}{5}}$; 2) $b^{-1,4}$.

- 2** 4. Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{4x+2} = \sqrt{x^2-3}$; 2) $\sqrt{x-1} = 3-x$.
5. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-10x+9} \leq 3$.
6. Побудуйте схематично графік функції $y = x^{-1,2}$ та запишіть її властивості.

- 3** 7. Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{11-\sqrt[3]{x+1}} = 3$; 2) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} = 2$.
8. Подайте у вигляді степеня:

1) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{3}{8}}\right)^{-24}$; 2) $(\sqrt[5]{p^2} : \sqrt[4]{p^{-3}})^{10}$.

- 4** 9. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} > \sqrt{x+8}$.

Додаткові завдання

- 3** 10. Спростіть вираз $\frac{a^{1,5}-1}{a^{0,5}+1} : \frac{a+a^{0,5}+1}{a-1} + \frac{2}{a^{-0,5}}$.

- 4** 11. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $(a^2-4)\sqrt{x+2} = a+2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 9

- 1** 1. Доведіть, що число:
1) 4 є арифметичним кубічним коренем із числа 64;
2) 2 є арифметичним коренем п'ятого степеня із числа 32;
3) -3 не є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 81;
4) $\frac{1}{2}$ не є арифметичним коренем шостого степеня із числа $\frac{1}{32}$.
2. Обчисліть:
1) $\sqrt{0,64}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$; 4) $\sqrt[5]{1}$.

3. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 2) $\sqrt[4]{-\frac{81}{625}} - \sqrt[3]{\frac{27}{125}} + \sqrt{0,01}$.

2 4. Схематично побудуйте графік функції:

1) $y = x^5$; 2) $y = x^8$.

5. Чи має зміст вираз $\sqrt[4]{2x-4}$, якщо:

1) $x = 3$; 2) $x = 2$; 3) $x = 1$; 4) $x = 0$?

6. Обчисліть:

1) $(\sqrt[3]{17})^3 - (\sqrt{18})^2$; 2) $(-\sqrt[5]{2})^5 + (-\sqrt[6]{3})^6$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 1$; 2) $x^5 = -1$; 3) $x^{10} = 1$; 4) $x^{17} = 0$;
5) $x^7 = 9$; 6) $x^8 = -1$; 7) $x^{12} = 3$; 8) $x^3 = -2$.

8. Чи належить графіку функції $y = \sqrt[3]{x}$ точка:

1) $A(-1; 1)$; 2) $B(-8; -2)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(-27; -3)$?

9. Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt[4]{39\frac{1}{16}}$; 2) $(-2\sqrt[5]{3})^5 + (0,1\sqrt[3]{10\,000})^3$.

10. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2 - 2x - 17}$; 2) $\sqrt[4]{|x| - 2}$;
3) $\sqrt{x - 2} + \frac{1}{\sqrt{x + 3}}$; 4) $\sqrt{x + 2} + \sqrt[8]{3 - x}$?

3 11. Укажіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число:

1) $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt[3]{28}$; 3) $-\sqrt[4]{1,2}$;
4) $\sqrt[6]{0,01}$; 5) $-\sqrt[5]{31}$; 6) $\sqrt[7]{-0,02}$.

12. Укажіть усі цілі числа, що розміщені на координатній прямій між числами:

1) $\sqrt[3]{0,2}$ і $\sqrt[3]{26,9}$; 2) 0 і $\sqrt[4]{230}$;
3) $-\sqrt[5]{30}$ і $1,8$; 4) $-\sqrt[4]{15}$ і $\sqrt[3]{8,1}$.

13. В акваріум, що має форму куба, налили 384 л води, заповнивши його на $\frac{3}{4}$. Якою є висота акваріума?

14. Населення деякого міста становило 50 000 мешканців і щороку зростало на один і той самий відсоток. Знайдіть цей відсоток, якщо через три роки в місті мешкало 66 550 мешканців.

4 15. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^8 + 6x^4 - 7}{x - 1} = 0$; 2) $\frac{x^6 + 8x^3 + 7}{|x| - 1} = 0$.

16. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{|x| - 3} + \sqrt[4]{20 + x - x^2}.$$

До § 10-11

1 17. Чи правильно виконано тотожні перетворення:

1) $\sqrt[3]{5a} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{p}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{p}$; 3) $\sqrt[3]{a^3} = a$;

4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{p}} = \sqrt[7]{p}$; 5) $\sqrt{\sqrt[5]{m}} = \sqrt[10]{m}$; 6) $\sqrt[9]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a}$?

18. Подайте вираз у вигляді добутку або частки коренів:

1) $\sqrt{3t}$, $t \geq 0$; 2) $\sqrt[5]{\frac{c}{17}}$;

3) $\sqrt[3]{7ab}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{p}{t}}$, $p \geq 0$, $t > 0$.

19. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{100 \cdot 81}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{8}}$; 3) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$;

4) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}$; 5) $\sqrt[8]{2^{16}}$; 6) $\sqrt[5]{3^{10}}$.

2 20. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16a}$; 2) $\sqrt[4]{32b}$; 3) $\sqrt[6]{192t}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{1}{96}x}$.

21. Винесіть множник під знак кореня:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt[4]{p}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2y}$; 4) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}x}$.

22. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$; 3) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt[7]{2}}$.

23. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[7]{2^{14} \cdot 3^{21}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{7^8}{5^{12}}}$;

3) $\sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25}$; 4) $\sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[5]{3^8 \cdot 5^2}$.

3 Спростіть вираз (24–25):

24. 1) $\sqrt[4]{m^4}$, якщо $m \geq 0$; 2) $\sqrt[6]{p^6}$, якщо $p < 0$;

3) $\sqrt[9]{a^9}$; 4) $\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$, якщо $b < 0$.

25. 1) $\sqrt[8]{a^8} - a$, якщо $a \leq 0$; 2) $\sqrt[7]{x^7} + \sqrt[8]{x^8}$, якщо $x \geq 0$.

37. За допомогою геометричних перетворень схематично побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x} + 1$; 2) $y = \sqrt[3]{x-2}$;
 3) $y = \sqrt[5]{x} - 2$; 4) $y = \sqrt{x+1}$.

3 38. Чи перетинається графік функції $y = {}^{2010}\sqrt{x}$ з графіком функції:

1) $y = 2010$; 2) $y = -2010$; 3) $y = -x$; 4) $y = -x - 1$?

39. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[5]{x+2} - 1$; 2) $y = 2\sqrt[4]{x}$.

4 40. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{16}{x}$; 2) $\sqrt[4]{x} = x^2$.

До § 13

1 41. Чи є число x_0 коренем рівняння:

1) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+1}$, $x_0 = 0$; 2) $\sqrt[7]{x} = \sqrt[3]{1-x}$, $x_0 = 1$;
 3) $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt{2-x}$, $x_0 = 2$; 4) $\sqrt{3x+1} = \sqrt[3]{2-x}$, $x_0 = 1$?

Розв'яжіть рівняння (42–46):

42. 1) $\sqrt[5]{x} = 2$; 2) $\sqrt[4]{x} = -1$; 3) $\sqrt[6]{x} = 1$;
 4) $\sqrt[8]{x} = 1$; 5) $\sqrt[3]{x} = -4$; 6) $\sqrt[10]{x} = 0$.

2 43. 1) $\sqrt{2x-1} = 3$; 2) $\sqrt[5]{3x+1} = 0$; 3) $\sqrt[4]{2x-3} = -1$;
 4) $\sqrt[3]{x^2-1} = 2$; 5) $\sqrt[6]{2x-1} = 1$; 6) $\sqrt{x^2-15x} = 4$.

44. 1) $\sqrt[4]{3x-5} = \sqrt[4]{x-3}$; 2) $\sqrt[5]{3x-5} = \sqrt[5]{x-3}$;
 3) $\sqrt[6]{3x-5} = \sqrt[6]{3-x}$; 4) $\sqrt[6]{2x} = \sqrt[6]{x^2}$;
 5) $\sqrt[8]{x^2-6} = \sqrt{x}$; 6) $\sqrt[7]{x^2-6} = \sqrt[7]{x}$.

45. 1) $\sqrt{x+1} = x-1$; 2) $\sqrt{x^2+9} = x-3$;
 3) $\sqrt{3x^2+6x} = x+2$; 4) $\sqrt{x+1} = 5-x$.

46. 1) $(\sqrt[6]{x})^2 + 3\sqrt[6]{x} - 4 = 0$; 2) $\sqrt[7]{x^2} + 2\sqrt[7]{x} + 1 = 0$.

3 Розв'яжіть рівняння (47–50):

47. 1) $\sqrt[4]{14 + \sqrt[3]{x-2}} = 2$; 2) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{x+2}} = -1$.

48. 1) $\sqrt{x+1} - 4\sqrt[4]{x+1} + 3 = 0$; 2) $\sqrt[6]{x-3} + 4\sqrt[12]{x-3} - 5 = 0$.

49. 1) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{12-x} = \frac{1}{2}x$; 2) $\sqrt{x+2} = \frac{3x}{\sqrt{x+7}}$.

50. 1) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$; 2) $\sqrt{8+x} + \sqrt{2-x} = 4$;
 3) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 1$; 4) $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-8} = 1$.

4 Розв'яжіть рівняння (51–53):

51. 1) $(x + 1)\sqrt{5x - 6 - x^2} = 0$;

2) $(x - 2)\sqrt{x^2 + x + 2} = 2x - 4$.

52. 1) $\sqrt{3x + 12} = \sqrt{x + 1} + \sqrt{4x + 13}$;

2) $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{x - 4}$.

53. 1) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1$; 2) $x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 2$.

★ 54. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$;

2) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$;

3) $5^{15}\sqrt{x^{22}} + 15\sqrt{x^{14}\sqrt{x}} - 22^{15}\sqrt{x^7} = 0$; 4) $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$;

5) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$;

6) $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$.

55. Розв'яжіть рівняння з параметром

$$\sqrt[7]{(ax - b)^2} - \sqrt[7]{(b - ax)^{-3}} = \frac{65}{8}, \text{ де } a \neq 0.$$

До § 14

1 56. Чи є число 81 розв'язком нерівності:

1) $\sqrt{x} \geq 9$; 2) $\sqrt{x} < 10$; 3) $\sqrt{x} \geq 11$;

4) $\sqrt[4]{x} < 3$; 5) $\sqrt[4]{x} \leq 4$; 6) $\sqrt[4]{x} \geq 3$?

Розв'яжіть нерівність (57–60):

57. 1) $\sqrt{x} \geq 7$; 2) $\sqrt[4]{x} \leq 1$; 3) $\sqrt[8]{x} > -3$; 4) $\sqrt[10]{x} \leq -2$;

5) $\sqrt[5]{x} > -1$; 6) $\sqrt[3]{x} \leq 4$; 7) $\sqrt[4]{x} < 1$; 8) $\sqrt[6]{x} \geq 2$.

2 58. 1) $\sqrt[5]{x + 2} \leq 1$; 2) $\sqrt[4]{x - 3} > 2$;

3) $\sqrt{x - 7} < 2$; 4) $\sqrt{x + 2} > -3$.

59. 1) $\sqrt[6]{x^2 - 3x + 1} \geq 1$; 2) $\sqrt{3x^2 - 10x + 7} \geq 2$.

3 60. 1) $\sqrt{x + 2} < \sqrt{x^2 - x + 2}$; 2) $\sqrt{x - 3} > \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

61. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\sqrt[7]{2x^2 + 7x} \leq \sqrt[7]{2x - 2}?$$

62. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x + 5} < x - 1$; 2) $\sqrt{x - 1} \leq 3 - x$.

63. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x + 14} > x + 3$; 2) $\sqrt{x^2 + 1} \geq x - 1$.

4 64. Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 + 2x - 8} > x - 1$.

65. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{1+x} > 1 + \sqrt{1-x}$.

66. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+4} < \sqrt{2x+1} + \sqrt{2-x}$.

★ 67. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} < 1$;

2) $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{5}{\sqrt{x - 3}}$;

3) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1$; 4) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

До § 15

1 68. Замініть коренем степінь з дробовим показником:

1) $7^{\frac{1}{8}}$; 2) $9^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}$; 4) $b^{\frac{4}{5}}$;

5) $m^{0,8}$; 6) $10^{-0,1}$; 7) $12^{1,25}$; 8) $t^{-2,5}$.

69. Запишіть арифметичний корінь у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt[3]{11}$; 2) $\sqrt[4]{3^7}$; 3) $\sqrt[7]{9^{-1}}$; 4) $\sqrt[1]{10^3}$.

2 70. Обчисліть:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $125^{-\frac{1}{3}}$; 3) $64^{\frac{1}{6}}$; 4) $0,09^{-\frac{5}{2}}$;

5) $81^{-\frac{3}{4}}$; 6) $0,49^{1,5}$; 7) $\left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$; 8) $\left(2\frac{23}{49}\right)^{-1,5}$.

71. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $m^{\frac{1}{3}}m^{\frac{5}{6}}$; 2) $p^{\frac{1}{2}}p^{\frac{3}{8}}$; 3) $a^4 : a^{\frac{1}{3}}$;

4) $b^{\frac{1}{7}} : b^{\frac{4}{21}}$; 5) $(x^{\frac{2}{5}})^{\frac{15}{16}}$; 6) $(y^{-1,2})^5$.

72. Знайдіть значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-1,5}$; 2) $(9^4)^{\frac{1}{8}}$; 3) $4^{\frac{3}{2}} : 4^{-0,5}$; 4) $(25^{\frac{5}{6}})^{-3} \cdot 25^{-2}$.

73. Запишіть вираз у вигляді суми:

1) $a^{-1}b^2(a^4 + b^5)$; 2) $(m^{-3} - n^{-2})(m^{-3} + n^{-2})$;

3) $(7 - p^{\frac{3}{2}})^2$; 4) $(x^{-1,5} + y^{\frac{1}{2}})^2$.

74. Чи має зміст вираз $(a-1)^{\frac{2}{3}}$, якщо:

1) $a = 3$; 2) $a = 1,1$; 3) $a = 1$; 4) $a = 0,5$?

3 75. Обчисліть:

1) $((0,125)^{\frac{2}{3}} + 9^{1,5} + 0,008^{\frac{1}{3}})^{-1,5}$;

2) $(0,0625)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^{1,5} - \left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}} : (0,25)^{-0,5}$.

76. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[9]{x^2}$; 2) $(\sqrt[4]{x} \cdot x^{\frac{2}{5}})^{10}$.

77. Подайте вираз у вигляді суми:

1) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$; 2) $(p^{\frac{2}{3}} - 2p^{\frac{1}{3}} + 4)(p^{\frac{1}{3}} + 2)$.

78. Розкладіть на множники:

1) $a^{\frac{1}{8}} - 4a^{\frac{1}{4}}$; 2) $xy^{\frac{7}{8}} - x^{\frac{1}{5}}y$; 3) $t^{\frac{1}{8}} - p^{\frac{2}{9}}$; 4) $a - b^4$, $a > 0$.

79. Використовуючи тотожності

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ і $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, розкладіть на множники:

1) $x^{\frac{2}{3}} + 8$; 2) $p^3 - 7$; 3) $a^{\frac{6}{5}} + 27$; 4) $b - 1000$, де $b > 0$.

80. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}$; 2) $\frac{m - n}{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\frac{p^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{5}{6}}}{p^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{5}{6}}}$; 4) $\frac{9^{\frac{2}{5}} - 7^{\frac{2}{5}}}{9 + 9^{\frac{4}{5}}7^{\frac{1}{5}}}$.

81. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a - 64a^{0,5}}{a^{0,75} - 8a^{0,5}}$, якщо $a = 81$;

2) $\frac{8y + 1}{4\sqrt[3]{y^2} - 2y^{\frac{1}{3}} + 1}$, якщо $y = 64$.

82. При яких значеннях a правильною є рівність:

1) $(a^{\frac{1}{7}})^7 = a$; 2) $(a^6)^{\frac{1}{6}} = |a|$; 3) $(a^{\frac{1}{5}})^5 = -|a|$; 4) $(a^4)^{\frac{1}{4}} = a?$

83. Нехай $2,17^{\frac{1}{2}} = \alpha$. Запишіть через α :

1) $217^{\frac{1}{2}}$; 2) $21\,700^{\frac{1}{2}}$; 3) $0,0217^{\frac{1}{2}}$; 4) $0,000217^{\frac{1}{2}}$.

4 84. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[5]{\sqrt{243}}$ і $27^{\frac{1}{6}}$; 2) $(\sqrt[3]{4})^{\frac{5}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}$.

85. Доведіть, що вираз $\left(\frac{\frac{1}{a^6} - \frac{1}{a^3}}{1+a} + \frac{1 - \frac{1}{a^6}}{1 - \frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^3}} \right) : \frac{1-a}{1+a}$ набуває

лише додатних значень для всіх допустимих значень змінної.

86. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+27}{x^3 - 3\sqrt[3]{x} + 9} - \frac{x-27}{\sqrt[3]{x^2} + 3x^3 + 9} = x$.

87. Спростіть вираз $\frac{x-y}{\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{yx^2}} : \left(\frac{\frac{1}{y^2}}{x - x^2y^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{y - x^2y^2} \right)$ та

знайдіть його значення, якщо $x = 9$, $y = 16$.

88. Спростіть вираз:

$$1) \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a^3 - 3a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^3 - a^3} - \frac{a+1}{a^2 - 4a + 3};$$

$$2) \frac{m-1}{m + m^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{m^{\frac{1}{2}} + 1}{m^2 - 1} + \frac{2}{m^2}.$$

89. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{1-x^2}{x^2 - x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^2} + \frac{x^2 - x}{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}$ від'ємне.

До § 16

1 90. Наведіть приклад степеневі функції $y = x^\alpha$, якщо:

- 1) α – натуральне парне;
- 2) α – не ціле додатне;
- 3) α – від'ємне непарне;
- 4) α – натуральне непарне;
- 5) α – не ціле від'ємне;
- 6) α – від'ємне парне.

91. Накресліть схематично графік функції та запишіть її властивості:

- 1) $y = x^7$;
- 2) $y = x^{-4}$.

2 92. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^8 = 0$;
- 2) $x^2 = 11$;
- 3) $x^3 = 5$;
- 4) $x^{12} = 1$.

93. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{2}{3}}$. За допомогою графіка знайдіть значення:

- 1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 1; 6;
- 2) аргументу, що відповідає значенню функції 2,5; 4.

3 94. Побудуйте схематично графік функції та запишіть її властивості:

1) $y = (x + 2)^6$; 2) $y = x^{\frac{1}{7}} - 1$.

95. Порівняйте числа:

1) $(-2,1)^{-3}$ і $(-2)^{-3}$; 2) $4,5^{-1,8}$ і $4,4^{-1,8}$.

96. За допомогою калькулятора знайдіть з точністю до тисячних розв'язок рівняння:

1) $x^{\frac{2}{5}} = 2$; 2) $x^{\frac{2}{3}} = 13$.

4 97. Побудуйте схематично графік функції $y = (x + 2)^{1,4} + 3$ та запишіть її властивості.

98. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 4x)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$; 2) $x^{\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{1}{8}} + 4 = 0$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть значення виразу $\sin 60^\circ$.

А. $\frac{1}{2}$ Б. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ В. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г. 1

2. Укажіть градусну міру кута $\frac{2\pi}{3}$ рад.

А. 60° Б. 90° В. 120° Г. 150°

3. Якому з даних чисел може дорівнювати $\sin \alpha$?

А. $-0,8$ Б. $-1,2$ В. $2,7$ Г. $1,11$

2 4. Обчисліть $\cos 420^\circ$.

А. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ В. $-\frac{1}{2}$ Г. $\frac{1}{2}$

5. Знайдіть $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

А. $\frac{3}{4}$ Б. $-\frac{3}{4}$ В. $1\frac{1}{3}$ Г. $-1\frac{1}{3}$

6. Спростіть вираз $\operatorname{ctg}(-\alpha) \operatorname{tg} \alpha + \sin^2 \alpha$.

А. $1 + \sin^2 \alpha$ Б. $\sin^2 \alpha$ В. $\cos^2 \alpha$ Г. $-\cos^2 \alpha$

3 7. Укажіть множину значень функції $y = |\sin x| + 2$.

А. $[1; 3]$ Б. $[-1; 1]$ В. $[2; 3]$ Г. $[1; 2]$

8. Укажіть парну функцію.

А. $y = x \sin x$ Б. $y = x + \sin x$

В. $y = x \cos x$ Г. $y = x + \cos x$

9. Знайдіть значення виразу $\cos 115^\circ + \cos(-65^\circ)$.

А. 1 Б. 0 В. -1 Г. знайти неможливо

4 10. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,2$. Знайдіть значення виразу $\sin \alpha \cos \alpha$.

А. -0,96 Б. 0,48 В. -0,48 Г. 0,52

11. Обчисліть $\sqrt{(1 - 2 \sin 60^\circ)^2} - \sqrt{(1 + \operatorname{tg} 60^\circ)^2}$.

А. -2 Б. $-2\sqrt{3}$ В. 0 Г. $2 - 2\sqrt{3}$

12. Знайдіть значення виразу $\frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x - \sin x}$, якщо $\operatorname{tg} x = -3$.

А. 1,5 Б. 2,25 В. 0,75 Г. -0,75

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 17-21

1 1. Знайдіть:

1) $\sin 0^\circ$; 2) $\cos 30^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 60^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 45^\circ$.

2. Запишіть градусну міру кута: 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\pi$.

3. Чи існує таке α , для якого справджується рівність:

1) $\sin \alpha = -0,8$; 2) $\cos \alpha = 1\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -1,19$?

2 4. Обчисліть:

1) $\cos 90^\circ + \sin(-30^\circ)$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$;

3) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\sin 405^\circ$.

5. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

6. Спростіть вираз:

1) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.

3 7. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 3 \sin x - 2$; 2) $y = \cos^2 x + 4$.

8. Доведіть тотожність $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(-\alpha)}{1 - \sin(2\pi - \alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha$.

4 9. Дано $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$. Знайдіть $\sin \alpha \cos \alpha$.

Додаткові завдання

3 10. Обчисліть: 1) $(\cos^2 45^\circ - \sin^2(-60^\circ))^{-1}$;

2) $\sin \frac{5\pi}{6} \cos 0 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} \operatorname{ctg} \left(-\frac{4\pi}{7}\right)$.

4 11. Знайдіть значення виразу $\frac{5 \cos x - 2 \sin x}{3 \cos x + \sin x}$, якщо $\operatorname{tg} x = -2$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. $\sin(4x - y) = \dots$

- А. $\sin 4x \cos y + \cos 4x \sin y$ Б. $\cos 4x \cos y - \sin 4x \sin y$
В. $\sin 4x \cos y - \cos 4x \sin y$ Г. $\cos 4x \cos y + \sin 4x \sin y$

2. Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $\cos x + \cos y$.

А. $2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ Б. $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

В. $2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ Г. $2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

3. $\sin 4\alpha = \dots$

- А. $2 \sin 8\alpha \cos 8\alpha$ Б. $\sin 2\alpha \cos 2\alpha$
В. $2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$ Г. $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$

2 4. Спростіть вираз $\frac{\sin 12\alpha}{\sin 6\alpha}$.

- А. $\sin 2\alpha$ Б. $2 \sin 6\alpha$ В. $2 \cos 6\alpha$ Г. $\cos 6\alpha$

5. Укажіть значення виразу $\cos 75^\circ - \sin 75^\circ$.

- А. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В. $\frac{1}{2}$ Г. $-\frac{1}{2}$

6. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 5\alpha + \cos \alpha}$.

- А. $\operatorname{ctg} 3\alpha$ Б. $\operatorname{tg} 3\alpha$ В. $\operatorname{ctg} 2\alpha$ Г. $\operatorname{tg} 2\alpha$

3 7. Яке із чисел НЕ є періодом функції $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$?

- А. 2π Б. 4π В. 8π Г. 2018π

8. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції

$y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- А. $\pi k, k \in Z$ Б. $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
 В. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ Г. $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

9. Спростіть вираз

$$\cos(11^\circ + 3x) \cos(19^\circ - 3x) - \sin(11^\circ + 3x) \sin(19^\circ - 3x).$$

- А. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б. $\frac{1}{2}$ В. $\cos(6x - 8^\circ)$ Г. $\sin(6x - 8^\circ)$

4 10. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = -0,1$.

- А. $-0,99$ Б. $-0,9$ В. $0,99$ Г. знайти неможливо

11. Відомо, що $\sin \alpha = 0,8, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \beta = -0,6, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Якому з проміжків належить значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$?

- А. $(-\infty; -1]$ Б. $(-1; 0]$ В. $[0; 1)$ Г. $[1; +\infty)$

12. Знайдіть множину значень функції $y = 6 \sin 4x - 8 \cos 4x$.

- А. $[-8; 8]$ Б. $[-10; 10]$ В. $[-6; 6]$ Г. $(-\infty; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 22-25

1 1. Застосуйте формули додавання до виразу:

- 1) $\sin(2x + y)$; 2) $\cos(x - 3y)$.

2. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $\cos 2x + \cos 4x$; 2) $\sin 17^\circ - \sin 13^\circ$.

3. Чи є тотожністю рівність:

- 1) $\sin 4x = 2 \sin x \cos x$; 2) $\cos 8x = \cos^2 4x - \sin^2 4x$?

2 4. Спростіть вираз:

- 1) $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos \alpha$; 2) $\frac{\sin 8\alpha}{\cos 4\alpha}$.

5. Обчисліть:

- 1) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; 2) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

6. Знайдіть найменший додатний період функції:

- 1) $y = \cos 8x$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{8}\right)$.

3 7. Доведіть тотожність $\frac{\cos \alpha + \cos 4\alpha + \cos 9\alpha}{\sin \alpha - \sin 4\alpha - \sin 9\alpha} = -\operatorname{ctg} 4\alpha$.

8. Побудуйте графік функції $y = 2 \sin x - 1$ і знайдіть:

- 1) нулі функції;
 2) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

4 9. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = 0,6$.

Додаткові завдання

3 10. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 - \cos 8\alpha}{\sin^2 4\alpha}$; 2) $\frac{(1 + \cos 2x) \sin 2x}{\cos^3 x}$.

4 11. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 0,6$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,
 $\sin \beta = -0,8$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 17

1 1. Чому дорівнюють $\sin \gamma$ і $\cos \gamma$, якщо куту γ на одиничному колі відповідає точка $P_\gamma \left(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13} \right)$?

2. Знайдіть:

1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 90^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 30^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 135^\circ$;
5) $\sin 120^\circ$; 6) $\cos 0^\circ$; 7) $\operatorname{tg} 360^\circ$; 8) $\operatorname{ctg} 180^\circ$.

2 3. Кутом якої чверті є кут α , якщо:

1) $\alpha = 150^\circ$; 2) $\alpha = -150^\circ$; 3) $\alpha = 300^\circ$; 4) $\alpha = -300^\circ$;
5) $\alpha = 200^\circ$; 6) $\alpha = -200^\circ$; 7) $\alpha = 10^\circ$; 8) $\alpha = -10^\circ$?

4. Відомо, що $\sin \alpha = -0,6$, $\cos \alpha = 0,8$. Знайдіть $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.

5. Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до тисячних):

1) $\cos 20^\circ + \sin 115^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-25^\circ) + \operatorname{ctg} 17^\circ$.

6. Обчисліть:

1) $8\sin 30^\circ + 2\cos 150^\circ$; 2) $5\operatorname{tg} 45^\circ + 4\operatorname{ctg} 45^\circ$.

7. Укажіть кут γ , що належить проміжку $[180^\circ; 540^\circ]$, для якого:

1) $\cos \gamma = 1$; 2) $\sin \gamma = -1$; 3) $\cos \gamma = 0$; 4) $\sin \gamma = 0$.

8. Укажіть три значення β , при яких:

1) $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \beta = -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \beta = 1$; 4) $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{3}$.

3 9. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 135^\circ$; 2) $\sin 270^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

10. Знайдіть значення виразу $8 \cos(\alpha + \beta) - 4\sqrt{3} \cos(\alpha - \beta)$, якщо $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

4 11. Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{(2 \sin 135^\circ + 1)^3} - \sqrt{(2 \cos 135^\circ + 1)^2}$;

2) $\sqrt[4]{(\operatorname{tg} 120^\circ - 1)^4} + \sqrt{(\operatorname{ctg} 150^\circ + 2)^2}$.

12. Чи правильне твердження:1) якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то α – кут II четверті;2) якщо β – кут II четверті, то $90^\circ < \beta < 180^\circ$ **До § 18****1 13. Які з рівностей є правильними:**

1) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$; 2) $120^\circ = \frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$; 4) $\frac{\pi}{15} = 15^\circ$?

14. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її, знайшовши для кожної градусної міри радіанну і навпаки.

Градусна міра	10°	36°	300°	520°				
Радіанна міра					$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{5}$	$1,5\pi$	4π

15. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом α , якщо: 1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{7\pi}{10}$.**2 16. Запишіть у радіанах міру кутів:**

1) правильного трикутника;

2) рівнобедреного прямокутного трикутника.

17. Знайдіть за допомогою калькулятора з точністю до тисячних:

1) $\sin 0,7\pi$; 2) $\cos 2\frac{1}{7}$; 3) $\operatorname{tg}(-1,25)$; 4) $\operatorname{ctg}(-1,8\pi)$.

18. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} - 2 \cos 0$; 2) $\sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg} 0$;

3) $\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right)$; 4) $\sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} \right)$.

19. Знайдіть радіанну міру кутів паралелограма, якщо їх величини відносяться як 2 : 3.**3 20. Обчисліть:**

1) $\cos^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3}}{1 - \sin^2 0}$.

21. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$;

2) $\cos(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

22. Знайдіть за допомогою калькулятора (результат округліть до тисячних):

1) $\cos 1,5 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos 1,9$.

4 23. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}\right)^{-1}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\frac{4 \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin 3\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

24. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\left(2 \sin \frac{2\pi}{3} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(1 - 2 \cos \frac{5\pi}{6}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(3 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(2 - 3 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}\right)^2}$.

До § 19

1 25. Чи існує таке значення β , для якого:

1) $\sin \beta = -1,8$; 2) $\cos \beta = -0,2$;

3) $\sin \beta = \frac{1}{11}$; 4) $\cos \beta = 2\frac{1}{3}$?

26. Який знак має число:

1) $\sin 189^\circ$; 2) $\cos 217^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 129^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 318^\circ$?

2 27. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1$; 2) $\cos(-113^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;

5) $\cos 2$; 6) $\sin(-121^\circ)$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{5}$; 8) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$.

28. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 116^\circ \cos 113^\circ \operatorname{tg} 192^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 101^\circ \cos 252^\circ \sin 2^\circ$.

29. Обчисліть:

1) $\cos(-60^\circ) - \operatorname{tg} 45^\circ$;

2) $\sin(-90^\circ) \operatorname{tg}(-30^\circ)$;

3) $\cos(-90^\circ) + \sin 30^\circ$;

4) $\cos(-45^\circ) \operatorname{ctg}(-45^\circ)$.

30. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin 420^\circ$; 2) $\cos 405^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 720^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 390^\circ$.

3 31. Знайдіть множину значень функції:

- 1) $y = \sin x + 4$; 2) $y = \cos^2 x - 1$.

32. Чи існує таке значення β , при якому виконується рівність:

- 1) $\sin \beta = \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{2}$; 2) $\cos \beta = \frac{\sqrt[4]{50} - 1}{2}$?

33. У яких чвертях:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$ мають однакові знаки;
2) $\operatorname{ctg} \alpha$ і $\cos \alpha$ мають різні знаки?

34. Обчисліть:

- 1) $4\cos(-45^\circ) - 6\sin(-45^\circ) - \sqrt{3}\operatorname{tg}(-60^\circ) + 2\sin(-30^\circ)$;
2) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4\cos(-2\pi) + 4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

35. Відомо, що $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Визначте знак виразу:

- 1) $\sin(90^\circ - \alpha)$; 2) $\cos(180^\circ - \alpha)$;
3) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$; 4) $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)$.

36. Відомо, що $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $\sin \beta \cos \beta$; 2) $\frac{\cos \beta}{\sin^4 \beta}$; 3) $\frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \beta}$; 4) $\sin \beta - \cos \beta$.

37. При яких значеннях a для деякого кута α справджується рівність:

- 1) $\cos \alpha = a - 2$; 2) $\sin \alpha = \frac{a}{4}$;
3) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{a}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{a-1}}$?

4 38. При яких цілих значеннях b для деякого кута x справджується рівність:

- 1) $\sin x = b + 2,5$; 2) $\cos x = b^2 - 1$;
3) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}}$; 4) $\cos x = 3b - b^2 - 1$?

39. Знайдіть множину значень функції:

- 1) $y = \frac{12}{\sin x + 5}$; 2) $y = \frac{18}{3 - \cos^2 x}$.

40. Відомо, що $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Порівняйте:

- 1) $\sin^2 \alpha$ і $2\sin \alpha$; 2) $3\cos \alpha$ і $\cos^3 \alpha$.

41. Кутом якої чверті може бути кут β , якщо:

1) $|\operatorname{tg}(-\beta)| = -\operatorname{tg} \beta$; 2) $|\cos(-\beta)| = \cos \beta$?

42. α , β , γ – кути трикутника. Який знак має сума:

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; 2) $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$?

43. Визначте знак тригонометричного виразу:

1) $\sin(\pi + 1)$; 2) $\cos(\pi - 1)$; 3) $\sin 2 \cdot \cos 1 \cdot \operatorname{tg} 3$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$; 6) $\operatorname{ctg} 4 \cdot \cos 3 \cdot \sin 1$.

До § 20

1 44. Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2 17^\circ$; 2) $2 + \operatorname{tg} 82^\circ \operatorname{ctg} 82^\circ$.

45. Доведіть, що:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = 0$.

2 46. Спростіть вираз:

1) $(-1 - \sin x)(1 - \sin x)$; 2) $\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1$;
3) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; 4) $\frac{1 - \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma - 1}$.

47. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta}$;
3) $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x = 1$;
4) $(1 + \operatorname{tg} \beta)^2 - 2 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$.

48. Доведіть, що можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ і $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$;
2) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} + 1$.

49. Обчисліть:

1) $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, якщо $\sin x = \frac{7}{25}$ і $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3 50. Чи можуть одночасно справджуватися рівності:

1) $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ і $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$; 2) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$;

3) $\cos \beta = 0,6$ і $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$; 4) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$?

51. Спростіть вираз:

1) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^2 x \cos^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)$;

3) $\frac{\sin^2 \beta - 1}{\cos^2 \beta - 1} + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \beta$;

4) $(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2$.

52. Доведіть тотожність:

1) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

2) $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$;

3) $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \beta} - \frac{\sin \beta}{\operatorname{ctg} \beta} = \cos \beta$;

4) $(\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)^2 = 8$.

53. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях α значення виразу не залежить від α :

1) $\frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{4}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; 2) $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}$.

54. Відомо, що $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

4 55. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$; 2) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$.

56. Відомо, що $\cos \alpha = -0,8$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

57. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях α значення виразу $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$ не залежить від α .

58. Відомо, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\cos \alpha = 1 - m$. Знайдіть $\sin \alpha$ та можливі значення m .

59. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

До § 21

1 60. Використовуючи таблицю зі с. 156, зведіть до тригонометричної функції кута α :

- 1) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\sin(180^\circ - \alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 6) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$;
7) $\cos(2\pi - \alpha)$; 8) $\operatorname{tg}(330^\circ + \alpha)$.

2 61. Використовуючи правило зі с. 157, зведіть до тригонометричної функції кута α :

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$;
4) $\sin(180^\circ + \alpha)$; 5) $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
7) $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$; 8) $\sin(2\pi + \alpha)$.

62. Обчисліть:

- 1) $\sin 120^\circ$; 2) $\cos 225^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 330^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 585^\circ$;
5) $\cos \frac{5\pi}{6}$; 6) $\sin \frac{7\pi}{3}$; 7) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$.

63. Спростіть вираз:

- 1) $\cos(180^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$;
2) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

3 64. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin 570^\circ + \cos(-840^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 300^\circ$;
2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{19\pi}{6} + \sqrt{3} \left(\sin \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{25\pi}{6} \right)$.

65. Спростіть вираз:

- 1) $\cos(180^\circ - \alpha) \sin(270^\circ - \alpha) \cos^2(270^\circ + \alpha)$;
2) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos^2(\pi + \alpha)$.

66. Доведіть тотожність:

$$\frac{\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) \cos(270^\circ - \alpha)} = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\sin(270^\circ - \alpha)}.$$

67. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = m$. Знайдіть:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

4 68. Знайдіть добуток тангенсів гострих кутів прямокутного трикутника.

69. Синус гострого кута паралелограма дорівнює 0,8. Знайдіть синус і косинус тупого кута цього паралелограма.

70. Косинус суми двох кутів трикутника дорівнює $\frac{1}{3}$.

1) Знайдіть косинус третього кута цього трикутника.

2) Визначте, чи є в цьому трикутнику тупий кут.

71. Доведіть, що $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 88^\circ \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.

До § 22

1 72. Для функції $y = \operatorname{tg} x$ знайдіть:

1) $y(0)$; 2) $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2 73. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; 2\pi)$. Укажіть нулі функції, проміжки зростання і проміжки спадання функції.

74. Знайдіть найменший додатний період функції:

1) $y = \sin(3\pi - x)$; 2) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{11}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - 2x\right)$.

75. Знайдіть амплітуду, частоту та період напруги, якщо вона змінюється за законом $u(t) = 220 \sin 50\pi t$ (напруга вимірюється у вольтах, час – у секундах).

76. Запишіть формулу, що визначає гармонічні коливання, якщо:

1) $A = 80$, $\omega = 2\pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{8}$; 2) $A = 0,01$, $\omega = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3 77. Побудуйте графік функції та вкажіть її властивості за зразком таблиці зі с. 171 і 172:

1) $y = \operatorname{tg} x - 1$; 2) $y = \frac{1}{2} \sin x$.

78. Побудуйте графік функції $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

79. Не виконуючи побудови, знайдіть, при якому значенні x функція:

1) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$ набуває найбільшого значення;

2) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ набуває найменшого значення.

80. Розташуйте числа в порядку зростання:

1) $\cos 17^\circ$; $\cos 19^\circ$; $\cos 18^\circ$; 2) $\sin 2,3$; $\sin 2$; $\sin 2,1$.

81. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{12}\right)$.

4 82. Побудуйте графік функції $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Позначте на графіку три точки, для яких $y = -2$. Чому дорівнюють відповідні значення x ?

83. Доведіть, що число π є періодом функції:

1) $y = \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right|$; 2) $y = \operatorname{tg} 2x + \sin 6x$.

84. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $\sin x = x^2 - 1$; 2) $\cos x = 2x - 1$?

До § 23

1 85. Чи правильно перетворено вираз:

- 1) $\sin(3\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;
- 2) $\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta$;
- 3) $\cos(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$;
- 4) $\sin(2x - y) = \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y$?

86. Чи правильно виконано спрощення:

- 1) $\sin 25^\circ \cos 20^\circ + \cos 25^\circ \sin 20^\circ = \sin(25^\circ - 20^\circ) = \sin 5^\circ$;
- 2) $\cos 14^\circ \cos 8^\circ + \sin 14^\circ \sin 8^\circ = \cos(14^\circ - 8^\circ) = \cos 6^\circ$;
- 3) $\sin 14^\circ \cos 2^\circ - \cos 14^\circ \sin 2^\circ = \cos(14^\circ - 2^\circ) = \cos 12^\circ$;
- 4) $\cos 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 20^\circ \sin 5^\circ = \cos(20^\circ - 5^\circ) = \cos 15^\circ$?

2 87. За допомогою формул додавання перетворіть вираз:

1) $\sin(45^\circ + \alpha)$; 2) $\cos(30^\circ - \alpha)$;

3) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

88. Запишіть кут $\frac{5\pi}{12}$ як суму $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ та обчисліть:

1) $\sin \frac{5\pi}{12}$; 2) $\cos \frac{5\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

89. Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

90. Спростіть вираз:

1) $\cos \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \sin(-2\alpha)$; 2) $\sin 3\alpha \cos(-\alpha) + \cos 3\alpha \sin \alpha$.

91. Обчисліть:

1) $\cos 63^\circ \cos 3^\circ + \sin 63^\circ \sin 3^\circ$;

2) $\sin \frac{7\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$.

92. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$.

93. Спростіть вираз:

1) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} 13\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 13\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

94. Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha + 60^\circ) - \sin(\alpha - 60^\circ)$; 2) $\frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{\cos x \sin y}$.

3 95. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha - \beta) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta$;

2) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1$.

96. Спростіть вираз:

1) $\cos\left(\frac{10\pi}{7} + \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{7} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7} + \alpha\right)$;

2) $\sin(10^\circ + \alpha)\cos(20^\circ - \alpha) + \sin(20^\circ - \alpha)\cos(10^\circ + \alpha)$.

97. Знайдіть значення виразів $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ і $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$,

якщо $\cos \alpha = -0,8$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

98. Відомо, що $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, α і β – кути I чверті.
Знайдіть:

1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\sin(\alpha - \beta)$; 3) $\cos(\alpha + \beta)$; 4) $\cos(\alpha - \beta)$.

99. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4 100. Знайдіть множину значень функції:

1) $y(x) = \sin x + \cos x$; 2) $y(x) = 1 - \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

101. Обчисліть $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}$.

102. Доведіть, що коли α і β – кути I чверті, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = 1,5$, то $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

103. Нехай α і β – гострі кути, причому $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos \beta = \frac{5\sqrt{7}}{14}$. Доведіть, що $\alpha + \beta = 60^\circ$.

До § 24

1 104. Які з рівностей є тотожностями:

1) $1 + \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; 2) $1 - \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;
3) $\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha$; 4) $\cos 8x = \cos^2 4x - 1$?

2 105. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha}$; 2) $\frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$;
3) $\cos^2 x - \cos 2x$; 4) $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$.

106. Обчисліть:

1) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 2) $\frac{1}{2 \sin 67^\circ 30' \cos 67^\circ 30'}$;
3) $\left(\cos \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}\right)^2$; 4) $2 \cos^2 15^\circ - 2 \sin^2 15^\circ$.

107. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 8\alpha}{2 \cos^2 4\alpha}$; 2) $\frac{\cos 6\alpha}{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha} + \sin 3\alpha$.

108. Обчисліть: 1) $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}$.

109. Виразіть тригонометричну функцію через функції аргументу, що вдвічі менший від даного:

1) $\sin 10\alpha$; 2) $\cos 7\alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$;
 4) $\cos \frac{\alpha}{10}$; 5) $\sin \frac{2\alpha}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)$.

110. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 2) $\frac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}$.

111. Знайдіть:

1) $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$;
 2) $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ і $\operatorname{tg} 4\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} 2\alpha = -1$.

112. Знайдіть:

1) $\sin 3\alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,1$; 2) $\cos 3\alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,2$;
 3) $\sin 3\alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 4) $\cos 3\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3 113. Дано: $\sin \frac{\alpha}{2} = 0,6$, $2\pi < \alpha < 3\pi$. Знайдіть:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$.

114. Дано: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть:

1) $\cos 2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

115. Спростіть вираз:

1) $2 \sin \frac{\pi - 6\alpha}{2} \cos \frac{\pi - 6\alpha}{2}$; 2) $\sin^2 \frac{\pi + 7\beta}{2} - \cos^2 \frac{\pi + 7\beta}{2}$.

116. Спростіть вираз $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ і знайдіть його значення, якщо $\alpha = 45^\circ$.

117. Доведіть тотожність: 1) $\frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $\frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 1$.

118. Знайдіть $\frac{3 + \cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$.

119. Знайдіть значення виразу $\cos \alpha - \sin \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

120. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$, якщо $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$; 2) $\frac{\sin 3\alpha}{2 \sin \alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{5}$;

3) $4 \sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

4 121. Доведіть, що: 1) $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$, якщо $0 < \alpha < \pi$;

2) $\sin 2\alpha < 2 \cos \alpha$, якщо $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

122. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}}$;

2) $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, якщо $135^\circ < \alpha < 180^\circ$.

123. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + 1} = \sin 2\alpha$; 2) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)} = \cos 2\alpha$;

3) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$.

124. Знайдіть:

1) $\sin 8\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = -0,5$; 2) $\cos 6\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$;

3) $\cos 8\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; 4) $\sin 6\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 3$.

До § 25

1 125. Перетворіть на добуток:

1) $\sin 4\alpha - \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2y + \cos y$;
3) $\sin 5x + \sin 2x$; 4) $\cos 10\alpha - \cos 8\alpha$.

2 126. Подайте у вигляді добутку:

1) $\cos x + \cos(20^\circ + x)$; 2) $\sin(64^\circ + x) - \sin(4^\circ + x)$;
3) $\cos 100^\circ - \cos 40^\circ$; 4) $\sin 91^\circ + \sin 89^\circ$.

127. Запишіть у вигляді частки:

1) $\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x$; 2) $\operatorname{tg} 8x + \operatorname{tg} 2x$;
3) $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 100^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ$.

128. Перетворіть добуток на суму:

1) $\sin 2x \sin 8x$; 2) $\cos 12\beta \cos 7\beta$;
3) $\cos \alpha \sin 5\alpha$; 4) $\sin 12^\circ \sin 4^\circ$.

129. Обчисліть: 1) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$; 2) $\sin 75^\circ \cos 105^\circ$.

130. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 7\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$.

3 131. Запишіть у вигляді добутку:

1) $\sin 100^\circ + \cos 70^\circ$; 2) $\cos 80^\circ - \sin 20^\circ$;
3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin \alpha$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

132. Запишіть у вигляді добутку:

1) $\sin^2 x - \sin^2 y$; 2) $\cos^2 x - \cos^2 y$.

133. Доведіть тотожність: 1) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

4 134. Доведіть, що:

1) $\cos 3^\circ + \cos 29^\circ - \cos 31^\circ - \sin 93^\circ = \cos 89^\circ$;
2) $\cos 115^\circ + \sin 65^\circ + \sin 25^\circ - \sin 55^\circ = \sin 5^\circ$.

135. Обчисліть:

1) $\sin 80^\circ \sin 40^\circ \cos 70^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ$.

136. Спростіть вираз: 1) $\cos^2\left(x + \frac{7\pi}{12}\right) - \sin^2\left(x - \frac{7\pi}{12}\right)$;

2) $\frac{(\cos 3\alpha + \cos \alpha)(\sin 3\alpha - \sin \alpha)}{1 + \cos 4\alpha}$.

137. Доведіть тотожність:

1) $1 + \cos \alpha - \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$;

2) $4 \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos 3\alpha$;

3) $4 \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha$;

4) $\cos 5\alpha \sin 2\alpha - \cos 6\alpha \sin \alpha = \sin \alpha \cos 4\alpha$.

138. Подайте у вигляді добутку: $\sin 8\alpha - \sqrt{3} \sin 5\alpha + \sin 2\alpha$.

139. Знайдіть значення виразу

$\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 5\alpha \sin 2\alpha - \sin 3\alpha \sin 4\alpha$, якщо $\alpha = 5^\circ$.

140. Нехай α і β – гострі кути прямокутного трикутника. Доведіть, що $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 4 \sin \alpha \sin \beta$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть вираз, який не має змісту.

А. $\arcsin 1$ Б. $\operatorname{arctg} 2$ В. $\arccos 3$ Г. $\operatorname{arccotg} 4$

2. Укажіть рівняння, яке не має коренів.

А. $\sin x = -0,8$ Б. $\cos x = 1,2$

В. $\operatorname{tg} x = -1,8$ Г. $\operatorname{ctg} x = 1,9$

3. Знайдіть множину коренів рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

А. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$ Б. $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

В. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$ Г. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

2 4. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \dots$

А. π Б. $-\frac{\pi}{3}$ В. $\frac{7\pi}{6}$ Г. $\frac{2\pi}{3}$

5. Знайдіть усі корені рівняння $\arcsin x = \arcsin(x^2 - 2)$.

А. коренів немає Б. -1 В. 2 Г. $-1; 2$

6. Знайдіть множину коренів рівняння $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$.

А. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ Б. $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

В. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ Г. $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

3 7. Обчисліть $\operatorname{tg}(\arccos(-0,8))$.

А. $-0,75$ Б. $0,75$ В. $1\frac{1}{3}$ Г. $-1\frac{1}{3}$

8. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

$$\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1.$$

А. $-\frac{3\pi}{4}$ Б. $-\frac{\pi}{3}$ В. $-\frac{\pi}{4}$ Г. $-\frac{\pi}{6}$

9. При яких значеннях параметра a рівняння $(a-3)\cos x = a^2 - 9$ має розв'язки?

А. $a = 3$ або $-4 \leq a \leq -2$ Б. $-4 \leq a \leq -2$

В. $a = 3$ Г. $a = -3$ або $2 \leq a \leq 4$

4 10. Обчисліть $\arccos\left(\sin\frac{13\pi}{12}\right)$.

А. $\frac{5\pi}{12}$ Б. $\frac{11\pi}{12}$ В. $\frac{3\pi}{4}$ Г. $\frac{7\pi}{12}$

11. Укажіть множину розв'язків нерівності:
 $\arccos^2 x - 6 \arccos x + 8 \leq 0$.

А. $[\cos 2; \cos 4]$ Б. $[-1; \cos 2]$ В. $[\cos 4; \cos 2]$ Г. $[\cos 2; 1]$

12. Скільки коренів, що належать проміжку $[-\pi; \pi]$, має рівняння $(1 - 2 \cos x) \sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 0$?

А. 2 Б. 3 В. 4 Г. 5

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 26-28

1 1. Чи має зміст вираз:

1) $\arcsin 1,2$; 2) $\arccos 0,8$; 3) $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arcctg}(-1)$?

2. Чи має корені рівняння:

1) $\arccos x = 2\pi$; 2) $\arcsin x = 0$;

3) $\sin x = -\sqrt{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{2}$?

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

2 4. Обчисліть:

1) $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3})$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos(x - 3) = \arccos(x^2 - 2x - 1)$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $\operatorname{ctg} 2x = -1$.

3 7. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2))$; 2) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6)$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 5 = 0$;

$$2) \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4 9. Розв'яжіть рівняння $(1 + 2\sin x)\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 0$.

Додаткові завдання

3 10. При яких значеннях параметра a рівняння $(a + 1)\sin x = a^2 - 1$ має розв'язки?

4 11. Розв'яжіть нерівність $\arcsin^2 x - \arcsin x - 2 \leq 0$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А-Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Розв'яжіть рівняння: $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

А. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $(-1)^k \arcsin 2 + \pi n, n \in Z$

Б. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ В. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ Г. коренів немає

2. Укажіть множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$.

А. $\pi k, k \in Z$

Б. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

В. $\pi k, k \in Z$; $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Г. $\pi k, k \in Z$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

3. Використовуючи малюнок 23.16, розв'яжіть нерівність

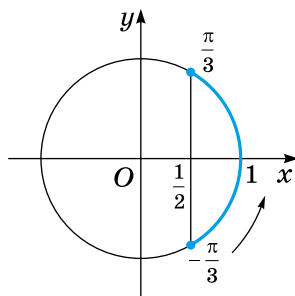
$$\cos x \geq \frac{1}{2}.$$

А. $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Б. $-\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

В. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Г. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$



Мал. 23.16

2 4. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$.

- А. $\pi + 2\pi k, k \in Z$ Б. $\pi + 2\pi k, k \in Z; \pm \arccos 3 + 2\pi n, n \in Z$
В. $2\pi k, k \in Z$ Г. розв'язків немає

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

- А. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$ Б. $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$
В. $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$ Г. $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

6. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x < \frac{1}{2}$.

- А. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$
Б. $\frac{5\pi}{12} + \pi k < x < \frac{13\pi}{12} + \pi k, k \in Z$
В. $\frac{5\pi}{12} + \pi k \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + \pi k, k \in Z$
Г. $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$

3 7. Розв'яжіть рівняння $3\cos x + 2\sin x = -3$.

- А. $\pi + 2\pi k, k \in Z$
Б. $\pi + 2\pi k, k \in Z; 2\arctg 1,5 + 2\pi n, n \in Z$
В. $\pi + 2\pi k, k \in Z; -2\arctg 1,5 + 2\pi n, n \in Z$
Г. $\pi + \pi k, k \in Z; -2\arctg 1,5 + 2\pi n, n \in Z$

8. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3\operatorname{ctg} x - 2} = 2 - \operatorname{ctg} x$.

- А. $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \operatorname{arccotg} 6 + \pi n, n \in Z$
Б. $\operatorname{arccotg} 6 + \pi n, n \in Z$
В. $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ Г. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

9. Розв'яжіть нерівність $2\cos^2 x - 2\sin^2 x < \sqrt{3}$.

- А. $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k, k \in Z$
Б. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$
В. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$
Г. $-\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$

4 10. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

- А. $\frac{\pi}{16}$ Б. $\frac{\pi}{8}$ В. $\frac{\pi}{12}$ Г. $\frac{\pi}{4}$

11. Скільки розв'язків, що належать проміжку $[-\pi; 2\pi]$, має рівняння $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$?

- А. 2 Б. 3 В. 4 Г. 5

12. Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 + \sin x} \leq 0$.

- А. 5 Б. 3 В. 2 Г. 4

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 29-31

1 Розв'яжіть рівняння (1-2):

1. $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$. 2. $\sin x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$.

3. За малюнком 23.17 розв'яжіть

нерівність $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Розв'яжіть рівняння (4-5):

4. 1) $\cos x - 2\sin^2 x + 1 = 0$;

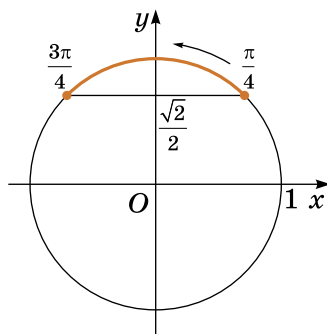
2) $\cos 2x + \sin x + 2 = 0$.

5. 1) $\sin 3x + \sin 5x = 0$;

2) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) < 1$.



Мал. 23.17

3 7. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x + 3\cos x = -2$;

2) $\cos 5x = 1 + \cos 10x$.

8. Розв'яжіть нерівність $\sin 4x \cos 4x > -\frac{1}{4}$.

4 9. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 4x + \cos^2 8x = 1$.

Додаткові завдання

3 10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2 \operatorname{tg} x - 1} = 2 - \operatorname{tg} x$;

2) $\cos 5x + \cos 3x = \sqrt{5} \cos x$.

4 11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3 \leq 0$; 2) $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{3 - \cos x} > 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 26

1 1. Який з виразів не має змісту:

1) $\arcsin(-0,9)$; 2) $\arccos 0,4$; 3) $\arcsin(-1,9)$;
4) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\arccos 3$; 6) $\operatorname{arcctg}(-111)$?

2. Знайдіть за допомогою таблиць (с. 239, 243):

1) $\arcsin 1$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $\operatorname{arctg} 1$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2 Обчисліть (3–5):

3. 1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

4. 1) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 2) $\cos\left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5. 1) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 2) $\cos(2 \operatorname{arcctg} 1)$.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; 2) $y = \arcsin(x - 5)$.

7. Порівняйте вирази:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\operatorname{arcctg}(-1)$.

3 8. Обчисліть: 1) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\sin^2\left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

9. Дослідіть функцію на парність:

1) $y = \operatorname{arctg}^2 2x$; 2) $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$.

10. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{\pi + \arcsin(x - 5)}{4}$; 2) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$.

11. Знайдіть нулі функції:

1) $y = \arcsin(4x - 5x^2)$; 2) $y = \arccos(x^2 - 2x - 7)$.

12. Обчисліть:

1) $\cos(\arcsin 0,6)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$;

3) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-1\frac{7}{8}\right)\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg}(-0,75))$.

13. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2} \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arctg} x - \pi$.

4 14. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{7}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0,5 + \operatorname{arctg}(-1,5))$.

15. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{81 - x^2} + \arcsin \frac{2x - 1}{5}$; 2) $y = \arccos \frac{x - 2}{5} + \sqrt{\frac{x - 1}{3 - x}}$;

3) $y = \arccos(|x| - 2) + \frac{1}{x^2 - x - 2}$; 4) $y = \sqrt{\frac{3 - x}{x - 5}} + \arcsin \frac{x + 3}{6}$.

16. Обчисліть:

1) $\cos(\arccos 0,28 - \operatorname{arctg} 0,75)$;

2) $\sin(\operatorname{arctg} 0,5 - \arccos(-0,75))$;

3) $\sin(2 \arccos 0,6)$;

4) $\sin\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}\right)$.

17. Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \operatorname{arctg}(x + 3) - \pi$.

До § 27

1 18. Чи має розв'язки рівняння:

1) $\arccos x = \pi$; 2) $\arcsin x = \frac{\pi}{8}$; 3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;

4) $\operatorname{arctg} x = \pi$; 5) $\arcsin x = -\pi$; 6) $\arccos x = -1$;

7) $\operatorname{arctg} x = 1$; 8) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10}$?

2 Розв'яжіть рівняння (19–23):

19. 1) $\arcsin x = 0$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{2}$.

20. 1) $\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos 4x = \frac{\pi}{6}$;
 3) $\operatorname{arctg} \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}(x + \sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

3 21. 1) $\arccos(x^2 - 4x + 3) = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin(x^2 - 3x + 0,5) = \frac{\pi}{6}$;
 3) $\arcsin(x^2 + 2x - 4) = \frac{\pi}{6}$; 4) $6 \operatorname{arctg}(x^2 - 3) + 4\pi = 0$.

22. 1) $\arcsin(x^2 - 2x) = \arcsin(x - 2)$;
 2) $\operatorname{arctg}(2x + 3) + \operatorname{arctg}(2x - 1) = \frac{\pi}{2}$.

23. 1) $3 \arcsin^2 x - 4\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$;
 2) $\operatorname{arctg}^2 x + 2 \operatorname{arctg} x - 3 = 0$;
 3) $\operatorname{arctg}^2(3x + 1) + 2 \operatorname{arctg}(3x + 1) = 0$;
 4) $\arccos^2 \frac{x}{3} + 4 \arccos \frac{x}{3} - 5 = 0$.

Розв'яжіть нерівність (24–25):

24. 1) $\operatorname{arctg}(2x - 7) \geq \operatorname{arctg}(x + 3)$;
 2) $\arccos(x - 3) < \arccos(2 - x)$.

25. 1) $\arccos x \geq \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin x \leq -\frac{\pi}{4}$;
 3) $\operatorname{arctg} x > 2$; 4) $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4}$.

26. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - a$; 2) $\arccos x = \frac{a}{2}$;
 3) $\operatorname{arctg} x = 2a$; 4) $\operatorname{arctg} x = \pi + a$?

4 Розв'яжіть рівняння (27–28):

27. 1) $\arcsin x = \arccos x$; 2) $\operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} x$.

28. 1) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$;
 2) $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}$;
 3) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{3\pi}{4}$;
 4) $\operatorname{arctg}(x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

29. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x - 2 \arccos x > \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos x \geq \arcsin x$;

3) $2 \operatorname{arctg} x > \operatorname{arctg} x$.



30. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \arcsin 2x$;

2) $\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$.

До § 28



31. Які з рівнянь не мають коренів, а які – мають безліч коренів:

1) $\cos x = -0,8$; 2) $\sin x = -\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = 0,01$;

4) $\sin x = 0,02$; 5) $\cos x = 1,4$; 6) $\operatorname{ctg} x = -100$?

Розв'яжіть рівняння (32–34):

32. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

4) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x = -1$; 6) $\operatorname{ctg} x = 0$.



33. 1) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{3} = 1$;

3) $\operatorname{tg} \frac{x}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x = -\sqrt{3}$.

34. 1) $\sin x = 0,25$; 2) $\cos x = \frac{1}{3}$;

3) $\operatorname{tg} x = 0,2$; 4) $\operatorname{ctg} x = -0,5$.

35. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{3}{2 \sin \frac{x}{4} - \sqrt{2}}$; 2) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{8} \right) - \sqrt{3}}$.



36. Розв'яжіть рівняння (36–37):

36. 1) $\cos(2x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} - 35^\circ \right) = -1$.

37. 1) $2\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 2$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \left(6x + \frac{\pi}{3} \right)} = 2$.

38. Застосовуючи формули тригонометрії, зведіть рівняння до найпростішого та розв'яжіть його:

$$1) \frac{2 \operatorname{tg} 4x}{1 - \operatorname{tg}^2 4x} = \sqrt{3}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg} 7x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 7x \operatorname{tg} x} = -1;$$

$$3) \cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x = -\frac{1}{2};$$

$$4) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

39. Для кожної з функцій $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ і $y = 2 \cos 4x$ знайдіть координати точок перетину її графіка з прямою:

$$1) y = 1; \quad 2) y = -1.$$

4 Розв'яжіть рівняння (40–41):

$$40. 1) \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8};$$

$$2) \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8};$$

$$3) \sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + 2 \sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$41. 1) \operatorname{tg} \pi \sqrt{x} = -\sqrt{3}; \quad 2) \operatorname{ctg}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0.$$

42. Знайдіть найменший додатний і найбільший від'ємний корені рівняння $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

43. При яких значеннях a має корені рівняння:

$$1) \cos 3x = \frac{1}{\sqrt{a+3}}; \quad 2) (a-2) \sin x = a^2 + a - 6?$$

До § 29–30

2 44. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos^2 x - 11 \cos x + 10 = 0; \quad 2) \sin^2 x - 3 \sin x - 4 = 0;$$

$$3) 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0; \quad 4) 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0;$$

$$5) \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0; \quad 6) \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0.$$

45. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2 \sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0; \quad 2) \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = 3.$$

46. Розв'яжіть рівняння, розклавши на множники його ліву частину:

- 1) $\sin 4x - \sin 6x = 0$; 2) $\sin 7x + \sin 5x = 0$;
3) $\cos 8x - \cos 2x = 0$; 4) $\cos 10x + \cos 2x = 0$.

47. Розв'яжіть однорідне рівняння:

- 1) $\sin x - \cos x = 0$; 2) $5 \sin x + 7 \cos x = 0$.

Розв'яжіть рівняння (48–51):

48. 1) $4 \cos^2 x + 4 \sin x - 1 = 0$; 2) $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$.

49. 1) $\cos 2x + 2 \cos x + 1 = 0$; 2) $\cos 2x - 3 \sin x - 2 = 0$.

50. 1) $\sqrt{3} \sin x + \sin 2x = 0$; 2) $\sin 2x - 2 \cos^2 x = 0$.

51. 1) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 3x + 3 \cos 3x \sin 3x - 4 \sin^2 3x = 0$.

3 52. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод допоміжного кута:

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; 2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$.

Розв'яжіть рівняння (53–57):

53. 1) $\sin^2 x + 2,5 \sin 2x + 2 = 0$;
2) $2 \sin^2 2x + 2,5 \sin 4x + 3 \cos^2 2x = 0$;
3) $3 \sin x + 2 \cos x = -3$;
4) $9 \cos x + 13 \sin x = -\frac{1}{\sin x}$.

4 54. 1) $1 + \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{4}$; 2) $\cos x + \cos 3x = \cos 7x + \cos 9x$;

3) $\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$; 4) $\sin x - \cos x = \cos 2x$.

55. $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = 1,5$.

56. 1) $\sin 7x \sin x = \cos 6x$; 2) $\sin x \cos 2x = \sin 3x \cos 4x$.

57. 1) $\frac{\sin 4x}{\cos 2x} = 0$; 2) $\frac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x + \sin x} = 0$.

58. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 x + 2a \sin x \cos x - a \cos^2 x = 0$ має розв'язки?

До § 31

2 Розв'яжіть нерівність (59–61):

59. 1) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} x < -1$.

61. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$;

2) $\cos\frac{x}{6} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2x \leq \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > -\sqrt{3}$.

62. 1) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} > 0$;

2) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 0$;

3) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0$;

4) $5\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 5 < 0$.

3 63. Застосовуючи формули тригонометрії, зведіть нерівність до найпростішої та розв'яжіть її:

1) $\sin 2x \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos^2 2x \leq \frac{3}{4}$.

4 64. Чи може кожний кут трикутника задовольняти нерівність:

1) $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$;

2) $\operatorname{tg} \alpha \geq 1$?

65. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 0$;

2) $\frac{1}{2} \leq \cos x < 1$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 11) = \dots$

А. 4.

Б. 3.

В. -3.

Г. -17.

2. Відомо, що $f'(3) = -1$. До графіка функції $y = f(x)$ проведено дотичну в точці графіка з абсцисою $x_0 = 3$. Знайдіть кут, що утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

А. $\frac{\pi}{6}$.

Б. $\frac{\pi}{4}$.

В. $\frac{\pi}{3}$.

Г. $\frac{3\pi}{4}$.

3. Знайдіть похідну функції $f(x) = 7x^{-3}$.

А. $-\frac{21}{x^4}$.

Б. $\frac{21}{x^4}$.

В. $-\frac{21}{x^2}$.

Г. $-\frac{21}{x^3}$.

2 4. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2 - 2}$.

А. -6.

Б. 0.

В. -3.

Г. ∞ .

5. Знайдіть приріст функції $f(x) = x^2 + 1$ у точці $x_0 = 2$, якщо приріст аргументу $\Delta x = 0,1$.

- А. 0,1. Б. 1,41. В. 0,4. Г. 0,41.

6. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 7$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах).

Знайдіть швидкість тіла в момент часу $t = 4$ с.

- А. 9 м/с. Б. 7 м/с. В. 6 м/с. Г. 8 м/с.

3 7. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

- А. 1,5. Б. $\frac{2}{3}$. В. ∞ . Г. неможливо знайти.

8. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 2)$.

- А. $\frac{15x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$. Б. $\frac{15x^2 + 2}{2\sqrt{x}}$. В. $\frac{15x^2 + 2}{\sqrt{x}}$. Г. $\frac{9x^2 + 2}{\sqrt{x}}$.

9. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{\cos x}{3 - \sin x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

- А. 0,5. Б. -0,75. В. -1. Г. -0,5.

4 10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$.

- А. $\frac{1}{2}$. Б. $-\frac{1}{2}$. В. 2. Г. ∞ .

11. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 4x$, що паралельна прямій $y = 1 - 2x$.

- А. $y = -2x - 7$. Б. $y = -2x - 9$.
В. $y = -2x + 9$. Г. $y = -2x$.

12. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$.

- А. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Б. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
В. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Г. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 32–36

1 1. Знайдіть: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 5$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 7)$.

2. Відомо, що $f'(2) = \sqrt{3}$. Знайдіть:

1) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці з абсцисою $x_0 = 2$;

2) кут, що утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

3. Знайдіть похідну функції $f(x)$, якщо:

- 1) $f(x) = x^9$; 2) $f(x) = \sin x$;
3) $\varphi(x) = 9x^{-2}$; 4) $\varphi(x) = 2 \operatorname{ctg} x$.

2 4. Знайдіть:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 3}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 4 \right)$;
3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x + 1}$.

5. Знайдіть приріст функції $f(x) = x^2 - 2$ в точці $x_0 = 3$, якщо приріст аргументу $\Delta x = 0,2$.

6. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + 3$ (t вимірюється в секундах, x - у метрах).

Знайдіть швидкість тіла в момент часу:

- 1) $t = 4$ с; 2) $t = 10$ с.

3 7. Знайдіть похідну функції:

- 1) $t(x) = \sqrt{x}(2x^2 - 1)$; 2) $p(x) = \frac{x^2 - x}{x + 3}$.

8. Знайдіть $g'(x_0)$, якщо:

- 1) $g(x) = (3x^2 + 5)(2x - 1)$, $x_0 = -1$;
2) $g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, $x_0 = 0$.

9. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x - 7$, яка паралельна прямій $y = 6x$.

Додаткові завдання

3 10. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$.

4 11. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{4}{3}x - \operatorname{tg} x$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть функцію, що є складеною.

А. $y = x^3$; Б. $y = x^3 - 2x$;

В. $y = (2x - 1)^3$; Г. $y = \frac{1}{3}x^3$.

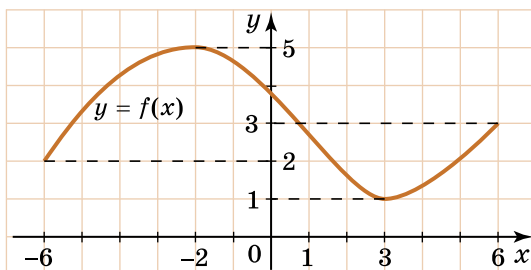
2. На малюнку 40.6. зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Знайдіть проміжок спадання функції.

А. $[1; 5]$;

Б. $[-2; 3]$;

В. $[-6; -2]$;

Г. $[-2; 6]$.



Мал. 40.6

3. Знайдіть точку мінімуму функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 40.6.

А. Немає точок мінімуму; Б. $x = -2$;

В. $x = 1$; Г. $x = 3$.

2 4. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt{0,5x - 4}$.

А. $y' = \frac{1}{\sqrt{0,5x - 4}}$; Б. $y' = \frac{1}{2\sqrt{0,5x - 4}}$;

В. $y' = \frac{1}{4\sqrt{0,5x - 4}}$; Г. $y' = \frac{2}{\sqrt{0,5x - 4}}$.

5. Знайдіть усі критичні точки функції $y = x^3 - 6x^2 + 1$.

А. 0; 4; Б. -4; 0;

В. 0; Г. критичних точок немає.

6. Знайдіть усі проміжки зростання функції $y = 9x + 3x^2 - x^3$.

А. $(-\infty; -1]$, $[3; +\infty)$ Б. $[-1; 3]$;

В. $[-3; 1]$; Г. проміжків зростання немає.

3 7. Знайдіть $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \cos 6x - \sin 3x$.

А. -3;

Б. -9;

В. 6;

Г. 3.

8. Укажіть функцію, що спадає на всій множині дійсних чисел.

А. $y = x^3 + x$; Б. $y = -x - x^3$;

В. $y = x^4 + x$; Г. $y = -x - x^4$.

9. Знайдіть усі максимуми функції $y = \frac{x-2}{x^2-3}$.

А. $y_{\max} = \frac{1}{6}$;

Б. $y_{\max} = \frac{1}{2}$;

В. $y_{\max} = \frac{1}{6}$, $y_{\max} = \frac{1}{2}$;

Г. функція не має максимумів.

4 10. При яких значеннях параметра a функція $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4ax + 11$ зростає на R ?

А. $a \geq 16$;

Б. $a \leq \frac{1}{16}$;

В. $a \geq -\frac{1}{16}$;

Г. $a \leq -\frac{1}{16}$.

11. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{4x+8}$, яка паралельна прямій $y = 5 + x$.

А. $y = x$;

Б. $y = x + 1$;

В. $y = x - 3$;

Г. $y = x + 3$.

12. Знайдіть множину значень функції $y = 6\sqrt{x} - x + 1$.

А. $(-\infty; 10]$;

Б. $(-\infty; 9]$;

В. $[0; +\infty)$;

Г. $[0; 10]$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 37-40

1 1. Які з функцій є складеними:

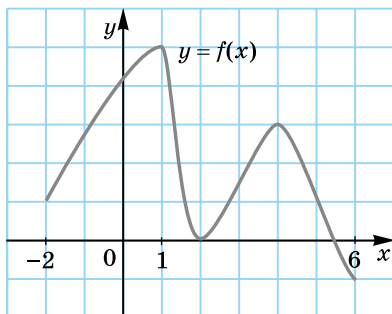
1) $y = \cos 3x$;

2) $y = \sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt[3]{4x-1}$;

4) $y = x^5 - 2x$?

2. На малюнку 40.7 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 6]$. Укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.



Мал. 40.7

3. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції, графік якої зображено на малюнку 40.7.

2 4. Знайдіть похідну складеної функції:

1) $y = (x + 3)^4$; 2) $y = (4x - 1)^8$;

3) $y = \sqrt{\frac{1}{3}x - 5}$; 4) $y = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = 3x^2 - x^3$.

6. Знайдіть проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та екстремуми функції $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$.

3 7. Знайдіть $g'(x_0)$ якщо:

1) $g(x) = \sin 2x + \cos 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

2) $g(x) = \sqrt{2x + 4} - 3 \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

8. Дослідіть властивості функції $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ та побудуйте її графік.

4 9. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{8x - 7}$, що паралельна прамій $y = 4x + 5$.

Додаткові завдання

3 10. Доведіть, що функція

1) $y = x^3 + x^2 + x - 9$ зростає на R ;

2) $y = \cos 2x + 5x$ спадає на R .

11. 1) Дослідіть властивості функції $f(x) = x\sqrt{x + 3}$ та побудуйте її графік.

2) При яких значеннях параметра a рівняння $x\sqrt{x + 3} = a$ має єдиний розв'язок?

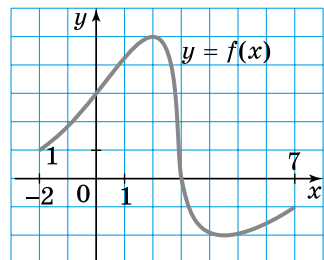
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. На малюнку 44.10 зображено графік функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[-2; 7]$. Знайдіть найбільше значення цієї функції на цьому проміжку.

А. 2; Б. 3; В. 4; Г. 5.

2. Укажіть функцію, що має асимптоти.



Мал. 44.10

А. $y = \frac{8}{x}$; Б. $y = 8x$; В. $y = 8x^2$; Г. $y = 8x - 8$.

3. Знайдіть другу похідну функції $y = x^6$.

А. $6x^4$; Б. $30x^4$; В. $6x^5$; Г. $120x^3$.

2 4. Знайдіть найменше значення функції $y = x^3 - 3x$ на проміжку $[0; 3]$.

А. 0; Б. -1; В. -2; Г. -3.

5. Знайдіть вертикальні асимптоти до графіка функції $y = \frac{9 - x^2}{3 + x}$ (якщо вони існують).

А. $y = 3$; Б. $y = -3$;
В. $y = 6$; Г. вертикальних асимптот немає.

6. Знайдіть проміжок, на якому графік функції $y = 6x^2 - x^3$ опуклий униз.

А. $(-\infty; 2)$; Б. $(-\infty; -2)$; В. $(2; +\infty)$; Г. $(-2; +\infty)$.

3 7. Число 12 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток куба одного з них на інший був найбільшим.

А. $10 + 2$; Б. $9 + 3$; В. $8 + 4$; Г. $6 + 6$.

8. Знайдіть усі точки перегину функції $f(x) = 2 \cos x$, визначеної на проміжку $[0; 2\pi]$.

А. $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$; Б. $0; \pi; 2\pi$; В. $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$;

Г. немає точок перегину.

9. Скільки розв'язків має рівняння $4 - \sqrt{x} = x^7 + x$?

А. Жодного; Б. 1; В. 2; Г. більше 2.

4 10. Знайдіть точку графіка функції $y = 2 - x^2$, найближчу до точки $C\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

А. $(0; 2)$; Б. $(1; 1)$; В. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$; Г. $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

11. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29$. Якому проміжку належить найбільший корінь рівняння?

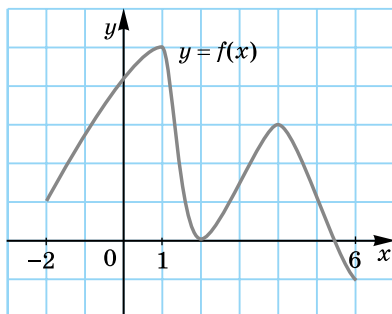
А. $[1; 4)$; Б. $[4; 6)$;
В. $[6; 9]$; Г. рівняння не має коренів.

12. Знайдіть усі асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2}{x+3}$.

А. $x = -3$; Б. $y = x + 3$;
В. $x = -3$; $y = x - 3$; Г. $x = -3$; $y = x + 3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 41-44

- 1** 1. На малюнку 44.11 подано графік функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[-2; 6]$. Яким є найбільше значення цієї функції і яким – найменше?



Мал. 44.11

2. Чи має асимптоти графік функції:

1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = 3x + 8$?

3. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = 4$; 2) $y = 2 \cos x$; 3) $y = x^3$; 4) $y = 3x$.

- 2** 4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 4x - 2$ на проміжку $[0; 3]$.

5. Знайдіть вертикальні асимптоти до графіків функцій (якщо вони існують):

1) $f(x) = \frac{2}{x-5}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$.

6. Дослідіть функцію $y = x^3 - 2x^2 - 7x$ на опуклість і точки перегину.

- 3** 7. Число 30 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток четвертого степеня одного з них на інший був найбільшим.

8. Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 2x^3$ за допомогою першої та другої похідних і побудуйте ескіз її графіка.

- 4** 9. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6$.

Додаткові завдання

- 3** 10. Знайдіть похилу асимптоту до графіка функції (якщо вона існує):

1) $f(x) = \frac{3-x}{x+5}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x+1}$.

- 4** 11. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{4x}{1-x^2}$ на опуклість і точки перегину.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 5

До § 32

- 1** 1. Знайдіть: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-11)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8}$.
2. Обчисліть границю: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^7}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1}$.
- 2** 3. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -2$. Знайдіть:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - d_n)$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n \cdot d_n)$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}$.
4. Обчисліть границю: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n^2 - 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \frac{3}{n})$.
5. Знайдіть: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^5 + x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} + 5 \right)$.
- 3** 6. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-3}{2n+1} = 3$.
7. Обчисліть: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n^2}{n^3 + 1}$.
8. Обчисліть: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n-1} \right)$.
- 4** 9. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2 - n + 1}$.
10. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{n-1}$.
11. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$. Чи можуть бути в послідовності (a_n) члени, більші за 10^{10} ?

До § 33

- 1** 12. Знайдіть границю функції:
- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x + 1)$.

13. Чи буде функція $g(x)$ неперервна в точці 1, якщо:

1) $g(x) = 2x + 7$; 2) $g(x) = \frac{4}{1-x}$?

2 14. Знайдіть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 3x - 17)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x \cos x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{3 - x}$.

15. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow -1} t(x) = 3$. Знайдіть границю в точці -1 для функції:

1) $y = -t(x)$; 2) $y = t(x) + 5$; 3) $y = \frac{9}{t(x)}$; 4) $y = \frac{t(x)}{t(x) - 2}$.

16. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})$.

17. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 17)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x - 4)$.

3 18. Користуючись означенням границі, доведіть, що $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$.

19. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$. Знайдіть границю в точці 2 для функції:

1) $y = f(x) - 3g(x)$; 2) $y = 4f(x) + 2g(x)$;
3) $y = f^3(x) - g(x)$; 4) $y = \frac{f(x) + g(x)}{f(x) - 3}$.

20. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$;
3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$.

21. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x - 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{4x^2}$;
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 1}{2x^3 + x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 6x^2 + 3}{2x + 3x^2}$.

4 22. Користуючись означенням границі, доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{4x-4} = -\frac{1}{2}.$$

23. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + x - 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|-x^2 - 3x + 4|}{|1-x|}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2}$.

24. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$.

До § 34

1 25. Знайдіть приріст аргументу Δx , якщо:

1) $x_0 = 4$, $x = 4,002$; 2) $x_0 = 1$, $x = 0,999$.

2 26. Знайдіть приріст функції $f(x)$ у точці x_0 при заданому прирості аргументу:

1) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$;

2) $f(x) = 4 - x^2$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,2$.

27. Знайдіть приріст функції $y(x) = \operatorname{tg} x$ у точці $x_0 = 0$, якщо:

1) $\Delta x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\Delta x = -\frac{\pi}{6}$.

28. Використовуючи формули, знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2$ в точках $x_0 = -3$ і $x_0 = 2$;

2) $p(x) = x^3$ в точках $x_0 = 1$ і $x_0 = 0$;

3) $g(x) = \frac{1}{x}$ у точках $x_0 = 0,1$ і $x_0 = -1$;

4) $\varphi(x) = \sqrt{x}$ у точках $x_0 = 1$ і $x_0 = 4$.

29. 1) Побудуйте графік функції $f(x) = x + 3$.

2) Укажіть приріст функції у точці x_0 через x_0 і Δx .

3) Знайдіть $\Delta f(x_0)$, якщо $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,5$.

4) Проілюструйте зроблене малюнком.

3 30. Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції $\varphi(x)$ у точці x_0 :

1) $\varphi(x) = x - 2x^2$, $x_0 = 1$; 2) $\varphi(x) = 2 + \frac{8}{x}$, $x_0 = 2$.

31. Складіть і розв'яжіть рівняння:

1) $f'(x) = 4f(x)$, якщо $f(x) = x^2$;

2) $p'(x) = \frac{1}{3}$, якщо $p(x) = \sqrt{x}$.

32. Складіть і розв'яжіть нерівність $f'(x) + \frac{f(x)}{x^2} \geq 0$, якщо $f(x) = x^3$.

33. Порівняйте $\varphi'\left(\frac{1}{3}\right)$ і $\varphi'\left(\frac{1}{4}\right)$, якщо $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.

4 34. Користуючись означенням похідної, знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x_0 = 4$.

35. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 3 - 4x$; 2) $t(x) = x^2 + 8x$.

36. Складіть і розв'яжіть рівняння $|g(x)| = g'(x)$, якщо $g(x) = x^3$.

До § 35

1 37. Відомо, що $g'(2) = \sqrt{3}$. Знайдіть:

1) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = g(x)$, що проведена в точці з абсцисою $x_0 = 2$;

2) кут, що утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

38. Дотична до графіка функції $y = \varphi(x)$, що проведена в точці з абсцисою x_0 , утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° . Знайдіть $\varphi'(x_0)$.

2 39. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

40. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $g(x) = \frac{1}{x}$, що проведена в точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{2}$.

41. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \sqrt{t}$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу:

1) $t = \frac{1}{4}$ с; 2) $t = 9$ с.

42. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

3 43. На графіку функції $f(x) = \frac{1}{x}$ знайдіть точки, у яких дотична до $f(x)$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135° .

44. Матеріальна точка рухається за законом $x(t) = t^2$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати 16 м/с?

45. Знайдіть точку, у якій дотична до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ паралельна прямій $y = \frac{1}{4}x - 7$.

4 46. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3$, яка паралельна прямій $y = 3x - 7$.

47. Дано графік функції $f(x) = x^2$.

1) Складіть рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

2) Виконайте малюнок.

3) Знайдіть площу трикутника, що обмежений відрізками дотичної та осей координат.

48. У якій точці перетинаються дотичні, проведені до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точках з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_0 = -\frac{1}{2}$.

До § 36

1 49. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^3$; 2) $g(x) = \operatorname{ctgx}$;

3) $p(x) = x^{-2}$; 4) $t(x) = x^{2010}$.

50. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 7x$; 2) $\varphi(x) = 5x^7$; 3) $\psi(x) = 2\operatorname{tg}x$; 4) $m(x) = 3x^{-4}$.

51. Знайдіть похідну функції:

1) $g(x) = \cos x + x^7$; 2) $f(x) = x^{-3} - \sin x$.

2 52. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \frac{x^{10}}{2}$; 2) $g(x) = -\frac{x^5}{5}$; 3) $t(x) = \frac{5}{x}$; 4) $p(x) = \frac{1}{x^{11}}$.

53. Знайдіть похідну функції:

1) $m(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7$; 2) $f(x) = 2\cos x - 6\sqrt{x} + x^{-7}$.

54. Знайдіть $f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = \sin x - 2x^3$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = 6\text{ctg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

55. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 \cos x$; 2) $g(x) = x \text{tg} x$.

56. Знайдіть похідну функції:

1) $t(x) = \frac{x+3}{x^5}$; 2) $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$.

57. Дано $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$. Знайдіть: $f'(0,01)$, $f'(4)$, $f'(100)$.

58. Знайдіть значення похідної функції $m(x) = \text{tg} x - \text{ctg} x$ у точці x_0 , якщо $x_0 = \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$.

59. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = 3x + 2x^3$ в точці з абсцисою -1 .

60. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{3}{4}t^4 - 5t$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу:

1) $t = 2$ с; 2) $t = 4$ с.

61. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:

1) $g(x) = 12x - x^2$; 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

62. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \geq 0$, якщо $f(x) = 6x + x^2$.

63. Порівняйте $f'(0)$ і $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, якщо:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \cos x$.

64. Порівняйте $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $g(x) = \text{tg} x$.

3 65. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = (2x^3 - 4)(3x^2 + 7)$; 2) $g(x) = (2x - 7)\sqrt{x}$.

66. Знайдіть значення похідної функції $t(x) = (8\sqrt{x} - 2)(x^2 - 3)$ у точці $x_0 = 4$.

67. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 3}$; 2) $g(x) = \frac{x^7 - 2}{x^5}$.

68. Дано $g(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-2}$. Знайдіть: $g'(0)$, $g'(3)$.

69. Розв'яжіть нерівність $f'(0) \geq 0$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$; 2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$.

70. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:

1) $g(x) = \frac{8x - x^2}{x+1}$; 2) $g(x) = 16\sqrt{x} - 2x + 11$.

71. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = 8 + 24t - 2t^2$ (x - вимірюється в метрах, t - у секундах).

1) У який момент часу швидкість тіла буде 8 м/с?

2) У який момент часу тіло зупиниться?

72. На графіку функції $f(x) = 7x - x^2$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° .

73. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f'(x) = \sin x - \cos x$.

74. На графіку функції $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ знайдіть точки, у яких дотична до графіка функції паралельна осі абсцис.

75. Знайдіть точки графіка функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$, у яких дотична до графіка функції паралельна прямій $y = 3 - x$.

76. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x) = 6x - x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

77. Розв'яжіть рівняння $t'(x) = p'(x)$, якщо $t(x) = 2\cos x$, $p(x) = 7 - x$.

78. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$ в точці перетину його з віссю ординат.

79. Знайдіть похідну функції $p(x) = \frac{4\operatorname{tg}x}{3 - \operatorname{ctg}x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4 80. Складіть рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 - 6x + 7$.

81. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 7x - x^2$, що паралельна прямій $3x + y - 7 = 0$.

82. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = 4x - \operatorname{tg}x$.

83. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

84. Складіть рівняння дотичних до графіка функції $f(x) = \frac{x-4}{x+5}$,

що утворюють з додатним напрямом осі абсцис кути 45° .

До § 37

1 85. Для кожної з поданих складених функцій укажіть внутрішню функцію $u(x)$:

1) $f(x) = (7x - 1)^6$;

2) $g(x) = \sqrt{3x - 2}$;

3) $t(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$;

4) $m(x) = \cos(3x^2 + 2x)$.

86. Чи правильно знайдено похідну:

1) $(x^3)' = 3x^2$;

2) $(2x - 1)^3 = 3(2x - 1)^2$;

3) $(x^5)' = 25x^4$;

4) $(2x - 1)^5 = 10(2x - 1)^4$?

2 87. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = (x + 2)^7$;

2) $f(x) = (3x - 7)^6$;

3) $g(x) = \left(\frac{1}{4}x + 7\right)^5$;

4) $g(x) = \sqrt{6x - 7}$.

88. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \operatorname{tg} 3x$;

2) $y = 2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$;

3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

89. Знайдіть $g'(x_0)$, якщо:

1) $g(x) = (3x + 2)^6$, $x_0 = -1$;

2) $g(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = 0$.

90. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^6$, проведеної у точці з абсцисою $x_0 = 9$.

3 91. Знайдіть похідну складеної функції:

1) $y = \sqrt{6 - x^2}$;

2) $y = (x^5 - 3)^6$;

3) $y = (2x + x^3)^{-4}$;

4) $y = \frac{1}{(x^6 - 2)^7}$.

92. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = (x^2 - 8x)^5$.

93. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

2) $y = \operatorname{ctg}^4 x$.

94. Знайдіть $f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = \cos 2x - \sin 8x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} - \frac{1}{2} \cos x, x_0 = 0.$$

95. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

$$1) f(x) = \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right), x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \cos \frac{x}{3}, x_0 = 3\pi.$$

96. Знайдіть похідну функції, попередньо спростивши її:

$$1) f(x) = \cos x \cos \frac{\pi}{8} - \sin x \sin \frac{\pi}{8};$$

$$2) f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4};$$

$$3) f(x) = \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6};$$

$$4) f(x) = \cos^2 4x - \sin^2 4x.$$

97. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sin \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right)$.

4 98. Складіть рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ у точці перетину його з віссю ординат.}$$

99. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

$$1) f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x - \sin x + 3;$$

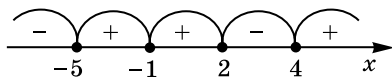
$$2) f(x) = \sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x.$$

100. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{7-2x}$, якщо ця дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135° .

До § 38

1 101. Накресліть графік деякої функції, визначеної на проміжку $[-5; 5]$, яка зростає на проміжку $[-5; -1]$ і спадає на проміжку $[-1; 5]$.

102. Знак похідної функції $y = g(x)$, визначеної на R , змінюється за схемою, зображеною на малюнку 44.12. Визначте, на яких проміжках функція зростає, а на яких – спадає.



Мал. 44.12

2 103. Знайдіть критичні точки функції:

$$1) y = 14x + x^2;$$

$$2) y = x^3 - 9x^2.$$

104. Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції:

$$1) p(x) = x - 13;$$

$$2) \varphi(x) = 4 - 11x;$$

3) $m(x) = x^2 - 6x + 11$; 4) $f(x) = 3 - 8x - x^2$;
 5) $\psi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$; 6) $g(x) = 4x + \frac{1}{3}x^3$.

105. Доведіть, що функція:

1) $f(x) = -5x - x^5$ спадає на R ;
 2) $g(x) = 2x^3 + 4x$ зростає на R .

3 106. Знайдіть критичні точки функції:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$; 2) $g(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 5}$.

107. Знайдіть проміжки монотонності функції:

1) $f(x) = 1 + 9x + 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 + 2x - 3$;

3) $g(x) = 11 - x^3 - x$; 4) $g(x) = \frac{9}{x} + \frac{x}{9}$.

108. Доведіть, що функція:

1) $f(x) = 4x - \cos 3x$ зростає на R ;
 2) $g(x) = 7 - 4x + x^2 - x^3$ спадає на R .

4 109. Знайдіть критичні точки функції:

1) $f(x) = (x + 1)^3(x - 5)^3$; 2) $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 37}$.

110. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

1) $\varphi(x) = \frac{4x + 1}{1 - 5x}$; 2) $g(x) = \frac{x^2 + 5x + 7}{x^2 - 5x + 7}$;

3) $f(x) = x\sqrt{2 - x}$; 4) $\psi(x) = x - \sin 2x$.

111. При яких значеннях a функція $f(x) = 3 - ax^3 - 3ax^2 - 6x$ спадає на R ?

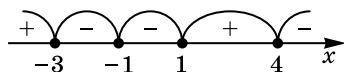
112. Скільки коренів має рівняння $x^7 + 5x^3 + 2 = 0$?

113. Чи має рівняння $x^8 + 8x - 3 = 0$ корінь на проміжку:

1) $[-3; -2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 0]$; 4) $[0; 1]$?

До § 39

1 114. Знак похідної функції $y = f(x)$, визначеної на R , змінюється за схемою, зображеною на малюнку 44.13. Визначте точки максимуму і точки мінімуму функції $y = f(x)$.



Мал. 44.13

2 115. Знайдіть точки екстремуму функції $y = g(x)$. Які з них є точками максимуму, а які – точками мінімуму:

1) $g(x) = 3x + 6$;

2) $g(x) = 3x^2 - 12x$;

3) $g(x) = 5 - 6x + x^2$;

4) $g(x) = 3x - x^3$?

116. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

2) $g(x) = 14x - 4x^2 - 2x^3$;

3) $\varphi(x) = 4 + 12x - x^3$;

4) $\psi(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

3 117. Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції:

1) $y = \frac{2x-1}{x+1}$;

2) $y = x + \frac{16}{x}$;

3) $y = \frac{x-1}{x^2+3}$;

4) $y = 4x - 8\sqrt{x} + 11$.

118. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $f(x) = x^3(x-2)^3$;

2) $g(x) = \frac{8}{x^2-4x}$;

3) $t(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

4) $\varphi(x) = \frac{6x}{4-x^2}$.

4 119. Знайдіть точки екстремуму функції $y = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

120. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $y = 2x^6 - 3x^4 + 1$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

121. При яких значеннях a функція $f(x) = \sqrt{x-4} - (a-1)x$ не має точок екстремуму?

До § 40

2 122. Дослідіть властивості функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

2) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$;

3) $f(x) = 1,5x^2 - 3x$;

4) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - 12$.

123. Побудуйте графік функції та знайдіть множину її значень:

1) $\varphi(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$;

2) $\psi(x) = \frac{7}{2}x^2 - 7x + 1,5$.

3 124. Дослідіть властивості функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$;

3) $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - x^4$;

4) $f(x) = x^4 + 4x$.

125. 1) Дослідіть властивості функції $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$?

126. 1) Дослідіть властивості функції $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$.

4 127. Дослідіть функцію та побудуйте ескіз її графіка:

1) $f(x) = \frac{1-2x}{x+1}$;

2) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$.

128. 1) Дослідіть властивості функції $f(x) = x(\sqrt{x}-3)$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = x(\sqrt{x}-3)$.

129. 1) Дослідіть властивості функції $y = (6-2x)\sqrt{x}$ та побудуйте її графік.

2) При яких значеннях параметра a рівняння $(6-2x)\sqrt{x} = a$ має два розв'язки?

130. 1) Дослідіть властивості функції $f(x) = \frac{3x+x^2}{x-1}$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{3x+x^2}{x-1} = a$ залежно від параметра a ?

131. 1) Дослідіть властивості функції $f(x) = x^2\sqrt{5-x}$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = x^2\sqrt{5-x}$.

3) Скільки розв'язків має рівняння $x^2\sqrt{5-x} = 16$?

4) Скільки розв'язків має рівняння $x^2\sqrt{5-x} = 15$?

До § 41

2 132. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на даному проміжку:

- 1) $f(x) = 5 - 2x$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$, $[-1; 2]$;
 3) $f(x) = x^2 - 6x$, $[1; 4]$; 4) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $[-1; 3]$.

133. Парканом завдовжки 180 м треба обгородити прямокутну ділянку землі найбільшої площі. Знайдіть розміри цієї ділянки.

134. Знайдіть два числа, різниця яких дорівнює 30, а добуток – найменший з можливих.

135. Поділіть відрізок завдовжки 12 см на два так, щоб прямокутний трикутник, катетами якого є ці відрізки, мав найменшу гіпотенузу.

3 **136.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = g(x)$ на заданому проміжку:

- 1) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2$, $[-1; 4]$;
 2) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$, $[-2; 0]$;
 3) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$, $[-1; 2]$; 4) $g(x) = 6x^2 - x^3$, $[-1; 5]$.

137. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 8t + 9$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах). Яке найбільше і яке найменше значення $x(t)$ за перші 5 секунд руху?

138. Число 10 подайте у вигляді суми двох додатних доданків так, щоб добуток першого з них на четвертий степінь іншого був найбільшим.

139. Знайдіть невід’ємне число, при відніманні якого від потроєного куба цього числа отримаємо найменшу різницю.

140. Число 60 подайте у вигляді суми двох додатних доданків так, щоб сума куба одного з них і квадрата іншого була найменшою.

141. Ділянку землі прямокутної форми, площа якої 200 м², потрібно обгородити з трьох сторін парканом. За яких розмірів ділянки матеріалу на паркан буде витрачено найменше?

4 **142.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на вказаному проміжку:

- 1) $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{1 - x}$, $[2; 6]$; 2) $f(x) = x^2 \sqrt{20 - x}$, $[4; 19]$.

143. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x) = x + \cos 2x$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

144. У рівносторонній трикутник зі стороною 4 см вписано прямокутник найбільшої площі так, що одній стороні трикутника належать дві вершини прямокутника, а двом іншим – по одній. Знайдіть розміри прямокутника.

145. Знайдіть розміри відкритого басейну, об'єм якого 144 м^3 і з дном у формі прямокутника, сторони якого відносяться як $1 : 3$, щоб на облицювання його всіх стінок і дна пішла найменша кількість матеріалу.

До § 42

3 146. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 - \sqrt[6]{x} = x^5 + 2x$; 2) $11 - \sqrt{x-1} = x^3 + x$.

147. Доведіть, що $x^3 + 2x - 3 > 0$ для всіх $x > 1$.

4 148. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} = x^2 - 4x + 6$; 2) $x^4 - 2x^2 = |\cos \pi x| - 2$.

149. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 - x^5 + 4x = -4$; 2) $x^5 + x^3 = \frac{80}{x}$.

150. Доведіть, що $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

151. Доведіть, що $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

До § 43

1 152. Чи має асимптоти графік функції:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{2}{x} + 1$?

2 153. Знайдіть вертикальну асимптоту до графіка функції (якщо вона існує):

1) $f(x) = \frac{1}{x-4}$; 2) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+1}$.

3 154. Знайдіть похилу асимптоту до графіка функції (якщо вона існує):

1) $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{2x-x^2}{x-1}$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$; 4) $f(x) = x^4 - \frac{5}{x}$.

155. Побудуйте схематично графік функції $y = f(x)$, області визначення якої є множина всіх дійсних чисел, крім чисел 1, 3 і 7 за умови, що графік функції має дві асимптоти $x = 1$ і $x = 7$.

4 156. Знайдіть усі асимптоти графіка функції:

$$1) f(x) = 2 - \frac{x}{x-1}; \quad 2) f(x) = \frac{5x^2}{x+2}.$$

157. Знайдіть усі асимптоти графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

До § 44

2 158. Знайдіть другу похідну функції:

$$1) f(x) = x^3 - 2x + 3; \quad 2) f(x) = x^7 - \sin x.$$

3 159. Знайдіть другу похідну функції:

$$1) f(x) = \frac{2-3x}{4+2x}; \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}.$$

160. Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:

$$1) f(x) = 12x^2 - x^3 + 7; \quad 2) f(x) = \sin x, x \in [-2\pi; 0].$$

161. Дослідіть властивості функції $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ за допомогою першої та другої похідних і побудуйте схематично її графік.

4 162. Знайдіть другу похідну функції:

$$1) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-2}; \quad 2) f(x) = \cos 3x + \sin 3x.$$

163. Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:

$$1) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}; \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (-\pi; 0).$$

164. Дослідіть властивості функції $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$ за допомогою першої та другої похідних та побудуйте її графік.

165. *Практичне завдання.* Дослідіть функцію $f(x) = 3x + \frac{1}{x^3}$ за допомогою першої та другої похідних та побудуйте її графік на міліметровому папері.