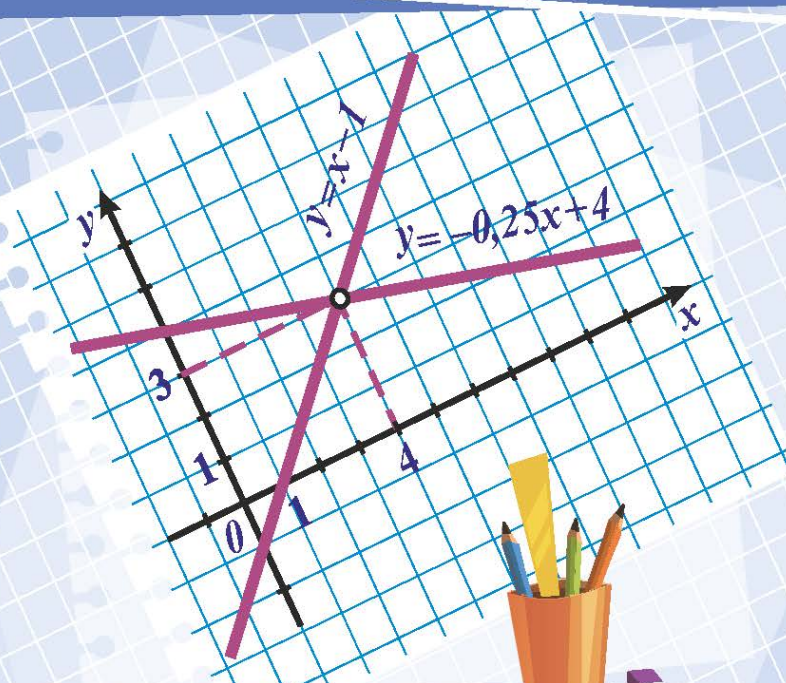


Василь Кравчук, Марія Підручна, Галина Янченко

АЛГЕБРА

клас

7



Видавництво



ТМ «Підручники
і посібники»

Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

Посібник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Частина 1

Схвалено для використання в освітньому процесі



Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2023

УДК 51(075.3)
К77

**Посібник створено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, М. П. Пихтар,
Б. В. Рубльов, В. В. Семенов, М. С. Якір)**

Схвалено для використання в освітньому процесі.
Протокол № 8 засідання експертної комісії з математики від 17.08.2023 р.
для закладів загальної середньої освіти, які беруть участь в інноваційному
освітньому проєкті всеукраїнського рівня за темою
«Розроблення і впровадження навчально-методичного забезпечення для закладів
загальної середньої освіти в умовах реалізації Державного стандарту
базової середньої освіти» у 2023/2024 навчальному році.

№ 3.0471-2023 у Каталогі надання грифів навчальній літературі
та навчальним програмам

Кравчук В.
К77 Алгебра: посібн. для 7 класу закл. загал. серед. освіти. Ч. 1 /
В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Під-
ручники і посібники, 2023. — 116 с.

ISBN 978-966-07-4116-4

УДК 51(075.3)

ШАНОВНІ СЕМИКЛАСНИКИ І СЕМИКЛАСНИЦІ!

Ви розпочинаєте вивчення однієї з основних математичних дисциплін — алгебри. Сподіваємося, що цей підручник допоможе вам не загубитися в лабіринтах цієї поки що не пізної науки.

Матеріал, який ви вивчатимете, об'єднано в три розділи, що містять шість параграфів, які складаються з пунктів.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу.



Цим значком виділено означення, твердження та правила пункту, які потрібно зрозуміти і запам'ятати.

Звертайте також особливу увагу на текст, наведений на зеленому тлі. Курсивом у теоретичному матеріалі виділено слова, які означають математичні терміни.





Деякі пункти містять додатковий матеріал, поданий під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».



Щоб зрозуміти, запам'ятати й систематизувати матеріал, дайте відповіді на запитання, розміщені наприкінці теоретичної частини пункту.

Після теоретичного матеріалу розміщено рубрику «*Приклади розв'язання вправ*». Вона допоможе ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання. Початок і кінець розв'язання кожного завдання позначено значком (●).

Прочитавши теоретичний матеріал і поміркуювавши над зразками розв'язань задач, варто спочатку розв'язати *усні* вправи та простіші задачі, а відтак переходити до складніших.

Значками ①, ②, ③ і ④ виділено завдання, які відповідають початковому, середньому, достатньому і високому рівням навчальних досягнень. Завдання для роботи в парі позначено значком , а для роботи в групі — значком .

Якщо під час розв'язування якоїсь задачі ви натрапите на труднощі, перегляньте матеріали рубрики «Приклади розв'язання вправ», а також скористайтеся схемами, підказками, порадами.

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено синім кольором (наприклад, **175**).



Перевірити свої знання й уміння розв'язувати задачі можна за допомогою інтерактивних завдань. До такого завдання в пункті бажано звертатися тоді, коли опрацюєте ті задачі пункту, які йому передують.



Рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки. Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій.



Завершує матеріал пункту рубрика «Вправи для повторення», яка допоможе періодично повторювати основні види вправ і готуватися до вивчення нових тем.



Деякі пункти містять рубрику «Цікаво знати», з якої ви можете дізнатися про походження математичних понять і термінів, а також про внесок українських учених у розвиток математичної науки.

Свої знання можна перевірити, розв'язавши *завдання для самоперевірки*, розміщені наприкінці кожного параграфа.

Вивчайте алгебру із задоволенням.

Бажаємо успіхів!



Інтерактивне завдання 1
Повторення курсу математики 5 і 6 класів



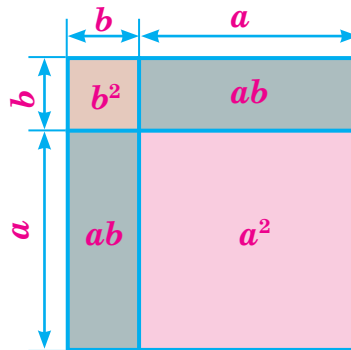
РОЗДІЛ I

ЦІЛІ ВИРАЗИ

Проводячи дослідження в різних галузях знань, часто звертаються до універсальної мови — мови математики. Елементами цієї мови є вирази, формули; їх використовують в усіх науках.

Із цього розділу ви дізнаєтеся:

- що таке вираз зі змінними, цілий вираз;
- як класифікують цілі вирази;
- що таке тотожність, тотожне перетворення виразу;
- на основі яких формул можна здійснювати перетворення виразів.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

§ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ. ОДНОЧЛЕНИ

1

ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Вирази зі змінними. У попередніх класах ми поділяли вирази на числові та буквені. Розглянемо задачі, які приводять до таких виразів.

Задача 1. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 12 м, а ширина — на 4 м менша. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

Розв'язання. Ширина ділянки дорівнює $(12 - 4)$ м, а площа — $12 \cdot (12 - 4)$ м². •

$12 \cdot (12 - 4)$ — числовий вираз.

Числові вирази утворюють з чисел, знаків дій і дужок.

$$7 + 3^2; 1,5 : (-3); \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) \cdot 15$$

Задача 2. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 12 м, а ширина — на b м менша. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

Розв'язання. Ширина ділянки дорівнює $(12 - b)$ м, а площа — $12(12 - b)$ м². •

$12(12 - b)$ — буквений вираз. Букві b можна надавати різні значення, b може дорівнювати 0,8; 5; 7,2; 10 тощо, тобто значення b можна змінювати. Тому b називають змінною, а вираз $12(12 - b)$ — виразом зі змінною.

Вирази зі змінними утворюють зі змінних, чисел, знаків дій і дужок.

$$3x + 1; a(a - b); -1,5mn^2; \frac{1}{k}$$

Виразом зі змінною вважають й окремо взятую змінну.

Якщо у вираз $12(12 - b)$ замість змінної підставити певне число, наприклад число 7, то одержимо числовий вираз $12 \cdot (12 - 7)$, значення якого дорівнює:

$$12 \cdot (12 - 7) = 12 \cdot 5 = 60.$$

Одержане число 60 називають значенням виразу $12(12 - b)$ для значення змінної $b = 7$.

2. Цілі вирази. Порівняємо дві групи виразів:

1 група

$$a + b, 3x^2, \frac{1}{3}(m - n), \frac{a - b}{5}$$

2 група

$$\frac{7}{a}, x : y, b - \frac{a}{d + 1}, \frac{a + b}{c}$$

Вирази першої групи не містять дії ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *цілими*.

Вирази другої групи містять дію ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *дробовими*, їх ми вивчатимемо у 8 класі.

3. Формули. Вирази зі змінними використовують для запису формул. Наприклад:

$S = ab$ — формула для обчислення площі прямокутника;

$V = abc$ — формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

Формулою $n = 2k$, де k — ціле число, задають парні цілі числа, а формулою $n = 2k + 1$ — непарні.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати у вигляді виразу:

- 1) добуток числа a і суми чисел b та c ;
- 2) частку різниці чисел m та n і числа 7;
- 3) різницю числа a і добутку чисел m та n .

- 1) $a(b + c)$; 2) $(m - n) : 7$; 3) $a - mn$. •

Примітка. Читаючи словами числові вирази чи вирази зі змінними, першою називають останню за порядком виконання дію, далі передостанню і т. д.

Вправа 2. Знайти значення виразу $a(a - b)$, якщо $a = 30$, $b = 7$.

- Якщо $a = 30$, $b = 7$, то
 $a(a - b) = 30 \cdot (30 - 7) = 30 \cdot 23 = 690$. •

Вправа 3. Записати у вигляді виразу число, яке має 9 сотень, c десятків, d одиниць.

$$\bullet 9 \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 900 + 10c + d. \bullet$$



1. З чого утворюють вирази зі змінними?
2. Як знайти значення виразу для певних значень змінних? Наведіть приклад.
3. Які вирази називають цілими виразами? Наведіть приклади цілих виразів.

«Усно»

1. Які з наведених записів є числовими виразами, виразами зі змінними та записами, що не є виразами:
 - 1) $7,2 : 3$; 2) 5 ; 3) $2x = 3$; 4) $a - c$;
 - 5) $0,5abx^2$; 6) $\frac{19-8}{5}$; 7) $-a$; 8) $(18-3) : 5 = 3?$
2. Прочитайте словами вирази зі змінними:
 - 1) $5 + x$; 2) $y : 7$; 3) $2ab$; 4) $(abc - 2) : 4$;
 - 5) $(a - 3) : a$; 6) $\frac{1}{4}z - 3,5$; 7) $\frac{b-c}{4}$; 8) $\frac{37}{x}$.

Які з наведених виразів є цілими виразами?
3. Знайдіть значення виразу:
 - 1) $2 - m$, якщо $m = 4$; 2) $a^2 + b$, якщо $a = 3$; $b = 1$.

«12»

4. Використовуючи число 7 та змінні a і b , запишіть:
 - 1) три цілих вирази; 2) не цілий вираз.
5. Запишіть три цілих вирази, використовуючи числа 4 і 5 та змінну x .
6. Запишіть у вигляді виразу:
 - 1) суму чисел 12 і k ; 2) частку чисел c і -7 ;
 - 3) куб числа a ; 4) різницю чисел $-a$ і b ;
 - 5) потроєний добуток чисел b і c ;
 - 6) добуток числа 3 і суми чисел a та c .
7. Запишіть у вигляді виразу:
 - 1) різницю чисел b і 9; 2) добуток чисел 3 і $-a$;
 - 3) квадрат числа x ; 4) суму чисел m і $-n$;
 - 5) подвоєну частку чисел a і c .

8. Знайдіть значення виразу:

- 1) $3x - 5$, якщо $x = 9$; 2) $3a + b$, якщо $a = -3$; $b = 8$;
 3) $-1 + 4c^2$, якщо $c = 0,5$; 4) $kn - 2,4$, якщо $k = -0,4$; $n = -7$;
 5) $2a + \frac{5}{8}$, якщо $a = \frac{3}{8}$; 6) $\frac{2}{5}b - 2c$, якщо $b = 10$; $c = \frac{1}{6}$.

9. Знайдіть значення виразу:

- 1) $-2a + 5$, якщо $a = -2$; 2) $2x - 3y$, якщо $x = 1,5$; $y = 2$;
 3) $15 - s^2$, якщо $s = 4$; 4) $xy - \frac{1}{6}$, якщо $x = \frac{2}{9}$; $y = \frac{3}{4}$.

10. Заповніть таблицю:

x	5	7	-1	-2	-8	-10
y	1	-1	0	2	-0,5	-6
$x - 2y$						
	в	о	д	у	ч	о

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку зростання.

11. Заповніть таблицю:

b	1	0	5	10	-2,5
c	5	-10	-15	15	-10
$4b - c$					
	о	с	ч	и	л

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку спадання.

12. У магазин привезли n пакетів борошна по 5 кг у кожному. Запишіть у вигляді виразу масу всього борошна. Знайдіть значення цього виразу, якщо $n = 48$.

13. Тополя за добу виробляє 40 кг кисню. Запишіть у вигляді виразу масу кисню, яку виробляє тополя за k діб. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 5$.

14. У потягу x плацкартних вагонів по 54 пасажирських місць у кожному та y купейних вагонів по 36 місць у кожному. Запишіть у вигляді виразу кількість усіх пасажирських місць у потягу.

15. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки, якщо було куплено 2 пакети соку, по a грн кожний, і 6 тістечок, по b грн кожне.

3

16. Знайдіть значення виразу:

1) $3ab - 4c^2$, якщо $a = -0,4$; $b = -25$; $c = 1,5$;

2) $8,5 \cdot (a - 3,7) + 4\frac{3}{8}b$, якщо $a = 6,3$; $b = -\frac{6}{7}$;

3) $\left(3\frac{2}{9} - m - n\right) \cdot 36$, якщо $m = -\frac{2}{3}$; $n = 1\frac{1}{6}$.

Математика — це мова, якою написана книга природи.
Галілео Галілей*

17. Знайдіть значення виразу:

1) $4(a + bc) - 3,6$, якщо $a = 3,2$; $b = -2,4$; $c = 2,5$;

2) $0,5a + 3\frac{1}{2}\left(b - 1\frac{1}{7}\right)$, якщо $a = 3\frac{1}{5}$; $b = 2$.

18. За формулою шляху $s = vt$ знайдіть s (у кілометрах), якщо:

1) $v = 75$ км/год; $t = 20$ хв; 2) $v = 20$ м/с; $t = 2$ хв.

19. За формулою шляху $s = vt$ знайдіть s (у метрах), якщо $v = 150$ м/хв; $t = 10$ с.

20. Для яких значень b значення виразу $4 - 2b$ дорівнює 18?

21. Для яких значень a значення виразу $2a + 5$ дорівнює 10?

22. Для яких значень x значення виразу $3x - 12$ дорівнює значенню виразу $-4 - x$?

23. Запишіть у вигляді виразу число, яке має:

1) a десятків і b одиниць; 2) a сотень і c одиниць;

3) a сотень, 7 десятків і b одиниць;

4) a тисяч, b сотень і a одиниць.

24. Запишіть у вигляді виразу число, яке має:

1) a сотень і b десятків;

2) 5 сотень, a десятків і b одиниць.

25. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють a см, b см, 5 см.

26. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні куба, ребро якого дорівнює k см.

27. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 1.

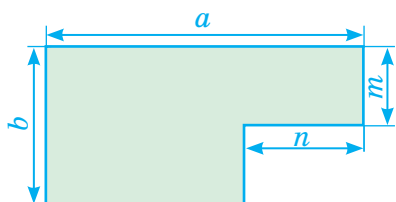


Рис. 1

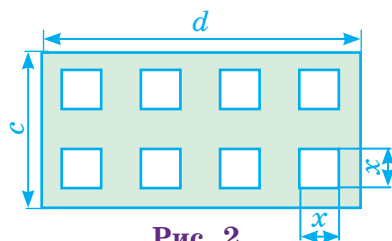


Рис. 2

28. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 2.
29. Ціна першого смартфона k грн, другого — на 500 грн менша, ніж першого, а третього — на 10 % більша, ніж другого. Знайдіть ціну третього смартфона. Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $k = 7500$.
30. У парку посадили m кленів, каштанів — на 10 більше, ніж кленів, а лип — на 40 % менше, ніж каштанів. Скільки лип посадили в парку? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $m = 45$.




Інтерактивне завдання 2

Вирази зі змінними. Цілі вирази



4

31. Яких значень може набувати вираз $a^2 - b^2$, якщо:
 1) $|a| = 1$; $|b| = 0$; 2) $|a| = |b|$?
32. Яких значень може набувати вираз $4m^2 - 1$, якщо $|m| = 0,5$?
33.  Цілі числа, які при діленні на 5 дають в остачі 2, задають формулою $n = 5k + 2$, де k — ціле число. Які з чисел 28, -3 , -28 при діленні на 5 дають в остачі 2?
34. Запишіть у вигляді виразу суму квадратів двох послідовних цілих чисел.
35. Запишіть у вигляді виразу добуток трьох послідовних цілих чисел.
36. У магазині на ряд товарів знизили ціни на те саме число відсотків, використавши формулу $y = 0,75x$, де x грн — початкова ціна товару, y грн — його ціна після знижки. На скільки відсотків знизили ціни на ці товари?

Вправи для повторення



37. Обчисліть зручним способом:

1) $0,25 \cdot (-11) \cdot 4$;

2) $2,4 \cdot 8 - 28 \cdot 2,4$;

3) $12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$;

4) $1\frac{2}{7} \cdot 15 + \frac{5}{7} : \frac{1}{15}$.

38. Зведіть подібні доданки:

1) $3a - 7 + 5a - 10a$;

2) $4x + 9y + 2y - 5x$.

39. Розкрийте дужки:

1) $4(a + 2b - 0,5c)$;

2) $5(m - 1) - (n - k)$.

40. Для облаштування території новобудови на двох ділянках мають засіяти траву. Відомо, що площа першої ділянки в 1,7 раза, або на 350 м^2 , більша за площу другої. Скільки потрібно кілограмів насіння, щоб засіяти обидві ділянки, якщо на 1 м^2 землі засівати 20 г насіння?

Поміркуйте



41. На дереві сидять 15 мавп так, що попарні відстані між ними є різними. Кожна мавпа дивиться на найближчу до себе мавпу. Чи обов'язково знайдуться дві мавпи, які дивляться одна на одну?

Цікаво знати



Записуючи вирази, рівняння, нерівності, ми користуємося математичними символами «+», «-», «=», «<», « a^2 » та багатьма іншими. Така єдина система умовних знаків складалася в алгебрі поступово.

Значну роль у цьому процесі відіграв французький математик Франсуа Вієт, який уперше почав записувати рівняння за допомогою символів. Завдяки його працям алгебра стала наукою про рівняння, яка ґрунтується на використанні символів (букв).



Франсуа Вієт (1540–1603),
французький математик.

Першим увів єдину, послідовно проведену систему алгебраїчних символів

ТОТОЖНО РІВНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНОСТІ

1. Тотожно рівні вирази. Знайдемо значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ для кількох значень a і b , поданих у таблиці.

a	b	$5a - 5b$	$5(a - b)$
1	0	5	5
4	2	10	10
3	-1	20	20
-2	-2	0	0

Для кожної з наведених пар значень a і b значення виразів дорівнюють одне одному. Так, якщо $a = 4$, $b = 2$, то значення обох виразів дорівнюють 10. З розподільної властивості множення відносно віднімання випливає, що відповідні значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ дорівнюють одне одному для будь-яких значень змінних. Такі вирази називають *тотожно рівними*.



Означення. Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для будь-яких значень змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.

Розглянемо тепер вирази $5a + b$ і $a + 5b$. Якщо $a = 1$ і $b = 1$, то відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному:

$$5a + b = 5 \cdot 1 + 1 = 6; \quad a + 5b = 1 + 5 \cdot 1 = 6.$$

Якщо ж $a = 2$, $b = 1$, то відповідні значення цих виразів різні:

$$5a + b = 5 \cdot 2 + 1 = 11; \quad a + 5b = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$

Отже, значення виразів $5a + b$ і $a + 5b$ для одних значень змінних дорівнюють одне одному, а для інших — ні. Такі вирази не є тотожно рівними.

Щоб довести, що два вирази не є тотожно рівними, досить вказати хоча б один набір значень змінних, для якого відповідні значення виразів є різними.

2. Тотожності. Якщо два тотожно рівні вирази $5a - 5b$ і $5(a - b)$ сполучити знаком «=», то одержимо рівність $5a - 5b = 5(a - b)$, яка є правильною для будь-яких значень змінних. Таку рівність називають *тотожністю*.



Означення. Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають **тотожністю**.

Прикладами тотожностей є рівності, які виражають основні властивості додавання і множення чисел:

Переставна властивість	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Сполучна властивість	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Розподільна властивість	$a(b + c) = ab + ac$	

Тотожностями є також рівності, які виражають правила розкриття дужок:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Тотожностями є й такі рівності:

$$a - b = a + (-b)$$

$$a \cdot (-b) = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$a + 0 = a$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 = a$$

3. Тотожні перетворення виразів. У виразі $4b + 3b - 1$ зведемо подібні доданки $4b$ і $3b$:

$$4b + 3b - 1 = (4 + 3)b - 1 = 7b - 1.$$

Вираз $4b + 3b - 1$ замінили тотожно рівним йому виразом $7b - 1$.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають **тотожним перетворенням виразу**.

Тотожні перетворення використовують для спрощення виразів. Спростимо, наприклад, вираз $9a + 3 - 2(4a - 1)$:

$$9a + 3 - 2(4a - 1) = \underline{9a} + 3 - \underline{8a} + 2 = a + 5.$$

Спростивши вираз, ми одержали тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис або, як кажуть, є «компактнішим».

Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести, що деяка рівність є тотожністю, використовують один з таких способів:

- 1) одну частину рівності шляхом тотожних перетворень зводять до другої частини;

- 2) обидві частини рівності зводять до того самого виразу;
 3) утворюють різницю лівої та правої частин рівності та показують, що вона тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Довести тотожність $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

Розв'язання. Перетворюватимемо ліву частину рівності:

$$a - 3 - (4a + 7) = \underline{a} - \underline{3} - \underline{4a} - \underline{7} = -3a - 10.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 2. Довести тотожність $15 = (27 - 5m) - (12 - 3m - 2m)$.

Розв'язання. Перетворюватимемо праву частину рівності:

$$(27 - 5m) - (12 - 3m - 2m) = \underline{27} - \underline{5m} - \underline{12} + \underline{3m} + \underline{2m} = 15.$$

Шляхом тотожних перетворень праву частину рівності звели до лівої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 3. Довести тотожність $2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$.

Розв'язання. Перетворюватимемо окремо ліву та праву частини рівності:

$$2c + 3 - 2(3 - 2c) = \underline{2c} + \underline{3} - \underline{6} + \underline{4c} = 6c - 3;$$

$$3(2c - 3) + 6 = \underline{6c} - \underline{9} + \underline{6} = 6c - 3.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву та праву частини рівності звели до того самого виразу $6c - 3$. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 4. Довести тотожність $10x - 2(2x - 3y) = 6(x + y)$.

Розв'язання. Утворимо різницю лівої та правої частин рівності та спростимо її:

$$10x - 2(2x - 3y) - 6(x + y) = \underline{10x} - \underline{4x} + \underline{6y} - \underline{6x} - \underline{6y} = 0.$$

Різниця лівої і правої частин рівності тотожно дорівнює нулю, тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

$$\bullet a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - 3b - 2 + 4b = = 3a + b - 2. \bullet$$

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2(2x - 1) - (5 - x) = 3x + 2$.

$$\bullet 4x - 2 - 5 + x = 3x + 2; \quad 5x - 7 = 3x + 2;$$

$$5x - 3x = 2 + 7; \quad 2x = 9; \quad x = 4,5.$$

Відповідь. 4,5. \bullet



1. Які вирази називають тотожно рівними? Наведіть приклади тотожно рівних виразів.
2. Що називають тотожним перетворенням виразу?
3. Що називають тотожністю? Наведіть приклади тотожностей.
4. Як доводять тотожності?

«Усно»

42. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $5 + 6x$ і $6x + 5$; 2) $a - b$ і $b - a$?

Відповіді обґрунтуйте.

43. Чи є тотожністю рівність:

1) $ab - 2 = -2 + ab$; 2) $2(k - 3) = 2k - 3$?

Відповіді обґрунтуйте.

44. Назвіть кілька виразів, тотожно рівних виразу $x + 4x$.

45. Спростіть вираз:

1) $4a - 3 + 2a$; 2) $mn - (mn - 5)$.

«12»

46. Зведіть подібні доданки:

1) $7a - 3a + 6$; 2) $-4 + 3z - 8z$;
 3) $4b - 7 + 3b + 5$; 4) $6,5b - 7a + 5a$;
 5) $-7, 2x + 8y - 5x - 8y$; 6) $m - 3n + 1,6n + 2n$.

47. Зведіть подібні доданки:

1) $5k - 6k + 3k$; 2) $4c - 1 - 6c + 4$;
 3) $-2x + 3y - 6x - 5y$; 4) $3b - a + 0,6a + 0,4a$.

48. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $5(8m + 9) + (4m - 5)$; 2) $2(5b - 3a) - (1,5b - 2a)$;
3) $-4(2x + 1,5y) + 4(2x + 1)$; 4) $2(2x - 4y) - 3(2x + 5y + 2)$.
49. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $3(4x - 2z) - (5z + 10x)$; 2) $-3(3a + 1) - 5(a - 3b)$.
50. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $7(a - 10) + a - 5$, якщо $a = 3$;
2) $-2,5b - (11 - 1,5b) + b$, якщо $b = 0,2$;
3) $2x - 3(1 - y) + 4y$, якщо $x = -2$; $y = 5$.
51. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $6 + 3(2k - 4) - 8k$, якщо $k = -1$;
2) $3(a + 6) - (a - 3b) - 4b$, якщо $a = 3$, $b = -3$.
52. Доведіть тотожність:
1) $(a + b) - (a - b) = 2b$; 2) $2b \cdot (-4) + 8b - 4 = -4$;
3) $2x - 5(1 - 2x) = 12x - 5$; 4) $2(3k - 4) + 14 - 6k = 6$;
5) $m - (4m - 3n) = 3(n - m)$; 6) $2c = 12c - 5(2c + 3) + 15$.
53. Доведіть тотожність:
1) $2b + 2(1 - b) = 2$; 2) $2m - (k + 2m) + k = 0$;
3) $3a - 6(3 - 2a) = 3(5a - 6)$; 4) $2x + 10 = 8x + 2(5 - 3x)$.
54. Розв'яжіть рівняння:
1) $7x - x - 3x = 12$; 2) $1,2y + 1 - 2,7y = 4$;
3) $5z + 2(3 - z) = 6$; 4) $-6x - (1 - 2x) = 2$.
55. Розв'яжіть рівняння:
1) $2,5x - 2x + 1,5x = -2$; 2) $6(x - 1) - 8x = 6$.
56. За першу хвилину Катя пробігла n м, а за другу — на 20 м менше. Скільки метрів пробігла Катя за дві хвилини?
57. На одній ділянці росте k яблунь, а на другій — на 12 яблунь більше. Скільки яблунь росте на обох ділянках разом?
58. Перший автомат за 1 хв розфасовує m кг борошна, а другий — на 5 кг більше. Запишіть у вигляді виразу масу борошна, яке розфасують обидва автомати за 10 хв.
59. Довжина майданчика прямокутної форми дорівнює a м, а ширина — на 3 м менша. Запишіть у вигляді виразу периметр майданчика.

60. Одна сторона трикутника дорівнює b см, а дві інші — вдвічі довші. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника.



61.  Запишіть у вигляді тотожності твердження:

- 1) сума числа і протилежного йому числа дорівнює нулю;
- 2) добуток двох чисел дорівнює добутку протилежних їм чисел;
- 3) квадрат числа дорівнює квадрату модуля цього числа;
- 4) сума числа a й числа, протилежного числу b , дорівнює різниці чисел a і b .

62. Запишіть у вигляді тотожності твердження:

- 1) добуток будь-якого числа і нуля дорівнює нулю;
- 2) квадрат числа дорівнює квадрату протилежного йому числа.

63. Спростіть вираз:

- 1) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 2c$;
- 2) $0,2(x - 1) - 0,4(5 - 2x) - 2,3$;
- 3) $-(4x + y + 3z) - 2(x - 3z)$;
- 4) $1\frac{1}{3}(2a - 3b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;
- 5) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$;
- 6) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.

64. Спростіть вираз:

- 1) $-(3a - 6) + 6(1 - a)$;
- 2) $0,9(a - 3b) - 0,2(5b - 3a)$;
- 3) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$;
- 4) $\frac{2}{9}(2(x - y) - 4x) + \frac{2}{3}x$.

65. Знайдіть значення виразу $12,8a - 1,4b - 2(1,4a - 3,2b)$, якщо $a = -2,1$; $b = 7,2$.

66. Знайдіть значення виразу $78x - 52y - 4(7x + 12y)$, якщо $x = -1,04$; $y = -0,52$.

67. Доведіть, що значення виразу $3(1,5 - 0,2x) - 0,2(2x - 1) + x$ не залежать від значень x .

68. Доведіть, що значення виразу $a + 0,5(1 - 4a) - 2(0,1 - 0,5a)$ не залежать від значень a .

69. Доведіть, що вираз $-2(1 - 3k) - 3(2(k - 1) - 1)$ набуває лише одного значення. Чому дорівнює це значення?

70. Доведіть тотожність:
 1) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;
 2) $3(10t - 5(m - k)) = 5(6k - 3(k - t))$.
71. Доведіть тотожність:
 1) $2(a - b - 1) - (a + b - 1) - (a - b + 1) = -2(b + 1)$;
 2) $1 - (1 - (1 - n)) = 2 - (3 - (2 - n))$.
72. Розв'яжіть рівняння:
 1) $2(3x - 1) - 3(2 - x) = 1$; 2) $4y - 3(y - 1) = 5(y - 3)$.
73. Розв'яжіть рівняння:
 1) $-3(1 - y) + 3(1 - 2y) = 9$; 2) $8x - 5 - 2(x - 1) = 4x$.
74. Шлях між двома містами автобус проїхав за 3 год. За першу годину він проїхав k км, що на 8 км більше, ніж за другу, і на 4 км менше, ніж за третю. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 80$.
75. У першому пакеті було x яблук, а в другому — в 1,5 раза більше. З першого пакета взяли 7 яблук, а в другий поклали 3 яблука. Скільки яблук стало в обох пакетах разом?
76. На банківській картці було k грн, а після поповнення ця сума зросла на 60 %.
 1) На скільки гривень поповнили рахунок?
 2) Скільки гривень стало на картці?



Інтерактивне завдання 3

Тотожно рівні вирази. Тотожності



77. Доведіть, що сума і різниця двох непарних натуральних чисел є парними числами.
78. Натуральні числа a і b при діленні на 3 дають в остачі 1. Доведіть, що різниця цих чисел ділиться на 3.
79. Ціна товару n грн. Спочатку цю ціну знизили на 20 %, а згодом нову ціну підвищили на 20 %.
 1) Знайдіть ціну товару після двох переоцінок.
 2) На скільки гривень ця ціна менша від початкової?

80. Футболка коштує a грн. Якщо купувати дві футболки, то на другу магазин дає скидку 30 %. Скільки гривень доведеться заплатити, якщо купувати дві футболки?

Вправи для повторення



81. Обчисліть: 1) $15^2 - 6^3$; 2) $(1,2^2 - 1,84)^3$.
82. Ребро куба, виготовленого із пластмаси, дорівнює 5 см. Знайдіть масу куба, якщо 1 см^3 пластмаси має масу 2 г.
83. Український літак АН-225 («Мрія») — найбільший і найпотужніший у світі транспортний літак — увійшов до Книги рекордів Гіннеса, установивши низку рекордів. Один з них — перевезення найбільшого в історії авіації моновантажу (генератора), маса якого 174 т і становить 69,6 % маси літака. Знайдіть масу незавантаженого літака.
84. Рік тому пакет акцій фірми коштував 7500 грн, а сьогодні — 8100 грн. На скільки відсотків зросла вартість пакета акцій фірми за цей період?

Поміркуйте



85. Скільки можна виготовити різних намист, маючи 12 білих і 2 чорні перлини? (Одне з таких намист зображено на рисунку 3.)

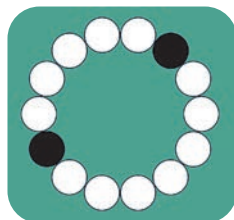


Рис. 3

3

СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Нагадаємо, що добуток двох або трьох однакових множників, кожний з яких дорівнює a , — це відповідно квадрат або куб числа a . Наприклад:

$$5 \cdot 5 = 5^2; \quad 5^2 \text{ — квадрат числа } 5;$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3; \quad 5^3 \text{ — куб числа } 5.$$

Квадрат числа 5 називають ще другим степенем цього числа, а куб — третім степенем.

Відповідно добуток $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ позначають 5^4 і називають четвертим степенем числа 5. У виразі 5^4 число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз 5^4 називають *степенем*.



Означення. Степенем числа a з натуральним показником n , більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a .

Степенем числа a з показником 1 називають саме число a .

Степінь з основою a й показником n записують так: a^n , читають: « a в степені n », або « n -ий степінь числа a ».

Отже, за означенням

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}}, \text{ якщо } n > 1, \quad a^1 = a.$$

Розглянемо приклади знаходження значень степенів:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

піднесли число 3 до п'ятого степеня

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

піднесли число -2 до третього степеня (до куба)

$$0,5^2 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

піднесли число 0,5 до другого степеня (до квадрата)

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником.

1) **Якщо $a = 0$, то $a^n = 0$.** Справді, $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{n \text{ разів}} = 0$.

Будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

2) **Якщо $a > 0$, то $a^n > 0$** (добуток n додатних чисел є додатним числом).

Будь-який натуральний степінь додатного числа є число додатне.

3) **Якщо $a < 0$ і n — парне, то $a^n > 0$** (добуток парної кількості від'ємних чисел є додатним числом).

Якщо $a < 0$ і n — непарне, то $a^n < 0$ (добуток непарної кількості від'ємних чисел є від'ємним числом).

Зазначимо, що значення степеня a^n дорівнює 0 тільки при $a = 0$. Тому рівняння $x^n = 0$, де n — натуральне число, має лише один корінь $x = 0$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити: $(-3)^5 + 100 \cdot 1,5^2$.

• Виконуючи обчислення, можна:

а) записувати обчислення в рядок:

$$(-3)^5 + 100 \cdot 1,5^2 = -243 + 100 \cdot 2,25 = -243 + 225 = -18;$$

б) записувати кожну дію окремо:

1) $(-3)^5 = -243;$ 2) $1,5^2 = 2,25;$

3) $100 \cdot 2,25 = 225;$ 4) $-243 + 225 = -18.$

Відповідь. $-18.$ •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $(2x - 1)^7 = 0$.

• $(2x - 1)^7 = 0;$ $2x - 1 = 0;$ $2x = 1;$ $x = 1 : 2;$ $x = 0,5.$

Відповідь. $0,5.$ •



1. Що називають степенем числа з натуральним показником?

2. Наведіть приклад степеня з натуральним показником і назвіть його основу й показник.

3. Який знак має степінь з натуральним показником залежно від знака основи?

««Усно»»

86. Прочитайте вирази, назвіть основи й показники степенів:

$$a^{12}; \quad (-3)^4; \quad (-0,05)^{20}; \quad m^9; \quad 3^m; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3; \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^7.$$

87. Обчисліть: $0^{15}; 1^{15}; (-1)^4; (-1)^5; 2^4; (-2)^4; 3^3; (-3)^3; 10^4.$

88. Значення яких із наведених степенів є додатними; від'ємними:

$$(-7)^4; \quad (-11)^3; \quad 15^6; \quad (-21)^2; \quad 3^3; \quad 17^{31}; \quad (-1,5)^{20}; \quad (-0,05)^{11}?$$

89. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) $(-5)^6$ і $0;$ 2) $(-5)^5$ і $0;$ 3) $(-5)^5$ і $5^5;$ 4) $(-5)^6$ і $(-6)^5.$

90. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

2) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ разів}}$;

3) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ разів

5) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$; 6) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$.

91. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;

2) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

3) $\underbrace{(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot \dots \cdot (-1,5)}_{12 \text{ разів}}$; 4) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

92. Запишіть у вигляді добутку степінь:

1) 9^6 ;

2) $(-7)^4$;

3) a^5 ;

4) $(bc)^4$.

93. Запишіть у вигляді добутку степінь:

1) 8^5 ;

2) $(-2x)^3$.

94. Знайдіть значення степеня:

1) 12^2 ;

2) 4^4 ;

3) $(-5)^4$;

4) $(-11)^3$;

5) $0,5^3$;

6) $(-0,1)^4$;

7) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$;

8) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$.

95. Знайдіть значення степеня:

1) 5^3 ;

2) 2^5 ;

3) $(-3)^4$;

4) $(-1)^5$;

5) $0,3^3$;

6) $(-0,3)^3$;

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$;

8) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

96.  Заповніть таблицю:

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
a^3							
a^4							

97. Заповніть таблицю:

n	1	2	3	4	5
$(-3)^n$					
	с	л	и	о	ч

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку зростання.

98. Обчисліть:

- 1) $6 \cdot (-2)^4$; 2) $6 \cdot (-2^4)$; 3) $5 \cdot (-3)^3$; 4) $5 \cdot (-3^3)$;
 5) $5^3 - 4 \cdot 5^2$; 6) $(-6 \cdot 0,5)^5$; 7) $0,1^3 - 0,1^2$; 8) $(15 - 16)^{10}$.

99. Обчисліть:

- 1) $(3 - 7)^4$; 2) $2 \cdot (-5^3)$; 3) $(-4 + 3)^9$; 4) $2^6 + 2 \cdot (-3)^3$.

100.  Знайдіть значення виразів:

- 1) a^2 ; $(-a)^2$; $-a^2$, якщо $a = 3$; 2) a^3 ; $(-a)^3$; $-a^3$, якщо $a = 10$.

101. Знайдіть значення виразу:

- 1) $x^2 - 5$, якщо $x = 2,5$; 2) $(7 - b)^4$, якщо $b = 9$;
 3) $a^2 + a^3$, якщо $a = 0,1$; 4) $a^2 - b^2$, якщо $a = 25$; $b = 15$.

102. Знайдіть значення виразу:

- 1) $a^3 + 1$, якщо $a = -2$; $a = 2$;
 2) $(x + 1)^4$, якщо $x = -2$; $x = -0,8$.

103. Швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с. Задайте цю швидкість натуральним числом у кілометрах за секунду.

104. Площа Азовського моря дорівнює $3,9 \cdot 10^4$ км². Задайте цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.



105. Порівняйте значення виразів:

- 1) $(5 \cdot 2)^3$ і $5^3 \cdot 2^3$; 2) $(2 + 3)^4$ і $2^4 + 3^4$;
 3) $1 : (-2)^4$ і $(-0,5)^4$; 4) $(-2)^5 \cdot (-3)^6 \cdot (-4)^7$ і 0^8 .

106. Порівняйте значення виразів:

- 1) $(7 - 5)^2$ і $7^2 - 5^2$; 2) $(10 : 2)^4$ і $10^4 : 2^4$;
 3) $(-3 \cdot 2)^3$ і $(-3)^3 \cdot 2^3$; 4) $(-5)^4 \cdot (-4)^5 \cdot (-3)^6$ і 0^7 .

107. Залежність величини y від величини x задано формулою $y = x^4 + x^3 + x^2 + x$. Заповніть таблицю:

x	-2	-1	0	1	2
y					

108. За формулою $y = x^5 - x^4 + x^3$ знайдіть y , якщо $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$.

109. Запишіть числа 5, 125, 3125 у вигляді степенів числа 5.

110. Запишіть числа 16, 64, 256 у вигляді степенів числа 2.

111. Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

$$27; 144; -125; 216; 0,125; 0,001; \frac{25}{81}; 6\frac{1}{4}; -3\frac{3}{8}.$$

112. Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

$$64; 1000; -8; 6,25; 0,008; -\frac{27}{125}; 1\frac{11}{25}.$$

113. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x - 2)^8 = 0; \quad 2) (5x + 10)^3 = 0; \quad 3) (1,2 - 3x)^6 = 0.$$

114. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x + 5)^4 = 0; \quad 2) (3x - 18)^9 = 0; \quad 3) (-2x + 0,5)^3 = 0.$$



Інтерактивне завдання 4

Степінь з натуральним показником



4

115.  Знайдіть значення виразу, якщо $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

1) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{99} + a^{100}$ (ця сума має 100 доданків, кожний з яких є степенем числа a ; показники степенів — усі натуральні числа від 1 до 100 включно);

2) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{98} + a^{99}$.

116. Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) (b - 1)^2 + 1; \quad 2) (2y + 1)^8 - 5.$$

Для якого значення змінної значення виразу є найменшим?

117. Для якого значення a найбільшого значення набуває вираз:

$$1) -(a + 5)^6; \quad 2) 2 - (3 - 6a)^4?$$

118. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 + (2x)^2 = 0$; 2) $x^2 + |x + 1| = -1$.

119. Для яких значень змінних є правильною рівність:

1) $x^2 + (y + 1)^2 = 0$; 2) $(m - 2)^2 + (2n - 1)^8 = 0$?

120. Для яких значень a і b є правильною рівність $2a^4 + (b - 4)^2 = 0$?

Вправи для повторення



121. Обчисліть:

1) $0,025 \cdot 2,15 \cdot 40$; 2) $54 : (9,8 \cdot 4 - 4,8 \cdot 4)$.

122. Розв'яжіть рівняння:

1) $7x + 32 = 12x + 25$; 2) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$.

123. Футбольна команда в 15 матчах набрала 23 очка, програвши 6 матчів. У скількох матчах команда здобула перемогу і скільки матчів зіграла внічию? (За перемогу команді нараховують 3 очка, за нічию — 1 очко, за поразку — 0 очок.)

124. Для дитячого садка мають купити 20 кг борошна в однакових пакетах. У таблиці наведено маси пакетів борошна, їх ціни та знижки під час акційного тижня. У пакетах якої маси вигідніше купувати борошно під час акційного тижня?

Маса	Ціна	Знижка
1 кг	22 грн	25 %
2 кг	40 грн	20 %
4 кг	72 грн	15 %

Поміркуйте



125. Є два букети троянд: у першому — 15 троянд, у другому — 17. Принц і Попелюшка грають у гру, роблячи ходи по черзі. За один хід потрібно розділити будь-який букет на два менші. Програє той, хто не зможе зробити хід (у кого залишаться «букети» з однієї троянди). Принц хоче, щоб перемогла Попелюшка, а Попелюшка — щоб перемаг принц. Хто з них може досягти своєї мети, якщо перший хід робить Попелюшка?

Цікаво знати



Поняття степеня з натуральним показником виникло ще в античні часи у зв'язку з обчисленням площ і об'ємів. Тлумачення степенів a^2 і a^3 було геометричним: a^2 — це площа квадрата, сторона якого дорівнює a , a^3 — об'єм куба, ребро якого дорівнює a . Звідси й назви «квадрат» і «куб» для степенів a^2 і a^3 , які використовують досі.

Сучасне позначення степеня з натуральним показником у вигляді a^n увів у XVII ст. французький математик **Рене Декарт** (1596–1650).

4

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ
З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

1. Множення степенів з однаковими основами. Розглянемо вираз a^2a^4 , який є добутком двох степенів з однаковими основами, і перетворимо його так:

$$a^2a^4 = (aa) \cdot (aaaa) = aaaaaa = a^6 = a^{2+4}.$$

Отже, $a^2a^4 = a^{2+4}$. У цьому прикладі добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників степенів. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.



Властивість 1. Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. Врахувавши означення степеня, матимемо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa\dots a)}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{(aa\dots a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(aa\dots a)}_{(m+n) \text{ разів}} = a^{m+n}. \bullet$$

Властивість 1 називають *основною властивістю степеня*. З неї випливає *правило множення степенів*:

Щоб перемножити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів додати.

Наприклад: $2^4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$; $m^7 \cdot m^8 = m^{7+8} = m^{15}$.

Правило множення степенів поширюють на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}; \quad b^5 \cdot b^3 \cdot b^7 \cdot b = b^{5+3+7+1} = b^{16}.$$

2. Ділення степенів з однаковими основами. Розглянемо рівність $a^2 a^4 = a^6$, де $a \neq 0$. З цієї рівності за означенням частки маємо: $a^6 : a^4 = a^2$. Рівність $a^6 : a^4 = a^2$ можна переписати так:

$$a^6 : a^4 = a^{6-4}.$$

У цьому прикладі частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою й показником, який дорівнює різниці показника степеня діленого й показника степеня дільника. У загальному випадку справджується така властивість.



Властивість 2. Для будь-якого числа $a \neq 0$ та будь-яких натуральних чисел m і n , де $m > n$, виконується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$, то за означенням частки маємо: $a^m : a^n = a^{m-n}$. ●

З доведеної властивості випливає **правило ділення степенів**:

Щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад: $3^7 : 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$.

3. Піднесення степеня до степеня. Піднесемо степінь a^2 до куба:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}.$$

Рівність $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$ можна прокоментувати так: щоб піднести квадрат числа до куба, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити. У загальному випадку справджується така властивість.



Властивість 3. Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \dots a^m}_{n \text{ разів}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ разів}}} = a^{mn}. \bullet$$

Із властивості 3 випливає *правило піднесення степеня до степеня*:

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: $(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$; $(k^6)^4 = k^{6 \cdot 4} = k^{24}$.

4. Піднесення добутку до степеня. Піднесемо добуток ab до куба:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3 b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3 b^3$, тобто куб добутку двох чисел дорівнює добутку кубів цих чисел. У загальному випадку справджується така властивість.



Властивість 4. Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n виконується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bbb \dots b}_{n \text{ разів}} = a^n b^n. \bullet$$

Маємо таке правило:

Щоб піднести до степеня добуток, досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити.

Це правило поширюють на добуток трьох і більше множників. Наприклад:

$$(5ab)^3 = 5^3 a^3 b^3 = 125 a^3 b^3; \quad (abxy)^n = a^n b^n x^n y^n.$$

Зауваження. Доведені тотожності $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$ дозволяють не лише замінювати вирази, що стоять у їхніх лівих частинах, виразами, що стоять у правих частинах, а й навпаки:

$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \quad a^n b^n = (ab)^n.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз $(a^4a)^3 : (a^6)^2$.

$$\bullet (a^4a)^3 : (a^6)^2 = (a^5)^3 : a^{12} = a^{15} : a^{12} = a^3. \bullet$$

Вправа 2. Подати степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою:
1) 4^6 ; 2) 16 ; 3) 2 .

$$\bullet \begin{array}{l} 1) 4^{18} = 4^{6 \cdot 3} = (4^6)^3; \quad 2) 4^{18} = 4^{2 \cdot 9} = (4^2)^9 = 16^9; \\ 3) 4^{18} = (2^2)^{18} = 2^{36}. \bullet \end{array}$$

Вправа 3. Знайти значення виразу:

$$1) 4^8 : 4^5 - 3^9 : 3^7; \quad 2) 2,5^5 \cdot 0,4^5 \cdot 2^6; \quad 3) 25^6 \cdot 0,2^{11}.$$

$$\bullet \begin{array}{l} 1) 4^8 : 4^5 - 3^9 : 3^7 = 4^3 - 3^2 = 64 - 9 = 55; \\ 2) 2,5^5 \cdot 0,4^5 \cdot 2^6 = (2,5 \cdot 0,4)^5 \cdot 2^6 = 1^5 \cdot 2^6 = 1 \cdot 64 = 64; \\ 3) 25^6 \cdot 0,2^{11} = (5^2)^6 \cdot 0,2^{11} = 5^{12} \cdot 0,2^{11} = 5 \cdot 5^{11} \cdot 0,2^{11} = \\ = 5 \cdot (5 \cdot 0,2)^{11} = 5 \cdot 1^{11} = 5. \bullet \end{array}$$



1. Сформулюйте основну властивість степеня.
2. Сформулюйте правила множення та ділення степенів з однаковими основами.
3. Сформулюйте правило піднесення добутку до степеня.
4. Сформулюйте правило піднесення степеня до степеня.

Усно

126. Подайте у вигляді степеня добуток:

$$1) b^4b^3; c^3c; 7^2 \cdot 7^5; 3^{10} \cdot 3; \quad 2) a^2a^3a^4; 2 \cdot 2^3 \cdot 2^4.$$

127. Подайте у вигляді степеня частку:

$$1) a^6 : a^2; b^8 : b^3; \quad 2) 7^{20} : 7^{17}; 11^8 : 11.$$

128. Піднесіть до степеня:

$$1) (pq)^2; (2b)^3; (abc)^4; \quad 2) (m^3)^4; (n^{10})^2; (b^{15})^4.$$

12

129. Подайте у вигляді степеня добуток:

$$\begin{array}{llll} 1) a^5a^2; & 2) b^4b^6; & 3) yy^7; & 4) x^2x^7x^3; \\ 5) 2^8 \cdot 2^{12}; & 6) 0,3^{15} \cdot 0,3; & 7) 5^3 \cdot 5 \cdot 5^4; & 8) 3^4 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 3. \end{array}$$

- 130.** Подайте у вигляді степеня добуток:
 1) m^3m^6 ; 2) y^7y^5 ; 3) c^5c ; 4) $b^5b^3b^2$;
 5) $10^5 \cdot 10^{10}$; 6) $2,5 \cdot 2,5^3$; 7) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^7$; 8) $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4 \cdot 4^5$.
- 131.** Подайте у вигляді степеня частку:
 1) $x^{10} : x^3$; 2) $a^{15} : a^5$; 3) $5^{28} : 5^{21}$; 4) $0,1^8 : 0,1^2$.
- 132.** Подайте у вигляді степеня частку:
 1) $c^{12} : c^9$; 2) $b^{26} : b^8$; 3) $4^{17} : 4^{15}$; 4) $0,7^{10} : 0,7^4$.
- 133.** Подайте степінь c^{15} у вигляді добутку двох степенів з основою c , одним з яких є: c ; c^2 ; c^4 ; c^7 ; c^{12} .
- 134.** Подайте степінь x^{12} у вигляді добутку двох степенів з основою x , одним з яких є: x ; x^3 ; x^6 ; x^{10} .
- 135.** 1) Подайте у вигляді степеня з основою b : $(b^3)^3$; $(b^4)^5$; $(b^{25})^4$.
 2) Подайте у вигляді степеня з основою ab : a^3b^3 ; a^5b^5 .
- 136.** 1) Подайте у вигляді степеня з основою k : $(k^5)^3$; $(k^2)^7$; $(k^5)^6$.
 2) Подайте у вигляді степеня з основою mn : m^2n^2 ; m^7n^7 .
- 137.** Піднесіть до степеня:
 1) $(ab)^5$; 2) $(4c)^2$; 3) $(-2x)^3$; 4) $(-0,1a)^2$;
 5) $(3xz)^3$; 6) $(-2mn)^5$; 7) $(-mnk)^8$; 8) $(4abcd)^4$.
- 138.** Піднесіть до степеня:
 1) $(st)^7$; 2) $(-3b)^3$; 3) $(-mn)^4$; 4) $(5klm)^3$.
- 139.** Знайдіть значення виразу:
 1) $5^8 : 5^5$; 2) $0,2^9 : 0,2^7$; 3) $(3^2)^3 : 3^4$; 4) $(-2)^7 : (-2)^4$;
 5) $8^7 : 8^5 - 3^2 \cdot 3$; 6) $(1,5^4 \cdot 1,5^5) : 1,5^7$.
- 140.** Знайдіть значення виразу:
 1) $4^{18} : 4^{15}$; 2) $(-3)^5 : (-3)^2$;
 3) $0,5^8 : 0,5^6 + (2^2)^2$; 4) $(5^6 \cdot 5^4) : 5^8$.
- 3**
- 141.** Подайте у вигляді степеня вираз:
 1) $2^4 \cdot 16$; 2) $3^7 : 27$; 3) $0,5^4 \cdot 0,25$; 4) $0,1^5 : 0,001$.
- 142.** Подайте у вигляді степеня вираз:
 1) $7^3 \cdot 49$; 2) $8 \cdot 2^5$; 4) $3^{10} : 81$; 4) $1,21 \cdot 1,1^4$.
- 143.** Знайдіть значення виразу:
 1) $2^4 \cdot 5^4 + (-10)^4$; 2) $0,5^9 \cdot (-2)^9 - 1$;
 3) $\left(1\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3$; 4) $1,25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;

5) $(0,5^{18} : 0,5^6) \cdot (2^{16} : 2^4)$;

6) $2^{15} : 16^3$;

7) $\left(\frac{9}{16}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{10}$;

8) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^8 : \left(3\frac{1}{3}\right)^6$.

144. Знайдіть значення виразу:

1) $5^3 \cdot 2^3 + (-10)^3$;

2) $(-8)^4 \cdot 1,25^4$;

3) $0,25^9 \cdot 2^9 \cdot 2^9$;

4) $5^8 : 25^3$;

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^7$;

6) $\left(1\frac{3}{7}\right)^5 : \left(1\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{3}{7}\right)^2$.

145. 1) Подайте степінь z^{20} у вигляді степеня з основою z^2 ; z^4 ; z^{10} .

2) Подайте степінь 2^{20} у вигляді степеня з основою 4; 16; 32.

146. 1) Подайте степінь c^{12} у вигляді степеня з основою c^2 ; c^4 ; c^6 .

2) Подайте степінь 3^{12} у вигляді степеня з основою 9; 27; 81.

147. Спростіть вираз:

1) $(a^3a^4)^5$; 2) $(x^7 : x)^3$; 3) $(k^2)^3 \cdot (k^4)^4$; 4) $(a^5)^5 : (aa^4)^2$.

148. Спростіть вираз:

1) $(c^5c^6)^2$; 2) $(a^8 : a^5)^5$; 3) $(y^4)^2 \cdot (y^2)^4$; 4) $(b^6)^3 : (b^3)^2$.

149. Знайдіть значення виразу:

1) $(b^5b)^2 : b^9$, якщо $b = 3$; $b = -3$;

2) $(a^9 \cdot a^3) : (a^8 \cdot a^2)$, якщо $a = -1,5$; $a = 2\frac{1}{3}$.

150. Знайдіть значення виразу $(x^{15} : x^3) : (x^4 \cdot x^5)$, якщо $x = -3$;

$x = \frac{1}{3}$.



Інтерактивне завдання 5
Властивості степеня
з натуральним показником



151. Знайдіть значення виразу:

1) $16^4 : (4^{12} : 8^4)$;

2) $5^{25} \cdot 0,2^{24}$;

3) $100^7 \cdot 0,1^{16}$;

4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{7}{9}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)^3$.

152. Знайдіть значення виразу:

1) $(27^8 : 9^5) : (9^4 \cdot 3^2)$; 2) $0,5^{18} \cdot 4^{10}$.

153.  Якою цифрою закінчується запис числа n , якщо:

1) $n = 21^{23}$; 2) $n = 4^{20}$; 3) $n = 9^{15}$; 4) $n = 3^{24}$.

Розв'язання. 2) $n = 4^{20} = (4^2)^{10} = 16^{10}$ — запис числа n закінчується цифрою 6. (Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 1, 5 або 6, то значення будь-якого натурального степеня цього числа закінчується тією ж цифрою.)

154. Доведіть, що значення виразу:

1) $6^{93} + 4$ ділиться на 10; 2) $3^{43} - 2$ ділиться на 5.

155. Доведіть, що значення виразу $4^{24} - 1$ ділиться на 5.

156. Доведіть, що куб натурального числа, кратного 3, ділиться на 27.

Вправи для повторення




157. Спростіть вираз:

1) $2x - 3 - (3x + 1)$; 2) $3(2a + 1) - 2(a - 2) - 9$.

158. Знайдіть значення виразу $10kn + 2k - 5n$, якщо $k = 5$, $kn = 1$.

159. За два дні сайт відвідали 4500 користувачів, до того ж першого дня в 1,25 раза менше, ніж другого. Скільки користувачів відвідали сайт першого дня?

160.  У кімнаті завдовжки 4 м 20 см і завширшки 3 м 60 см хочуть викласти долівку однаковими плитками квадратної форми, не розрізаючи їх.

- 1) Який найбільший можливий розмір такої плитки?
- 2) Скільки потрібно плиток найбільшого розміру, щоб викласти ними долівку?
- 3) Скільки гривень потрібно заплатити за такі плитки, якщо одна плитка коштує 250 грн?

Поміркуйте



161. До деякого трицифрового числа Уляна дописала праворуч одну цифру, і від одержаного числа відняла початкове. Виявилось, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописала Уляна?

5

ОДНОЧЛЕНИ. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ОДНОЧЛЕНА

1. Одночлени. Розглянемо дві групи виразів:

$$a, b^3, 5, 3^2, 9ab^2, -2x^4y^3, \frac{3}{7}m^2n$$

Дані вирази — це змінні, числа, їхні степені й добутки. Такі вирази називають *одночленами*.



Означення. *Одночленом* називають вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів.

$$3 + 2a, a - b, x^2 + 2x - 3, m(1 - n)$$

Вирази містять дії додавання або віднімання. Такі вирази не є одночленами.

Розглянемо одночлен $-4a^2b^3$. Він містить тільки один числовий множник, який стоїть на першому місці, та степені різних змінних. Такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.



Означення. *Одночленом стандартного вигляду* називають такий одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, та степені різних змінних.

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають *коефіцієнтом* одночлена.

Так, коефіцієнт одночлена $-4a^2b^3$ дорівнює -4 . Вважають, що коефіцієнти одночленів a^3 і $-bc$ відповідно дорівнюють 1 і -1 , бо $a^3 = 1 \cdot a^3$ і $-bc = -1 \cdot bc$.

Одночлен $5a^3b^2a^4$ не є одночленом стандартного вигляду, бо містить два степені з основою a . Помноживши a^3 на a^4 , цей одночлен можна записати у вигляді одночлена стандартного вигляду:

$$5a^3b^2a^4 = 5(a^3a^4)b^2 = 5a^7b^2.$$

2. Множення одночленів. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$. Використовуючи властивості дії множення і властивості степенів, матимемо:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Отже, добутком одночленів $-3a^2b$ і $4ab^3$ є одночлен $-12a^3b^4$.

Узагалі, добутком будь-яких одночленів є одночлен.

3. Піднесення одночлена до степеня. Піднесемо одночлен $-5a^2b$ до куба. Використовуючи властивості степенів, матимемо:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

Отже, кубом одночлена $-5a^2b$ є одночлен $-125a^6b^3$.

Узагалі, натуральним степенем будь-якого одночлена є одночлен.

4. Степінь одночлена. Розглянемо одночлен $3a^2bx^3$. У ньому сума показників степенів усіх змінних дорівнює $2 + 1 + 3 = 6$. Цю суму називають *степенем одночлена*, кажуть, що $3a^2bx^3$ — одночлен шостого степеня.



Означення. *Степенем одночлена* називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього.

Наприклад: $-a^2b^7$ — одночлен дев'ятого степеня; $2a^2$ — одночлен другого степеня; $3x$ — одночлен першого степеня.

Якщо одночленом є число, відмінне від нуля, то вважають, що степінь такого одночлена дорівнює нулю. Наприклад, $2,5$ — одночлен нульового степеня. Якщо одночленом є число 0 , то степінь такого одночлена не визначений.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $6ab^2 \cdot (-4ab)$; 2) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3$; 3) $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3$.

● 1) $6ab^2 \cdot (-4ab) = (6 \cdot (-4)) \cdot (aa) \cdot (b^2b) = -24a^2b^3$.

Скорочений запис: $6ab^2 \cdot (-4ab) = -24a^2b^3$.

2) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = (-3 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (a^3a^2) \cdot b \cdot (cc^3) = -36a^5bc^4$.

Скорочений запис: $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = -36a^5bc^4$.

$$3) (-x^2y \cdot 4xy^2)^3 = (-4x^3y^3)^3 = -64x^9y^9. \bullet$$

Вправа 2. Подати одночлен $4a^4b^6$ у вигляді:

- 1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
- 2) добутку двох одночленів, одним з яких є $2a^2b^2$;
- 3) квадрата одночлена стандартного вигляду.

- 1) $4a^4b^6 = 4a^2b^4 \cdot a^2b^2$;
(або $4a^4b^6 = 4a^4 \cdot b^6$, $4a^4b^6 = -2ab \cdot (-2a^3b^5)$ тощо);
- 2) $4a^4b^6 = 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^4 = 2a^2b^2 \cdot 2a^2b^4$;
- 3) $4a^4b^6 = (2a^2b^3)^2. \bullet$



1. Що називають одночленом? Наведіть приклади одночленів.
2. Який одночлен називають одночленом стандартного вигляду? Наведіть приклади таких одночленів.
3. Що називають степенем одночлена?

Усно

162. Які з наведених виразів є одночленами:

- | | | | |
|--------------|------------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $-3abc$; | 2) $0,8x$; | 3) $\frac{a}{b}$; | 4) $\frac{1}{2}xy^5$; |
| 5) $a + b$; | 6) $3a^3b \cdot 2ab$; | 7) m ; | 8) $-1,2$; |

163. Серед наведених виразів укажіть одночлени стандартного вигляду та їхні коефіцієнти:

$$2a^2ba; \quad 52xy; \quad 0,03ac^4; \quad 5ab \cdot 3cd; \quad x; \quad -z; \quad -\frac{3}{8}kt; \quad 4 \cdot 2a^2.$$

164. Знайдіть степені одночленів:

$$4a^2b^2; \quad xy^5; \quad 0,1a^2b^3c; \quad 6a^2; \quad -y^3; \quad 4a; \quad cd; \quad -2mnk; \quad 15.$$

165. Перемножте одночлени:

$$1) 2a \text{ і } 3b; \quad 2) 4c^2 \text{ і } 2c; \quad 3) 5a^2x \text{ і } ax; \quad 4) -xy^2 \text{ і } 2x.$$

12

166. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь і коефіцієнт:

- | | | |
|--------------|-----------------|---------------------|
| 1) $4x^2x$; | 2) $-5aba^3$; | 3) $0,4x^2a^3x$; |
| 4) $3mktk$; | 5) c^3dc^2d ; | 6) $-x^2yz^2xz^2$. |

167. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь і коефіцієнт:

1) $14yu^5$; 2) $-3cb^3c$; 3) $5aba^2b^3a^2$.

168. Виконайте множення одночленів:

1) $5a \cdot 4b$; 2) $3a^2 \cdot 5a^3$;
 3) $7a^2b \cdot (-2ab)$; 4) $-4ax^2 \cdot 0,3bx^3$;
 5) $\frac{2}{3}m^3n \cdot 3mn$; 6) $-8a^2bc^2 \cdot (-0,5bc)$;
 7) $2x \cdot (-5x^2) \cdot 4x$; 8) $-3cd \cdot 2c^2d \cdot (-cd)$.

169. Виконайте множення одночленів:

1) $2m \cdot 12mn^5$; 2) $-cd \cdot 8c^4d$;
 3) $2a^3b^2c \cdot 0,8abc^3$; 4) $-9n^3k \cdot \left(-\frac{2}{9}k\right)$;
 5) $ab \cdot (-5ab^2) \cdot 2b$; 6) $1,5xy \cdot (-2x^2y^3) \cdot (-x^2y)$.

170. Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(3a^3b)^3$; 2) $(-2mn^2)^5$; 3) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$; 4) $(-0,5mn^3k^4)^2$.

171. Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(-5mn^2)^2$; 2) $(3a^3b^6)^3$; 3) $(-xy^2z^3)^5$; 4) $(2ab^4c^3)^4$.

172. Подайте одночлен $8x^2y^3$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 2) добутку двох одночленів, одним з яких є: $4x^2y^2$; $8xy$;
 $-2xy^3$.

173. Подайте одночлен $6b^3c^3$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 2) добутку двох одночленів, одним з яких є: $2bc$; $-3bc^3$.



174. Спростіть вираз:

1) $15a^3b^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^4b^2\right)$; 2) $(3a^2b)^3 \cdot 0,01b^2$;
 3) $8xy^3 \cdot 2,5x^3y^5 \cdot (-0,5x)$; 4) $(-4a^2b^3)^2 \cdot (-ab^3)^2$;
 5) $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4 \cdot (3m^3)^2 \cdot (-4,5)$; 6) $4(a^2bc)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^2 \cdot ac^2$.

175. Спростіть вираз:

1) $12m^3n \cdot \left(-\frac{2}{3}mn^2\right)$;

2) $-4p^3q \cdot 2,1pq^2 \cdot 0,25p$;

3) $(-a^2b)^3 \cdot (-3a^3b)^2$;

4) $\left(\frac{2}{3}xy^2z\right)^2 \cdot (-3x^2z)^3 \cdot xyz$.

176. Знайдіть значення виразу:

1) $(2a^2b)^2 \cdot ab^3$, якщо $a = 2$; $b = 5$;


2) $(xy^2z)^3 \cdot xzy^8$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = -1$; $z = 7$;

3) $(a^2bc^2)^2 \cdot abc \cdot b^2$, якщо $a = 1\frac{1}{3}$; $b = -0,5$; $c = 3$.

177. Знайдіть значення виразу:

1) $(-mn^2)^3 \cdot 10m^4n$, якщо $m = 4$; $n = 0,25$;

2) $(2abc^4)^2 \cdot 0,25(ab)^6$, якщо $a = \frac{1}{7}$; $b = 14$; $c = -1$.

178.  Для деяких значень змінних значення виразу m^2n^3 дорівнює 2. Знайдіть для тих самих значень змінних значення виразу:

1) $6m^2n^3$; 2) m^4n^6 ; 3) $4m^8n^{12}$; 4) $-3m^6n^9$.

179. Подайте одночлен $64a^6b^{18}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;

2) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^4b^6$;

3) квадрата одночлена стандартного вигляду;

4) куба одночлена стандартного вигляду.

180. Подайте одночлен $16x^{12}y^8$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, одним з яких є $-2x^3y^7$;

2) квадрата одночлена стандартного вигляду;

3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

181. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати у квадратик, щоб одержати тотожність:

1) $\square \cdot 3x^2y = 12x^3y^4$;

2) $\square \cdot (-m^2n^2) = 2m^5n^3$;

3) $-2a^2bc^3 \cdot \square = -6a^5b^3c^3$;

4) $\square \cdot 4bc^3 = -6a^2b^2c^3$?

182. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати у квадратик, щоб одержати тотожність:

1) $\square \cdot 2ab^4 = -2a^3b^6$;

2) $2x^2y^2 \cdot \square = 5x^4y^2z^3$?

183. Як зміниться об'єм куба, якщо його ребро збільшити вдвічі?
184. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити втричі?



Інтерактивне завдання 6
Одночлени. Стандартний вигляд одночлена



185. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:
1) $(a^{n+1} \cdot b^{2n}) \cdot 2a^{2n} \cdot (2b)^2$; 2) $((x^4)^n)^3 \cdot 2(-x^{2n})^5$.
186. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:
1) $4((x^2)^3)^4 \cdot (-2(x^4)^3)^2$; 2) $(-a^n)^3 \cdot (-a^{n+1})^5$.
187. Знайдіть значення виразу $(5^k a^k b^{k+2})^2 \cdot (5ab)^k$, якщо $a = 0,1$; $b = -2$; $k = 21$.
188. Знайдіть значення виразу $(4xy^2)^{2n} \cdot (4x^3y^2)^{2n}$, якщо $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2$; $n = 20$.
189. Мило має форму прямокутного паралелепіпеда. За тиждень користування всі його виміри зменшилися вдвічі. У скільки разів зменшився об'єм мила?

Вправи для повторення



190. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
1) $(-2b + 4) - (4b - 1) + 6b$; 2) $-3x + 5 - (3 - x) - (2 + 2x)$.
191. Розв'яжіть рівняння:
1) $2(x - 1) + 3 = 5$; 2) $3(x - 4) = 5x - 4$.
192. Щоб купити новий телевізор, тато взяв у банку кредит на 10 місяців. Для погашення кредиту потрібно щомісяця повертати банку ту саму суму грошей. Якби кредит був оформлений на 8 місяців, то щомісяця довелося б повертати банку на 300 грн більше. Скільки гривень кредиту взяв тато?
193. У саду ростуть яблуні, сливи та абрикоси, кількості яких відносяться як 8 : 3 : 2. Скільки слив росте в саду, якщо в ньому яблунь на 18 більше, ніж абрикосів?

Поміркуйте



- 194.** На майданчику хлопці нашого двору грають у футбол. У кожному матчі беруть участь по 5 хлопців у кожній команді. За місяць було зіграно 15 матчів, у яких загалом зіграли 30 хлопців. Доведіть, що серед них є хлопець, який зіграв не більше ніж 5 матчів.

Завдання для повторення § 1

- 195.** Запишіть у вигляді виразу:
- 1) різницю чисел $2,5$ і a ;
 - 2) суму квадратів чисел m і n ;
 - 3) різницю числа a і добутку чисел b та c .
- 196.** Довжина ділянки прямокутної форми дорівнює a м, а ширина — на 30 м менша. Запишіть у вигляді виразу площу ділянки. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 50$.
- 197.** У першій вазі є n квіток, що на 5 квіток більше, ніж у другій, і на 3 квітки менше, ніж у третій. Запишіть у вигляді виразу кількість квіток у трьох вазах разом.
- 198.** З міста A в місто B виїхав автобус. Через $0,5$ год назустріч йому з міста B виїхав автомобіль, який через t год руху зустрів автобус. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами, якщо автобус рухався зі швидкістю 70 км/год, а автомобіль — 90 км/год.
- 199.** Ціну на товар знизили на 20% і він став коштувати n грн. Знайдіть початкову ціну товару.
- 200.** Спростіть вираз:
- 1) $6a + 5(7 - 12a)$;
 - 2) $5 + (5x - y) - 4x - (3y + 5)$;
 - 3) $3b + 7 - 2(3 - 2(b + 1))$;
 - 4) $0,3(x - 4) - 0,4(x - y) + 1,6y$.
- 201.** Знайдіть значення виразу:
- 1) $\frac{2}{7}x - 3y$, якщо $x = 21$; $y = -1$;
 - 2) $24(a - 2) - 4a$, якщо $a = 0,5$.
- 202.** Для яких значень x значення виразу $5x - 8$ дорівнює 1 ?
- 203.** Доведіть, що значення виразу $2(1 - 3x) - 3(1 - 2x)$ не залежать від значень x .

204. Доведіть тотожність:

1) $7(4 - a) - 3(-3a + 1) - 25 = 2a$;

2) $9,8b - 5 = 9b - 1,2b - 2(2,5 - b)$;

3) $5\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}a + b\right) - \left(\frac{1}{12}b - 0,125a\right) = 2,125a + 5,25b$.

205. Знайдіть значення степеня:

1) 10^5 ;

2) $(-3)^6$;

3) $(-2,5)^3$;

4) $\left(3\frac{1}{3}\right)^4$.

206. Знайдіть значення виразу:

1) $2^4 + (-2)^5$;

2) $(-4 \cdot 1,5 + 8)^5$;

3) $(-0,125 \cdot 2^3)^{15}$;

4) $(5^6 : 5^4)^2$;

5) $0,25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;

6) $81^2 : 3^7 + 8^5 \cdot 0,5^{14}$.

207. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^3a^5 ;

2) $b^9 : b^8$;

3) $(p^2)^5$;

4) a^5aa^4 ;

5) $(y^3)^8 : (y^3y)^5$;

6) $(ab^2)^4 \cdot (a^4b^2)^2$.

208. Заповніть таблицю:

Одночлен	Стандартний вигляд одночлена	Степень одночлена	Коефіцієнт одночлена
$-2a^4ba$			
$4c \cdot (-3)$			
$-0,5b^2 \cdot (-2a^3b)$			

209. Подайте одночлен у стандартному вигляді:

1) $-3x^3 \cdot 2xy^2$;

2) $1,2a^2b^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^3b^2\right)$;

3) $2,5xz \cdot (-4x^3z^3) \cdot x^2z$;

4) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$.

210. Знайдіть значення виразу:

1) $(2x - 3)^4$, якщо $x = -1$; $x = 3$;

2) $(3x^2y)^3 \cdot y^3$, якщо $x = 2$; $y = 0,5$;

3) $(a^2bc)^2 \cdot 5abc^3$, якщо $a = 1\frac{1}{6}$; $b = -4$; $c = \frac{6}{7}$.

211. 1) Подайте у вигляді квадрата число: 169 ; $1,44$; $\frac{49}{121}$; $7\frac{1}{9}$.

- 2) Подайте у вигляді куба число: 64; -27 ; 0,008; $-\frac{125}{216}$; $3\frac{3}{8}$.
212. 1) Подайте степінь a^{36} у вигляді степеня з основою a^3 ; a^9 ; a^{12} .
2) Подайте степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою 2; 16; 8.
213. Подайте одночлен $49a^4b^{12}$ у вигляді:
1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
2) добутку двох одночленів, одним з яких є $-7a^3b^7$;
3) квадрата одночлена стандартного вигляду.
214. Розв'яжіть рівняння:
1) $(4x - 2)^9 = 0$; 2) $(2x)^2 + (8x)^8 = 0$; 3) $x^6 + |3x| = -2$.
215. Якою цифрою закінчується значення степеня 3^{21} ?



Інтерактивне завдання для самоперевірки 1

Цілі вирази. Одночлени



Завдання для самоперевірки № 1

Початковий рівень

- Який з наведених записів є виразом зі змінними?
А $2,5 : 5$ Б $3x = 9y$ В $y > 3$ Г $2a + 3ab$
- Запишіть у вигляді виразу вартість покупки, якщо було куплено 10 однакових зошитів за ціною m грн і ручку за ціною k грн.
А $(m + k)$ грн Б $(10m + k)$ грн
В $(m + 10k)$ грн Г $(10m + 10k)$ грн
- Чому дорівнює значення виразу $2x^4$, якщо $x = 2$?
А 4 Б 16 В 32 Г 64
- Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $3y + 5 - 7y$.
А $-4y$ Б $5 + 4y$ В $5 - 2y$ Г $5 - 4y$
- Яка з наведених рівностей є неправильною?
А $2^4 \cdot 2^3 = 2^7$ Б $2^9 : 2^3 = 2^6$
В $(3^2)^3 = 3^5$ Г $3^6 \cdot 2^6 = 6^6$
- Перемножте одночлени $2a^2b^3$ і $3a^4$.
А $6a^2b^7$ Б $6a^8b^3$ В $5a^6b^3$ Г $6a^6b^3$

Середній рівень

7. Обчисліть: $100 \cdot 0,3^2 + (-3)^4$.
 А -72 Б -9 В 72 Г 90
8. Спростіть вираз $12k - 0,4(5k - 3) + 2$.
 А $14k + 3,2$ Б $14k + 0,8$ В $10k + 3,2$ Г $10k + 0,8$
9. Подайте у стандартному вигляді одночлен $-0,3ab^3 \cdot 5a^4b^2$.
 А $-1,5a^5b^5$ Б $1,5a^5b^5$ В $-1,5a^4b^5$ Г $-0,15a^5b^5$
10. Установіть відповідність між виразами (1–3) та їх записами у вигляді степеня (А–Д).
- | | |
|-----------------------|---------------|
| 1 $b^{15} : b^3$ | А b^{10} |
| 2 $(b^3)^2 \cdot b^8$ | Б b^{12} |
| 3 $b^8 \cdot c^8$ | В b^{14} |
| | Г $(bc)^8$ |
| | Д $(bc)^{16}$ |

Достатній рівень

11. Обчисліть: 1) $(3^7 \cdot 5^7) : (-15)^5$; 2) $8^5 \cdot (-0,5)^{15}$.
12. Доведіть тотожність
 $0,3(a - 3) - 0,5(a - 1) = 0,2(a - 6) - 0,4(a - 2)$.
13. Знайдіть значення виразу $2(x^2yz^3)^2 \cdot x^2y^2$, якщо $x = \frac{2}{3}$; $y = -2$; $z = 1,5$.
14. Подайте одночлен $64a^{12}b^{18}$ у вигляді:
 1) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^5b^8$;
 2) куба одночлена стандартного вигляду.

Високий рівень

15. Знайдіть значення виразу $0,2^{16} \cdot 125^6 - (-4)^9 \cdot 0,25^9$.
16. Розв'яжіть рівняння $(1 - 2x)^4 + (4x - 2)^8 = 0$.
17. Три екскаватори вирили траншею. Перший екскаватор вирих x м траншеї, або четверту частину всієї траншеї, другий — на 20 м більше, ніж перший. Скільки метрів траншеї вирих третій екскаватор?
18. Доведіть, що сума трицифрового числа і подвоєної суми його цифр ділиться на 3.

§ 2. МНОГОЧЛЕНИ

6

МНОГОЧЛЕНИ. СТЕПІНЬ МНОГОЧЛЕНА

1. Многочлени. Розглянемо вираз $2a^2 - 3ab + 5$, який є сумою одночленів $2a^2$, $-3ab$ і 5 . Такий вираз називають *многочленом*.



Означення. *Многочленом* називають суму кількох одночленів.

Одночлени, які складають многочлен, називають *членами* цього *многочлена*. Так, членами многочлена $2a^2 - 3ab + 5$ є $2a^2$, $-3ab$ і 5 .

Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, многочлен, який складається з трьох членів, — тричленом і т. д. Наприклад:

$a^2 + b$, $2x - 3$ — двочлени

$a^2 - ab + b^2$, $x + 2y - 1$ — тричлени

Уважають, що кожний одночлен є многочленом, який складається з одного члена.

2. Многочлени стандартного вигляду. Розглянемо многочлен $4xy - 6 + y - 2xy + 3$. Два його члени $4xy$ і $-2xy$ є подібними доданками, бо відрізняються лише числовими множниками. Члени -6 і 3 не містять змінних. Вони також є подібними доданками. Подібні доданки многочлена називають *подібними членами* многочлена.

Зведемо в многочлені $4xy - 6 + y - 2xy + 3$ подібні члени:

$$4xy - 6 + y - 2xy + 3 = (4xy - 2xy) + y + (-6 + 3) = 2xy + y - 3.$$

Многочлен $2xy + y - 3$ вже не має подібних членів, і кожний його член є одночленом стандартного вигляду. Такий многочлен називають *многочленом стандартного вигляду*.



Означення. *Многочленом стандартного вигляду* називають многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів.

Так, серед многочленів

$$a^2 + 4ab - 3b^2, \quad x^2yx - 2, \quad 4ab + 2b^2 - ab$$

лише перший є многочленом стандартного вигляду, а два інші — ні (перший член другого многочлена не є одночленом стандартного вигляду, а третій многочлен має подібні члени).

3. Степінь многочлена. Розглянемо многочлен $2x^2y^2 + y^3 - 2x$. Він має стандартний вигляд, і його членами є одночлени відповідно четвертого, третього і першого степенів. Найбільший із цих степенів називають *степенем* даного *многочлена*. Отже, $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ — многочлен четвертого степеня.



Означення. *Степенем многочлена* стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, які складають цей многочлен.

За цим означенням

$2a + 1$, $3x - 4y + 3$ — многочлени першого степеня;

$x^2 - 2x + 3$, $ab - 3a^2 + b$ — многочлени другого степеня;

$-x^2y^4 + x^3 + 2y$ — многочлен шостого степеня.

Члени многочлена можна записувати в довільній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, що містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за спаданням або зростанням показників степенів змінної. Наприклад:

$$5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2;$$

$$2 + 3x - 4x^2 + x^3 + 5x^4.$$

Зазначимо, що кожний многочлен є цілим виразом. Однак не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $2(a + 5)$, $(a - b)^2$ — не многочлени, бо вони не є сумами одночленів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати в стандартному вигляді многочлен:

1) $2x^2 + 3x - 4x^2 + 1 - x$; 2) $4a^2b + 2 - 2aba - 5$.

• 1) $\underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{4x^2} + 1 - \underline{x} = -2x^2 + 2x + 1$;

2) $4a^2b + 2 - 2aba - 5 = \underline{4a^2b} + \underline{2} - \underline{2a^2b} - \underline{5} = 2a^2b - 3$. •



1. Що називають многочленом? Наведіть приклади многочленів.
2. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? Наведіть приклад такого многочлена.
3. Що називають степенем многочлена? Наведіть приклад многочлена другого степеня.

Усно

216. Які з наведених виразів є многочленами?

- | | | |
|------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1) $3x + 5$; | 2) $m(m - 2)$; | 3) $5a^3 + bc^2 - ab$; |
| 4) $(b - c)^2$; | 5) $a^2 + \frac{1}{2}a$; | 6) $n^2 + \frac{1}{n}$. |

217. Назвіть члени многочлена:

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| 1) $y^3 - 2y^2 + 3y - 1$; | 2) $a^2 - 2ab - 3b^2 + a^2b^2$. |
|----------------------------|----------------------------------|

218. Серед наведених многочленів укажіть многочлени стандартного вигляду та їхні степені:

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $c^2 + 4c - 2$; | 2) $x + y + 1$; |
| 3) $a - a^2 + 5a + 2$; | 4) $3b^2c - 2bc^2$; |
| 5) $4y - y \cdot 2y$; | 6) $km + 3$. |

219. Назвіть подібні члени многочлена та подайте його в стандартному вигляді:

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| 1) $4a - 3 - a + 2$; | 2) $3x^2 + 4y - 2x^2 + y - 1$. |
|-----------------------|---------------------------------|

1 2

220. Складіть многочлен з одночленів:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $2y^2$, $3y$ і -5 ; | 2) a^2 , $-2ab$ і b^2 ; |
| 3) $-k$, $-m$, m^2 і $2m^3$; | 4) xy , $-2x$, $2y$ і $-4y^2$. |

221. Складіть многочлен з одночленів:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) a^3 , $-2a^2$, $2a$ і -1 ; | 2) x^2 , $-4xy$, $-y^2$ і $2x$. |
|------------------------------------|-------------------------------------|

222. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $3x - 2 + 2x - 5$; | 2) $1,2a + a + 3,5 - 2a - 4$; |
| 3) $4m + 3 + n - 3 - 2n + 2m$; | 4) $x^2 + 2x + x^2 - 3x + 3 - x$; |
| 5) $3a^3 + 5a^2 - 5a^3 - 3a^2 + 7a$; | 6) $5c^2 - 3bc + 6bc - 2c^2$. |

223. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

- 1) $5a + 6 - 3a - 4$; 2) $10k + 5,5 - 2,5k - 4,5k$;
 3) $2x^2 + 3x + x^2 - 3x - 3 + x$; 4) $ab^2 + 3ab + ab^2 - 3ab^2 - ab$.

224. Розташуйте члени многочлена за спаданням показників степенів змінної:

- 1) $5x - 4x^3 - 5 + x^2 + 3x^4$; 2) $a^6 + 5a - 7a^2 - 2a^4 - 2a^7 - 4$.

225. Розташуйте члени многочлена за зростанням показників степенів змінної:

- 1) $6b^3 - 2b + 1 + 3b^4 - b^2$; 2) $x^5 + 2x^6 - 3x - x^4 + 2 + 8x^8$.

226. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $2c^2 + 3c - 2$, якщо $c = 2$;
 2) $5ab - a^2 + 4$, якщо $a = -1$; $b = 4$;
 3) $3x - x^2 - 1 + 2x^2 - 3x$, якщо $x = 1,2$.

227. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $4x^2 + 5x + 2$, якщо $x = -2$;
 2) $3bc + 8bc - 3 - 7bc$, якщо $b = 1,5$; $c = -4$.



228. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

- 1) $7a^5b - 4b^5a + 8a^5b - 3a^5 - 5ab^5$;
 2) $3x^2 \cdot 0,4x - 0,9x^3 + x \cdot 4y - 2xy$;
 3) $1,2abc + \frac{1}{4}a^2b - 0,8abc - \frac{1}{2}aba$.

229. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

- 1) $-3,5ab - a^2b + 3 + ab + 1,5a^2b$;
 2) $\frac{1}{4}c^3d - 2c^2dc + 4\frac{3}{8}c^3d - 1$.

230. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $6x^4 - 4x^2 - 8x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 1$, якщо $x = -1,2$;
 2) $4x^2y - 6x^2y - 3 + 1,5x^2y$, якщо $x = -4$; $y = 1,5$;
 3) $-4a^2b^3 + 7ab^3 - ab^3a + b^2ab - 8ab^3$, якщо $a = -0,5$; $b = 2$.

231. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $3a^7 - 3a^4 + 6 - 4a^7 + 5a^4 + a^7$, якщо $a = -3$;
 2) $2m^4n^2 + 4m^2n^2m^2 - 8nm^4n + 4m^2n$, якщо $m = -0,5$; $n = 4$.

232. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду число, яке має a десятків тисяч, b тисяч, 8 сотень, a десятків і b одиниць.
233. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду число, яке має n тисяч, m сотень, m десятків і n одиниць.




Інтерактивне завдання 7

Многочлени. Степінь многочлена



4

234.  Чотирицифрове число, яке має a тисяч, b сотень, c десятків і d одиниць, позначають через \overline{abcd} , тобто
- $$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Доведіть, що число \overline{abba} ділиться на 11.

235. Доведіть, що число \overline{tata} ділиться на 101.

Вправи для повторення



236. Розкрийте дужки:
- 1) $4a - (3b + 5 - 2c)$; 2) $3 + (-3x + 4y) - (2z - t)$.
237. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $4 - 3y = 6y + 22$; 2) $0,5(9z + 2) = 7z + 2,5$.
238. Кавові зерна в процесі смаження втрачають 12 % своєї маси.
- 1) Скільки кілограмів смажених зерен вийде із 20 кг свіжих?
- 2) Скільки кілограмів свіжих зерен потрібно взяти, щоб отримати 22 кг смажених?
239. Катер пройшов 84 км за 4,5 год, до того ж протягом 2,5 год він ішов за течією річки, а решту часу — проти течії. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год.

Поміркуйте



240. Кенгуру стрибає вздовж прямої. Довжина кожного стрибка дорівнює 1 м. Чи може кенгуру, перебуваючи в деякій точці прямої, за 101 стрибок знову повернутись у цю ж точку?

Цікаво знати



2002 року ЮНЕСКО (міжнародна організація ООН з питань освіти, науки і культури) внесла ім'я українського математика **Михайла Кравчука** до переліку найвидатніших людей світу.

Народився Михайло Кравчук на Волині в селі Човниці, закінчив Луцьку гімназію, Київський університет. З часу створення в Києві Інституту математики (1934 р.) очолював у ньому один з відділів, був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.).



**Михайло Пилипович
Кравчук
(1892–1942)**

Михайло Кравчук написав понад 180 наукових праць, які стосуються різних розділів математики, зокрема алгебри і теорії чисел. Його наукові роботи були використані під час створення першого комп'ютера, а запропоновані ним спеціальні многочлени зараз відомі як *многочлени Кравчука*.

7

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Додавання многочленів. Додамо многочлени $4a^2 - 6a$ і $-2a^2 + 3a + 5$:

$$(4a^2 - 6a) + (-2a^2 + 3a + 5) = \underline{4a^2} - \underline{6a} - \underline{2a^2} + \underline{3a} + 5 = 2a^2 - 3a + 5.$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, ми записали суму даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, сумою многочленів $4a^2 - 6a$ і $-2a^2 + 3a + 5$ є многочлен $2a^2 - 3a + 5$.

У такий же спосіб додають три й більше многочленів.

Суму будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

2. Віднімання многочленів. Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 1$ многочлен $x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 3x + 5) = \underline{4x^2} - \underline{4x} + \underline{1} - \underline{x^2} + \underline{3x} - \underline{5} = \\ = 3x^2 - x - 4.$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, ми записали різницю даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, різницею многочленів $4x^2 - 4x + 1$ та $x^2 - 3x + 5$ є многочлен $3x^2 - x - 4$.

Різницю будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму многочленів:

1) $-5x^2 + 2xy - 4$ і $4x^2 - 6xy$; 2) $2a - 2$; $5a + 2b$ і $-3a + 6b$.

$$\bullet \quad 1) (-5x^2 + 2xy - 4) + (4x^2 - 6xy) = \\ = -\underline{5x^2} + \underline{2xy} - 4 + \underline{4x^2} - \underline{6xy} = -x^2 - 4xy - 4;$$

$$2) (2a - 2) + (5a + 2b) + (-3a + 6b) = \\ = \underline{2a} - 2 + \underline{5a} + \underline{2b} - \underline{3a} + \underline{6b} = 4a + 8b - 2. \bullet$$

Вправа 2. Знайти різницю многочленів $a^2 + 4ab - 1$ і $2a^2 - 3ab$.

$$\bullet \quad (a^2 + 4ab - 1) - (2a^2 - 3ab) = \\ = \underline{a^2} + \underline{4ab} - 1 - \underline{2a^2} + \underline{3ab} = -a^2 + 7ab - 1. \bullet$$

Вправа 3. Розв'язати рівняння $4x^3 - 2x - (4x + 9 + 4x^3) = 0$.

$$\bullet \quad 4x^3 - 2x - 4x - 9 - 4x^3 = 0; \quad -6x - 9 = 0; \quad -6x = 9; \quad x = -1,5.$$

Відповідь. $-1,5$. \bullet

Вправа 4. Довести, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

\bullet Нехай із трьох послідовних непарних чисел найменшим є $2n + 1$, де n — деяке натуральне число або 0. Тоді наступні непарні числа — $2n + 3$ і $2n + 5$. Знайдемо суму цих трьох чисел:

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9.$$

У сумі $6n + 9$ кожний доданок ділиться на 3, тому й сума ділиться на 3 ●



1. Як знайти суму многочленів? Наведіть приклад.
2. Як знайти різницю многочленів? Наведіть приклад.

««Усно

241. Знайдіть суму многочленів:

1) $2a^2 - a$ і $a^2 - 3a$; 2) $4x + 3y$ і $2x - 2y + 4$.

242. Знайдіть різницю многочленів:

1) $3x^2 + 4x$ і $2x^2 + 2x$; 2) $5a + 4b + 4$ і $4a + 4b$.

«««12

243. Дано многочлени: $3x^2 + 2x - 5$ і $2x^2 - 2x + 3$. Запишіть і подайте у вигляді многочленів стандартного вигляду:

- 1) суму цих многочленів;
- 2) різницю першого й другого многочленів;
- 3) різницю другого й першого многочленів.

244. Запишіть суму та різницю многочленів $6y^2 - 4y + 3$ і $5y^2 + 6y - 3$. Подайте суму та різницю у вигляді многочленів стандартного вигляду.

245. Знайдіть суму многочленів:

- 1) $2a^3 - 4a^2 + a$ і $a^3 + 3a^2 - 2a + 2$;
- 2) $-5x + 2$; $-x^2 + 7x - 3$ і $3x^2 - 4$;
- 3) $a^2 - 2ab + b^2$ і $a^2 + 2ab + b^2$;
- 4) $4mn - 6m$; $2m - 6mn$ і $-mn - m$.

246. Знайдіть суму многочленів:

- 1) $3x^4 + 5x^2 - 5$ і $x^4 - 3x^2 + 4$;
- 2) $-2b^2 - 3a$; $3b^2 + 2a$ і $-2b^2 + a$.

247. Знайдіть різницю многочленів:

- 1) $4a^2 - 8a + 5$ і $2a^2 - 2a - 5$;
- 2) $c^3 + 3c^2 - 4c + 1$ і $2c^3 - 3c^2 + c + 4$;
- 3) $5x^3 + 4x^2 + 3x - 4$ і $5x^3 - 4x^2 + 3x + 12$;
- 4) $-n^3 + 3n^2 + 3$ і $2n^4 - 3n^3 + 3n^2 - 5$.

248. Знайдіть різницю многочленів:

- 1) $4x^3 + 3x^2 + x - 4$ і $2x^3 - x^2 + 2x + 7$;
- 2) $-4m^3 + 4m^2 + m - 1$ і $-4m^3 + 4m^2 + m + 1$;
- 3) $5a^2 + 3a + 6$ і $8a^3 - 2a^2 + 6$.

249.  Знайдіть суму та різницю многочленів:

- 1) $2a + b$ і $a - 2b$;
- 2) $2a - 3b$ і $3b - 2a$.

250. Знайдіть суму та різницю многочленів $x + y$ і $x - y$.

251. Спростіть вираз:

- 1) $4a - (5a^2 + 3a - 2)$;
- 2) $(4m^2 - 3m + n) - (-5m + m^2 - 3n)$;
- 3) $(7x^3 - 4yz) - (8yz - 3x^3) - (x^3 + 3yz)$;
- 4) $(4,5ab + 3a) + (-2,5ab - 2,9a)$.

252. Спростіть вираз:

- 1) $(-a + a^2) - (3a^2 - 2 + 2a)$;
- 2) $(x^2 + y) - (2x^2 - y) - (-3x^2 + y)$.

253. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x^2 - 3x - (2x + 2x^2) = 5$;
- 2) $-5y^3 - 4 - (-4y - 5y^3 + 4) = 0$.

254. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5z + z^2 - (z + z^2) = -8$;
- 2) $3x^2 + 4x - (6x + 3x^2 - 2) = 0$.



Інтерактивне завдання 8

Додавання і віднімання многочленів



««« 3

255. Спростіть вираз:

- 1) $(-2a^2b^3 + ab^3) - (a^2b^3 - 3ab^3) - (4ab^3 - 4a^2b^3)$;
- 2) $3x^5 + x^4 - (2x - 3x^4 + 12) - (3x^5 + 2x^4 - 3) - (3x^4 + 2)$;
- 3) $5xy - (x^2 + 4xy - (-x^2 + xy))$.

256. Спростіть вираз:

- 1) $6ab + 3b^2 - (1 + 2b^2) - (-2ab - 3b^2) + 1$;
- 2) $2n^2 + 4n - (3n^2 - 3n - 1 - (n - 1))$.

257. Дано вираз $4x^4 - 4x^2 + 6 - (-6x^2 + 3x^4) - (x^4 + 4)$. Знайдіть його значення, якщо $x = 2$; $x = -0,5$.

258. Дано вираз $7b^4 - (4b^2 - b^4 + 3b) - (-5b^2 + 8b^4 + 2b)$. Знайдіть його значення, якщо $b = 5$; $b = -0,2$.

259. Дано вираз $-(x^3 - 2y^2) + (x^3 + 3x) - (3x + 4y^2)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень x .

260. Доведіть, що значення виразу $(a^3 + 2ab) - (b^2 + ab) + (b^2 - ab)$ не залежать від значень b .

261. Доведіть тотожність:

$$1) -(2m^6 - 3m^7) - (2m^7 - 3m^5) - (-2m^6 + 3m^5) = m^7;$$

$$2) (a^2 + ab + b^2) - (a^2 - ac - c^2) - (b^2 - bc + c^2) = ab + ac + bc.$$

262. Доведіть тотожність

$$(3ab - a) - (2ab - b) - (ab - a - b) = 2b.$$

263.  Знайдіть такий многочлен P , для якого наведена рівність є тотожністю:

$$1) P + (2x^2 + x - 2) = -x^2 + 1;$$

$$2) P - (x^2 - 3x + 3) = 3x - 1;$$

$$3) (4x^2 - 2x + 1) - P = x^2 - 2x + 1.$$

264. Знайдіть многочлен, який у сумі з многочленом $2x^2 + x - 4$ дає многочлен $3x + 2$.

265. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4z^2 - 2 - (5z - 12 + z^2) = 3z^2;$$

$$2) -(x^4 + 2) - (-5x^4 + 2x) = 4x^4 + 2x + 5.$$

266. Розв'яжіть рівняння:

$$1) -(1 + 2x - x^2) - (3x + 5) = x^2;$$

$$2) 2 - (-6 + y - 4y^3) = 4y^3 + y + 4.$$

267. На трьох ділянках посадили яблуні: на першій ділянці — n яблунь, що на 20 яблунь більше, ніж на другій, і на 12 яблунь менше, ніж на третій. Скільки яблунь посадили на трьох ділянках разом?

268. За 1 хв перший автомат розфасовує m кг борошна, що на 7 кг менше, ніж другий, і на 5 кг більше, ніж третій. Скільки кілограмів борошна розфасовують за 1 хв три автомати разом?



269. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться на 4.

270. Доведіть, що сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

271. Доведіть, що сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться на 6.
272. Доведіть, що різниця трицифрового числа та суми його цифр ділиться на 9.
273. Двоцифрове число, яке має a десятків і b одиниць, позначають через \overline{ab} , тобто $\overline{ab} = 10a + b$. Доведіть, що сума $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.

Вправи для повторення



274. Обчисліть, використавши розподільну властивість множення:

$$1) 18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right); \quad 2) 24 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right); \quad 3) \left(0,5 - \frac{1}{3} \right) \cdot 30.$$

275. Виконайте множення одночленів:

$$1) 5a^2 \cdot 3a^3; \quad 2) 4ax \cdot (-0,3ax^2); \quad 3) -2cd \cdot (-3c^4d).$$

276. Із цукрових буряків у процесі переробки одержують 16 % цукру. Скільки тонн буряків потрібно взяти, щоб отримати 4 т цукру?

277. Довжина всіх ходів печери Оптимістичної дорівнює 240 км, а печери Озерної — 134 км. (Обидві печери розташовані на Тернопільщині, першу з них занесено до Книги рекордів Гіннеса як найдовшу у світі гіпсову печеру.) На скільки відсотків довжина ходів печери Озерної менша від довжини ходів печери Оптимістичної? Результат округліть до десятих відсотка.



Печера Оптимістична

Поміркуйте



278. В одному класі кількість хлопців, які розв'язали дану задачу, виявилася такою самою, як і кількість дівчат, які її не розв'язали. Кого в тому класі більше: тих, хто розв'язав задачу, чи дівчат?

8

МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 3a + 4$. Використовуючи розподільну властивість множення, матимемо:

$$2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$$

Отже, добутком одночлена $2a$ і многочлена $a^2 - 3a + 4$ є многочлен $2a^3 - 6a^2 + 8a$. Щоб знайти добуток, ми помножили одночлен на кожний член многочлена й одержані результати додали.



Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

За цим правилом можна множити й многочлен на одночлен. Наприклад:

$$(3x^2 - x + 2) \cdot 3x = 3x^2 \cdot 3x - x \cdot 3x + 2 \cdot 3x = 9x^3 - 3x^2 + 6x.$$

Добуток будь-якого одночлена й будь-якого многочлена завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення: $-2a^2b(-5b^2 + 2ab)$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad -2a^2b(-5b^2 + 2ab) &= -2a^2b \cdot (-5b^2) + (-2a^2b) \cdot 2ab = \\ &= 10a^2b^3 - 4a^3b^2. \end{aligned}$$

$$\text{Скорочений запис: } -2a^2b(-5b^2 + 2ab) = 10a^2b^3 - 4a^3b^2. \bullet$$

Вправа 2. Спростити вираз $2x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(x - 1)$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(x - 1) &= \underline{2x^3} + \underline{8x^2} - 4x - \underline{2x^3} + \underline{2x^2} = \\ &= 10x^2 - 4x. \bullet \end{aligned}$$

Вправа 3. Розв'язати рівняння $2x(2x + 3) - 7 = 4x^2 - 4$.

$$\bullet \quad 4x^2 + 6x - 7 = 4x^2 - 4; \quad 4x^2 + 6x - 4x^2 = 7 - 4; \quad 6x = 3; \quad x = 0,5.$$

Відповідь. 0,5. \bullet



1. Як помножити одночлен на многочлен?

«Усно»

279. Виконайте множення:

- 1) $a(a + 1)$; 2) $b(c - 2b)$; 3) $x(x^2 + x - 4)$;
 4) $(m + 4) \cdot m$; 5) $(b + 2a) \cdot b$; 6) $(y^2 + 4y + 4) \cdot y$.

«1 2»

280. Виконайте множення:

- 1) $x(2x - 5)$; 2) $2k^2(5k + 3)$;
 3) $b(4b^2 - 3b + 1)$; 4) $-a^2(a^2 - 2a + 1)$;
 5) $3ab(2a - 3b - 2)$; 6) $(x^2 - 5x) \cdot x^2$;
 7) $(-y^3 + 5y^2) \cdot (-4y)$; 8) $(y^2 - x - 3) \cdot 2xy$.

281. Виконайте множення:

- 1) $a(2a + 3)$; 2) $3x(x^2 - 4x + 3)$;
 3) $-2b(b^2 + 2b - 3)$; 4) $3xy(-2x + y - 3)$;
 5) $(-3n^2 + 2n) \cdot 2n$; 6) $(2a - b) \cdot (-ab)$.

282. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

- 1) $-x(4x - 3) + 3$; 2) $(5a + 2) \cdot (-4a) + 10a^2$;
 3) $a^2(2a^3 + a) - 2a^3$; 4) $4x(2x - 3x^2) - 8x^2 - 2x$.

283. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

- 1) $-3a^2(a - 1) - 2a^2$; 2) $2b(3b^2 - 2) - 2b^3 + 1$.

284. Спростіть вираз:

- 1) $b(2b + c) - bc$; 2) $a(a + b) - b(a - b)$;
 3) $n^2(n + 1) - n(n + 1)$; 4) $2m(6m + 1) + 3(1 - 4m^2)$;
 5) $2a(3a - 4b) + 8ab - 2a^2$; 6) $-x(2x - y) - (-3x^2 + xy)$.

285. Спростіть вираз:

- 1) $c(a^2 + 3c) - 3c^2$; 2) $m(k + m) + k(k - m)$;
 3) $4y(2x - y) - 8xy + 2y^2$; 4) $-b(3b - 4) - (4b - 3b^2)$.

286. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(2x - 1) - x = 4$; 2) $-2(3z + 2) + 4z = 5$;
 3) $12 - 5(y + 2) = -8$; 4) $4x(1 - 2x) + 8x^2 = 24$.

287. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3(2x - 3) - 4x = 5$; 2) $9 - 2(2y + 9) = 3$.

288. За 2 однакові ручки й 8 однакових зошитів Остап заплатив 64 грн. Знайдіть ціну ручки, якщо вона на 2 грн більша за ціну зошита.

289. У великому бутлі вміщується води на 4 л більше, ніж у малому. Скільки літрів води в малому бутлі, якщо у двох великих і трьох малих бутлях разом 38 л води?



290. Спростіть вираз:

1) $2a(2a^2 - 4a + 1) - 4(a^3 - 2a^2 - 2)$;

2) $5x^3(3x^3 - 2x + 1) - x^2(8x^2 + 5x)$;

3) $-8m^3n(mn^2 - mn - n^2) - (2mn)^3$;

4) $2ab(0,5c + 2a) - 4a(ab - 0,25bc)$;

5) $2xy^2 - \frac{1}{3}x(6x + 6y^2 - 1) + \frac{2}{3}x$.

Математика вчить мислити й разом з тим вселяє віру в безмежні сили людського розуму. Вона виховує волю, характер.

*Василь Сухомлинський**

291. Спростіть вираз:

1) $b^2(4 - 2b + b^2) - 2b(1 + 2b - b^2)$;

2) $4xy(2x - 1) - 2x(4xy - x - 2y)$;

3) $-2m^2n^3(5mn^2 - 8m^2n) - (4m^2n^2)^2$;

4) $\frac{2}{3}ab(6a^2 - 9ab) - 4a^3(a + b)$.

292. Доведіть, що значення виразу $x(x^2 + 2y) - y(y + x) + y(y - x)$ не залежать від значень y .

293. Доведіть, що значення виразу $x^2(x - 2) - x(x^2 - 2x + 2) + 2x$ не залежать від значень x .

294. Доведіть, що для будь-яких значень x , y та z значення виразу $x(x - y + z) + y(y - z + x) + z(z - x + y)$ є невід'ємним числом.

295. Доведіть тотожність:

1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$;

2) $a(b^2 - bc + c^2) + ab(c - b) + ac(b - c) = abc$;

3) $x^4(x^3 - x^2) - x^3(x^4 - x^3) + x^2(x^5 - x^4) - x(x^6 - x^5) = 0$;

4) $ab(c - ab) + bc(a - bc) + ca(b - ca) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3abc$.

296. Доведіть тотожність:

1) $a(a^4 - 2a^3 + 3a^2) - a^2(a^3 - a^2 + 2a) + a^3(a - 1) = 0$;

2) $x(x - yz) + y(y - zx) + z(z - xy) + 3xyz = x^2 + y^2 + z^2$.

297. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(3 + 2x + 4x^2) - 2x^2(2x + 1) = 9$;

2) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$;

3) $6 + 4x - 2(1 - 2x) = 5(2x - 3)$;

4) $0,4(2x - 7) + 1,2(3x + 7) = 1,6x$.

298. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2(x + 1) - x(3x^2 + 3x + 1) = -1$;

2) $-5(4x - 3) + 3x = -12(x - 2)$;

3) $1,2x(x + 2) - 3(0,4x^2 + 1) = 0,6$.

299. У сквері росло кленів утричі більше, ніж лип. Після того як у ньому посадили 6 кленів і 7 лип, кленів стало вдвічі більше, ніж лип. Скільки кленів і скільки лип росло у сквері спочатку?

300. На двох яблунях росло порівну яблук. Після того як із першої яблуні зірвали 50 яблук, а з другої — 90, на першій яблуні стало яблук утричі більше, ніж на другій. Скільки яблук росло на кожній яблуні спочатку?

301. Автобус подолав шлях між двома містами за 1,5 год, а автомобіль — за 1,2 год. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 18 км/год більша за швидкість автобуса.



Інтерактивне завдання 9

Множення одночлена на многочлен



302. Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $a^{n+1}(a^{n+1} - 4) - a^n(a^{n+2} - 4a + 1)$;

2) $x^n(y^n - x) + y^n(x - x^n) + x(x^n - y^n)$.

303. Спростіть вираз $b^{n+2}(b^{n+3} - 1) - b^n(b^{n+5} - b^2)$, де n — натуральне число.

304. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m і n значення виразу $m^{2n}(m^2 + m + 1) - (m^{n+1})^2 - m(m^2)^n$ є додатним числом.

305. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1-x}{6} - \frac{2x+4}{9} = \frac{1}{9}; \quad 2) \frac{4x+1}{36} = \frac{x-3}{12} + \frac{x+3}{18}.$$

306. Розв'яжіть рівняння $\frac{1+3x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5-2x}{6}$.

307. Вікторія за певний час пройшла шлях від дому до школи. Якби вона йшла в 1,2 раза швидше, то час руху був би на 2 хв менший. Скільки хвилин Вікторія йшла до школи?

Вправи для повторення



308. Запишіть у вигляді виразу:

- 1) добуток двочленів $a - b$ і $2a + b$;
- 2) добуток суми виразів $2a$ і $3b$ та їх різниці.

309. Спростіть вираз:

- 1) $(4a^2b)^2 \cdot 0,25ab^2$;
- 2) $(-3xy^2)^3 \cdot 2(xy)^2$.

310. На рисунку 4.1 вказано ціну на товар і його нову ціну після знижки. Знайдіть невідомі числа на рисунках 2) – 4).

<p>1) </p>	<p>2) </p>
<p>3) </p>	<p>4) </p>

Рис. 4

311. Через першу трубу з басейна можна випустити воду за 6 год, а через другу — за 9 год. За скільки годин можна випустити всю воду, відкривши крани обох труб?

Поміркуйте



312. Чи можна в числі 123 456 789 переставити деякі цифри так, щоб одержати просте число?

9

МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Щоб звести множення цих многочленів до множення многочлена на одночлен, позначимо многочлен $c + d$ через x . Тоді:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx.$$

Повернувшись до заміни $x = c + d$, матимемо:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Отже, добутком многочлена $a + b$ і многочлена $c + d$ є многочлен $ac + ad + bc + bd$:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Вираз $ac + ad + bc + bd$ ми одержали б одразу, якби помножили a на c і d , потім b на c і d й одержані добутки додали. Можна сказати й так: добуток $ac + ad + bc + bd$ можна одержати, якщо помножити кожний член многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $c + d$ й одержані добутки додати.

Маємо таке правило:



Щоб помножити многочлен на многочлен, достатньо кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Помножимо за цим правилом многочлен $2a^2 + b^2$ на многочлен $2a - b$:

$$\begin{aligned} (2a^2 + b^2)(2a - b) &= 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) = \\ &= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Виконуючи множення многочленів, проміжні результати можна не записувати:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

У наведених прикладах добуток двох многочленів ми записували у вигляді многочлена.

Узагалі, добуток будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

$$1) (2x^2 - xy + y^2)(x - 3y); \quad 2) (a + b)(a + 1)(b - 1).$$

$$\bullet 1) (2x^2 - xy + y^2)(x - 3y) = 2x^3 - \underline{6x^2y} - \underline{x^2y} + \underline{3xy^2} + \underline{xy^2} - 3y^3 = 2x^3 - 7x^2y + 4xy^2 - 3y^3.$$

2) Знайдемо добуток перших двох многочленів, а потім одержаний добуток помножимо на третій многочлен:

$$\begin{aligned} (a + b)(a + 1)(b - 1) &= (a^2 + a + ba + b)(b - 1) = \\ &= a^2b - a^2 + \underline{ab} - a + b^2a - \underline{ba} + b^2 - b = \\ &= a^2b - a^2 - a + ab^2 + b^2 - b. \bullet \end{aligned}$$

Вправа 2. Розв'язати рівняння $(x - 2)(2x + 3) - x(2x + 4) = 3$.

$$\bullet 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 3; \quad -5x - 6 = 3; \quad -5x = 9;$$

$$x = -1,8.$$

Відповідь. $-1,8$. \bullet



1. Як помножити многочлен на многочлен?

«Усно»

313. Виконайте множення:

$$1) (a + 2)(b + 1); \quad 2) (a - b)(x + y - z).$$

«1 2»

314. Перемножте многочлени:

$$\begin{array}{ll} 1) (x + 2)(y + z); & 2) (b + a)(c - 3); \\ 3) (m - 4)(n + k); & 4) (a - b)(x - y); \\ 5) (2a - 3b)(2c + 5); & 6) (4a + 6b)(3d - 2c); \\ 7) (x + y)(a - 5b + 2); & 8) (m - n + 1)(k - 1). \end{array}$$

315. Перемножте многочлени:

$$\begin{array}{ll} 1) (a + b)(c + 3); & 2) (2x + y)(3 - z); \\ 3) (a - 2b)(3x - 4y); & 4) (5m - 2)(2a + 5); \\ 5) (a - 3)(b + c + 2); & 6) (2x - y - 1)(a - 3b). \end{array}$$

316. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

$$\begin{array}{ll} 1) (a + 3)(4a - 3); & 2) (5b - 4)(3b - 2); \\ 3) (2y + 1)(3 - y); & 4) (x - 2)(x^2 + 3x); \end{array}$$

5) $(n - m)(n + 4m)$;

6) $(3a - 2b)(2a - b)$.

317. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)(a + 3)$;

2) $(3x + 2)(2 - x)$;

3) $(n - 3)(2n^2 - n)$;

4) $(a + 5b)(a - b)$.

318. Спростіть вираз:

1) $(y + 3)(y - 4) - y^2 + y$;

2) $(3a - 4)(2a + 1) + 5a$;

3) $9 + (2x - 3)(3 + 2x)$;

4) $(a^2 + a)(a + 3) - 4a^2$;

5) $(a + b)(a - 3b) + 2ab$;

6) $(x - 4y)(2x - y) - 2x^2 + 9xy$.

319. Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x + 3) - x^2$;

2) $(a - 4)(3a - 4) + 16a - 16$;

3) $(b - 2c)(b + 4c) + 8c^2$;

4) $mn + (m + n)(2m - 3n)$.

320. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = 3$;

2) $(2y - 1)(2 - y) + 2y^2 = 1$.

321. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 1) - x^2 = 5$;

2) $5x^2 + (1 - x)(5x + 2) = 5$.



Інтерактивне завдання 10

Множення многочлена на многочлен



3

322. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)(a^2 + 2a - 3)$;

2) $(x^2 - 2x + 1)(2x + 5)$;

3) $(-3b + 2)(4b^2 + b - 4)$;

4) $(y - 0,2)(y^2 + 0,2y - 0,5)$;

5) $(n^2 - n)(n^2 + 2n + 2)$;

6) $(c + 2)(c + 3)(c - 5)$.

323. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a + 3)(a^2 - 4a + 2)$;

2) $(2b^2 - 3b + 1)(2b - 1)$;

3) $(n - 3)(n^2 - 1,5n - 4,5)$;

4) $(x - 2)(x + 5)(x - 4)$.

324. Перемножте многочлени:

1) $(a + b)(a^2 + 2ab - b^2)$;

2) $(2x^2 - 3xy + y^2)(2x - y)$;

3) $(n - m)(n + m)(n - 4m)$;

4) $(3a - b)(2a - b)(a + 2b)$.

325. Перемножте многочлени:

1) $(2x + y)(x^2 + 2xy - 2y^2)$;

2) $(a - b)(a + 2b)(a - 2b)$.

326. Спростіть вираз:

1) $(3a - 1)(2a + 5) + (2a - 5)(3a + 1)$;

2) $(x + 7)(8x - 1) - (2x + 3)(4x - 1)$;

- 3) $(a - 2)(1 - 2a + 2a^2) - 2(a^3 - 3a^2 - 1)$;
 4) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b) - a^3 - b^3$;
 5) $(3xy^2 - 7x^2y)(3xy^2 - 2x^2y) + (3xy)^3 - (3xy^2)^2$.

327. Спростіть вираз:

- 1) $(4x - 3)(3x + 4) + (2x - 3)(3x + 1)$;
 2) $(2b - 7)(4b - 1) - (8b - 3)(b + 1)$;
 3) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) - 27y^3$;
 4) $(a + b)(a + b - 1) - a(a - 1) - b(b - 1)$.

328. Доведіть, що значення виразу $(x - 3)(x^2 - 2x - 6) - x^2(x - 5)$ не залежать від значень x .

329. Доведіть, що значення виразу $(b + 1)(b + 4) - (b + 2)(b + 3)$ не залежать від значень b .

330. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(2k + 1)(3k + 2) - (2k - 1)(3k - 2)$ ділиться на 14.

331. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(3n + 2)(4n - 3) - (2n + 3)(n - 2)$ ділиться на 10.

332. Доведіть, що вираз $(a^2 + 3)(a^2 - 1) - (a^2 + 4)(a^2 - 2)$ набуває лише додатних значень.

333. Доведіть тотожність:

- 1) $(a + 2)(a^2 - 2a - 3) = (a - 3)(a^2 + 3a + 2)$;
 2) $(a - b)(b - c)(c - a) = ab(b - a) + bc(c - b) + ca(a - c)$.

334. Доведіть тотожність:

- 1) $(x + 3)(x^2 - 1) = (x^2 + 2x - 3)(x + 1)$;
 2) $(a + b)(b - c) - (a - b)(b + c) = 2(b^2 - ac)$.


335. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 1)(x - 3) = (x - 2)(x + 3)$;
 2) $(2y - 1)(1 - y) + (y + 1)(2y - 3) = 0$;
 3) $(x - 7)(3x + 2) = 3x(x - 3) - 8$.

336. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 3)(x - 4) = (x - 5)(x + 2)$;
 2) $(4z + 1)(z - 1) - (z + 2)(4z - 1) = 6$.



337.  Спростіть вираз $(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - z)$, що є добутком 26 множників, у яких від змінної x віднімаються змінні, позначені всіма 26 буквами латинського алфавіту.

- 338.** Одне натуральне число при діленні на 6 дає в остачі 2, а друге — в остачі 3. Доведіть, що добуток цих чисел ділиться на 6.
- 339.** Натуральні числа a і b при діленні на 4 дають в остачі відповідно 2 і 3. Доведіть, що число $ab + 2$ ділиться на 4.
- 340.** Розв'яжіть рівняння:
 1) $(y - 2)(y^3 + 2y^2 + 4y + 8) = y(y^3 + 4)$;
 2) $(0,5x - 3,5)(6x + 2) + 30x = 3x(x - 3) - 26$.
- 341.** Розв'яжіть рівняння
 $(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) = x(1 + x^4)$.
- 342.** Довжина кімнати в 1,5 раза більша за ширину. Якщо довжину кімнати збільшити на 1 м, а ширину зменшити на 1 м, то площа зменшиться на 3 м². Знайдіть довжину і ширину кімнати.
- 343.** Довжина прямокутника на 4 см більша за ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 1 см, а ширину збільшити на 2 см, то площа збільшиться на 10 см². Знайдіть довжину і ширину прямокутника.
- 344.** Знайдіть три послідовні цілі числа, квадрат найменшого з яких на 11 менший від добутку двох інших чисел.

Вправи для повторення



- 345.** Обчисліть зручним способом:
 1) $37 \cdot 48 + 37 \cdot 52$; 2) $9,3 \cdot 5,6 - 9,3 \cdot 5,5$.
- 346.** Запишіть одночлен $24a^3b^4$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є:
 1) $3a^2b^2$; 2) $8b^3$; 3) $-4ab^4$; 4) $-12a^3$.
- 347.** Після того як з банківської картки зняли 20 % усіх грошей, а згодом — ще 2000 грн, на ній залишилося 55 % початкової суми. Скільки гривень було на картці спочатку?
- 348.** Два автомобілі одночасно виїхали з Вінниці до Києва, відстань між якими 256 км. Перший автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а другий — 75 км/год. На якій відстані від Києва перебував другий автомобіль на момент прибуття до нього першого автомобіля?

Поміркуйте



349. На столі стоять 6 чашок, як показано на рисунку 5. Дозволяється за один хід перевернути будь-які 2 чашки. Чи можна за кілька таких ходів поставити всі чашки дном донизу?



Рис. 5

10

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

1. **Розкладання многочленів на множники.** Ви знаєте, що складені натуральні числа можна розкласти на множники. Наприклад, $21 = 3 \cdot 7$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Розкладати на множники можна й многочлени. Наприклад,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Записавши многочлен $ab + ac$ у вигляді добутку $a(b + c)$, кажуть, що многочлен $ab + ac$ розкладено на два множники a і $b + c$. Кожний із цих множників є многочленом (перший многочлен складається лише з одного члена).

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку кількох многочленів.

Порівняйте

$$a(b + c) = ab + ac$$



помножили одночлен на многочлен;
результат — многочлен

$$ab + ac = a(b + c)$$



розклали многочлен на множники;
результат — добуток одночлена і мно-
гочлена

2. Винесення спільного множника за дужки. Розглянемо один зі способів розкладання многочленів на множники.

Виконаємо множення одночлена на многочлен:

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy.$$

Перепишемо ці рівності у зворотному порядку:

$$x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x(x + y).$$

Многочлен $x^2 + xy$ розклали на два множники x та $x + y$. Для цього ми в його членах x^2 та xy виділили спільний множник x : $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y$, а потім на основі розподільної властивості множення записали одержаний вираз у вигляді добутку многочленів x та $x + y$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом винесення спільного множника за дужки*.

Розкладемо на множники многочлен $12x^3y - 18x^2y^2$.

Спочатку знайдемо спільний числовий множник для коефіцієнтів 12 і -18 . Якщо коефіцієнтами є цілі числа, то за спільний числовий множник беруть, як правило, найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів. У нашому випадку це число 6. Степені з основою x входять в обидва члени многочлена. Оскільки перший член містить $x^3 = x^2 \cdot x$, а другий — x^2 , то спільним множником для степенів з основою x є x^2 (за дужки виносять змінну з меншим показником). У члени многочлена відповідно входять множники y і y^2 , за дужки можна винести y . Отже, за дужки можна винести одночлен $6x^2y$:

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y \cdot 2x - 6x^2y \cdot 3y = 6x^2y(2x - 3y).$$

Щоб винести у многочлені спільний множник за дужки, ми кожний член многочлена подали у вигляді добутку, який містить спільний множник, і винесли його за дужки.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники многочлен

$$-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2.$$

$$\bullet -2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2 = -2ab(a + 4ab - 5b). \bullet$$

Вправа 2. Розкласти на множники: $5b(a - c) + 3(a - c)$.

• Даний вираз є сумою двох доданків, для яких спільним множником є вираз $a - c$. Винесемо цей множник за дужки:

$$5b(a - c) + 3(a - c) = (a - c)(5b + 3). \bullet$$

Вправа 3. Розкласти на множники: $2x(m - n) + y(n - m)$.

• Доданки мають множники $m - n$ і $n - m$, які відрізняються тільки знаками: $n - m = -(m - n)$. Тому, записавши другий доданок у вигляді $-y(m - n)$, матимемо доданки зі спільним множником $m - n$. Отже,

$$2x(m - n) + y(n - m) = 2x(m - n) - y(m - n) = (m - n)(2x - y). \bullet$$

Вправа 4. Знайти значення виразу $8,5a^2 + a^3$, якщо $a = 1,5$.

• Розкладемо спочатку многочлен $8,5a^2 + a^3$ на множники:

$$8,5a^2 + a^3 = a^2(8,5 + a).$$

Якщо $a = 1,5$, то:

$$a^2(8,5 + a) = 1,5^2 \cdot (8,5 + 1,5) = 2,25 \cdot 10 = 22,5. \bullet$$

Вправа 5. Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(2x + 5) = 0.$$

Добуток $x(2x + 5)$ дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю:

$$x = 0 \text{ або } 2x + 5 = 0, \text{ звідки } x = 0 \text{ або } x = -2,5.$$

Відповідь. 0; -2,5. \bullet

1. Що означає розкласти многочлен на множники?

2. Як розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть це на прикладі многочлена $2a^2 + 4ab$.



«Усно»

350. Знайдіть спільний множник членів многочлена:

1) $4a + 4b$;

2) $15x - 10$;

3) $3a + 3ab$;

4) $y^2 - 2y$;

5) $2x^3 - 3x^2 + x^4$;

6) $4ab^3 + 6a^2b^2$.

351. Чи правильно розкладено многочлен на множники:

- 1) $6a + 6 = 6(a + 0)$; 2) $3b + 3 = 3(b + 1)$;
 3) $mk - 2m = m(k - 2)$; 4) $-ax - 2a = -a(x + 2)$;
 5) $b^2 + 5b = b(b^2 + 5)$; 6) $4xy - 2y = 2y(2x - 1)$?



352. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $3a + 3b$; 2) $4c + 8$; 3) $9a - 3b$;
 4) $-6x + 6y$; 5) $-5k - 10$; 6) $12m + 8n$.

353. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $5m - 5$; 2) $5a + 15b$; 3) $8x - 2y$;
 4) $20y - 15z$; 5) $-7k + 7m$; 6) $-4c - 12$.

354. Розкладіть на множники:

- 1) $ax + bx$; 2) $ym - yn$; 3) $-xz - yz$.

355. Розкладіть на множники:

- 1) $km + kn$; 2) $-xa + ya$; 3) $ta - tb$.

356.  Розкладіть на множники та зробіть перевірку:

- 1) $2b - 8a$; 2) $6xy + 24x$; 3) $9mn - 6m$.

357. Розкладіть на множники:

- 1) $9ax - 9bx$; 2) $3ay - 6y$; 3) $-7ab + 14bc$;
 4) $10x^2 - 15x^3$; 5) $32b^4 - 4b^2$; 6) $-8c^3 - 10c^4$.

358. Розкладіть на множники:

- 1) $5xy - 5y$; 2) $8ac - 6ab$; 3) $c^2 + 2c$;
 4) $3x^2 + 9x$; 5) $15y^2 - 12y^4$; 6) $-24n - 8n^3$.

359. Розкладіть на множники:

- 1) $a^3 + 3a^2 - 10a$; 2) $4x^5 - 8x^3 + 4x^2$; 3) $9a^6 - 3a^3 - 12a^4$.

360. Розкладіть на множники:

- 1) $2x^4 - x^3 - x^2$; 2) $2c - 4c^2 + 8c^3$; 3) $5b^2 + 15b^4 - 10b$.

361. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $x^3 - 1,5x^2$, якщо $x = 2,5$;
 2) $xy + y^2$, якщо $x = -0,3$; $y = 10,3$.

362. Знайдіть значення многочлена:

- 1) $2,4a^2 - a^3$, якщо $a = 1,4$;
 2) $m^2 + mn$, якщо $m = 2,8$; $n = 7,2$.

363. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x = 0$;

2) $5x^2 + 15x = 0$.

364. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 2x = 0$;

2) $2x^2 - 4x = 0$.



365. Розкладіть на множники:

1) $-9a^5 - 27a^3 + 18a^4$;

2) $60b^7 - 45b^8 + 30b^4$;

3) $36x^4y^5 - 48x^6y^4$;

4) $24a^2b^3 - 16a^3b^3 - 40a^3b^2$;

5) $-30m^4n^6 + 12m^5n^5 - 42m^5n^6$;

6) $8abc^2 + 20ab^2c - 12a^2bc$.

366. Розкладіть на множники:

1) $-5b^4 + 10b^2 + 5b^5$;

2) $2x^4z^3 + 4x^4z^4 - 4x^4z^5$;

3) $45a^4b^2 - 60a^3b^3 + 75a^2b^4$;

4) $-36k^2n^5 + 54k^3n^4 - 90k^2n^4$.

367. Розкладіть на множники:

1) $a(m + k) - b(m + k)$;

2) $2a(x - y) + 3(x - y)$;

3) $x(a - b + c) + y(a - b + c)$;

4) $m(a - b) + 3(b - a)$;

5) $a^2(n - 3) - 5(3 - n)$;

6) $(x - 2)^2 + 4(x - 2)$;

7) $2x(a - b) - (b - a)^2$;

8) $4x(a + b) + 2x(a + b)^2$.

368. Розкладіть на множники:

1) $m(x - k) - n(x - k)$;

2) $c(a + b + 2) + 3(a + b + 2)$;

3) $a(s - t) + b(t - s)$;

4) $2(a - b) - x(b - a)$;

5) $(m - 4)^2 - 5(m - 4)$;

6) $k(m - n) + 2(n - m)^2$.

369. Знайдіть значення многочлена:

1) $\frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}y^2$, якщо $x = 3$; $y = 0,5$;

2) $a^2 + 2ab - 8a$, якщо $a = \frac{3}{7}$; $b = \frac{2}{7}$.

370. Знайдіть значення многочлена:

1) $\frac{2}{9}m^2n + \frac{4}{9}m^2$, якщо $m = -0,5$; $n = 88$;

2) $2xy - y^2 + 3y$, якщо $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{2}{3}$.

371. Знайдіть значення виразу, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $78^2 + 22 \cdot 78$;

2) $9,3^2 - 10,3 \cdot 9,3$;

3) $9,4 \cdot 0,6^2 + 0,6^3$;

4) $24 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^8$.

372. Обчисліть зручним способом:

1) $174^2 - 74 \cdot 174$; 2) $11,5 \cdot 1,5^2 - 1,5^3$.

373. Доведіть, що значення виразу:

1) $19^8 - 19^7$ ділиться на 18; 2) $3 \cdot 7^6 - 7^5$ ділиться на 20.

374. Доведіть, що значення виразу:

1) $24^9 + 24^8$ ділиться на 25; 2) $5^{12} - 7 \cdot 5^{10}$ ділиться на 18.

375. Розв'яжіть рівняння:

1) $4y - 0,2y^2 = 0$; 2) $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$;
 3) $x(x + 2) - 4(x + 2) = 0$; 4) $z(2z - 3) + 2(3 - 2z) = 0$.

376. Розв'яжіть рівняння:

1) $1,5x^2 + 0,3x = 0$; 2) $0,8y - 2y^2 = 0$;
 3) $z(2z + 5) - 3(2z + 5) = 0$; 4) $x(x - 7) - 2(7 - x) = 0$.



Інтерактивне завдання 11

Винесення спільного множника за дужки



4

377. Знайдіть значення виразу:

1) $2 \cdot 3^{19} - 45 \cdot 9^8 - 27^6$; 2) $5^{20} - 1,5 \cdot 25^{10} + 0,1 \cdot 125^7$.

378. Знайдіть значення виразу $5 \cdot 2^{12} - 1,5 \cdot 4^7 + 8^4$.

379. Доведіть, що значення виразу $3 \cdot 2^{15} + 8^4 - 4^7$ ділиться на 21.

380. Доведіть, що значення виразу $17 \cdot 27^5 - 3^{17}$ ділиться на 8.

381. Доведіть:

1) якщо $a + b = 4$, то $a^3b^2 + a^2b^3 - 4a^2b^2 = 0$;
 2) якщо $x + y + 2 = xy$, то $x^4y^4 - x^3y^4 - x^4y^3 = 2x^3y^3$.

382. Доведіть: якщо $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 = 4a^3b^3$.

383. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 5)^2 + 3(5 - 2x) = 0$; 2) $x(x + 4) = 6x + 24$.

384. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 3)^2 + 6(x - 3) = 0$; 2) $x(x - 2) = 8 - 4x$.

Вправи для повторення



385. Візьміть у дужки два останні доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «-»: 1) $a + b - 4$; 2) $x - y - 3$.

386. Перемножте многочлени:

1) $(5a - 7b)(4a - b)$; 2) $(y + 3)(y^2 - y + 4)$.

387. Обчисліть зручним способом:

1) $23 \cdot 2,8 + 3,3 \cdot 10,78 + 23 \cdot 7,2 - 3,3 \cdot 0,78$;

2) $7,7 \cdot 1,6 - 0,03 \cdot 500 + 1,8 \cdot 1,6 + 1,6 \cdot 0,5$.

388. Сквер має форму прямокутника. Дві доріжки завширшки 2 м розділяють його на 4 частини прямокутної форми (рис. 6). Сквер планують обгородити парканчиком по периметру, крім входів на доріжки. Скільки для цього потрібно метрів парканчика, якщо відомо, що загальна площа доріжок дорівнює 280 м^2 ?



Рис. 6

Поміркуйте



389. Чи можна в прямокутній таблиці розміру 5×10 (5 рядків і 10 стовпців) розставити деякі 50 чисел так, щоб сума чисел кожного рядка дорівнювала 30, а сума чисел кожного стовпця — 10?

11

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

Вивчення цього способу розкладання многочленів на множники почнемо із прикладу на множення многочленів. Виконаємо множення двочлена $a - b$ на двочлен $x + y$ так:

$$(a - b)(x + y) = a(x + y) - b(x + y) = ax + ay - bx - by.$$

Проводячи перетворення у зворотному порядку, многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на два множники $a - b$ та $x + y$:

$$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= (ax + ay) + (-bx - by) = \\ &= a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b). \end{aligned}$$

Проаналізуємо останні перетворення. Маємо многочлен, члени якого можна групувати так, щоб кожна група мала спільний множник: для групи $ax + ay$ — спільний множник a , для групи $-bx - by$ — спільний множник $-b$. У кожній групі спільний множник виносимо за дужки. В утвореній різниці $a(x + y) - b(x + y)$ маємо спільний множник $x + y$. Виносимо його за дужки й одержуємо $(x + y)(a - b)$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом групування*.

Застосовуючи спосіб групування, потрібно:

- 1) утворити такі групи членів, щоб члени кожної групи мали спільний множник;
- 2) у кожній групі винести спільний множник за дужки (після цього має утворитися спільний множник для всіх груп);
- 3) винести за дужки спільний множник для всіх груп.

Порівняйте

$$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$$

помножили многочлен на многочлен; результат — многочлен

$$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$$

розклали многочлен на множники; результат — добуток многочленів

Зазначимо, що многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на множники, групуючи його члени по-іншому:

$$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= (ax - bx) + (ay - by) = \\ &= x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y). \end{aligned}$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники многочлен $3ax - 12x + 9a - 4x^2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3ax - 12x + 9a - 4x^2 &= (3ax + 9a) - (4x^2 + 12x) = \\ &= 3a(x + 3) - 4x(x + 3) = (x + 3)(3a - 4x). \bullet \end{aligned}$$

Вправа 2. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 5x + 6$.

- Подамо другий член $-5x$ у вигляді $-3x - 2x$. Тоді:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 3x - 2x + 6 = \\ &= x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2). \end{aligned}$$



1. Як розкласти многочлен на множники способом групування?

«Усно»

390. Укажіть у многочлені групи членів, які мають спільний множник, та назвіть цей множник:

1) $ax + ay + 5x + 5y$; 2) $2a - bn - 2b + an$.

391. Поясніть кожний крок розкладання многочлена на множники:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - kx - ky &= (2x - kx) + (2y - ky) = \\ &= x(2 - k) + y(2 - k) = (2 - k)(x + y). \end{aligned}$$

«1»

392. Розкладіть на множники:

1) $a(x + y) + 4x + 4y$; 2) $bx + by - 7(x + y)$;
3) $3a + 3c + ba + bc$; 4) $6m - 6n + am - an$;
5) $ta - na + t - n$; 6) $2a + 2b - xa - xb$.

393. Розкладіть на множники:

1) $ka - kb - 5(a - b)$; 2) $2a + 2b + ca + cb$;
3) $ta - tb + 3a - 3b$; 4) $bx + by - x - y$.

394. Продовжте розкладання на множники:

1) $na + 2b - nb - 2a = (na - nb) - (2a - 2b) = \dots$;
2) $na + 2b - nb - 2a = (na - 2a) - (nb - 2b) = \dots$.

395. Продовжте розкладання на множники:

1) $2x + 2y - 3xz - 3yz = (2x + 2y) - (3xz + 3yz) = \dots$;
2) $2x + 2y - 3xz - 3yz = (2x - 3xz) + (2y - 3yz) = \dots$.

396. Розкладіть на множники:

1) $ta + tb - nb - na$; 2) $2x - 2y - ax + ay$;
3) $5a - bx - 5b + ax$; 4) $ay + 3 - 3y - a$;
5) $a^3 + a^2 + a + 1$; 6) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$.

397. Розкладіть на множники:

- 1) $3x + 3y - ky - kx$; 2) $6c - ac - ab + 6b$;
 3) $at - 2t - ax + 2x$; 4) $x^3 - 2x^2 + x - 2$.

398. Знайдіть значення многочлена $4x + 4y - kx - ky$, розклавши його на множники, якщо $x = 0,3$; $y = 1,7$; $k = 5$.

399. Знайдіть значення многочлена $ap - aq + 3p - 3q$, розклавши його на множники, якщо $a = 12$; $p = 7,5$; $q = 5,5$.



400. Розкладіть на множники:

- 1) $b^2 - ab - 2b + 2a$; 2) $10x + xy + 10y + x^2$;
 3) $3a - ax + 3x - x^2$; 4) $a^2 + b^2 - a^3y - ab^2y$;
 5) $3a^2c + 6a^2 - 10bc - 5bc^2$; 6) $12x^2 + 18y + 10x^3 + 15xy$;
 7) $3x^2yz - x + 12xy^2z^2 - 4yz$;
 8) $0,9ay + 1,2y^2 - 1,2ax - 1,6xy$.

401. Розкладіть на множники:

- 1) $a^2 + 2ab + 3a + 6b$; 2) $x^2 + 3xa - 2x - 6a$;
 3) $x^2y^2 + 2y^3 - ax^2 - 2ay$; 4) $2a^2b + 2c - 4abc - a$;
 5) $6x^3y + 12y^2z^2 + 9y^3 + 8x^3z^2$;
 6) $0,2an^3 - 1,5a^2 + 0,6a^3n - 0,5n^2$.

402. Знайдіть значення виразу:

- 1) $p^3 + pq^2 - p^2q - q^3$, якщо $p = 1,5$, $q = 0,5$;
 2) $2a^3 - 6ab + a^2b - 3b^2$, якщо $a = 8$, $b = 21$.

403. Знайдіть значення виразу $2a^2 + ac - 2ac^2 - c^3$, якщо $a = 17$, $c = 4$.

404. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4,3 \cdot 3,6 - 2,9 \cdot 3,6 + 4,3 \cdot 6,4 - 2,9 \cdot 6,4$;
 2) $3,7^2 - 3,7 \cdot 2,9 - 3,7 \cdot 8,7 + 8,7 \cdot 2,9$.

405. Знайдіть значення виразу

$$4,3 \cdot 3,2 + 4,3 \cdot 2,3 - 2,3 \cdot 3,2 - 2,3^2.$$

406. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 4x + 5(x - 4) = 0$; 2) $3y^2 + 6y - 1,5(y + 2) = 0$.

407. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $z^2 + 3z - 4(z + 3) = 0$; 2) $2x^2 - 8x + 3(x - 4) = 0$.



Інтерактивне завдання 12

Розкладання многочленів на множники способом групування



408. Розкладіть на множники:

- 1) $xa - xb + xc + 3a - 3b + 3c$;
- 2) $ax^2 - ay^2 + 4az - 4bx^2 + 4by^2 - 16bz$;
- 3) $-5a - 5b + 3na + 3nb - ma - mb$;
- 4) $bn^2 + cn^2 - bp + bp^2 - cp + cp^2$.

409. Розкладіть на множники:

- 1) $ca - cb + c + ad - bd + d$;
- 2) $x^2y + x + xy^2 + y + 2xy + 2$;
- 3) $2a^3 + 2a^2b + 2ab + 2b^2 - a - b$.

410. Розкладіть на множники тричлен:

- 1) $a^2 - 7a + 10$;
- 2) $x^2 + 3xy + 2y^2$.

411. Розкладіть на множники тричлен:

- 1) $x^2 + 5x + 4$;
- 2) $a^2 - 7ab + 12b^2$.

412. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $y^2 - 3y + 2 = 0$;
- 2) $2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 = 0$.

413. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
- 2) $z^3 - 5z^2 + 2z - 10 = 0$.

414. Доведіть, що вираз $(x - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$ набуває лише невід'ємних значень.

Вправи для повторення



415. Запишіть добуток суми виразів $2a$ і $5b$ та їх різниці.

416. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4^5 \cdot 0,25^5 + 3^3 \cdot 9^3 - 27^3$;
- 2) $2^5(2^6 - 1) - 2^3(2^8 - 2^2)$.

417. За день автомобіль витратив 14 л бензину — 35 % усього бензину, що був у баку зранку. Скільки літрів бензину залишилося в баку?

418. Площа першої ділянки 80 га, а другої — 35 га. З першої ділянки зібрали картоплі вдвічі більше, ніж із другої. Знайдіть врожайність картоплі на кожній ділянці, якщо на першій вона на 4 т/га менша, ніж на другій.

Поміркуйте



419. На перерві кілька хлопців і дівчат 7 класу пішли в кафе. Кожен хлопець купив пиріжок, а кожна дівчина — тістечко. Якби кожна дівчина купила пиріжок, а кожен хлопець — тістечко, то вони разом витратили б на 15 грн менше. Пиріжок дорожчий від тістечка на 3 грн. Кого було більше — хлопців чи дівчат — і на скільки більше?

Завдання для повторення § 2

420. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:
 1) $4a^2 - 3a + 1 + a^2 - 5a + 7$; 2) $3aba - 2a^2b + b^2a + ab \cdot 4a$.
421. Знайдіть суму многочленів:
 1) $5x^3 - 3x^2 + 2x$ і $x^3 + 3x$;
 2) $2a^2 - 3ab + b^2$ і $a^2 + 2ab - b^2$;
 3) $-x^2 - 2x + 3$; $2x^2 - 5$ і $-2x + 2$.
422. Знайдіть різницю многочленів:
 1) $3c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$; 2) $-ab + 3a^2b$ і $2ab - 5 + 3a^2b$.
423. Виконайте множення і результат запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:
 1) $2b(b^2 + 5b - 2)$; 2) $(3c^2 + 3c - 2) \cdot (-2c^2)$;
 3) $(a - 2)(3a - 4)$; 4) $(-ab^2 + 4a^3)(4a^2b + b^3)$;
 5) $(n - 6)(2n^2 - n + 3)$; 6) $(x + 2)(3x - 1)(2x + 7)$.
424. Спростіть вираз:
 1) $3b(b - 2) + (b - 3)(b + 9)$;
 2) $(x - 2)(4 + 2x) - (2x - 8)(2 + x)$;
 3) $1 + ab(2a - b - 1) - (2a - 1)(ab - 1)$.
425. Доведіть тотожність:
 1) $(a + 1)(a^2 - 4) = (a^2 - a - 2)(a + 2)$;
 2) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.
426. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(3n + 1)(2n - 1) + n + 7$ ділиться на 6.
427. Доведіть, що значення виразу $(5x + 1)(5x + 3) - 5x(5x + 4)$ не залежать від значень x .

428. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Якщо його довжину збільшити на 3 см, а ширину зменшити на 2 см, то площа зменшиться на 5 см^2 . Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

429. Розкладіть на множники:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1) $2ax - 2ay$; | 2) $8bc^4 - 12b^2c^3$; |
| 3) $-8a^3 - 12a^2 + 8a$; | 4) $-0,6a^3b^4 + 0,4a^2b^3$; |
| 5) $3x - 3y - ax + ay$; | 6) $x^3 + 2x^2 + x + 2$; |
| 7) $x - 2xy + 2y - 4y^2$; | 8) $5a^2b + 10a^2 - 20bc - 10b^2c$. |

430. Знайдіть значення виразу:

- 1) $bc + c^2 - 5b - 5c$, якщо $b = 3,6$; $c = 1,4$;
 2) $m^2 - mn - 4m + 4n$, якщо $m = 12,5$; $n = 2,5$.

431. Доведіть, що значення виразу:

- 1) $3^{14} - 3^{12}$ ділиться на 8; 2) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

432. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $(2x^2 - 1) - (2x^2 - 3x) = 5$; | 2) $4y(2y + 1) - 8y^2 + 4 = 0$; |
| 3) $(z + 3)(z - 1) + 6 = z^2$; | 4) $(x - 1)(x - 4) = (x + 1)(x - 2)$; |
| 5) $y^2 - 3y = 0$; | 6) $8x^2 + 2x - 3(4x + 1) = 0$; |
| 7) $x^2 - 5x + 6 = 0$; | 8) $y^3 - 2y^2 + 4y - 8 = 0$. |



Інтерактивне завдання для самоперевірки 2

Многочлени



Завдання для самоперевірки № 2

Початковий рівень

- Який з наведених виразів є многочленом другого степеня?
 А $2c^2 - c^3$ Б $x^2y^2 - xy$ В $a^2 - 3b$ Г $n(m + k)$
- Запишіть многочлен $x^2 + 3x - x + 1 + 2x^2 - 2$ у стандартному вигляді.
 А $3x^2 + 2x + 1 - 2$ Б $3x^2 - 2x - 1$
 В $3x^2 + 2x + 1$ Г $3x^2 + 2x - 1$
- Знайдіть суму многочленів $2b + 5$ і $-3b + 1$.
 А $5b + 4$ Б $-b + 6$ В $-b + 4$ Г $5b + 6$
- Виконайте множення: $c(3c - 4)$.
 А $3c^2 - 4$ Б $3c^2 - 4c$ В $3c - 4c$ Г $4c - 4$

5. Виконайте множення: $(a - 1)(b + c)$.
 А $ab + ac - b + c$ Б $ab - c$
 В $ab + ac - b - c$ Г $ab + ac + b + c$
6. Винесіть спільний множник за дужки у виразі $3x - 3xy$.
 А $3x(x - y)$ Б $3x(1 - 3y)$ В $3x(x - 3y)$ Г $3x(1 - y)$

Середній рівень

7. Знайдіть різницю многочленів $5c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$.
 А $8c^2 - 3c - 4$ Б $2c^2 - 5c - 4$
 В $2c^2 - 5c + 6$ Г $2c^2 - 3c + 6$
8. Виконайте множення: $-2m(m - 2n + 3)$.
 А $-2m + 4mn^2 - 6m$ Б $-2m^2 + 4mn - 6m$
 В $-2m^2 - 4mn + 6m$ Г $2m^2 - 4mn + 6m$
9. Розв'яжіть рівняння $2x^2 + 8x = 0$.
 А -4 Б 0 В $-4; 0$ Г $-8; 0$
10. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).
- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1 $(a - 2b)(a + 4b)$ | А $a^2 - 2ab - 8b^2$ |
| 2 $(a + 2b)(a - 4b)$ | Б $a^2 - 6ab - 8b^2$ |
| 3 $(a - 2b)(a - 4b)$ | В $a^2 - 6ab + 8b^2$ |
| | Г $a^2 + 2ab - 8b^2$ |
| | Д $a^2 - 2ab + 8b^2$ |

Достатній рівень

11. Спростіть вираз $ab^2(2a - b - 1) - (2a^2b^2 - ab^2)$.
12. Розв'яжіть рівняння $(2x - 3)(x + 2) - 2x^2 = 0$.
13. Доведіть, що значення виразу $7^{18} - 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.
14. Розкладіть на множники многочлен $t^2 - tk - 3t + 3k$ і знайдіть його значення, якщо $t = 4,5; k = 2,5$.

Високий рівень

15. Доведіть тотожність $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.
16. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(k + 5)(k^2 - k + 1) - 4k(k - 3) - k^3 + 3$ ділиться на 8.
17. Розкладіть на множники вираз $abt + x^2 - tx - abx$.
18. Розв'яжіть рівняння $(2x - 3)(3x + 2) = (2x + 3)(x - 2)$.

§ 3. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

12 МНОЖЕННЯ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ НА ЇХ СУМУ

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Одержана тотожність дозволяє помножити різницю двох виразів на їх суму не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати добуток у вигляді $a^2 - b^2$. Тому доведену тотожність називають *формулою скороченого множення*. Формулюють її так:



Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Помножимо за цим правилом різницю $2x - 3y$ на суму $2x + 3y$:

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

З переставної властивості множення випливає, що й добуток суми двох виразів та їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$; | 2) $(-k + 7)(k + 7)$; |
| 3) $(-a - c)(a - c)$; | 4) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$. |

- 1) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3) = (3a^2)^2 - (5b^3)^2 = 9a^4 - 25b^6$;
- 2) $(-k + 7)(k + 7) = (7 - k)(7 + k) = 49 - k^2$;
- 3) $(-a - c)(a - c) = -(a + c)(a - c) = -(a^2 - c^2) = c^2 - a^2$;
- 4) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$.

Вправа 2. Обчислити: $3,2 \cdot 2,8$.

- $3,2 \cdot 2,8 = (3 + 0,2)(3 - 0,2) = 3^2 - 0,2^2 = 9 - 0,04 = 8,96$.



1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їх суми?
2. Як записують і читають відповідну формулу?

Усно

433. Які з наведених множень виконано правильно:

- 1) $(m - 5)(m + 5) = m^2 + 25$;
- 2) $(m - 5)(m + 5) = m^2 - 25$;
- 3) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 2b^2$;
- 4) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$?

1 2

434. Перемножте многочлени:

- 1) $(k - n)(k + n)$;
- 2) $(m - 4)(m + 4)$;
- 3) $(1 - b)(1 + b)$;
- 4) $(c + 8)(c - 8)$;
- 5) $(2x - y)(2x + y)$;
- 6) $(4a + 5b)(4a - 5b)$.

435. Перемножте многочлени:

- 1) $(b - c)(b + c)$;
- 2) $(a + 10)(a - 10)$;
- 3) $(6 + n)(6 - n)$;
- 4) $(3y - 2z)(3y + 2z)$.

436. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 9)(a - 9) + 81$;
- 2) $n^2 + (5 - n)(5 + n)$;
- 3) $(3x - 1)(3x + 1) - 9x^2$;
- 4) $25c^2 + (2a + 5c)(2a - 5c)$.

437. Спростіть вираз:

- 1) $(m - 7)(m + 7) + 49$;
- 2) $(a + 4b)(a - 4b) - a^2$.

438. Знайдіть значення виразу $(x - y)(x + y)$, якщо:

- 1) $x = 15$; $y = 2$;
- 2) $x = 7$; $y = 0,5$.

439. Знайдіть значення виразу $(a + b)(a - b)$, якщо:

- 1) $a = 10$; $b = 3$;
- 2) $a = 2$; $b = 0,7$.

440. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)(x - 2) + 2x - x^2 = 0$;
- 2) $y^2 + (6 - y)(6 + y) = -3y$.

441. Розв'яжіть рівняння $(5 + x)(5 - x) + x^2 + 5x = 0$.

3

442. Обчисліть:

- 1) $99 \cdot 101$;
- 2) $198 \cdot 202$;
- 3) $53 \cdot 47$;
- 4) $85 \cdot 95$;
- 5) $10,2 \cdot 9,8$;
- 6) $7,7 \cdot 8,3$;
- 7) $1,02 \cdot 0,98$;
- 8) $4,95 \cdot 5,05$.

443. Обчисліть:

- 1) $105 \cdot 95$;
- 2) $49 \cdot 51$;
- 3) $20,5 \cdot 19,5$;
- 4) $5,03 \cdot 4,97$.

444.  Перемножте многочлени:

- 1) $(b + a)(-a + b)$; 2) $(-1 + k)(1 + k)$;
 3) $(-2 - y)(2 - y)$; 4) $(-m - n)(-m + n)$.

445. Запишіть у вигляді многочлена:

- 1) $(y^2 - 1)(y^2 + 1)$; 2) $(2 + b^3)(2 - b^3)$;
 3) $(m - 3m^2)(m + 3m^2)$; 4) $(5 + 2ab)(2ab - 5)$;
 5) $(4n^2 + k)(-4n^2 + k)$; 6) $(-a^2 - 3bc)(a^2 - 3bc)$;
 7) $(2c - 1,5x)(2c + 1,5x)$; 8) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}b\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}b\right)$.

446. Запишіть у вигляді многочлена:

- 1) $(m + 2)(-m + 2)$; 2) $(b - c)(-b - c)$;
 3) $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$; 3) $(2x^3 - 7x)(2x^3 + 7x)$;
 5) $(6 - 5zt)(5zt + 6)$; 6) $(-4x + 3y)(-4x - 3y)$;
 7) $(2b - 0,5c)(2b + 0,5c)$; 8) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{7}\right)$.

447. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 1)(a - 1) + (2 - a)(2 + a)$;
 2) $(b + 3)(b - 3) - (b - 2)(b + 2)$;
 3) $(5x - 2x^2)(5x + 2x^2) - 25x^2$;
 4) $a^2(a^2 + 7)(a^2 - 7) + (7a)^2$;
 5) $(-4 - 3b^2)(-4 + 3b^2) - (2 - 3b)(8 + 3b^3)$;
 6) $(a + b)(a - b) + (b + c)(b - c) + (c + a)(c - a)$.

448. Спростіть вираз:

- 1) $(x + 3)(x - 3) - (x - 4)(x + 4)$;
 2) $(5 - 2c)(5 + 2c) - 2c(1 - 2c)$;
 3) $(3b - 4c^2)(3b + 4c^2) + (2c)^4$;
 4) $(-a + 2b)(a + 2b) - (2b + 3a)(2b - 3a)$.

449. Запишіть у вигляді многочлена:

- 1) $(b + 1)(b - 1)(b^2 + 1)$; 2) $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$;
 3) $(y - 2z)(y + 2z)(y^2 + 4z^2)$; 4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$.

450. Запишіть у вигляді многочлена:

- 1) $(3 - c)(3 + c)(9 + c^2)$; 2) $(4x + y)(4x - y)(16x^2 + y^2)$.

451. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу $(8n + 5)(8n - 5) - (7n - 5)(7n + 5)$ ділиться на 15.

452. Дано вираз $(4x + 3)(4x - 3) - (4x - 5)(4x + 5)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень x .

453. Розв'яжіть рівняння:

1) $(y - 3)(y + 3) + y(2 - y) = 1$;

2) $(2 - 3y)(2 + 3y) = (9y - 2)(2 - y)$.

3) $(2x - 0,5)(2x + 0,5) = x(4x - 0,5)$;

4) $(-z^2 + 1)(z^2 + 1) = 1 - z(1 + z^3)$.

454. Розв'яжіть рівняння:

1) $4y - y^2 + (y - 9)(y + 9) = y$;

2) $x^2 + (4 - x)(4 + x) = 8(x + 1)$;

3) $(2z - 1)(8z + 3) = (4z - 1)(4z + 1)$.



Інтерактивне завдання 13

Множення різниці двох виразів на їх суму



4

455. Спростіть вираз:

1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$;

2) $\left(2\frac{1}{3}b + 1\frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{3}b - 1\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{9}b^2 + 2\frac{7}{9}$.

456. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{3}a^2 - 1\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}a^2 + 1\frac{1}{9}\right) + \frac{8}{9}a^4 + 1\frac{19}{81}$.

457. Знайдіть значення виразу:

1) $5^{20} \cdot 4^{20} - (20^{10} + 5)(20^{10} - 5)$;

2) $(24^5 - 4^2)(24^5 + 4^2) - 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 4^{10}$;


3) $(9 - 1)(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1) - 9^{16}$.

458. Знайдіть значення виразу:

1) $(15^{15} - 25)(15^{15} + 25) - 3^{30} \cdot 5^{30}$;

2) $16^8 - (16 - 1)(16 + 1)(16^2 + 1)(16^4 + 1)$.

459. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + x$.

460.  Перший господар обгородив сіткою ділянку квадратної форми, а другий — ділянку прямокутної форми (рис. 7). Довжина другої ділянки на a м біль-

ша за сторону першої, а ширина — на a м менша від сторони першої.

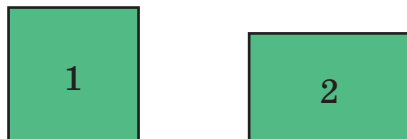


Рис. 7

- 1) Котрий господар обгородив свою ділянку сіткою більшої довжини?
- 2) Котрий господар обгородив ділянку більшої площі?

Вправи для повторення



461. Запишіть у вигляді виразу:
 - 1) суму квадратів змінних x і y ;
 - 2) квадрат суми змінних m і n .
462. Замініть степінь добутком і запишіть одержаний добуток у вигляді многочлена: 1) $(a + 1)^2$; 2) $(5 - 2x)^2$.
463. Автомобіль проїхав деякий шлях за 1,5 год, рухаючись зі сталою швидкістю. Якби він їхав на 12 км/год швидше, то проїхав би цей шлях за 1,3 год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль?
464. Вкладник вклав у банк 20 000 грн під певні відсотки річних, не проводив з грошима жодних операцій, і через рік на його рахунок стало 22 400 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

Поміркуйте



465. Кожний із 7 гномів має не більше 5 цукерок. Чи обов'язково деякі два гноми мають цукерок порівну?

13 КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ

1. Квадрат суми двох виразів. Піднесемо до квадрата суму $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Одержану тотожність називають *формулою квадрата суми*. Вона є формулою скороченого множення, бо дозволяє підносити до квадрата суму довільних двох виразів не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати квадрат у вигляді тричлена $a^2 + 2ab + b^2$. Формулюють формулу квадрата суми так:



Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Піднесемо до квадрата суму $2x + 3y$:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

Проміжні перетворення можна виконувати усно:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Квадрат різниці двох виразів. Піднесемо до квадрата різницю $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже, маємо таку *формулу квадрата різниці*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів ще називають *квадратом двочлена*.

Квадрати протилежних чисел дорівнюють один одному: $(-a)^2 = a^2$. Тому, підносячи до квадрата вирази $-a - b$ та $-a + b$, можна користуватися формулами:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Для тих, хто хоче знати більше 



Щоб піднести суму або різницю двох виразів до куба, можна використовувати *формули куба суми* або *куба різниці*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Виведемо ці формули:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Піднести до квадрата вираз:

1) $xy - 2z^2$; 2) $-3m - n$; 3) $-x + 5y$; 4) $a + b - c$.

- 1) $(xy - 2z^2)^2 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot 2z^2 + (2z^2)^2 = x^2y^2 - 4xyz^2 + 4z^4$;
- 2) $(-3m - n)^2 = (3m + n)^2 = 9m^2 + 6mn + n^2$;
- 3) $(-x + 5y)^2 = (x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$;
- 4) $(a + b - c)^2 = ((a + b) - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. •



1. Чому дорівнює квадрат суми двох виразів? Квадрат різниці?
2. Як записують і читають відповідні формули?

Усно

466. Піднесіть до квадрата двочлен:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) $a + 1$; 4) $a - 1$.

1 2

467. Піднесіть до квадрата:

1) $(k + n)^2$; 2) $(b + 2)^2$; 3) $(3 + a)^2$;
 4) $(c - 4)^2$; 5) $(5 - y)^2$; 6) $(x - 15)^2$;
 7) $(k + 12)^2$; 8) $(c - 0,5)^2$; 9) $(n + 1,2)^2$.

468. Піднесіть до квадрата:

1) $(b - c)^2$; 2) $(x + 4)^2$; 3) $(a - 2)^2$;
 4) $(10 - n)^2$; 5) $(z + 0,3)^2$; 6) $(b - 1,5)^2$.

469. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2a + 1)^2$; 2) $(2c - 5)^2$; 3) $(3 - 4m)^2$;
 4) $(5x - y)^2$; 5) $(3b + 2c)^2$; 6) $(5k - 8n)^2$.

470. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- 1) $(3b - 1)^2$; 2) $(5z + 2)^2$; 3) $(6a + b)^2$;
4) $(2x - 5y)^2$; 5) $(3a + 10b)^2$; 6) $(4m - 9n)^2$.

471. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$; 2) $(b + 2)^2 - 4(b + 1)$;
3) $(5 - 2x)^2 - 25 - 4x^2$; 4) $x^2 - 1 - (x - 1)^2$.

472. Спростіть вираз:

- 1) $(b - 4)^2 + 8b - b^2$; 2) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2$.

473. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)^2 - x^2 = 8$; 2) $(x - 3)^2 - x^2 = 21$.

474. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 1)^2 - x^2 = 11$; 2) $(x + 4)^2 - x^2 = 24$.



475. Піднесіть до квадрата:

- 1) $(-b + c)^2$; 2) $(-x - y)^2$; 3) $(-2a + 3)^2$;
4) $(-4x + 5y)^2$; 5) $(-2m - 10n)^2$; 6) $(-2,5a + 4)^2$.

476. Піднесіть до квадрата:

- 1) $(-m - n)^2$; 2) $(-b + 5)^2$; 3) $(-3x + y)^2$;
4) $(-4c - 3d)^2$; 5) $(-2k - 15n)^2$; 6) $(-0,5z + 2)^2$.

477. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- 1) $(y^2 + 1)^2$; 2) $(2 - x^3)^2$; 3) $(2m - m^2)^2$;
4) $(6a^2 + a)^2$; 5) $(4a^2 - ac)^2$; 6) $(-4a^2 - 3b)^2$;
7) $(-m^2 + 5nk)^2$; 8) $(2xy^2 + 1,5x)^2$; 9) $\left(3x^2 - \frac{2}{3}x\right)^2$.

478. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- 1) $(a^2 + 2)^2$; 2) $(2b^3 - 4)^2$; 3) $(x^2 + 2x)^2$;
4) $(-2a^2 + 5ab)^2$; 5) $(-10m - 3mk)^2$; 6) $\left(\frac{3}{4}xy - \frac{2}{3}\right)^2$.

479. Спростіть вираз:

- 1) $(2k - 1)^2 - (2k + 1)^2$; 2) $(-a + 2b)^2 + (a + 2b)^2$;
3) $(x^2 - 3)^2 + (3x - 1)(2x + 9)$.

480. Спростіть вираз:

- 1) $(2z - 5)^2 - 4z^2 + (2z + 5)^2$; 2) $(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 2)$.

481. Знайдіть значення виразу:

1) $(2y - 5)^2 - (2y + 5)(2y - 5)$, якщо $y = 2,5$; $y = -0,15$;

2) $(3m + 2n)^2 - (3m - 2n)^2$, якщо $m = 0,5$; $n = \frac{7}{12}$.

482. Знайдіть значення виразу $(2 - 7k)(2 + 7k) + (7k - 1)^2$, якщо $k = -0,5$; $k = 1,5$.

483. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

2) $(3n + 4)^2 + (4n - 3)^2 = 25(n^2 + 1)$;

3) $(2km)^2 + (k^2 - m^2)^2 = (k^2 + m^2)^2$.

484. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

2) $(2n - 3)^2 + 24n = (2n + 3)^2$.

485. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5)$ ділиться на 8.

486. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(3k + 8)^2 + (4k - 6)^2$ ділиться на 25.

487. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x + 4)^2 = (1 - 5x)^2$;

2) $(3x - 5)(3x + 5) = 7 + (3x - 4)^2$;

3) $(2y + 3)^2 - (4y - 2)(y - 6) = 16$;

4) $(3x - 1)^2 + (4x - 1)^2 = (5x - 1)^2$.

488. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 3)^2 = (2x + 1)^2 - 8$;

2) $16y^2 - (4y - 3)^2 = 15y - 90$;

3) $3(x - 1)^2 - (2 - x)(2 + x) = (2x - 1)^2$.

489. На рисунку 8 зображено рамку, яку обмежують два квадрати. Сторона меншого квадрата на 8 см коротша від сторони більшого. Знайдіть сторони квадратів, якщо площа рамки дорівнює 576 см^2 .

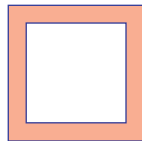


Рис. 8

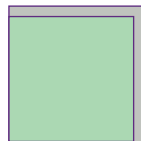


Рис. 9

490. Із двох боків парку, що має форму квадрата, зробили доріжки завширшки 2 м (див. рис. 9). Знайдіть розміри парку, якщо загальна площа доріжок дорівнює 324 м^2 .



Інтерактивне завдання 14

Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів



491. Доведіть тотожність

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

492. Піднесіть до степеня:

1) $(a + b + 3)^2$;

2) $(2x - 3y + 5)^2$;

3) $(a + 1)^3$;

4) $(2x - y)^3$.

493. Піднесіть до степеня:

1) $(a - 2b + 3)^2$;

2) $(m - 2)^3$.

494. Спростіть вираз:

1) $(m + n)^3 - 3mn(m + n)$; 2) $(a - b)^2(a + b)^2 - (a^2 + b^2)^2$;

3) $(5^n + 2)^2 - 2(25^n - 4) + (5^n - 2)^2$.

495. Спростіть вираз:

1) $(x - y)^3 - x^3 + y^3$;

2) $(2^n - 1)^2 - 4^n + 2^{n+1}$.

496. Натуральне число n при діленні на 5 дає в остачі 3. Доведіть, що число $n^2 + 1$ ділиться на 5.

497. Доведіть, що для будь-якого непарного натурального значення m число $m^2 - 1$ ділиться на 4.

Вправи для повторення



498. Подайте вираз у вигляді квадрата одночлена:

1) $16x^2$;

2) $196c^4$;

3) $0,25b^2c^2$;

4) $x^4y^6z^2$.

499. Розкладіть на множники:

1) $5y^2 + 15y$;

2) $a^3 + 4a^2 + 2a + 8$.

500. Із 15 % площі поля зібрали 240 ц пшениці. Скільки центнерів пшениці зберуть з решти поля, якщо врожайність на всіх його ділянках однакова?

501. Автомобіль рухається позаду автобуса на відстані 4 км. Через скільки хвилин автомобіль наздожене автобус,

якщо швидкість автобуса дорівнює 70 км/год, а автомобіля — 90 км/год?

Поміркуйте



502. Знайдіть усі натуральні числа m і n , для яких виконується рівність $(m + 2n)^2 - (m + n)^2 = 57$.

Цікаво знати



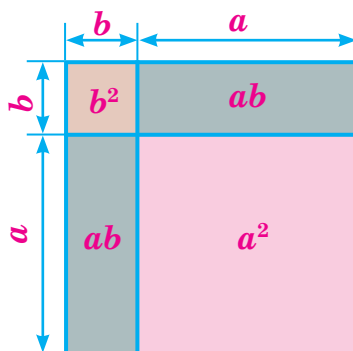
Учені Давньої Греції алгебраїчні твердження, формули, що виражають певні залежності між величинами, трактували геометрично. Зокрема, добуток ab вони розглядали як площу прямокутника зі сторонами a та b .

Наведемо приклад алгебраїчного твердження, яке було відомим давньогрецьким ученим і яке в геометричній термінології формулювали так:

Площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на кожному з цих відрізків, плюс подвоєна площа прямокутника, побудованого на цих відрізках.

Не важко здогадатися, що йдеться про формулу квадрата суми, яку ми зараз символічно записуємо так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



14

РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ РІЗНИЦІ КВАДРАТІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Одержану тотожність називають *формулою різниці квадратів* двох виразів. Формулюють її так:



Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми.

Формула різниці квадратів дає можливість розкласти на множники вираз, який можна звести до вигляду $a^2 - b^2$. Наприклад:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Порівняйте

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

виконали множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

розклали на множники

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники:

1) $16x^4 - 9y^2z^2$; 2) $(2a - b)^2 - a^2$.

● 1) $16x^4 - 9y^2z^2 = (4x^2)^2 - (3yz)^2 = (4x^2 - 3yz)(4x^2 + 3yz)$;

2) $(2a - b)^2 - a^2 = (2a - b - a)(2a - b + a) = (a - b)(3a - b)$. ●

Вправа 2. Обчислити: $75^2 - 65^2$.

● $75^2 - 65^2 = (75 - 65) \cdot (75 + 65) = 10 \cdot 140 = 1400$. ●

Вправа 3. Розв'язати рівняння $(x - 3)^2 - 36 = 0$.

● $(x - 3)^2 - 6^2 = 0$; $(x - 3 - 6)(x - 3 + 6) = 0$; $(x - 9)(x + 3) = 0$;
 $x - 9 = 0$ або $x + 3 = 0$; $x = 9$ або $x = -3$.

Відповідь. -3 ; 9 . ●



- Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
- Як записують і читають відповідну формулу?

Усно

503. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - y^2$; 2) $p^2 - 5^2$; 3) $m^2 - 4$; 4) $1 - c^2$.

1 2

504. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 9$; 2) $b^2 - 81$; 3) $16 - x^2$; 4) $64 - y^2$;

5) $4z^2 - 25$; 6) $49 - 9b^2$; 7) $9x^2 - 4y^2$; 8) $25a^2 - 144b^2$.

505. Розкладіть на множники:

1) $b^2 - 25$; 2) $100 - z^2$; 3) $9c^2 - 1$; 4) $81 - 16y^2$;
5) $36m^2 - 49n^2$; 6) $121p^2 - 64q^2$.

506. Знайдіть значення виразу:

1) $45^2 - 44^2$; 2) $81^2 - 71^2$; 3) $138^2 - 38^2$; 4) $6,7^2 - 3,3^2$.

507. Знайдіть значення виразу:

1) $29^2 - 28^2$; 2) $155^2 - 55^2$; 3) $78^2 - 22^2$; 4) $9,5^2 - 8,5^2$.

508. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо:

1) $x = 22$; $y = 32$; 2) $x = 2,8$; $y = 7,2$;
3) $x = 54$; $y = -46$; 4) $x = -72$; $y = 28$.

509. Знайдіть значення виразу $m^2 - n^2$, якщо:

1) $m = 48$; $n = 52$; 2) $m = 5,5$; $n = -4,5$.

510. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4 = 0$; 2) $25y^2 - 16 = 0$.

511. Розв'яжіть рівняння:

2) $y^2 - 36 = 0$; 2) $100x^2 - 49 = 0$.



512. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - b^2$; 2) $25m^2 - 64n^8$; 3) $36 - 4a^6c^2$;
4) $0,01 - 6,25x^8y^8$; 5) $\frac{9}{49}a^2 - 16x^4y^8$; 6) $2\frac{7}{9} - 0,81a^4b^8c^2$.

513. Розкладіть на множники:

1) $4a^8 - 25b^2c^2$; 2) $1,96m^{20} - 0,09n^2$; 3) $\frac{4}{9}a^2b^4c^2 - 2\frac{1}{4}x^6$.

514. Розкладіть на множники:

1) $(a + 2)^2 - 1$; 2) $(3x - 1)^2 - 16$;
3) $(3b + 2)^2 - 4b^2$; 4) $25n^2 - (7n - 5)^2$;
5) $(4x + 3)^2 - (3x + 2)^2$; 6) $(a - 2b)^2 - (3a + 5b)^2$.

515. Розкладіть на множники:

1) $(b + 5)^2 - 4$; 2) $(2k - 1)^2 - 36$;
3) $64a^2 - (4a + 3)^2$; 4) $(4x - y)^2 - (5x - 3y)^2$.

516. Знайдіть значення виразу:

1) $50,002^2 - 49,998^2$; 2) $50^2 - 62,5^2 + 37,5^2$.

517. Знайдіть значення виразу:

1) $4,125^2 - 5,875^2$; 2) $500 - 20,5^2 + 10,5^2$.

518. Знайдіть значення виразу $a^2 - 4b^2$, якщо:

1) $a = -3,2$; $b = 3,4$; 2) $a = 1\frac{4}{7}$; $b = \frac{2}{7}$.

519. Знайдіть значення виразу $9p^2 - q^2$, якщо:

1) $p = 2,3$; $q = -1,9$; 2) $p = \frac{3}{14}$; $q = \frac{5}{14}$.

520. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

1) $4575^2 - 1425^2$; на 1000; 2) $843^2 - 257^2$; на 200.

521. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^2 - 1 = 0$; 2) $(5y - 2)^2 - 9 = 0$;
3) $(3z + 5)^2 - 4z^2 = 0$; 4) $(2x - 3)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.

522. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 5)^2 - 1 = 0$; 2) $(4y - 7)^2 - (y + 2)^2 = 0$.



Інтерактивне завдання 15
Розкладання на множники
різниці квадратів двох виразів



4

523. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m і n значення виразу $(7m + 4n)^2 - (m + 4n)^2$ ділиться на 48.

524. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(4k + 2)^2 - (4k - 2)^2$ ділиться на 32.

525. Розкладіть на множники:

1) $a^8 - b^8$; 2) $1 - 16x^4$.

526. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5 - 2z)^2 = (4z - 1)^2$; 2) $y^4 - 81 = 0$.

527. Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x - 3)^2 = (4 - 3x)^2$; 2) $x^4 - 16 = 0$.

528. Доведіть, що різниця квадратів двох натуральних чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 3, а друге — в остачі 2, ділиться на 5.

Вправи для повторення



529. Знайдіть значення виразу:

1) $1,8 \cdot \left(0,5 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}\right)$; 2) $4\frac{7}{20} : 1\frac{9}{20} - 20 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$.

530. Піднесіть до квадрата:

1) $(m - 5)^2$; 2) $(3a + 1)^2$; 3) $(4b - 3)^2$; 4) $(-2a - 5b)^2$.

531. Мамі 36 років, а дочці — 12.

- 1) Через скільки років мама буде удвічі старшою за дочку?
- 2) Скільки років тому мама була в 5 разів старшою за дочку?

532. Банк дав підприємцеві кредит 50 000 грн на рік зі ставкою 8 % річних. Скільки гривень має повернути підприємець банкові через рік?

Поміркуйте



533. Чи можна натуральні числа 1, 2, ..., 15 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших чисел групи?

Цікаво знати



Український математик **Георгій Вороний** визнаний фахівцями як один із найяскравіших талантів у галузі теорії чисел. Він народився в селі Журавка на Полтавщині (тепер Чернігівська область), працював у Варшавському університеті на посаді професора.

Кажуть, що Г. Вороний випередив свій час на століття: хоча його наукові праці вийшли на межі XIX–XX століть, сьогодні їх результати використовують у фізиці, хімії, астрономії, комп'ютерній графіці та багатьох інших галузях знань. З його ім'ям пов'язані спеціальні математичні терміни: у деяких країнах так звані «діаграми Вороного» уведено навіть до шкільної програми.



Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908)

15

ПЕРЕТВОРЕННЯ МНОГОЧЛЕНА У КВАДРАТ СУМИ АБО РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці двох виразів, помінявши місцями їхні ліві та праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Отже, тричлени вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ або $a^2 - 2ab + b^2$ можна записати як квадрати двочленів. Тому такі тричлени називають *повними квадратами*. Наприклад:

$$m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2$$

$m^2 + 6m + 9$ — повний квадрат

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

$4x^2 - 4xy + y^2$ — повний квадрат

Зазначимо, що рівність $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ можна записати у вигляді $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$. Тому запис тричлена у вигляді квадрата двочлена є розкладом тричлена на множники.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники тричлен $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

$$\bullet \quad 9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = (3a - 2b)^2.$$

Скорочено записують: $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$. \bullet

Вправа 2. Знайти значення виразу $x^2 + 8x + 16$, якщо $x = 16$; $x = -9$.

\bullet Запишемо спочатку тричлен $x^2 + 8x + 16$ у вигляді квадрата двочлена:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

Якщо $x = 16$, то $(x + 4)^2 = (16 + 4)^2 = 20^2 = 400$.

Якщо $x = -9$, то $(x + 4)^2 = (-9 + 4)^2 = (-5)^2 = 25$. \bullet

Вправа 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 10x + 25 = 0$.

$$\bullet \quad (x - 5)^2 = 0; \quad x - 5 = 0; \quad x = 5.$$

Відповідь. 5. \bullet

Вправа 4. Довести, що вираз $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень.

• Виділимо із тричлена $x^2 - 8x + 18$ квадрат двочлена:

$$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2.$$

Ми подали тричлен у вигляді суми двох доданків $(x - 4)^2$ і 2. Доданок $(x - 4)^2$ набуває невід'ємних значень, доданок 2 — додатний. Тому вираз $(x - 4)^2 + 2$ набуває лише додатних значень. •

Примітка. Із рівності $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, одержаній у вправі 4, випливає, що найменше значення виразу $x^2 - 8x + 18$ дорівнює 2, і цього найменшого значення вираз набуває, якщо $x = 4$.



1. Наведіть приклад тричлена, який можна подати у вигляді квадрата двочлена.

««Усно»»

534. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2 + 2xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xb + b^2$; 3) $a^2 + 2a + 1$.

««12»»

535. Розкладіть на множники:

1) $p^2 + 2pq + q^2$; 2) $c^2 - 2c + 1$; 3) $b^2 + 4b + 4$;
4) $x^2 - 6x + 9$; 5) $36 + 12b + b^2$; 6) $25 + z^2 - 10z$.

536. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 4x + 4$; 2) $a^2 + 10a + 25$; 3) $16 - 8b + b^2$.

537. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $4a^2 - 4a + 1$; 2) $16x^2 + 8x + 1$; 3) $1 - 14b + 49b^2$;
4) $4x^2 + 12x + 9$; 5) $25b^2 - 20b + 4$; 6) $-24k + 16 + 9k^2$.

538. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $9k^2 - 6k + 1$; 2) $4b^2 + 16b + 16$; 3) $64 - 80s + 25s^2$.

539. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $4x^2 + 4xz + z^2$; 2) $m^2 - 6mn + 9n^2$;
3) $16a^2 - 8ab + b^2$; 4) $4c^2 + 12ca + 9a^2$;
5) $49x^2 - 28xy + 4y^2$; 6) $25p^2 + 9q^2 - 30pq$.

540. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

- 1) $16a^2 + 8ab + b^2$; 2) $25m^2 - 20mn + 4n^2$;
 3) $4x^2 + 36xy + 81y^2$; 4) $9b^2 + 16c^2 - 24bc$.

541. Знайдіть значення виразу:

- 1) $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 12$; $x = 2,1$; $x = -18$;
 2) $9a^2 - 6a + 1$, якщо $a = 7$; $a = -33$;
 3) $9m^2 + 24mn + 16n^2$, якщо $m = 15$; $n = -11$.

542. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4a^2 + 4a + 1$, якщо $a = 4,5$; $a = -5,5$;
 3) $x^2 - 12xy + 36y^2$, якщо $x = 35$; $y = 6$.

543. Обчисліть зручним способом:

- 1) $73^2 + 2 \cdot 73 \cdot 27 + 27^2$; 2) $5,8^2 - 2 \cdot 5,8 \cdot 3,8 + 3,8^2$.

544. Обчисліть зручним способом:

- 1) $92^2 - 2 \cdot 92 \cdot 72 + 72^2$; 2) $4,9^2 + 2 \cdot 4,9 \cdot 5,1 + 5,1^2$.



545. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

- 1) $0,25m^2 + 2mn + 4n^2$; 2) $0,36c^2 - 0,6cx + 0,25x^2$;
 3) $p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{36}$; 4) $(a - 4)^2 + 2(a - 4) + 1$;
 5) $(2x + y)^2 - 4(2x + y) + 4$; 6) $(a + b)^2 - 4ab$.

546. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

- 1) $2,25c^2 + 12c + 16$; 2) $400a^2 + 4ab + 0,01b^2$;
 3) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; 4) $(2n - 1)^2 - 6(2n - 1) + 9$.

547. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4x^2 + 4xy + y^2$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;
 2) $a^2 - 3a + 2,25$, якщо $a = 11,5$; $a = -7,5$.

548. Знайдіть значення виразу $m^2 - 6mn + 9n^2$, якщо $m = \frac{2}{3}$;
 $n = \frac{1}{3}$.

549. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 8x + 16 = 0$; 2) $y^2 + 12y + 36 = 0$;
 3) $(y - 8)^2 - 4(y - 8) + 4 = 0$; 4) $(2z + 1)^2 + 10(2z + 1) = -25$.

550. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $z^2 - 6z + 9 = 0$; 2) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
 3) $(y + 4)^2 - 12(y + 4) + 36 = 0$.



Інтерактивне завдання 16
Перетворення многочлена
у квадрат суми або різниці двох виразів



551. Знайдіть значення b , для якого вираз $64y^2 + 80y + b$ є квадратом двочлена.

552. Знайдіть значення a , для якого вираз $ax^2 + 20x + 25$ є квадратом двочлена.

553.  Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:

- 1) $2y^2 + 2y + 1$; 2) $m^2 + n^2 - 2m + 4n + 5$;
 3) $a^2 + 2ab + 2b^2 - 4b + 4$; 4) $a^2 + b^2 + 5c^2 - 2ac + 4bc$.

554. Знайдіть значення x та y , для яких є правильною рівність
 $2x^2 + y^2 - 2xy - 6y + 9 = 0$.

555. Знайдіть значення a і b , для яких є правильною рівність
 $a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = 0$.

556. Доведіть, що вираз набуває лише додатних значень:

- 1) $x^2 - 2x + 3$; 2) $4m^2 - 4mn + n^2 + 3$.

557. Доведіть, що вираз $a^2 - 4a + 5$ набуває лише додатних значень.

558. Знайдіть найменше значення виразу $b^2 - 8b + 7$ та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення.

559. Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + 6x + 12$ та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення.

Вправи для повторення



560. Запишіть у вигляді куба вираз:

- 1) $8x^3$; 2) $-m^3$; 3) $64a^9$; 4) $-27a^6b^{12}$.

561. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

- 1) $(x + 4)(x^2 + 2x - 3)$; 2) $(a - 2b)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

562. Щоб одержати 200 г фарби кольору морської хвилі, художниця змішала фарби білого, зеленого і чорного кольорів. Співвідношення мас цих трьох фарб показує діаграма, зображена на рисунку 10. Скільки грамів фарби білого кольору використала художниця? Зеленого кольору? Чорного кольору?

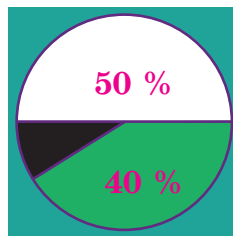


Рис. 10

563. Потяг затримали на станції A на 10 хв, проте він надолужив згаяний час на перегоні між станціями A і B , пройшовши його зі швидкістю 105 км/год, замість запланованої швидкості 90 км/год. Знайдіть відстань між станціями A і B .

Поміркуйте



564. У першій чашці була кава, у другій — стільки ж молока. З першої чашки в другу перелили ложечку кави, потім таку ж ложечку суміші перелили з другої чашки в першу. Чого стало більше: молока в першій чашці чи кави в другій?

16

РІЗНИЦЯ І СУМА КУБІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

Різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Розкладаючи на множники різницю кубів двох виразів, використовують *формулу різниці кубів*:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність, перемноживши многочлени правої частини:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

У формулі різниці кубів тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми* виразів a і b (він нагадує тричлен $a^2 + 2ab + b^2$, який є квадратом суми цих виразів). Отже, формулу різниці кубів можна сформулювати так:



Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладаючи на множники суму кубів двох виразів, використовують *формулу суми кубів*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці* виразів a і b . Отже,



Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники:

1) $a^3 - 64$; 2) $27a^3 + 125b^3$; 3) $-x^3 - y^6$.

• 1) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$;

2) $27a^3 + 125b^3 = (3a)^3 + (5b)^3 = (3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$;

3) $-x^3 - y^6 = -(x^3 + (y^2)^3) = -(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$. •

Вправа 2. Спростити вираз $(2a - x)(4a^2 + 2ax + x^2) + x^3$.

• $(2a - x)(4a^2 + 2ax + x^2) + x^3 = (2a)^3 - x^3 + x^3 = 8a^3$. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

• Записавши ліву частину рівняння у вигляді $x^3 + 27$, матимемо: $x^3 + 27 = x^3 - 3x$; $x^3 - x^3 + 3x = -27$; $3x = -27$; $x = -9$.

Відповідь. -9 . •



1. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів? Сума кубів?
2. Як записують і читають відповідні формули?

«Усно»

565. Який з наведених виразів є неповним квадратом суми виразів b і c ? Різниця виразів b і c ?

1) $b^2 + 2bc + c^2$;

2) $b^2 + bc + c^2$;

3) $b^2 - 2bc + c^2$;

4) $b^2 - bc + c^2$.

566. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1 $x^3 - y^3$	А $(x - 2)(x^2 + 4x + 4)$
2 $x^3 + y^3$	Б $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
3 $x^3 - 8$	В $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
	Г $(x - y)(x^2 - xy + y^2)$
	Д $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

567. Розкладіть на множники: 1) $m^3 - n^3$; 2) $m^3 + n^3$.



568. Розкладіть на множники:

1) $p^3 - q^3$;	2) $b^3 - 1$;	3) $x^3 - 27$;	4) $64 - y^3$;
5) $b^3 + c^3$;	6) $a^3 + 8$;	7) $1 + y^3$;	8) $125 + b^3$.

569. Розкладіть на множники:

1) $a^3 - x^3$;	2) $b^3 - 8$;	3) $27 - a^3$;	4) $1 - z^3$;
5) $k^3 + p^3$;	6) $n^3 + 64$;	7) $z^3 + 1$;	8) $27 + c^3$.

570. Продовжте розкладання на множники:

- $27b^3 - 1 = (3b)^3 - 1^3 = \dots$;
- $8 + 125y^3 = 2^3 + (5y)^3 = \dots$;
- $x^3 - 64y^3 = x^3 - (4y)^3 = \dots$.

571. Продовжте розкладання на множники:

- $27c^3 - 64 = (3c)^3 - 4^3 = \dots$;
- $a^3 + 125b^3 = a^3 + (5b)^3 = \dots$.

572. Розкладіть на множники:

- $8x^3 - 1$;
- $64a^3 + 27$;
- $125 - 27y^3$;
- $64b^3 + c^3$.

573. Розкладіть на множники:

- $1 + 8m^3$;
- $125p^3 - 1$;
- $27x^3 + 64$;
- $a^3 - 8b^3$.

574. Спростіть вираз:


- $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - x^3$;
- $(4 - c)(16 + 4c + c^2) + c^3$.

575. Спростіть вираз:

- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b^3$;
- $(k + 1)(k^2 - k + 1) - k^3$.

576. Знайдіть значення виразу $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1) - 63x^3$, якщо $x = -2$; $x = 5$.

577. Знайдіть значення виразу $(1 - 2y)(1 + 2y + 4y^2) + 9y^3$, якщо $y = -3$; $y = 4$.

578.  Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $-a^3 + 8$; 2) $-b^3 - c^3$; 3) $-64 - z^3$.

579. Розкладіть на множники:

1) $216b^3 - 27c^3$; 2) $b^3 + 0,125$; 3) $\frac{1}{64}p^3 - 8q^3$;
 4) $m^6 - n^3$; 5) $27a^9 + c^6$; 6) $-8x^6 + 125y^6$;
 7) $27a^3 - b^3c^3$; 8) $0,001x^3y^3 + z^{12}$; 9) $1000 - a^3b^6c^9$.

580. Розкладіть на множники:

1) $64a^3 - 125b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 + 1$; 3) $m^6 - n^6$;
 4) $-k^9 - 8p^3$; 5) $64y^3 - 27a^6b^6$; 6) $0,064x^3y^3z^3 - 8$.

581. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

1) $921^3 - 821^3$; на 100; 2) $57^3 + 28^3$; на 85.

582. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

1) $27^3 + 37^3$; на 64; 2) $75^3 - 25^3$; на 50.

583. Спростіть вираз:

1) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 1$;
 2) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - a^6 - b^6$;
 3) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a^2 + 2a + 4)(a - 2)$.

584. Спростіть вираз:

1) $(k^2 + 3)(k^4 - 3k^2 + 9) - 27$;
 2) $(b - 1)(b^2 + b + 1) + (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

585. Знайдіть значення виразу $(3m + n)(9m^2 - 3mn + n^2) - 26m^3$, якщо:

1) $m = 1,5$; $n = -1,5$; 2) $m = -6$; $n = 5$.

586. Знайдіть значення виразу $(b - 2c)(b^2 + 2bc + 4c^2) + 7c^3$, якщо $b = 0,8$; $c = 0,8$.

587. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$;
 2) $z^3 - 8z = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$.

588. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1 - x)(1 + x + x^2) = x - x^3$;
 2) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3) = 6y + y^3$.

Якщо доручити двом людям, один з яких математик, виконати деяку незнайому їм роботу, то результат завжди буде таким: математик зробить її краще.

*Жартівливий закон
Штейнгауза**



Інтерактивне завдання 17

Різниця і сума кубів двох виразів



4

589. Розкладіть на множники:

1) $(b - 2)^3 + 125$; 2) $(2x + 3)^3 - x^3$;

590. Розкладіть на множники:

1) $(c + 3)^3 - 64$; 2) $(y - 1)^3 + y^3$.

591. 1) Доведіть тотожність $a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$.

2) Знайдіть значення виразу $a^3 + b^3$, якщо $a + b = 7$; $ab = 12$.

592. 1) Доведіть тотожність $a^3 - b^3 = (a - b)((a - b)^2 + 3ab)$.

2) Знайдіть значення виразу $a^3 - b^3$, якщо $a - b = 4$; $ab = 32$.

593. Доведіть, що сума кубів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 4.

Вправи для повторення



594. Знайдіть значення виразу:

1) $4^{10} - (4^5 + 3)(4^5 - 3)$; 2) $2^{12} \cdot 3^{12} + (4 - 6^6)(4 + 6^6)$.

595. Розв'яжіть рівняння:

1) $7 - |x| = 5$; 2) $|2x + 5| = 3$.

596. Скільки парних трицифрових чисел можна скласти з карток, зображених на рисунку 11?



Рис. 11

597. Сплав міді й цинку має масу 3,6 кг і містить 45 % міді. До сплаву додали 400 г міді й одержали новий сплав. Чого у новому сплаві більше: міді чи цинку?

Поміркуйте



598. До школи йдуть 5 дівчат. Кожна з них серед інших 4 дівчат має не менше 2 сестер. Доведіть, що всі дівчата є сестрами.

ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬКОХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Для розкладання многочленів на множники ми використували такі способи:

винесення спільного множника за дужки;
спосіб групування;
застосування формул скороченого множення.

Часто, щоб розкласти многочлен на множники, потрібно застосувати кілька цих способів. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $7a^2b^2 - 7b^4$.

Розв'язання. $7a^2b^2 - 7b^4 = 7b^2(a^2 - b^2) = 7b^2(a - b)(a + b)$. ●

Спочатку винесли спільний множник $7b^2$ за дужки, а потім застосували формулу різниці квадратів.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$m^2 - n^2 - 2m + 2n.$$

Розв'язання. Для виразу $m^2 - n^2$ застосуємо формулу різниці квадратів, а у виразі $-2m + 2n$ винесемо множник -2 за дужки. Тоді:

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 - 2m + 2n &= (m - n)(m + n) - 2(m - n) = \\ &= (m - n)(m + n - 2). \end{aligned} \bullet$$

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен

$$ac - 3c + abc - 3bc.$$

Розв'язання. Усі члени многочлена мають спільний множник c . Винесемо його за дужки:

$$ac - 3c + abc - 3bc = c(a - 3 + ab - 3b).$$

Многочлен $a - 3 + ab - 3b$ розкладемо на множники способом групування:

$$a - 3 + ab - 3b = (a - 3) + b(a - 3) = (a - 3)(1 + b).$$

Отже,

$$ac - 3c + abc - 3bc = c(a - 3)(1 + b). \bullet$$

Загального алгоритму розкладання многочленів на множники із застосуванням кількох способів немає. Якщо це можливо, то розкладання доречно починати з винесення спільного множника за дужки.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x - 16$.

● Якщо до виразу $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$ додати 3^2 , тобто 9, то одержимо вираз $x^2 - 6x + 9$, який є квадратом двочлена $x - 3$. Тому, виділивши квадрат цього двочлена, матимемо:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 16 &= (x^2 - 6x + 9) - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25 = \\ &= (x - 3)^2 - 5^2 = (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2). \end{aligned} \bullet$$

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2x^3 - 18x = 0$.

● Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x - 3)(x + 3).$$

Маємо рівняння $2x(x - 3)(x + 3) = 0$, звідки:

$$x = 0, \text{ або } x - 3 = 0, \text{ або } x + 3 = 0;$$

$$x = 0, \text{ або } x = 3, \text{ або } x = -3.$$

Відповідь. $-3; 0; 3$. ●



1. Наведіть приклад застосування кількох способів для розкладання многочлена на множники.

Усно

599. Поясніть кожний крок розкладання многочлена на множники:

$$\begin{aligned} 1) x^2 - 8x - y^2 + 16 &= (x^2 - 8x + 16) - y^2 = (x - 4)^2 - y^2 = \\ &= (x - 4 - y)(x - 4 + y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a^2 + 2ab - 8b^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - b^2 - 8b^2 = (a + b)^2 - 9b^2 = \\ &= (a + b - 3b)(a + b + 3b) = (a - 2b)(a + 4b). \end{aligned}$$

1 2

600. Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7b^2$;	2) $km^2 - kn^2$;	3) $9x^2 - 36$;
4) $x^4 - x^2$;	5) $4a - 4a^3$;	6) $n^5 - 4n^3$;
7) $9c - cb^2$;	8) $2a^3 - 2x^3$;	9) $27y + x^3y$.

601. Розкладіть на множники:

1) $5p^2 - 5q^2$;	2) $3b^2 - 27$;	3) $4y^2 - 4y^4$;
4) $6at^2 - 6a$;	5) $2xy^2 - 8x$;	6) $4k^3 + 32$.

602. Розкладіть на множники:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $3p^2 + 6pq + 3q^2$; | 2) $xb^2 - 4xb + 4x$; |
| 3) $-m^2 + 2mc - c^2$; | 4) $45 + 30k + 5k^2$; |
| 5) $a^3 + 8a^2 + 16a$; | 6) $m - 10m^2 + 25m^3$. |

603. Розкладіть на множники:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $4x^2 + 8x + 4$; | 2) $49n - 14nc + nc^2$; |
| 3) $-a^2 + 4ab - 4b^2$; | 4) $x^3 - 12x^2 + 36x$. |

604. Знайдіть значення виразу:

- 1) $10a^2 - 10b^2$, якщо $a = 63$; $b = 53$;
- 2) $3m^2 + 6mn + 3n^2$, якщо $m = 4,8$; $n = 5,2$;

605. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4x^2 - 4y^2$, якщо $x = 51$; $y = 49$;
- 2) $5a^2 - 10ab + 5b^2$, якщо $a = 9,3$; $b = 7,3$.

606. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $8x^2 - 72 = 0$; | 2) $50x^2 - 2 = 0$. |
|----------------------|----------------------|

607. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1) $5x^2 - 125 = 0$; | 2) $12x^2 - 3 = 0$. |
|-----------------------|----------------------|



608. Розкладіть на множники:

- | | |
|------------------|-----------------|
| 1) $a^4 - n^4$; | 2) $k^4 - 16$. |
|------------------|-----------------|

609. Розкладіть на множники:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) $x^4 - 1$; | 2) $81 - b^4$. |
|----------------|-----------------|

610. Розкладіть на множники:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $a^2 - b^2 + a + b$; | 2) $x^2 - a^2 + x - a$; |
| 3) $2m^2 - 2n^2 - 3m + 3n$; | 4) $4x^2 + y - 2x - y^2$; |
| 5) $a^2 - 16 + (a + 4)^2$; | 6) $(z + k)^2 + 2z^2 - 2k^2$. |

611. Розкладіть на множники:

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| 1) $c^2 - b^2 + c - b$; | 2) $3x + 3y + x^2 - y^2$; |
| 3) $a^2 + 4ab - x^2 - 4xb$; | 4) $(m - 2)^2 + m^2 - 4$. |

612. Знайдіть значення многочлена $x^2 - y^2 + 2(x + y)^2$, розклавши його на множники, якщо $x = 3\frac{2}{3}$; $y = -2$.

613. Знайдіть значення многочлена $3(a - b)^2 + a^2 - b^2$, розклавши його на множники, якщо $a = 2,8$; $b = 5,6$.

614. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$;

2) $b^2 + 9 + 6b - k^2$;

3) $m^2 - a^2 - 4ab - 4b^2$;

4) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2c - 1$.

615. Розкладіть на множники:

1) $m^2 + 2mn + n^2 - k^2$;

2) $a^2 + 1 - 2a - b^2$;

3) $c^2 - x^2 + 2xy - y^2$;

4) $x^2 + 2x + 1 - b^2 - 2bc - c^2$.

616. Розкладіть многочлен $4x^2 + 4y - y^2 - 4$ на множники та знайдіть його значення, якщо $x = 3,6$; $y = 7,2$.

617. Розкладіть многочлен $9p^2 - 25 + 10q - q^2$ на множники та знайдіть його значення, якщо $p = 1,2$; $q = 8,6$.

618. Розкладіть на множники:

1) $mnk + 8nk - 3mk - 24k$;

2) $3bx^4 - 3x^4 + 3bx^3 - 3x^3$.

619. Розкладіть на множники:

1) $2ac + bc + 2acx + bcx$;

2) $m^2a - m^2b + 3am - 3bm$.

620. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$;

2) $1,6y^3 - 0,4y = 0$;

3) $x^3 - 4x^2 - 4(x - 4) = 0$;

4) $2z^3 - z^2 = 25(2z - 1)$.

621. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 4x = 0$;

2) $0,2z^3 - 1,8z = 0$;

3) $x^3 - x^2 - 16(x - 1) = 0$.



Інтерактивне завдання 18

Застосування кількох способів розкладання
многочленів на множники



4

622. Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 8a + 12$;

2) $x^2 - 6xy + 5y^2$;

3) $9a^2 - 3a^2x + 9ax - 3ax^2$;

4) $x^2y^2a - x^2y^2 + 5axy - 5xy$;

5) $2a^2 + a - 4ab - b + 2b^2$;

6) $a^3 - b^3 - (a - b)^3$.

623. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 2x - 8$;

2) $a^2 + 6ab + 8b^2$;

3) $-a^3b - a^2b^2 - a^2b - ab^2$;

4) $2x^4 + 6x^3y - 4x^3 - 12x^2y$.

624. Дано многочлен $a^2 - 8a + 16 - b^2 - 2bc - c^2$. Доведіть, що його значення дорівнює нулю, якщо $a = b + c + 4$.

625. Дано многочлен $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 10z - 25$. Доведіть, що його значення дорівнює нулю, якщо $x + y + z = 5$.

626. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + 7 = 0$;

2) $z^2 + 4z - 12 = 0$;

3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;

4) $4y^3 - y^2 = 4y - 1$.

627. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

2) $y^2 + 2z - 24 = 0$;

3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Вправи для повторення



628. Накресліть на координатній площині чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-2; 3)$, $B(4; 3)$, $C(4; -1)$, $D(-2; -1)$.

629. На рисунку 12 зображено графік зміни об'єму бензину в баку автомобіля протягом 4 годин.

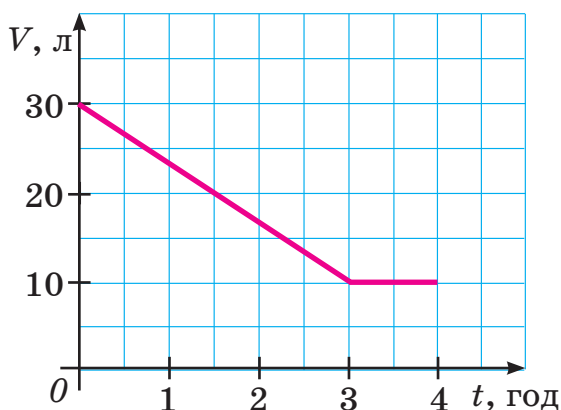


Рис. 12

Користуючись графіком, знайдіть:

1) початковий об'єм бензину; кінцевий об'єм;

2) об'єм бензину в момент часу t год, якщо $t = 1,5$; $t = 3$;

3) скільки літрів бензину витратив автомобіль за цей час.

630. Із 50 кг насіння льону отримують 24 кг олії. Скільки потрібно кілограмів такого насіння, щоб отримати 60 кг олії?

631. Майстриня одержала замовлення на виготовлення вишиванок. Якби вона щодня працювала по 6 год, то виконала б замовлення за 12 днів. Скільки годин на день має працювати майстриня, щоб виконати замовлення за 9 днів?

Поміркуйте



632. Жук повзає по ребрах куба. Чи може він послідовно обійти всі ребра, проходячи по кожному ребру лише один раз?

Завдання для повторення § 3

633. Виконайте множення:

- 1) $(5 - a)(5 + a)$; 2) $(3b + 2a)(3b - 2a)$;
 3) $(-m - 5n)(m - 5n)$; 4) $(4a^2b - 2c^3)(4a^2b + 2c^3)$.

634. Піднесіть до квадрата:

- 1) $(3x + 4)^2$; 2) $(0,5ab - 2c)^2$.

635. Спростіть вираз:

- 1) $(a - 6)(a + 6) + (3 - a)(3 + a)$;
 2) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) - (1 - 3x^2)^2$;
 3) $(5a - 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - 29b^2$;
 4) $(b + 1)(b^2 - b + 1) + b(3 - b)(3 + b)$.

636. Доведіть тотожність:

- 1) $(a + b)(a - b) - (a - c)(a + c) = (c - b)(c + b)$;
 2) $(n + 1)^2 + (n + 5)^2 - 3 = (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + 3$.

637. Знайдіть значення виразу:

- 1) $a^2 - 10ab + 25b^2$, якщо $a = 12$; $b = 2,8$;
 2) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4) - m(m^3 + 4)$, якщо $m = -2,5$.

638. Знайдіть значення виразу:

- 1) $96 \cdot 104$; 2) $19,8 \cdot 20,2$; 3) $49^2 - 2 \cdot 49 \cdot 59 + 59^2$.

639. Дано вираз $(k - 2)^2 + (k + 2)^2 - 2(k - 4)(k + 4)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень k .

640. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(2n + 3)^2 + (1 - 2n)(1 + 2n) + 2$ ділиться на 12.

641. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(2y + 5)^2 - 4y^2 = 0$; 2) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 2) = 1$;
 3) $(z + 4)(z^2 - 4z + 16) = z^3 - 4z$.

642. Розкладіть на множники:

- 1) $k^2 - 49$; 2) $x^3 - 4x$;
 3) $1,44a^2 - b^4$; 4) $9x^2 + 6xy + y^2$;
 5) $a^3 - 64$; 6) $mx^3 + 8mz^3$.

643. Розкладіть на множники:

- 1) $m^2 - mk - 3mn + 3nk$; 2) $z^3 + z^2 - 9z - 9$;
 3) $a^2 - b^2 - 2xa + 2xb$; 4) $25c^2 - k^2 - 10k - 25$.

644. Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 - 81 = 0$;

2) $x^3 - 9x = 0$;

3) $y^2 - 4y - 21 = 0$;

4) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$.

645. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел є непарним числом.



Інтерактивне завдання для самоперевірки 3 Формули скороченого множення



Завдання для самоперевірки № 3

Початковий рівень

- Виконайте множення: $(a - x)(a + x)$.
 А $a^2 - 2ax + x^2$ Б $a^2 + 2ax + x^2$
 В $a^2 + x^2$ Г $a^2 - x^2$
- Піднесіть двочлен до квадрата: $(b - 4)^2$.
 А $b^2 - 4b + 16$ Б $b^2 - 16$
 В $b^2 - 8b + 16$ Г $b^2 + 8b + 16$
- Розкладіть на множники многочлен $y^2 - 9$.
 А $(y - 9)(y + 9)$ Б $(y - 3)(y - 3)$
 В $(y + 3)(y + 3)$ Г $(y - 3)(y + 3)$
- Обчисліть: $85^2 - 15^2$.
 А 140 Б 4900 В 7000 Г 6125
- Подайте тричлен $k^2 - 10k + 25$ у вигляді квадрата двочлена.
 А $(k - 10)^2$ Б $(k - 5)^2$ В $(k + 10)^2$ Г $(k + 5)^2$
- Розкладіть на множники: $c^3 + 27$.
 А $(c + 3)(c^2 - 6c + 9)$ Б $(c - 3)(c^2 + 6c + 9)$
 В $(c + 3)(c^2 - 3c + 9)$ Г $(c - 3)(c^2 + 3c + 9)$

Середній рівень

- Розв'яжіть рівняння $(x + 2)^2 - x^2 = 0$.
 А 2 Б -2 В 1 Г -1
- Розкладіть на множники вираз $5b^2 - 5b^4$.
 А $5(1 - b^2)(1 + b^2)$ Б $5b(1 - b)(1 + b)$
 В $5b^2(1 - b)(1 + b)$ Г $5b^2(1 - b)$

9. Знайдіть значення виразу $b^2 - 2bc + c^2$, якщо $b = 6,5$; $c = 1,5$.
А 5 Б 25 В 40 Г 48

10. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1 $(2m - n)(2m + n)$ | А $m^2 - 4mn + 4n^2$ |
| 2 $(2m + n)^2$ | Б $4m^2 - 4mn + n^2$ |
| 3 $(2m - n)^2$ | В $4m^2 + 4mn + n^2$ |
| | Г $2m^2 - n^2$ |
| | Д $4m^2 - n^2$ |

Достатній рівень

11. Знайдіть значення виразу $(3 - 2k)(3 + 2k) + (1 - 2k)^2$, якщо $k = 2,7$.

12. Доведіть тотожність $(a^2 + 1)(a^2 - 1) - (a^2 - 1)^2 + 2 = 2a^2$.

13. Розкладіть на множники:

- 1) $3a^4 + 12a^3b + 12a^2b^2$; 2) $m^2 - 4n^2 + m - 2n$.

14. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x(4x + 5) - (2x - 5)^2 = 15$; 2) $3z^3 - 48z = 0$.

Високий рівень

15. Спростіть вираз $((x + 2y^2)(x - 2y^2))^2 - 16y^8$.

16. Розкладіть на множники:

- 1) $c^2 - 2c - 35$; 2) $6mnx + x^3 - mx^2 - 6nx^2$.

17. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $y^3 + 8y^2 - y - 8 = 0$;
2) $16 + (2x + 3)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$.

18. Одне натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 3, а друге — 4. Доведіть, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.

Відповіді

- § 1. 12. $5n$ кг; 240 кг. 13. $40k$ кг; 200 кг. 20. $b = -7$. 21. $a = 2,5$. 22. $x = 2$.
 29. $1,1(k - 500)$ грн; 7700 грн. 30. $0,6(m + 10)$ лип; 33 липи. 31. 1) 1; 2) 0.
 32. 0. 33. -3 ; -28 . 36. На 25 %. 40. 27 кг. 41. *Вказівка*. Нехай a — найменша з відстаней між двома мавпами. З'ясуйте, куди дивляться мавпи, відстань між якими дорівнює a . 49. 1) $2x - 11z$; 2) $-14a + 15b - 3$.
 51. 1) $-2k - 6$; -4 ; 2) $2a - b + 18$; 27. 54. 1) 4; 2) -2 ; 3) 0; 4) $-0,75$. 55. 1) -1 ; 2) -6 . 59. $2(2a - 3)$ м. 60. $5b$ см. 63. 1) $28c + 22$; 2) $x - 4,5$; 3) $-6x - y + 3z$; 4) $4a - 6b$; 5) $-6x + 18$; 6) $15n - 20$. 64. 1) $-4a + 12$; 2) $1,5a - 3,7b$; 3) $12n + 18$; 4) $\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y$. 65. 15. 66. 0. 69. 7. 72. 1) 1; 2) 4,5. 73. 1) -3 ; 2) 1,5. 74. $(3k - 4)$ км; 236 км. 75. $(2,5x - 4)$ яблука. 76. 1) На $0,6k$ грн; 2) $1,6k$ грн. 79. 1) $0,96n$ грн; 2) на $0,04n$ грн. 80. $1,7a$ грн. 82. 250 г. 83. 250 т. 84. На 8 %. 85. 7 намист. *Вказівка*. Врахуйте, що в намисті чорні перлини можуть бути поруч, через одну, через дві і т. д. 99. 1) 256; 2) -250 ; 3) -1 ; 4) 10. 102. 1) -7 ; 9; 2) 1; 0,0016. 113. 1) 2; 2) -2 ; 3) 0,4. 114. 1) -5 ; 2) 6; 3) 0,25. 115. 1) 0; 100; 0; 2) 0; 99; -1 . 116. 1) 1, якщо $b = 1$; 2) -5 , якщо $y = -0,5$. 117. 1) -5 ; 2) 0,5. 118. 1) 0; 2) коренів немає. 119. 1) $x = 0$; $y = -1$; 2) $m = 2$; $n = 0,5$. 120. $a = 0$; $b = 4$. 122. 1) 1,4; 2) 2. 123. 7 матчів виграла, 2 зіграла внічию. 125. Попелюшка. *Вказівка*. Після кожного ходу кількість букетів збільшується на 1. Оскільки всього є 32 троянди, то, маючи 2 букети, одержати 32 букети з однієї троянди можна за $32 - 2 = 30$ ходів. Врахуйте, що парні ходи робить принц. 140. 1) 64; 2) -27 ; 3) 16,25; 4) 25. 143. 1) 20 000; 2) -2 ; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 100 000; 5) 1; 6) 8; 7) 1; 8) $-9\frac{1}{3}$. 144. 1) 0; 2) 10 000; 3) 1; 4) 25; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $1\frac{6}{7}$. 147. 1) a^{35} ; 2) x^{18} ; 3) k^{22} ; 4) a^{15} . 148. 1) c^{22} ; 2) a^{15} ; 3) y^{16} ; 4) b^{12} . 149. 1) 27; -27 ; 2) 2,25; $5\frac{4}{9}$. 150. -27 ; $\frac{1}{27}$. 151. 1) 16; 2) 5; 3) 0,01; 4) $2\frac{7}{9}$. 152. 1) 81; 2) 4. 153. 3) 9; 4) 1. 158. 19. 159. 2000 користувачів. 160. 1) 60 см \times 60 см; 2) 42 плитки; 3) 10 500 грн. 161. 0 або 9. 174. 1) $-12,5a^7b^5$; 2) $0,27a^6b^5$; 3) $-10x^5y^8$; 4) $16a^6b^{12}$; 5) $-0,5m^{10}n^8$; 6) $a^7b^7c^7$. 175. 1) $-8m^4n^3$; 2) $-2,1p^5q^3$; 3) $-9a^{12}b^5$; 4) $-12x^9y^5z^6$. 176. 1) 400 000; 2) 1; 3) -32 . 177. 1) -10 ; 2) 256. 178. 1) 12; 2) 4; 3) 64; 4) -24 . 185. 1) $8a^{3n+1}b^{2n+2}$; 2) $-2x^{22n}$. 186. 1) $16x^{48}$; 2) a^{8n+5} . 187. -16 . 188. 1. 189. У 8 разів. 191. 1) 2; 2) -4 . 192. 12 000 грн. 193. 9 слив. 194. *Вказівка*. Припустіть, що кожний хлопець зіграв більше, ніж 5 матчів. Врахуйте, що тоді в усіх матчах загалом зіграли більше, ніж $5 \cdot 30$ хлопців. 197. $(3n - 2)$ квітки.

198. $(160t + 35)$ км. 199. $1,25n$ грн. 202. 1,8. 206. 3) -1 ; 4) 625; 5) 32; 6) 5. 209. 1) $-6x^4y^2$; 2) $-0,2a^5b^5$; 3) $-10x^6z^5$; 4) $-256m^8n^{21}$. 210. 2) 27; 3) -320 . 214. 1) 0,5; 2) 0; 3) коренів немає. 215. 3.

Завдання для самоперевірки № 1. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. Г. 5. В. 6. Г. 7. Г. 8. В. 9. А. 10. 1 — Б; 2 — В; 3 — Г. 11. 1) -225 ; 2) -1 . 13. 32. 14. 1) $-4a^5b^8 \cdot (-16a^7b^{10})$; 2) $(4a^4b^6)^3$. 15. 26. 16. 0,5. 17. $(2x - 20)$ м.

§ 2. 226. 1) 12; 2) -17 ; 3) 0,44. 227. 1) 8; 2) -27 . 230. 1) $-0,44$; 2) -15 ; 3) -10 . 231. 1) 168; 2) 2. 237. 1) -2 ; 2) $-0,6$. 238. 1) 17,6 кг; 2) 25 кг. 239. 18,4 км/год. 240. Не може. *Вказівка.* Врахуйте: якби кенгуру повернувся в початкову точку, то кількість стрибків в один бік дорівнювала б кількості стрибків у протилежний бік і загальна кількість стрибків була б парною. 253. 1) -1 ; 2) 2. 254. 1) -2 ; 2) 1. 255. 1) a^2b^3 ; 2) $-x^4 - 2x - 11$; 3) $2xy - 2x^2$. 256. 1) $8ab + 4b^2$; 2) $-n^2 + 8n$. 257. 10; 2,5. 258. 0; 1,04. 263. 1) $P = -3x^2 - x + 3$; 2) $P = x^2 + 2$; 3) $P = 3x^2$. 264. $-2x^2 + 2x + 6$. 265. 1) 2; 2) $-1,75$. 266. 1) $-1,2$; 2) 2. 267. $(3n - 8)$ яблунь. 268. $(3m + 2)$ кг. 276. 25 т. 277. На 44,2%. 278. Порівну. 284. 4) $2m + 3$; 5) $4a^2$; 6) x^2 . 285. 3) $-2y^2$; 4) 0. 286. 1) 2; 2) $-4,5$; 3) 2; 4) 6. 287. 1) 7; 2) -3 . 288. 8 грн. 289. 6 л. 290. 1) $2a + 8$; 2) $15x^6 - 18x^4$; 3) $8m^4n^2 - 8m^4n^3$; 4) $2abc$; 5) $-2x^2 + x$. 291. 1) $b^4 - 2b$; 2) $2x^2$; 3) $-10m^3n^5$; 4) $-6a^2b^2 - 4a^4$. 297. 1) 3; 2) 5; 3) 9,5; 4) -2 . 298. 1) 1; 2) $-1,8$; 3) 1,5. 299. 24 клени; 8 лип. 300. По 110 яблук. 301. 90 км/год. 302. 1) $-a^n$; 2) 0. 303. 0. 305. 1) -1 ; 2) 4. 306. 0. 307. 12 хв. 309. 1) $4a^5b^4$; 2) $-54x^5y^8$. 310. 2) 60; 3) 120; 4) 15. 311. 3,6 год. 312. Ні. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що будь-яке одержане число ділитиметься на 9. 318. 1) -12 ; 2) $6a^2 - 4$; 3) $4x^2$; 4) $a^3 + 3a$; 5) $a^2 - 3b^2$; 6) $4y^2$. 319. 1) $5x + 6$; 2) $3a^2$; 3) $b^2 + 2bc$; 4) $2m^2 - 3n^2$. 320. 1) 5; 2) 0,6. 321. 1) 4; 2) 1. 326. 1) $12a^2 - 10$; 2) $45x - 4$; 3) $5a$; 4) $7b^3$; 5) $14x^4y^2$. 327. 1) $18x^2 - 15$; 2) $-35b + 10$; 3) x^3 ; 4) $2ab$. 335. 1) 1,8; 2) 2; 3) $-0,6$. 336. 1) 1; 2) $-0,5$. 337. 0. 340. 1) -4 ; 2) -1 . 341. 1. 342. 6 м; 4 м. 343. 8 см; 4 см. 344. 3; 4; 5. 347. 8000 грн. 348. 16 км. 349. Ні. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що за вказаних ходів парність кількості чашок, які стоять догори дном, не змінюється. 361. 1) 6,25; 2) 103. 362. 1) 1,96; 2) 28. 363. 1) 0; 5; 2) 0; -3 . 364. 1) 0; -2 ; 2) 0; 2. 365. 3) $12x^4y^4(3y - 4x^2)$; 4) $8a^2b^2(3b - 2ab - 5a)$; 5) $-6m^4n^5(5n - 2m + 7mn)$; 6) $4abc(2c + 5b - 3a)$. 366. 2) $2x^4z^3(1 + 2z - 2z^2)$; 3) $15a^2b^2(3a^2 - 4ab + 5b^2)$; 4) $-18k^2n^4(2n - 3k + 5)$. 367. 4) $(a-b)(m-3)$; 5) $(n-3)(a^2+5)$; 6) $(x-2)(x+2)$; 7) $(a-b)(2x-a+b)$; 8) $2x(a+b)(2+a+b)$. 368. 3) $(s-t)(a-b)$; 4) $(a-b)(2+x)$; 5) $(m-4)(m-9)$; 6) $(m-n)(k+2m-2n)$. 369. 1) 0,5; 2) -3 . 370. 1) 5; 2) 2.

371. 1) 7800; 2) $-9,3$; 3) $3,6$; 4) 0. 372. 1) 17 400; 2) 22,5. 375. 1) 0; 20; 2) 0; 0,4; 3) -2 ; 4; 4) 1,5; 2. 376. 1) 0; $-0,2$; 2) 0; 0,4; 3) $-2,5$; 3; 4) -2 ; 7. 377. 1) 0; 2) 0. 378. 0. 383. 1) 2,5; 4; 2) -4 ; 6. 384. 1) -3 ; 3; 2) -4 ; 2. 387. 1) 263; 2) 1. 388. 276 м. 389. Ні. *Вказівка*. Припустимо, що розставити відповідним чином числа можна. Підрахуйте двома способами суму всіх чисел таблиці. 396. 1) $(a + b)(m - n)$; 2) $(x - y)(2 - a)$; 3) $(a - b)(5 + x)$; 4) $(y - 1)(a - 3)$; 5) $(a + 1)(a^2 + 1)$; 6) $(x - 4)(x^2 + 2)$. 397. 1) $(x + y)(3 - k)$; 2) $(c + b)(6 - a)$; 3) $(m - x)(a - 2)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 1)$. 398. -2 . 399. 30. 400. 1) $(b - a)(b - 2)$; 2) $(x + y)(10 + x)$; 3) $(3 - x)(a + x)$; 4) $(a^2 + b^2)(1 - ay)$; 5) $(c + 2)(3a^2 - 5bc)$; 6) $(2x^2 + 3y)(6 + 5x)$; 7) $(x + 4yz)(3xyz - 1)$; 8) $(3y - 4x)(0,3a + 0,4y)$. 401. 1) $(a + 2b)(a + 3)$; 2) $(x + 3a)(x - 2)$; 3) $(y^2 - a)(x^2 + 2y)$; 4) $(a - 2c)(2ab - 1)$; 5) $(2x^3 + 3y^2)(3y + 4z^2)$; 6) $(n^2 + 3a^2)(0,2an - 0,5)$. 402. 1) 2,5; 2) 37. 403. 38. 404. 1) 14; 2) -4 . 405. 11. 406. 1) -5 ; 4; 2) -2 ; 0,5. 407. 1) -3 ; 4; 2) $-1,5$; 4. 408. 1) $(a - b + c)(x + 3)$; 2) $(x^2 - y^2 + 4z)(a - 4b)$; 3) $(a + b)(-5 + 3n - m)$; 4) $(b + c)(n^2 + p^2 - p)$. 409. 1) $(a - b + 1)(c + d)$; 2) $(x + y + 2)(xy + 1)$; 3) $(a + b)(2a^2 + 2b - 1)$. 410. 1) $(a - 2)(a - 5)$; 2) $(x + y)(x + 2y)$. 411. 1) $(x + 1)(x + 4)$; 2) $(a - 3b)(a - 4b)$. 412. 1) 1; 2; 2) $-1,5$. 413. 1) -4 ; -2 ; 2) 5. 417. 26 л. 418. 28 т/га; 32 т/га. 419. Хлопців на 5 більше, ніж дівчат. 424. 1) $4b^2 - 27$; 2) $4x + 8$; 3) $-ab^2 + 2a$. 428. 7 см; 5 см. 429. 5) $(x - y)(3 - a)$; 6) $(x + 2)(x^2 + 1)$; 7) $(1 - 2y)(x + 2y)$; 8) $5(b + 2)(a^2 - 2bc)$. 430. 1) -18 ; 2) 85. 432. 1) 2; 2) -1 ; 3) $-1,5$; 4) 1,5; 5) 0; 3; 6) $-0,25$; 1,5; 7) 2; 3; 8) 2.

Завдання для самоперевірки № 2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. Б. 5. В. 6. Г. 7. В. 8. Б. 9. В. 10. 1—Г; 2—А; 3—В. 11. $-ab^3$. 12. 6. 14. $(m - k)(m - 3)$; 3. 17. $(x - m)(x - ab)$. 18. 0; 1.

§ 3. 436. 1) a^2 ; 2) 25; 3) -1 ; 4) $4a^2$. 437. 1) m^2 ; 2) $-16b^2$. 439. 1) 91; 2) 3,51. 440. 1) 2; 2) -12 . 441. -5 . 447. 1) 3; 2) -5 ; 3) $-4x^4$; 4) a^6 ; 5) $-6b^3 + 24b$; 6) 0. 448. 1) 7; 2) $25 - 2c$; 3) $9b^2$; 4) $8a^2$. 449. 1) $b^4 - 1$; 2) $16x^4 - 1$; 3) $y^4 - 16z^4$; 4) $a^8 - 1$. 450. 1) $81 - c^4$; 2) $256x^4 - y^4$. 453. 1) 5; 2) 0,4; 3) 0,5; 4) 0. 454. 1) 27; 2) 1; 3) -1 . 455. 1) $a^{32} - b^{32}$; 2) $6b^2$. 456. a^4 . 457. 1) 25; 2) -256 ; 3) -1 . 458. 1) -625 ; 2) 1. 459. -1 . 460. 1) Сітки мають ту саму довжину; 2) перший. 463. 117 км. 464. 12 %. 465. Так. *Вказівка*. Врахуйте, що один гном може мати 0, 1, 2, 3, 4 або 5 пукерок — усього 6 варіантів. 471. 1) $2a^2 + 2$; 2) b^2 ; 3) $-20x$; 4) $2x - 2$. 472. 1) 16; 2) $2x^2 + 8$. 473. 1) 1; 2) -2 . 474. 1) -5 ; 2) 1. 479. 1) $-8k$; 2) $2a^2 + 8b^2$; 3) $x^4 + 25x$. 480. 1) $4z^2 + 50$; 2) 1. 481. 1) 0; 53; 2) 7. 482. 12; -16 . 487. 1) $-0,3$; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,25. 488. 1) 1; 2) -9 ; 3) -1 . 489. 32 см; 40 см. 490. 80 м \times 80 м.

494. 1) $m^3 + n^3$; 2) $-4a^2b^2$; 3) 16. 495. 1) $-3x^2y + 3xy^2$; 2) 1. 500. 1360 ц. 501. 12 хв.
 502. $m = 27$; $n = 1$. 510. 2) $-0,8$; $0,8$. 511. 2) $-0,7$; $0,7$. 514. 1) $(a + 1)(a + 3)$;
 2) $(3x - 4)(3x + 2)$; 3) $(b + 2)(5b + 2)$; 4) $(-2n + 5)(12n - 5)$; 5) $(x + 1)(7x + 5)$;
 6) $(-2a - 7b)(4a + 3b)$. 515. 1) $(b + 3)(b + 7)$; 2) $(2k - 7)(2k + 5)$; 3) $(4a - 3)(12a + 3)$;
 4) $(-x + 2y)(9x - 4y)$. 516. 1) $0,4$; 2) 0 . 517. 1) $-17,5$; 2) 190 . 518. 1) -36 ; 2) $2\frac{1}{7}$.
 519. 1) 44 ; 2) $\frac{2}{7}$. 521. 1) -4 ; -2 ; 2) $-0,2$; 1 ; 3) -5 ; -1 ; 4) -6 ; 0 . 522. 1) 2 ; 3 ;
 2) 1 ; 3 . 526. 1) -2 ; 1 ; 2) -3 ; 3 . 527. 1) -1 ; 1 ; 2) -2 ; 2 . 531. 1) 12 років; 2) 6 років.
 532. $54\ 000$ грн. 533. Ні. 541. 1) 100 ; $0,01$; 400 ; 2) 400 ; $10\ 000$; 3) 1 .
 542. 1) 100 ; 100 ; 2) 1 . 543. 1) $10\ 000$; 2) 4 . 544. 1) 400 ; 2) 100 . 547. 1) 1 ;
 2) 100 ; 81 . 548. $\frac{1}{9}$. 549. 1) 4 ; 2) -6 ; 3) 10 ; 4) -3 . 550. 1) 3 ; 2) -5 ; 3) 2 . 551. 25 .
 552. 4 . 553. 2) $(m - 1)^2 + (n + 2)^2$; 3) $(a + b)^2 + (b - 2)^2$; 4) $(a - c)^2 + (b - 2c)^2$.
 554. $x = 3$; $y = 3$. 555. $a = -1$; $b = 1$. 558. -9 , якщо $b = 4$. 559. 3 , якщо $x = -3$.
 563. 105 км. 564. Порівню. 574. 1) y^3 ; 2) 64 . 575. 1) a^3 ; 2) 1 . 576. -7 ; 126 .
 577. -26 ; 65 . 583. 1) x^6 ; 2) 0 ; 3) 16 . 584. 1) k^6 ; 2) $2b^3$. 585. 1) 0 ; 2) -91 . 586. 0 .
 587. 1) -2 ; 2) 8 . 588. 1) 1 ; 2) $4,5$. 589. 1) $(b + 3)(b^2 - 9b + 39)$; 2) $(x + 3)(7x^2 + 15x + 9)$.
 590. 1) $(c - 1)(c^2 + 10c + 37)$; 2) $(2y - 1)(y^2 - y + 1)$. 591. 2) 91 . 592. 2) 448 .
 595. 1) -2 ; 2) -4 ; -1 . 596. 5 чисел. 597. Міді. 598. Вказівка. Припустимо, що деякі дві дівчини A і B не є сестрами. У такому випадку вони не мають спільної сестри і тому разом мають не менше 4 сестер. Тоді всього має бути щонайменше $4 + 2 = 6$ дівчат. Зробіть висновок. 600. 4) $x^2(x - 1)(x + 1)$; 5) $4a(1 - a)(1 + a)$;
 6) $n^3(n - 2)(n + 2)$; 7) $c(3 - b)(3 + b)$; 8) $2(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; 9) $y(3 + x)(9 - 3x + x^2)$.
 601. 3) $4y^2(1 - y)(1 + y)$; 4) $6a(m - 1)(m + 1)$; 5) $2x(y - 2)(y + 2)$; 6) $4(k + 2)(k^2 - 2k + 4)$.
 602. 3) $-(m - c)^2$; 4) $5(3 + k)^2$; 5) $a(a + 4)^2$; 6) $m(1 - 5m)^2$. 603. 2) $n(7 - c)^2$;
 3) $-(a - 2b)^2$; 4) $x(x - 6)^2$. 604. 1) $11\ 600$; 2) 300 . 605. 1) 800 ; 2) 20 . 606. 1) -3 ; 3 ;
 2) $-0,2$; $0,2$. 607. 1) -5 ; 5 ; 2) $-0,5$; $0,5$. 608. 1) $(a - n)(a + n)(a^2 + n^2)$;
 2) $(k - 2)(k + 2)(k^2 + 4)$. 609. 1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; 2) $(3 - b)(3 + b)(9 + b^2)$.
 610. 1) $(a + b)(a - b + 1)$; 2) $(x - a)(x + a + 1)$; 3) $(m - n)(2m + 2n - 3)$;
 4) $(2x - y)(2x + y - 1)$; 5) $2a(a + 4)$; 6) $(z + k)(3z - k)$. 611. 1) $(c - b)(c + b + 1)$;
 2) $(x + y)(3 + x - y)$; 3) $(a - x)(a + x + 4b)$; 4) $2m(m - 2)$. 612. 15 . 613. 0 .
 614. 1) $(x - y - z)(x - y + z)$; 2) $(b + 3 - k)(b + 3 + k)$; 3) $(m - a - 2b)(m + a + 2b)$;
 4) $(a + b - c + 1)(a + b + c - 1)$. 615. 1) $(m + n - k)(m + n + k)$; 2) $(a - 1 - b)(a - 1 + b)$;
 3) $(c - x + y)(c + x - y)$; 4) $(x + 1 - b - c)(x + 1 + b + c)$. 616. $(2x - y + 2)(2x + y - 2)$;
 $24,8$. 617. $(3p - q + 5)(3p + q - 5)$; 0 . 618. 1) $k(n - 3)(m + 8)$; 2) $3x^3(b - 1)(x + 1)$.
 619. 1) $c(1 + x)(2a + b)$; 2) $m(a - b)(m + 3)$. 620. 1) -1 ; 0 ; 1 ; 2) $-0,5$; 0 ; $0,5$; 3) -2 ; 2 ;
 4) 4 ; -5 ; $0,5$; 5 . 621. 1) -2 ; 0 ; 2 ; 2) -3 ; 0 ; 3 ; 3) -4 ; 1 ; 4 . 622. 1) $(a + 6)(a + 2)$;
 2) $(x - 5y)(x - y)$; 3) $3a(a + x)(3 - x)$; 4) $xy(a - 1)(xy + 5)$; 5) $(a - b)(2a - 2b + 1)$;

6) $3ab(a - b)$. **623.** 1) $(x - 4)(x + 2)$; 2) $(a + 2b)(a + 4b)$; 3) $-ab(a + b)(a + 1)$; 4) $2x^2(x + 3y)(x - 2)$. **626.** 1) 1; 7; 2) -6; 2; 3) -2; 2; 3; 4) -1; 0,25; 1. **627.** 1) -1; 5; 2) -6; 4; 3) -3; -2; 3. **630.** 125 кг. **631.** 8 год. **632.** Ні. *Вказівка.* Припустимо, що такий обхід можливий. Розглянемо вершину куба, яка не є ні початком, ні кінцем обходу. Урахуйте: скільки разів жук заповзає в цю вершину, стільки разів і виповзає з неї щоразу по різних ребрах. **635.** 1) -27; 2) $6x^2 - 2$; 3) $29a^2$; 4) $9b + 1$. **637.** 1) 4; 2) -6. **641.** 1) -1,25; 2) 5; 3) -16. **643.** 1) $(m - k)(m - 3n)$; 2) $(z + 1)(z - 3)(z + 3)$; 3) $(a - b)(a + b - 2x)$; 4) $(5c - k - 5)(5c + k + 5)$. **644.** 1) -9; 9; 2) -3; 0; 3; 3) -3; 7; 4) -1; 1; 5.

Завдання для самоперевірки № 3. 1. Г. 2. В. 3. Г. 4. В. 5. Б. 6. В. 7. Г. 8. В. 9. Б. 10. 1—Д; 2—В; 3—Б. 11. -0,8. 13. 1) $3a^2(a + 2b)^2$; 2) $(m - 2n)(m + 2n + 1)$. 14. 1) 1,6; 2) -4; 0; 4. 15. $x^4 - 8x^2y^4$. 16. 1) $(c - 7)(c + 5)$; 2) $x(x - m)(x - 6n)$. 17. 1) -8; -1; 1; 2) -0,6; 0.

Навчальне видання

Кравчук Василь Ростиславович
Підручна Марія Василівна
Янченко Галина Михайлівна

Алгебра

Посібник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Частина 1

*Посібник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»*

Редагування і верстання: *Оксана Гудь, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування: *Маргарита Більчук*
Художнє оформлення: *Олена Сажко*
Дизайн обкладинки: *Олена Сажко*

Видавець, виготовлювач і розповсюджувач видавничої продукції
Редакція газети «Підручники і посібники»
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-31
Збут: rip.ternopil@ukr.net Редакція: editoria@i.ua
Інтернет-магазин: www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.