

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ. GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD

Manual pentru clasa a 11-a
a instituțiilor de învățământ mediu general
cu predarea în limba română/moldovenească

*Recomandat
de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei*

Львів
Видавництво „Світ”
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

М52

Перекладено за виданням:

Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019

Авторський колектив:

Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. з навч. рум. / молд. мовами закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. ; пер. Ю. М. Гаврилук. – Львів : Світ, 2019. – 208 с. : іл.
ISBN 978-966-914-216-0

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-914-216-0 (рум./молд.)
ISBN 978-966-474-323-2 (укр.)

© Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А.,
Полонський В. Б., Якір М. С., 2019
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2019
© Гаврилук Ю. М., переклад румунською/молдовською мовами, 2019

DE LA AUTORI

Dragi elevi și eleve din clasa a 11-a!

În acest an voi terminați școala, și noi sperăm, că cunoștințele obținute vor deveni pentru voi un fundament sigur pentru obținerea viitoarei profesii. Avem speranța, că în aceasta vouă o să vă ajute manualul, pe care îl țineți în mâni. Faceți cunoștință, vă rugăm, cu structura lui.

Manualul este împărțit în șapte paragrafe, fiecare din ele este alcătuit din puncte. Studiind materialul teoretic atrageți o deosebită atenție la textul, care este tipărit cu **caracter gras**, cu *cursiv gras* și *cursiv*; astfel în manual sunt evidențiate definițiile, regulile și cele mai importante afirmații matematice. De regulă expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de probleme rezolvate. Aceste scrieri se pot accepta ca una din variantele posibile de definitivare a rezolvării.

În această carte voi o să faceți cunoștință cu o serie de teoreme importante. Unele din ele sunt prezentate cu demonstrații. În acele cazuri, când demonstrarea este în afara limitelor cursului dat, în manual sunt prezentate doar formulările teoremelor.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme destinate rezolvării de sine stătător, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceți după însușirea materialului teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții de o complexitate simplă și mijlocie, cât și probleme complicate mai ales acelea, care sunt marcate cu „asterisc” (*).

Cunoștințele sale se pot controla, rezolvând probleme în formă test din rubrica „Controlează-te”.

În afara materialului de studiu, în manual puteți găsi povestiri din istoria matematicii, în particular despre activitatea remarcabililor matematicieni ucraineni.

Vă dorim succes!

INSEMNĂRI CONVENȚIONALE

n° înșărcinări, ce corespund nivelurilor începător și mijlociu de realizări în învățământ;

n^{\bullet} înșărcinări, ce corespund nivelului satisfăcător de realizări în învățământ;

$n^{\bullet\bullet}$ înșărcinări, ce corespund nivelului înalt de realizări în învățământ;

n^* probleme pentru cercurile și facultativele de matematică;



terminarea demonstrării teoremei, rezolvării problemei;



probleme cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;



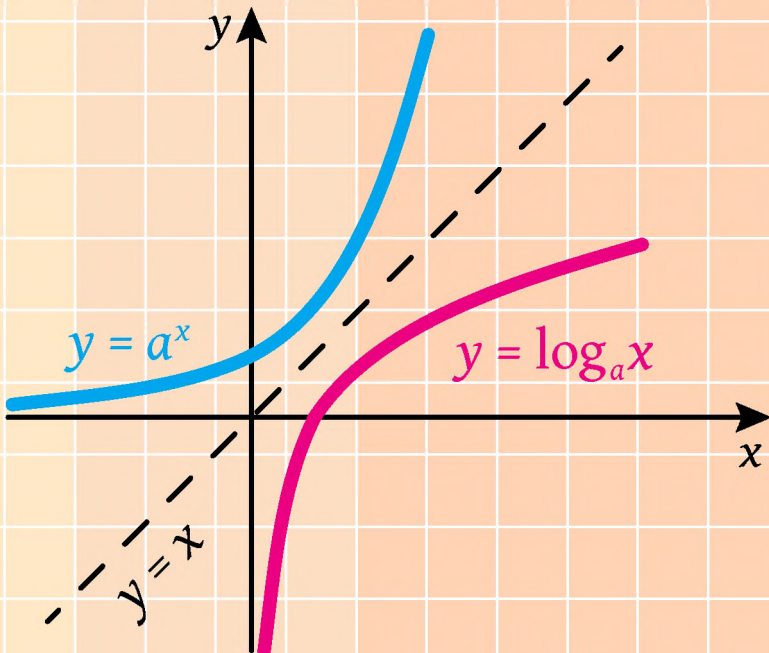
Rubrica „Atunci când lecțiile sunt îndeplinite”.

Cu culoare **verde** sunt însemnate numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru teme de acasă, cu culoare **albastră** – numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru rezolvare orală.

Capitolul 1.

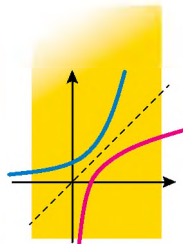
Algebră și elemente de analiză

- § 1. Funcțiile exponențială și
logaritmică
- § 2. Integrala și aplicarea ei
- § 3. Elemente de combinatorică,
teoria probabilității și statistică
matematică



§ 1

FUNȚIILE EXPONENȚIALĂ ȘI LOGARITMICĂ



În acest paragraf veți afla despre noțiunea putere cu exponent real arbitrar. Veți afla care funcții se numesc exponențială și logaritmice, veți studia proprietățile acestor funcții, veți învăța să rezolvați ecuații și inecuații exponențiale și logaritmice.

1. Funcția exponențială și proprietățile ei

Analizăm funcția $f(x) = 2^x$, unde x – număr rațional, adică domeniul de definiție al funcției f este mulțimea \mathbb{Q} .

În figura 1.1 sunt notate punctele graficului funcției f , care corespund unor valori întregi ale lui x . Să calculăm valoarea funcției $f(x) = 2^x$ pentru unele valori fracționare ale lui x . De exemplu, pentru $x = \frac{1}{2}$ avem

$2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41\dots$ Dacă la punctele care sunt reprezentate în figura 1.1 de adăugat punctele graficului funcției f , care corespund, de exemplu, valorilor $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, atunci obținem mulțimea punctelor care este reprezentată în figura 1.2.

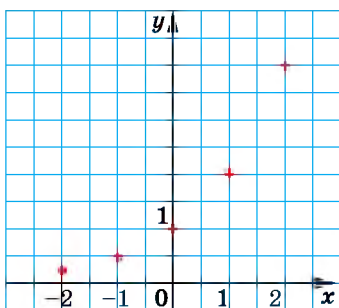


Fig. 1.1

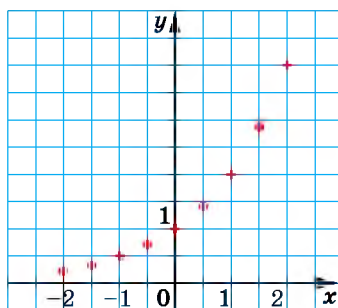


Fig. 1.2

O imagine mai precisă a graficului funcției f poate fi obținută prin marcarea punctelor, care corespund altor valori raționale ale argumentului (fig. 1.3).

Se dovedește, că există o singură funcție g continuă pe \mathbb{R} , al cărei grafic trece prin toate punctele graficului funcției f . Graficul funcției g

este reprezentat în figura 1.4. Mulțimea punctelor graficului funcției f este submulțimea mulțimii punctelor graficului funcției g .

Funcția g se numește **funcție exponențială** cu baza 2 și se scrie: $g(x) = 2^x$.

Analogic se poate analiza o funcție exponențială cu orice bază a , unde $a > 0$ și $a \neq 1$. Se scrie: $g(x) = a^x$.

Valoarea funcției g în punctul x se numește **puterea numărului pozitiv a cu exponent real x** și se notează a^x .

Multe proprietăți ale puterii cu exponent rațional se păstrează și pentru puterea cu exponent real.

În special, pentru $a > 0$, $b > 0$ și pentru orice valori reale x și y , sunt adevărate următoarele egalități:

- 1) $a^x a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- 3) $(a^x)^y = a^{xy}$;
- 4) $(ab)^x = a^x b^x$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Problema 1. Simplificați expresia $\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}}$.

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned} \frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}} &= \frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{\sqrt{7}} - 1)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}} = \\ &= \frac{(a^{2\sqrt{7}} - 1)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}} = 1. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

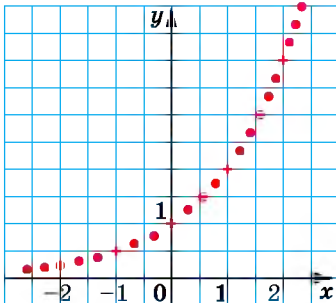


Fig. 1.3

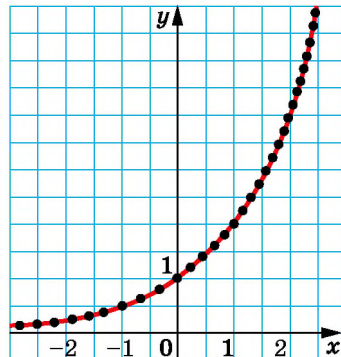


Fig. 1.4

Să considerăm proprietățile funcției exponențiale $f(x) = a^x$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$.

- Domeniul de definiție al funcției exponențiale este mulțimea numerelor reale, adică $D(f) = \mathbb{R}$.
- Domeniul de valori al funcției exponențiale este mulțimea $(0; +\infty)$, adică $E(f) = (0; +\infty)$.
- Funcția exponențială nu are zerouri, iar intervalul $(-\infty; +\infty)$ este intervalul constanței semnului ei.
- Pentru $a > 1$, funcția exponențială este crescătoare; pentru $0 < a < 1$, funcția exponențială este descrescătoare.
- Funcția exponențială este diferentiabilă. Mai detaliat despre derivata funcției exponențiale veți afla în punctul 8.

În figurile 1.5 și 1.6 este reprezentat schematic graficul funcției exponențiale pentru cazurile $a > 1$ și $0 < a < 1$, respectiv.

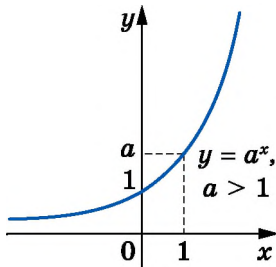


Fig. 1.5

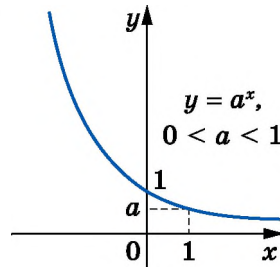


Fig. 1.6

Menționăm o proprietate importantă a graficului funcției exponențiale $y = a^x$ cu mărirea modulului x . Dacă $a > 1$ și $x < 0$, atunci distanțele de la punctele graficului funcției $y = a^x$ până la axa absciselor devin tot mai mici și mai mici și pot deveni oricât de mici, dar niciodată nu vor fi egale cu zero. O proprietate analogică are graficul funcției $y = a^x$ pentru $0 < a < 1$ și $x > 0$.

Problema 2. Găsiți valorile cea mai mică și cea mai mare a funcției $f(x) = 3^x$ pe intervalul $[-4; 3]$.

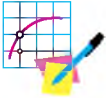
Rezolvare: Deoarece funcția f crește pe intervalul $[-4; 3]$ (fig. 1.5), atunci ea obține cea mai mică valoare pentru $x = -4$, iar cea mai mare pentru $x = 3$. Deci,

$$\min_{[-4; 3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \quad \max_{[-4; 3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Răspuns: $\frac{1}{81}, 27$. ◀



1. Ce proprietăți are puterea cu exponent real?
2. Formulați proprietățile funcției exponențiale.
3. Reprezentați schematic graficul funcției $y = a^x$ pentru $a > 1$; pentru $0 < a < 1$.



EXERCIȚII

1.1.° Care din funcțiile date este exponențială:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.2.° Pe baza cărei proprietăți a funcției exponențiale se poate afirma, că:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.3.° Specificați, care dintre funcțiile date sunt crescătoare, și care sunt descrescătoare:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.4.° Construiți graficul funcției $y = 3^x$. În ce limite se schimbă valoarea funcției, când x crește de la -1 până la 3 inclusiv?

1.5.° Construiți graficul funcției $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. În ce limite se schimbă valoarea funcției, dacă x crește de la -2 până la 2 inclusiv?

1.6.° Comparați:

1) $5^{3,4}$ și $5^{3,26}$; 3) 1 și $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ și $(\sqrt{2})^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ și $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ și 1 ; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ și $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.7.° Comparați cu numărul 1 valoarea expresiei:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.8.° Comparați cu numărul 1 numărul pozitiv a , dacă:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.9.° Comparați numerele m și n , dacă:

- 1) $0,8^m < 0,8^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
 2) $3,2^m > 3,2^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.° Calculați valoarea expresiei:

- 1) $3^{(\sqrt{2}+1)^3} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.11.° Găsiți valoarea expresiei:

- 1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[3]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.12.° Simplificați expresia:

- 1) $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1$.

1.13.° Simplificați expresia:

- 1) $\left(\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(a^\pi - b^\pi\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$.

1.14.° Este corectă oare afirmația:

- 1) cea mai mare valoare a funcției $y = 0,2^x$ pe intervalul $[-1; 2]$ este egală cu 5;
 2) domeniul de definiție al funcției $y = 4 - 7^x$ este mulțimea numerelor reale;
 3) domeniul de valori al funcției $y = 6^x + 5$ este intervalul $[5; +\infty)$;
 4) cea mai mică valoare a funcției $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ pe intervalul $[-2; 2]$ este egală cu 16?

1.15.° Găsiți cea mai mare valoare a funcției $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ pe intervalul $[-2; 3]$.

1.16.° Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = 2^x$ este egală cu 16, iar cea mai mică este egală cu $\frac{1}{4}$?

1.17.° Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ este egală cu 27, iar cea mai mică este egală cu $\frac{1}{9}$?

1.18.* Găsiți domeniul de valori al funcției:

$$1) y = -9^x; \quad 2) y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1; \quad 3) y = 7^x - 4; \quad 4) y = 6^{|x|}.$$

1.19.* Rezolvați inecuația:

$$1) 2^x > -1; \quad 2) 2^{\sqrt{x}} > -2.$$

1.20.* Rezolvați inecuația $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.21.** Graficul cărei din funcțiile, prezentate în figura 1.7, intersectează graficul funcției $y = 5^x$ mai mult decât într-un punct?

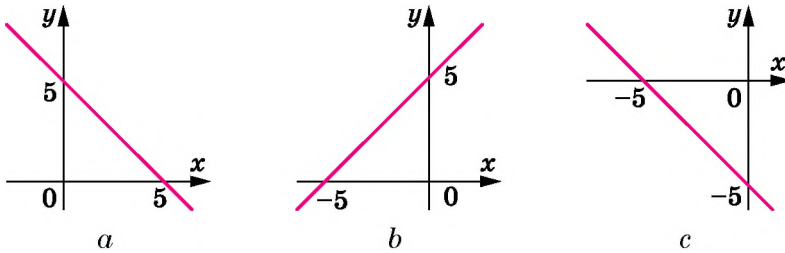


Fig. 1.7

1.22.** Determinați cu ajutorul graficului numărul de rădăcini a ecuației:

$$1) 2^x = x; \quad 2) 2^x = \sin x; \quad 3) 2^{-x} = 2 - x^2.$$

1.23.** Determinați prin modul grafic numărul de rădăcini a ecuației:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}.$$

1.24.** Construiți graficul funcției $y = \sqrt{2^{\cos x}} - 2$.

1.25.* Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției:

$$1) y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}; \quad 2) y = 3^{|\sin x|} - 2.$$

1.26.* Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției:

$$1) y = 6^{\cos x}; \quad 2) y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos |x|} + 5.$$



NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

1.27. Prezentați numerele 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ sub formă

de putere a lui: 1) 2; $\frac{1}{2}$.

1.28. Prezentați numerele 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ sub formă de putere a lui: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.29. Simplificați expresia:

1) $7^{x+1} + 7^x$;

4) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1}$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-4}$;

5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x} + 36^{\frac{x}{2}} - 6^{x+1}$;

3) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;

6) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

1.30. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$;

2) $f(x) = \sqrt{16x-x^2}$.

1.31. Găsiți domeniul de valori al funcției:

1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;

3) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$.

2) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x-1}$;



ESTE OPARE NEVOIE DE A STUDIA FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ? ■

Funcția exponențială este modelul matematic al multor procese, care se petrec în natură sau sunt legate de activitatea umană.

De exemplu, biologii știu că masa bacteriilor din colonii, în anumite condiții, în intervale egale de timp se mărește de unul și același număr de ori.

Aceasta înseamnă că atunci când, de exemplu, în momentul de timp $t = 0$ masa a fost egală cu 1, iar în momentul de timp $t = 1$ masa a fost egală cu a , apoi în momentele de timp $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... masa va fi egală cu a^2 , a^3 , ..., a^n , ... Prin urmare, este normal să presupunem că în orice moment t masa va fi egală cu a^t . Se poate verifica (faceți independent) că valoarea funcției $f(t) = a^t$ se mărește de același număr de ori în intervale egale de timp.

Astfel, procesul analizat este descris cu ajutorul funcției exponențiale $f(t) = a^t$.

Din cursul de fizică se știe că în timpul dezintegrării radioactive masa substanței radioactive în intervale egale de timp se micșorează de unul și același număr de ori.

Dacă depozitați bani în bancă sub un anumit procent, atunci în fiecare an suma de bani pe cont se va mări de unul și același număr de ori. De aceea funcția exponențială descrie și aceste procese.

2. Ecuații exponențiale

Să examinăm ecuațiile $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0,3^{x-4} = 0,3^{x^3}.$$

În aceste ecuații, variabila se conține numai în exponentul puterii. Ecuațiile date sunt exemple de **ecuații exponențiale**.

Teorema 2.1. Pentru $a > 0$ și $a \neq 1$ egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ se îndeplinește atunci și numai atunci, când $x_1 = x_2$.

Demonstrație. Evident, că dacă $x_1 = x_2$, atunci $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Să demonstrăm, că din egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ rezultă egalitatea $x_1 = x_2$.

Admitem, că $x_1 \neq x_2$ adică $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$.

Să considerăm funcția exponențială $y = a^x$. Ea este sau crescătoare sau descrescătoare. Atunci din inegalitatea $x_1 < x_2$ rezultă, că $a^{x_1} < a^{x_2}$ (pentru $a > 1$) sau $a^{x_1} > a^{x_2}$ (pentru $0 < a < 1$). Totodată după condiție se efectuează egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$. Am obținut contradicție.

Analogic, considerând cazul, când $x_1 > x_2$, se poate obține contradicție. Deci, $x_1 = x_2$. ◀

Consecință. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci ecuația

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

este echivalentă cu ecuația

$$f(x) = g(x).$$

Să cercetăm exemple de rezolvare a ecuațiilor exponențiale.

Problema 1. Rezolvați ecuația $2^x = 8$.

Rezolvare: Prezentăm fiecare parte a ecuației în formă de putere cu baza 2. Avem:

$$2^x = 2^3.$$

De aici $x = 3$.

Răspuns: 3. ◀

Problema 2. Rezolvați ecuația $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

Rezolvare: Avem: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$; $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$.

Scoatem factorul 3^{2x} în fața parantezelor: $3^{2x}(3^1 + 1) = 36$.

Atunci primim: $3^{2x} \cdot 4 = 36$; $3^{2x} = 9$; $3^{2x} = 3^2$; $2x = 2$; $x = 1$.

Răspuns: 1. ◀

Problema 3. Rezolvați ecuația $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Rezolvare: Deoarece $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, atunci ecuația dată este comod să se rezolve prin metoda de înlocuire a variabilei.

Fie $5^x = t$. Atunci, ecuația dată poate fi scrisă astfel:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

De aici $t = 1$ sau $t = -5$.

Dacă $t = 1$, atunci $5^x = 1$. De aici $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Dacă $t = -5$, atunci $5^x = -5$. Deoarece $5^x > 0$ pentru orice x , rezultă că ecuația $5^x = -5$ nu are rădăcini.

Răspuns: 0. ◀

Problema 4. Rezolvați ecuația $9 \cdot 5^x = 25 \cdot 3^x$.

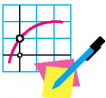
Rezolvare: Avem: $3^2 \cdot 5^x = 5^2 \cdot 3^x$. De aici $\frac{5^x}{3^x} = \frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2$;

$x = 2$.

Răspuns: 2. ◀



1. Ce se poate spune despre numerele x_1 și x_2 , dacă se îndeplinește egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$?
2. Care ecuație este echivalentă cu ecuația $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, dacă $a > 0$ și $a \neq 1$?



EXERCIȚII

2.1.° Rezolvați ecuațiile:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------------|---|
| 1) $4^x = 64$; | 5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$; | 9) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; |
| 2) $3^x = \frac{1}{81}$; | 6) $8^x = 16$; | 10) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$; |
| 3) $0,6^{2x-3} = 1$; | 7) $\sqrt{5^x} = 25$; | 11) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$; |
| 4) $10^{-x} = 0,001$; | 8) $0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$; | 12) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$. |

2.2.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{lll}
 1) 0,4^{2^x - x - 6} = 1; & 4) 9^{-x} = 27; & 7) \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}; \\
 2) \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}; & 5) \sqrt{2^x} = 8^{\frac{2}{3}}; & 8) 32^{\frac{3}{5}x - 2} = 4^{6 - \frac{3}{2}x}; \\
 3) 0,7^x = 2\frac{2}{49}; & 6) \left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}; & 9) 3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}.
 \end{array}$$

2.3.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{lll}
 1) 3^{x+2} + 3^x = 30; & 3) 2^{x+4} - 2^x = 120; & 5) 5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160; \\
 2) 4^{x+1} + 4^{x-2} = 260; & 4) 7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77; & 6) 6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192.
 \end{array}$$

2.4.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 5^{x+1} + 5^x = 150; & 3) 7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347; \\
 2) 2^x + 2^{x-3} = 18; & 4) 4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52.
 \end{array}$$

2.5.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0; & 3) 25^x - 5^x - 20 = 0; \\
 2) 9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0; & 4) 100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0.
 \end{array}$$

2.6.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0; & 2) 2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0.
 \end{array}$$

2.7.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5; & 3) \frac{1}{9} \cdot \sqrt{9^{3x-1}} = 81^{\frac{3}{4}}; \\
 2) 3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}; & 4) 4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}.
 \end{array}$$

2.8.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 100^x = 0,01\sqrt{10}; & 3) 9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}; \\
 2) 2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}; & 4) \sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}.
 \end{array}$$

2.9.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56; & 3) 2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354; \\
 2) 6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10; & 4) 4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228.
 \end{array}$$

2.10.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31; & 3) 2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9; \\
 2) 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17; & 4) 2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36.
 \end{array}$$

2.11.° Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{ll}
 1) 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0; & 3) 9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3; \\
 2) 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3; & 4) \frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2.
 \end{array}$$

2.12.* Rezolvați ecuațiile:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$

3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$

2) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4;$

4) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2.$

2.13.** Rezolvați ecuațiile:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33;$

2) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5;$

3) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1};$

4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}.$

2.14.** Rezolvați ecuațiile:

1) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} = 246;$

2) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}.$

3) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}.$

2.15.** Rezolvați ecuațiile:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10;$

2) $5^x - 0,2^{x-1} = 4.$

2.16.** Rezolvați ecuațiile $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28.$

2.17.** Rezolvați ecuațiile $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}.$

2.18.** Rezolvați ecuațiile $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}.$

2.19.* Rezolvați ecuațiile:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0;$

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x;$

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0;$

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x.$

2.20.* Rezolvați ecuațiile:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0;$

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}.$



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

2.21. Rezolvați inecuația $f'(x) \leq 0$, dacă $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}.$

2.22. Care este cea mai mică valoare pe care o poate obține expresia $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha?$

3. Inecuații exponențiale

Inecuațiile $0,2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^3} > 2^x$ sunt exemple de **inecuații exponențiale**.

La baza rezolvării numeroaselor inecuații exponențiale este următoarea teoremă.

Teorema 3.1. *Dacă $a > 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă inecuației $f(x) > g(x)$; dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.*

Să analizăm exemple de rezolvare a inecuațiilor exponențiale.

Problema 1. Rezolvați inecuația $8 \cdot 2^{3x-1} < 0,5^{-1}$.

Rezolvare: Avem: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Deoarece baza puterilor 2^{3x+2} și 2^1 este mai mare decât unu, atunci ultima inecuație este echivalentă cu următoarea inecuație:

$$3x + 2 < 1.$$

De aici $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Răspuns: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◀

Problema 2. Rezolvați inecuația $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geq \left(\frac{9}{25}\right)^x$.

Rezolvare: Avem: $4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geq \left(\frac{9}{25}\right)^x$;

$$\left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x \geq \left(\frac{9}{25}\right)^x; \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.$$

Deoarece $0 < \frac{3}{5} < 1$, atunci ultima inecuație este echivalentă cu următoarea inecuație: $x \leq 2x$; $x \geq 0$.

Răspuns: $[0; +\infty)$. ◀

Problema 3. Rezolvați inecuația $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Rezolvare: Avem: $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Fie $2^x = t$. Atunci $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Rezolvând această inecuație, obținem: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

De aici $-\frac{1}{2} < 2^x < 4$.

Deoarece $2^x > 0$, atunci $2^x > -\frac{1}{2}$ pentru toți x . De aceea este suficient de rezolvat inecuația $2^x < 4$.

Avem: $2^x < 2^2$; $x < 2$.

Răspuns: $(-\infty; 2)$. ◀



1. Dați exemple de inecuații exponențiale.
2. Cu care inecuație este echivalentă inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, dacă $a > 1$? dacă $0 < a < 1$?



EXERCIȚII

3.1.° Sunt oare echivalente inecuațiile:

- 1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ și $2x+4 > x-1$;
- 2) $0,9^{x^2-4} < 0,9^{x+2}$ și $x^2-4 < x+2$;
- 3) $a^x > a^5$, unde $a > 1$, și $x > 5$;
- 4) $a^x < a^{-3}$, unde $0 < a < 1$, și $x < -3$?

3.2.° Rezolvați inecuația:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
- 2) $5^x < \frac{1}{5}$;
- 3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
- 4) $0,4^{6x+1} \geq 0,4^{2x+5}$;
- 5) $0,3^{4x-8} > 1$;
- 6) $9^{1-3x} \leq 0$.

3.3.° Rezolvați inecuația:

- 1) $6^{7x-1} > 6$;
- 2) $10^x < 0,001$;
- 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
- 4) $0,2^{2x-9} < 1$.

3.4.° Rezolvați inecuația:

- 1) $2^{x^2-1} < 8$;
- 2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
- 3) $0,1^{3x-1} < 1000$;
- 4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$;
- 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
- 6) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
- 7) $\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}$;
- 8) $4 \cdot 0,5^{x(x+3)} \geq 0,25^{2x}$.

3.5.* Rezolvați inecuația:

$$1) 3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}; \quad 4) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x};$$

$$2) 49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x; \quad 5) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}.$$

$$3) \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49};$$

3.6.* Câte soluții întregi are inecuația:

$$1) 0,2 \leq 5^{x+4} \leq 125; \quad 2) \frac{1}{36} \leq 6^{3-x} < 6; \quad 3) 2 < 0,5^{x-1} \leq 32?$$

3.7.* Găsiți suma soluțiilor întregi a inegalității:

$$1) \frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9; \quad 2) \frac{1}{8} < 2^{2-x} \leq 16.$$

3.8.* Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}; \quad 2) f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}.$$

3.9.* Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}; \quad 2) f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}.$$

3.10.* Rezolvați inecuația:

$$1) 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5; \quad 4) \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geq 26;$$

$$2) 9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36; \quad 5) 2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leq 650;$$

$$3) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56; \quad 6) \left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}.$$

3.11.* Rezolvați inecuația:

$$1) 3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45; \quad 3) 5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145;$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3; \quad 4) \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}.$$

3.12.** Rezolvați inecuația:

$$1) 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0; \quad 4) 0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0;$$

$$2) 4^x + 2^{x+3} - 20 < 0; \quad 5) 6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leq 0;$$

$$3) 49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leq 0; \quad 6) 25^x + 5^x - 30 \geq 0.$$

3.13.* Rezolvați inecuația:

$$1) 9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leq 0; \quad 3) \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0;$$

$$2) 2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geq 0; \quad 4) 25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leq 0.$$

3.14.* Rezolvați inecuația:

$$1) \frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0; \quad 2) \frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geq 0.$$

3.15.* Găsiți mulțimea soluțiilor a inecuației:

$$1) 3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0; \quad 3) 6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geq 0;$$

$$2) 2^{x+3} + 2^{1-x} < 17; \quad 4) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leq \frac{6}{5}.$$

3.16.* Găsiți mulțimea soluțiilor a inecuației:

$$1) 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7; \quad 2) 4^{1-x} - 0,5^{1-2x} \geq 1.$$

3.17.* Rezolvați inecuația $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$.

3.18.* Rezolvați inecuația $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leq 8$.

3.19.* Rezolvați inecuația:

$$1) 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0; \quad 2) 5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}.$$

3.20.* Rezolvați inecuația:

$$1) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0; \quad 2) 2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geq 0.$$



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

3.21. Cu ce este egală valoarea expresiei $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, dacă $\cos\alpha = \frac{1}{5}$?

3.22. Aflați valoarea expresiei $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, dacă $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

4. Logaritmul și proprietățile lui

Este ușor de rezolvat ecuațiile $2^x = 4$ și $2^x = 8$. Rădăcinile lor vor fi numerele 2 și 3 corespunzător.

Însă, pentru ecuația $2^x = 5$ de indicat repede rădăcina ei este greu.

Apare o întrebare firească: există oare în general rădăcini ale acestei ecuații?

Să ne adresăm la interpretarea grafică. În figura 4.1 sunt date graficele funcțiilor $y = 2^x$ și $y = 5$. Ele se intersectează într-un punct oarecare $A(x_0; 5)$. Deci, ecuația $2^x = 5$ are o singură rădăcină x_0 .

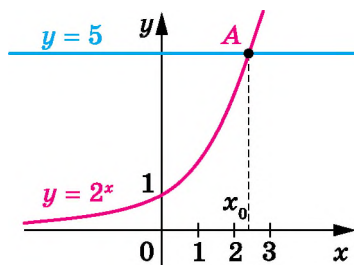


Fig. 4.1

Rădăcina ecuației $2^x = 5$ s-a convenit să se numească **logarithmul numărului 5 în baza 2** și se notează $\log_2 5$. Astfel numărul $\log_2 5$ – este exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul 2, pentru a obține numărul 5. Se poate de scris:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Definiție. Logarithmul unui număr pozitiv b în baza a , unde $a > 0$ și $a \neq 1$, se numește exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul a pentru a obține numărul b .

Logarithmul numărului b în baza a și se notează $\log_a b$.

De exemplu, $\log_3 9$ – este exponentul puterii, la care trebuie de ridicat numărul 3, pentru a obține numărul 9. Avem: $\log_3 9 = 2$, deoarece $3^2 = 9$.

Încă câteva exemple:

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ deoarece } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ deoarece } 100^0 = 1;$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ deoarece } 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Din definiția logarithmului rezultă, că pentru $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$ se îndeplinește egalitatea

$$a^{\log_a b} = b$$

Ea se numește, **identitatea logarithmică fundamentală**.

De exemplu, $7^{\log_7 3} = 3$, $0,3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

De asemenea din definiția logarithmului rezultă, că pentru $a > 0$ și $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Logaritmul cu baza 10 se numește **logaritmul zecimal**. În loc de $\log_{10} b$ se scrie: $\lg b$.

Folosind această notare și identitatea logaritmică fundamentală, pentru fiecare $b > 0$ se poate de scris: $10^{\lg b} = b$.

Să cercetăm proprietățile fundamentale ale logaritmului.

Teorema 4.1 (logaritmul produsului). *Dacă $x > 0, y > 0, a > 0$ și $a \neq 1$, atunci este adevărată egalitatea*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Pe scurt se formulează: *logaritmul produsului este egal cu suma logaritmilor.*

Demonstrație. Considerăm două expresii: $a^{\log_a xy}$ și $a^{\log_a x + \log_a y}$. Să demonstrăm că ele sunt egale.

Folosind identitatea logaritmică fundamentală și proprietățile puterii, scriem:

$$\begin{aligned} a^{\log_a xy} &= xy; \\ a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy. \end{aligned}$$

Deci, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. De aici după teorema 2.1 obținem, că $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◀

Teorema 4.2 (logaritmul câtului). *Dacă $x > 0, y > 0, a > 0$ și $a \neq 1$, atunci se îndeplinește egalitatea*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Pe scurt se formulează: *logaritmul câtului este egal cu diferența logaritmilor.*

Teorema 4.3 (logaritmul puterii). *Dacă $x > 0, a > 0$ și $a \neq 1$, atunci pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$ se realizează egalitatea*

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Teorema 4.4 (trecerea de la o bază a logaritmului la alta). *Dacă $a > 0$ și $a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$, atunci este adevărată egalitatea*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Consecință 1. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ este adevărată egalitatea

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Consecință 2. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, atunci pentru orice $\beta \neq 0$ este adevărată egalitatea

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Problema 1. Rezolvați ecuația: 1) $3^x = 7$; 2) $4^{2x-5} = 9$.

Rezolvare: 1) Din definiția logaritmului rezultă, că $x = \log_3 7$.

2) Avem: $2x - 5 = \log_4 9$; $2x = \log_4 9 + 5$; $x = \frac{\log_4 9 + 5}{2}$.

Răspuns: 1) $\log_3 7$; 2) $\frac{\log_4 9 + 5}{2}$. ◀

Problema 2. Calculați valoarea expresiei: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0.5}$.

Rezolvare: 1) Folosind proprietățile puterii și identitatea fundamentală a logaritmului, obținem:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Avem: $9^{\log_3 4 - 0.5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0.5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0.5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

Problema 3. Calculați valoarea expresiei $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$.

Rezolvare: Folosind teoremele despre produsul logaritmului și logaritmul câtului, obținem:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \quad \blacktriangleleft$$



1. Ce se numește logaritmul numărului pozitiv b în baza a , unde $a > 0$, $a \neq 1$?
2. Ce egalitate se numește identitatea logaritmică fundamentală?
3. Formulați teorema despre logaritmul produsului.
4. Formulați teorema despre logaritmul câtului.
5. Formulați teorema despre logaritmul puterii.
6. Formulați teorema despre trecerea de la o bază a logaritmului la altă bază și consecințele din ea.



EXERCIȚII

4.1.° Este oare egalitatea corectă:

- 1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$;
 2) $\log_{25} 5 = 2$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 6) $\lg 0,0001 = -4$?

4.2.° Găsiți logaritmul în baza 2 a numărului:

- 1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Găsiți logaritmul în baza 3 a numărului:

- 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Găsiți logaritmul în baza $\frac{1}{2}$ a numărului:

- 1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Găsiți logaritmul în baza $\frac{1}{3}$ a numărului:

- 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Găsiți logaritmul zecimal al numărului:

- 1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;
 2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

4.7.° Rezolvați ecuația:

- 1) $\log_7 x = -1$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 5) $\log_x 9 = 2$;
 2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 x = 0$; 6) $\log_x 2 = 2$.

4.8.° Rezolvați ecuația:

- 1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;
 2) $\log_{\sqrt{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.9.° Rezolvați ecuația:

- 1) $6^x = 2$; 3) $0,4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;
 2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0,3^{3x+2} = 7$.

4.10.° Rezolvați ecuația:

$$1) 3^x = 2; \quad 2) 10^x = \frac{1}{6}; \quad 3) 7^{x+5} = 9; \quad 4) 0.6^{5x-2} = 20.$$

4.11.° Calculați:

$$1) 2^{\log_2 32}; \quad 2) 5^{\log_5 0.45}; \quad 3) 7^{2\log_7 2}.$$

4.12.° Calculați:

$$1) 3^{\log_3 \frac{1}{27}}; \quad 2) 5^{\frac{1}{2} \log_5 49}.$$

4.13.° Găsiți valoarea expresiei:

$$1) \log_6 3 + \log_6 2; \quad 3) \log_{49} 84 - \log_{49} 12;$$

$$2) \log_5 100 - \log_5 4; \quad 4) \frac{\log_5 64}{\log_5 4}.$$

4.14.° Calculați valoarea expresiei:

$$1) \lg 8 + \lg 12.5; \quad 2) \log_3 162 - \log_3 2; \quad 3) \frac{\log_7 125}{\log_7 5}.$$

4.15.° Calculați:

$$1) 64^{0.5 \log_2 12}; \quad 3) 6^{1 + \log_6 5}; \quad 5) 6^{\frac{\log_7 3}{6}}; \quad 7) 8^{1 - \log_2 3};$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}; \quad 4) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 8 - 2}; \quad 6) 2^{3 \log_2 5 + 4}; \quad 8) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}.$$

4.16.° Calculați:

$$1) 4^{\log_2 9}; \quad 3) 10^{2 + \lg 8}; \quad 5) 2^{4 \log_2 3 - 1}; \quad 7) 8^{1 - \frac{1}{3} \log_2 12}.$$

$$2) \left(\frac{1}{9}\right)^{-2 \log_3 12}; \quad 4) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6 - 3}; \quad 6) \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}.$$

4.17.° Calculați:

$$1) \log_2 \log_5 \sqrt[3]{5}; \quad 4) \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3};$$

$$2) \log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343; \quad 5) \log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56;$$

$$3) \log_9 \log_2 8; \quad 6) 2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16.$$

4.18.° Calculați:

$$1) \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}; \quad 3) \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6};$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}} \log_4 64; \quad 4) 3 \log_6 2 + \frac{3}{4} \log_6 81.$$

4.19.* Găsiți x , dacă:

- 1) $\log_9 x = \frac{1}{4} \log_9 16 + 2 \log_9 5$; 3) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;
 2) $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$; 4) $\log_3 x = \frac{2}{3} \log_3 216 + \frac{1}{2} \log_3 25$.

4.20.* Găsiți x , dacă:

- 1) $\log_a x = 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$; 2) $\lg x = \frac{2}{5} \lg 32 - \frac{1}{3} \lg 64 + 1$.

4.21.** Calculați valoarea expresiei:

- 1) $\frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2}$; 3) $\log_7 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{5}} 49$;
 2) $\frac{\log_9 125 + 3 \log_9 2}{\log_9 1,2 - \log_9 12}$; 4) $\log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9$.

4.22.** Găsiți valoarea expresiei:

- 1) $\frac{3 \lg 4 + \lg 0,5}{\lg 9 - \lg 18}$; 3) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;
 2) $\frac{\lg 625 - 8 \lg 2}{\frac{1}{2} \lg 256 - 2 \lg 5}$; 4) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.23.** Calculați:

- 1) $5^{\log_5 4 \cdot \log_5 3}$; 4) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2} \lg 8 - 2 \lg 2}$;
 2) $7^{2 \log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$; 5) $\lg(25^{\log_5 0,8} + 9^{\log_3 0,6})$;
 3) $9^{2 \log_3 2 + 4 \log_{81} 2}$; 6) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.24.** Calculați:

- 1) $6^{\frac{1}{2} \log_6 9 - \log_6 3}$; 3) $1000^{\frac{1}{2} \lg 25 - 3 \lg 2}$;
 2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$; 4) $\log_{13} \left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3} \right)$.

4.25.** Găsiți valoarea expresiei:

$$\lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot \lg \sin 90^\circ.$$

4.26.** Simplificați expresia $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_9$.

4.27.** Calculați valoarea expresiei $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.28.** Construiți graficul funcției:

1) $y = \log_x 1$;

3) $y = 5^{-\log_5 x}$;

5) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

2) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;

4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

6) $y = \frac{\log_1 x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

4.29.** Construiți graficul funcției:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;

3) $y = \log_x x$;

2) $y = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} (x-1)$;

4) $y = \frac{\lg(x^2 + 1)}{\lg(x^2 + 1)}$.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

4.30. Simplificați expresia $\left(\frac{a^{0,5} + 3b^{0,5}}{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b} + \frac{a^{0,5} - 3b^{0,5}}{a - b} \right) \cdot \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{2}$.

4.31. Găsiți punctele de extremum ale funcției:

1) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$.

5. Funcția logaritmică și proprietățile ei

Să alegem un număr pozitiv a , diferit de 1. Fiecărui număr pozitiv x i se poate pune în corespondență un astfel de număr y , că $y = \log_a x$. În acest fel este dată funcția $f(x) = \log_a x$ cu domeniul de definiție $D(f) = (0; +\infty)$.

Această funcție se numește **logaritmică**.

Să cercetăm proprietățile principale ale funcției logaritmice.

↪ Funcția $y = \log_a x$ are un singur zero $x = 1$.

↪ Funcția $y = \log_a x$ are două intervale de constanță ale semnului.

dacă $a > 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(0; 1)$; $y > 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$;

dacă $0 < a < 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$; $y > 0$ pe intervalul $(0; 1)$.

↪ Funcția $y = \log_a x$ este crescătoare pentru $a > 1$ și este descrescătoare pentru $0 < a < 1$.

↪ Funcția logaritmică este diferențiabilă. Mai detaliat despre derivata funcției logaritmice voi veți afla în punctul 8.

În figurile 5.1 și 5.2 este reprezentat schematic graficul funcției logaritmice pentru cazurile $a > 1$ și $0 < a < 1$ corespunzător.

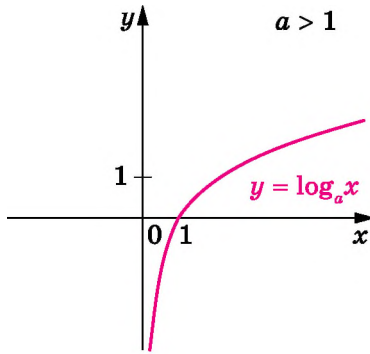


Fig. 5.1

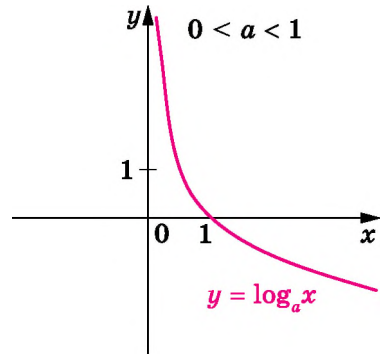


Fig. 5.2

Menționăm o proprietate importantă a graficului funcției logaritmice $y = \log_a x$. Odată cu apropierea valorilor lui x de zero, distanțele de la punctele graficului funcției $y = \log_a x$ până la axa ordonatelor devine tot mai mică și mai mică și poate deveni oricât de mici, dar niciodată nu vor fi egale cu zero.

Problema 1. Comparați numerele:

- 1) $\log_2 6$ și $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ și $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ și 0.

Rezolvare: 1) Deoarece funcția logaritmică $y = \log_2 x$ este crescătoare, atunci $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Deoarece funcția logaritmică $y = \log_{0,2} x$ este descrescătoare, atunci $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

- 3) Având în vedere că $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, avem: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Deci, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$. ◀

Problema 2. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

- 1) $f(x) = \log_3(x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Rezolvare: 1) Deoarece domeniul de definiție al funcției logaritmice este mulțimea de numere pozitive, atunci domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea de soluții a inecuației $x^2 + 3x > 0$.

Avem: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ sau $x > 0$.

Deci, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Domeniul de definiție al acestei funcții îl vom găsi, rezolvând sistemul de inecuații

$$\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$$

$$\text{Atunci } \begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases} \begin{cases} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{cases}$$

De aici $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◀



1. Care funcție se numește logaritmică?
2. Formulați proprietățile funcției logaritmice.
3. Reprezentați schematic graficul funcției logaritmice $y = \log_a x$ pentru $a > 1$; pentru $0 < a < 1$.



EXERCIȚII

5.1.° Funcția este crescătoare sau descrescătoare:

- 1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
- 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;
- 3) $y = \log_{0,1} x$;
- 4) $y = \lg x$;
- 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
- 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$?

5.2.° Pe baza căreia proprietăți a funcției logaritmice se poate afirma, că:

- 1) $\lg 7 > \lg 5$;
- 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Comparați:

- 1) $\log_{12} 5$ și $\log_{12} 6$;
- 2) $\log_5 \frac{1}{2}$ și $\log_5 \frac{1}{3}$;
- 3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ și $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
- 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ și $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$.

5.4.° Comparați:

- 1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ și $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
- 2) $\log_7 \frac{2}{3}$ și $\log_7 \frac{1}{2}$;
- 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ și $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
- 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ și $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

- 1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;
- 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;
- 3) $f(x) = \log_4 (-x)$;
- 4) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;
- 5) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;
- 6) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$.

5.6.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \log_7(6 - x)$;

3) $f(x) = \lg(x + 2) - 2 \lg(x + 5)$.

2) $f(x) = \log_{0,4}(7x - x^2)$;

5.7.° Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;

3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;

2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;

4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.8.° Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;

2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.9.° Pozitiv sau negativ este numărul:

1) $\log_{0,5} 0,6$;

2) $\log_{0,3} 3$;

3) $\log_2 0,27$;

4) $\log_\pi 3$?

5.10.° Comparați cu zero:

1) $\log_4 5$;

2) $\log_2 \frac{1}{3}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;

4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.11.° Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției pe intervalul dat:

1) $y = \log_2 x, \left[\frac{1}{4}; 8 \right]$;

3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x, \left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16} \right]$.

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x, \left[\frac{1}{16}; 8 \right]$;

5.12.° Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției pe intervalul dat:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \left[\frac{1}{9}; 3 \right]$;

2) $y = \lg x, [1; 1000]$.

5.13.° Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \log_2 x$ este egală cu 3, iar cea mai mică este egală cu -1 ?

5.14.° Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ este egală cu -1 , iar cea mai mică este egală cu -2 ?

5.15.° Comparați:

1) $\log_9 2$ și 3;

2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ și -2 ;

3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ și 6.

5.16.° Comparați:

1) $\log_{0,1} 12$ și 1;

2) $\log_4 3$ și $-\frac{1}{2}$.

5.17.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \lg x^2$;

2) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$;

4) $f(x) = \frac{4}{\log_3(10-x)}$.

5.18.* Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \log_{1,2} |x|$; 2) $y = \frac{5}{\lg(x+3)}$; 3) $y = \lg \sin x$.

5.19.* Rezolvați prin metoda grafică ecuația:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0,5$.

5.20.* Rezolvați prin metoda grafică ecuația:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.21.* Stabiliți prin metoda grafică numărul de rădăcini ale ecuației:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.22.* Câte rădăcini are ecuația:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.23.** Între care două numere întregi consecutive se conține pe dreapta de coordonate numărul:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.24.** Între care două numere întregi consecutive se conține pe dreapta de coordonate numărul: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?**5.25.**** Comparați:

1) $\log_4 5$ și $\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3$ și $\log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8$ și $\log_{0,8} 0,7$.

5.26.** Comparați:

1) $\log_{1,7} 1,8$ și $\log_{1,8} 1,7$; 2) $\log_{0,2} 0,3$ și $\log_{0,3} 0,2$.

5.27.** Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \lg(1 - \sin x)$; 5) $y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)$;

2) $y = \sqrt{\lg \cos x}$; 6) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$;

3) $y = \frac{x}{\lg(4-x^2)}$; 7) $y = \lg(6x-x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$;

4) $y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6-x}$; 8) $y = \log_{x+3}(x^2+x)$.

5.28.* Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \frac{1}{\lg(x^2 + 1)};$$

$$4) y = \lg(x + 8) - \frac{5}{\lg(-x - 1)};$$

$$2) y = \lg(1 + \sin x);$$

$$5) y = \lg(10x - x^2) - \frac{1}{\lg(8 - x)};$$

$$3) y = \sqrt{\lg \sin x};$$

$$6) y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2).$$

5.29.* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x};$$

$$2) y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3.$$



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

5.30. Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x^2 + 15} = x + 1;$$

$$4) \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0;$$

$$2) \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2;$$

$$5) 3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0;$$

$$3) \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - 2 = 0;$$

$$6) \cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0.$$

6. Ecuații logaritmice

Ecuația de formă $\log_a x = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, se numește **cea mai simplă ecuație logaritmică**. Această ecuație se poate rezolva, folosind definiția logaritmului.

Problema 1. Rezolvați ecuația $\log_3(3x - 1) = 2$.

Rezolvare: După definiția logaritmului se poate scrie: $3x - 1 = 3^2$.

De unde $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Răspuns: $\frac{10}{3}$. ◀

Rezolvarea ecuației din exemplul 1 se poate prezenta astfel:

$$\log_3(3x - 1) = 2 \log_3 3,$$

$$\log_3(3x - 1) = \log_3 3^2,$$

$$3x - 1 = 3^2, \quad x = \frac{10}{3}.$$

În timpul rezolvării multor ecuații logaritmice se aplică următoarea teoremă.

Teorema 6.1. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci ecuația de forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

este echivalentă cu oricare din sistemele

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Problema 2. Rezolvați ecuația $\lg(2x - 3) = \lg(x^2 - 4x + 2)$.

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3 = x^2 - 4x + 2, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

$$\text{Avem: } \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 5, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{De aici } x = 5.$$

Răspuns: 5. ◀

Problema 3. Rezolvați ecuația $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Rezolvare: Ecuația dată $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{De aici } \begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases} \quad \text{Obținem:}$$

$x = 5$.

Răspuns: 5. ◀

Problema 4. Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Rezolvare: Deoarece $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, atunci ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Fie, că $\log_2 x = t$. Atunci obținem: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

$$\text{De aici } \begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases} \text{ Deci, } \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{cases}$$

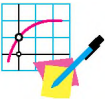
Atunci ecuația inițială este echivalentă totalității $\begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{cases}$

$$\text{De aici } \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{cases}$$

Răspuns: $\sqrt{2}$; 4. ◀



1. Care ecuație se numește cea mai simplă ecuație logaritmică?
2. Care sistem este echivalent cu ecuația de formă $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, dacă $a > 0, a \neq 1$?



EXERCIȚII

6.1.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_2(x - 1) = 1$;

4) $\log_{\frac{1}{6}}(4x - 8) = -2$;

2) $\log_3(2x + 1) = 3$;

5) $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$;

3) $\lg(3 - 2x) = 2$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(x + 7) = -3$;

3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5x - 3) = 2$;

2) $\log_4(2x - 5) = 0,5$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_{\pi}(x + 1) = \log_{\pi}(4x - 5)$;

2) $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$.

6.4.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_9(4x - 6) = \log_9(x - 2)$;

2) $\log_{\frac{1}{4}}(x + 7) = \log_{\frac{1}{4}}(2x + 5)$.

6.5.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;

3) $2 \log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = 6,5$;

2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

4) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;

5) $\log_7 \log_4 (x-2) = 0$;

6) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

6.6.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$.

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

6.7.* Rezolvați ecuația:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;

2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0.5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0.5} (x - 2)$;

4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$.

6.8.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;

2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$.

6.9.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_4 (x-3) + \log_4 x = 1$;

2) $\log_{0.5} (4-x) + \log_{0.5} (x-1) = -1$;

3) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x-4) = 2$;

4) $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(1.5x-3)$.

6.10.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_7 x + \log_7 (x+6) = 1$;

2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0.5} 3,5$;

4) $\log_{0.6} (x+2) + \log_{0.6} (6-x) = \log_{0.6} (x+8)$.

6.11.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 = 0$;

3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

4) $\frac{2}{\lg(x+2)-3} + \frac{4}{\lg(x+2)+1} = 1$.

6.12.* Rezolvați ecuația:

1) $3 \log_8^2 (-x) - 2 \log_8 (-x) - 1 = 0$;

3) $3 \log_3 x + 3 \log_x 3 = 10$;

2) $2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;

4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$.

6.13.** Rezolvați ecuația:

1) $2 \log_{0.4} x = \log_{0.4} (2x^2 - x)$;

3) $2 \log_8 (1-x) = \log_8 (2,5x+1)$;

2) $2 \log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$;

4) $2 \log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$.

6.14.** Rezolvați ecuația:

$$1) \log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2 \log_{0,7}(x + 2);$$

$$2) 2 \log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1.$$

6.15.** Rezolvați ecuația:

$$1) \log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2);$$

$$2) 2 \log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17).$$

6.16.** Rezolvați ecuația:

$$1) \log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1);$$

$$2) 2 \lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5).$$

6.17.* Rezolvați ecuația:

$$1) \log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2;$$

$$3) \log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2;$$

$$2) \log_{x+1}(x + 3) = 2;$$

$$4) \log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2.$$

6.18.* Rezolvați ecuația:

$$1) \log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1;$$

$$2) \log_x(x + 6) = 2.$$



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

6.19. Găsiți derivata funcției:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 9x}{x + 4};$$

$$2) f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}.$$

6.20. Găsiți intervalele de creștere și punctele de extremum ale funcției:

$$1) f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x;$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9};$$

$$3) f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 5}.$$

6.21. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$ în punctul cu abscisa $x_0 = 3$.

7. Inecuații logaritmice

Rezolvarea multor inegalități logaritmice se bazează pe o astfel de teoremă.

Teorema 7.1. Dacă $a > 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Problema 1. Rezolvați inecuația $\log_2 x > 3$.

Rezolvare: Deoarece $3 = \log_2 2^3$, se poate scrie:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Această inecuație este echivalentă cu așa una: $x > 2^3$. De aici $x > 8$.

Răspuns: $(8; +\infty)$. ◀

Problema 2. Rezolvați inecuația $\log_{0,3} x \geq 1$.

Rezolvare: Avem: $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} 0,3$.

Această inecuație este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} x \leq 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$

Răspuns: $(0; 0,3]$. ◀

Problema 3. Rezolvați inecuația $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.

Rezolvare: Inecuația dată este echivalentă cu sistemul

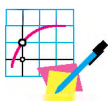
$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

De aici $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases} x > 2$.

Răspuns: $(2; +\infty)$. ◀



Căru sistem de inecuații este echivalentă inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, dacă $a > 1$? dacă $0 < a < 1$?



EXERCIȚII

7.1.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;

2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;

3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;

4) $\log_7 x < \log_7 15$;

5) $\log_{\frac{3}{7}}(x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;

6) $\log_8(2x - 3) > \log_8 7$;

7) $\log_{\frac{2}{9}}(x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;

8) $\lg(1 + 3x) < \lg 16$.

7.2.° Rezolvați inecuația:

1) $\lg x < \lg 4$;

3) $\log_{12}(x - 8) > \log_{12} 3$;

2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;

4) $\log_{16}(4x - 6) < \log_{16} 10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;

6) $\log_{0,9}(2x+1) > \log_{0,9} 5$.

7.3.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_7 x > 2$;

5) $\log_2(5x+1) > 4$;

2) $\log_5 x \leq -1$;

6) $\log_{0,6}(x-2) < 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$;

7) $\log_3(2x-1) \leq 3$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;

8) $\log_{0,5}(2x+1) \geq -2$.

7.4.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;

3) $\lg x < 5$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) \geq -2$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} x > 2$;

4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;

6) $\log_9(5x+6) \leq 2$.

7.5.* Câte rădăcini întregi are inecuația:

1) $\log_{0,25}(3x-5) > -3$;

2) $\log_3(7-x) < 3$?

7.6.* Găsiți rădăcinile întregi ale inecuației:

1) $\log_{0,5}(1-x) > -1$;

2) $\log_{36}(x+1) \leq 0,5$.

7.7.* Găsiți mulțimea soluțiilor ale inecuației:

1) $\lg(2x+3) > \lg(x-1)$;

2) $\log_5 2x < \log_5(x+1)$;

3) $\log_{0,2}(2x-1) > \log_{0,2}(3x-4)$;

4) $\log_{0,4}(x^2-3) < \log_{0,4}(x+3)$;

5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3) \leq \log_{0,7}(9-x)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31) \leq \log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

7.8.* Rezolvați inecuația:

1) $\log_2(2x-3) < \log_2(x+1)$;

2) $\log_{0,6}(3-2x) > \log_{0,6}(5x-2)$;

3) $\lg(x^2-2) \geq \lg(4x+3)$;

4) $\log_{0,1}(10-2x) \geq \log_{0,1}(x^2-x-2)$.

7.9.** Găsiți mulțimea rădăcinilor ale inecuației:

1) $\log_8(x^2-4x+3) \leq 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x) > -1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25) > 0$;

4) $\log_2(x^2-3x) \leq 2$;

5) $\log_{0,3}(x^2+x-12) \geq \log_{0,3}(6x-6)$;

6) $\lg(x^2-x) \leq \lg(3x-3)$.

7.10.** Rezolvați inecuația:

- 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7) > 0$;
- 2) $\log_9(x^2 - 6x + 8) \leq 0,5$;
- 3) $\log_{0,5}(x^2 + 3x) \geq -2$;
- 4) $\log_{0,3}(x^2 - 2x + 1) \geq 0$;
- 5) $\log_{\frac{2}{3}}(6 - 2x) < \log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x - 3)$;
- 6) $\log_{0,1}(x^2 - 3x - 4) \geq \log_{0,1}(x + 1)$.

7.11.** Rezolvați inecuația:

- 1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$;
- 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{3}}x < -1$;
- 3) $\log_2 x + \log_2(x + 4) < 5$;
- 4) $\log_{0,1}(x - 5) + \log_{0,1}(x - 2) \geq -1$;
- 5) $\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leq 1 - \log_6 3$;
- 6) $\log_3(1 - x) + \log_3(-5x - 2) \geq 2 \log_3 2 + 1$.

7.12.** Rezolvați inecuația:

- 1) $\log_2(-x) + \log_2(1 - x) \leq 1$;
- 2) $\log_{0,2}(x - 1) + \log_{0,2}(x + 3) \geq -1$;
- 3) $\log_3(x - 2) + \log_3(x - 10) \geq 2$;
- 4) $\log_7 x + \log_7(3x - 8) \geq 1 + 2 \log_7 2$.

7.13.** Rezolvați inecuația:

- 1) $\log_{0,2}^2 x \leq 1$;
- 2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geq 4$;
- 3) $\lg^2 x + 3 \lg x - 4 < 0$;
- 4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2 \log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leq 0$;
- 5) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 \geq 0$;
- 6) $2 \log_{\frac{1}{9}}^2 x - 5 \log_{\frac{1}{9}} x + 2 \geq 0$.

7.14.** Rezolvați inecuația:

- 1) $\log_{0,5}^2 x \geq 9$;
- 2) $\lg^2 x - 2 \lg x - 3 \geq 0$;
- 3) $2 \log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
- 4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leq 0$.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

7.15. Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ pe intervalul $[-2; 1]$.

7.16. În ce punct al graficului funcției $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ tangenta formează cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul $\alpha = \frac{3\pi}{4}$?

7.17. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $y = x^2 - x + 2$, care este paralelă cu dreapta $x + y + 2 = 0$.

8. Derivatele funcțiilor exponențială și logaritmică

Există oare o funcție a cărei derivată este egală cu însăși funcția? De răspuns la această întrebare nu-i complicat. De exemplu, funcția care este constantă nulă, posedă această proprietate.

Se poate oare specifica funcția f , definită pe \mathbb{R} , diferită de constanta zero, astfel, că $f'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$? Răspunsul la această întrebare nu este evident.

S-a dovedit, că printre funcțiile exponențiale $f(x) = a^x$ există o singură astfel de funcție, că $f'(x) = f(x)$ pentru toți $x \in \mathbb{R}$. Numărul, care este baza puterii pentru această funcție, se notează cu litera e , iar funcția însăși are forma $f(x) = e^x$. Deci,

$$(e^x)' = e^x$$

S-a stabilit că numărul e este irațional. El poate fi scris sub forma unei fracții zecimale infinite neperiodice:

$$e = 2,71828182845\dots$$

Funcția $f(x) = e^x$ se numește **exponență**.

Logaritmul în baza e se numește **logaritm natural** și se notează $\ln a$, adică $\log_e a = \ln a$.

Se poate de demonstrat, că derivata funcției exponențiale $f(x) = a^x$ este egală cu $a^x \ln a$.

Deci, pentru $a > 0$, $a \neq 1$ se poate scrie:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

În p. 5 am observat, că funcția logaritmică $f(x) = \log_a x$ este diferențiabilă.

Putem dovedi, că

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

În special,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Problema 1. Găsiți derivata funcției:

$$1) y = e^x(x^2 - 4x); \quad 2) y = x^3 \cdot 3^x; \quad 3) y = \frac{x^4}{\ln x}.$$

Rezolvare: 1) Aplicând teorema derivatei produsului a două funcții, obținem:

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x = \\ &= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4). \end{aligned}$$

2) Avem:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Avem: } y' &= \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4 \ln x - 1)}{\ln^2 x}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Problema 2. Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = e^x + x$ în punctul cu abscisa $x_0 = 0$.

Rezolvare: Avem: $f(x_0) = 1$. Găsim derivata funcției f în punctul $x_0 = 0$: $f'(x) = e^x + 1$. De aici $f'(x_0) = 2$. Atunci ecuația căutată are aspectul $y = 2x + 1$.

Răspuns: $y = 2x + 1$. \blacktriangleleft

Problema 3. Găsiți intervalele de creștere și descreștere și punctele de extremum ale funcției $f(x) = x \ln x$.

Rezolvare: Avem:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Cercetăm semnul $f'(x)$ pe $D(f) = (0; +\infty)$.

Avem: $f'(x) > 0$ pentru $\ln x > -1$. De unde $x > \frac{1}{e}$.

Analogic găsim, că $f'(x) < 0$ pentru $0 < x < \frac{1}{e}$.

Obținem, că funcția f crește pe intervalul $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$,

descrește pe intervalul $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{e}$ (Fig. 8.1). \blacktriangleleft

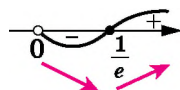
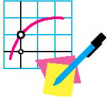


Fig. 8.1

1. Care funcție se numește exponențială?
2. Ce se numește logaritm natural?
3. Cu ce este egală derivata funcției $y = e^x$? $y = a^x$?
4. Cu ce este egală derivata funcției $y = \ln x$? $y = \log_a x$?



EXERCIȚII

8.1.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = 4e^x$;

3) $y = e^x \sin x$;

5) $y = 5^x$;

2) $y = x^2 e^x$;

4) $y = \frac{e^x}{x-2}$;

6) $y = x \cdot 3^x$.

8.2.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = x^6 e^x$;

2) $y = e^x \cos x$;

3) $y = \frac{x+1}{e^x}$;

4) $y = 6^x$.

8.3.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = \log_9 x$;

2) $y = \frac{\ln x}{x^3}$;

3) $y = x^5 \ln x$.

8.4.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = \lg x$;

2) $y = \frac{x^5}{\ln x}$.

8.5.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = e^x + e^{-x}$;

2) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$.

8.6.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = 10^{-x}$;

2) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$.

8.7.° Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0 :

1) $f(x) = e^x - 3x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$, $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, $x_0 = 4$;

8.8.° Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0 :

1) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

2) $f(x) = \frac{1}{6} \ln x$, $x_0 = \frac{1}{6}$;

8.9.° Alcătuiți ecuația tangentei pentru graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0 :

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$.

8.10.° Alcătuiți ecuația tangentei pentru graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0 :

1) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$.

8.11.* Găsiți ecuația tangentei orizontale dusă la graficul funcției:

$$1) f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}; \quad 2) f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9).$$

8.12.* Găsiți ecuația tangentei orizontale dusă la graficul funcției $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.13.** Alcătuiți ecuația tangentei dusă la graficul funcției:

$$1) f(x) = e^x, \text{ dacă această tangentă este paralelă la dreapta } y = ex - 6;$$

$$2) f(x) = 6x - \ln x, \text{ dacă această tangentă este paralelă la dreapta } y = x.$$

8.14.** Găsiți intervalele de creștere și descreștere și punctele extremum ale funcției:

$$1) f(x) = e^x - x; \quad 4) f(x) = \frac{4x}{e^x}; \quad 7) f(x) = \ln x - \frac{1}{x};$$

$$2) f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}; \quad 5) f(x) = x^3 \ln x; \quad 8) f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

$$3) f(x) = \frac{e^x}{x-2}; \quad 6) f(x) = \ln x - x;$$

8.15.** Găsiți intervalele de creștere și descreștere și punctele extremum ale funcției:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{3^x}; \quad 3) f(x) = 0,5x^2 - \ln x; \quad 5) f(x) = 2 \ln x + \frac{2}{x};$$

$$2) f(x) = \frac{x+3}{e^x}; \quad 4) f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad 6) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

8.16.** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $f(x) = e^x + x$ pe intervalul $[-1; 1]$.

8.17.** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $f(x) = (x-1)e^{-x}$ pe intervalul $[1; 3]$.

8.18.** Cercetați funcția și construiți graficul ei:

$$1) f(x) = xe^x; \quad 2) f(x) = x^2 - 2 \ln x.$$

8.19.** Cercetați funcția $f(x) = \frac{x}{e^x}$ și construiți graficul ei.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

8.20. Rezolvați ecuația:

$$1) \cos 2x = \cos x - 1; \quad 2) \cos 2x = \sin x.$$

8.21. Găsiți coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:

$$1) y = 1 + \sqrt{x+5} \text{ și } y = x; \quad 2) y = 2 - 2\sqrt{x+5} \text{ și } y = -x.$$



IUBIREA MEA ESTE UCRAINA ȘI MATEMATICA

Această afirmație patriotică a matematicianului ucrainean remarcabil, a academicianului Mihail Pylypovych Kravchiuk, a fost gravată pe pedestalul de granit al monumentului savantului (vezi forzațul 1).

Mihail Kravchiuk s-a născut în satul Ceovnâți în ținutul Volân. După ce a absolvit Gimnaziul din Luțk cu medalie de aur, apoi secția de matematică al Universității din Kiev, a rămas să lucreze în Kiev.

Productivitatea științifică și capacitatea de lucru înaltă, originalitatea și flexibilitatea gândirii lui M.P. Kravchiuk i-au permis să obțină rezultate științifice importante în algebră și teoria numerelor, teoria funcțiilor și a analizei matematice, ecuațiilor diferențiale și integrale, teoriei probabilităților și statisticii etc. Se știe că elaborările lui științifice au fost folosite într-o mare măsură de cercetătorii americani în timpul creării primului calculator.

M. P. Kravchiuk a participat activ la crearea terminologiei științifice ucrainene, unul dintre primii care a scris lucrări științifice în limba ucraineană, măcar că liber știa limbile rusă, franceză, germană, italiană, poloneză și alte limbi.

M.P. Kravchiuk a atras o atenție deosebită muncii științifice cu tinerii, în special la inițiativa lui în 1935, a avut loc prima Olimpiada de Matematică din Kiev pentru școlari. Încearcă-ți puterile în rezolvarea problemelor acestei olimpiade.

Însărcinările primei olimpiade matematice din Kiev (1935)

1. Calculați valoarea expresiei $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ pentru $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0,19$, $c = 0,18$, $d = 0,04$.
2. Rezolvați ecuația $4^{x^3 - \sqrt{x^2 - 9} - 20,75} = \sqrt{2}$.
3. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$
4. Numerele pozitive u_1, u_2, \dots, u_n formează o progresie aritmetică. Demonstrați, că

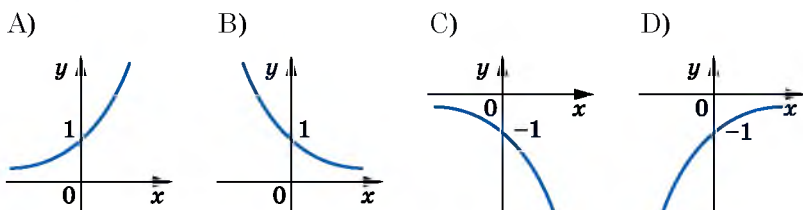
$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

5. Fie a și b – catetele triunghiului dreptunghiular, c – ipotenuza. Demonstrați, că

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Care este domeniul de definiție al funcției $y = \frac{7}{7^x - 1}$?
- A) $(-\infty; +\infty)$; C) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;
 B) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; D) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Pe una din figuri este reprezentat graficul funcției $y = 3^{-x}$. Indicați această imagine.



3. Cu ce este egală rădăcina ecuației $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x = \frac{4}{9}$?
- A) 2; B) -2; C) 1; D) -1.
4. Găsiți mulțimea soluțiilor inecuației $0,6^{x^2} > 0,6$.
- A) $(-\infty; 1)$; C) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
 B) $(1; +\infty)$; D) $(-1; 1)$.
5. Rezolvați ecuația $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$.
- A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.
6. Calculați valoarea expresiei $\log_{0,2} 25 - \log_3 \frac{1}{27}$.
- A) 1; B) -1; C) 5; D) -5.
7. Prezentați numărul 3 sub forma puterii numărului 10.
- A) $3 = 10^{\log_3 10}$; C) $3 = 10^{\lg 3}$;
 B) $3 = 10^{\log_3 3}$; D) imposibil de prezentat.
8. Cu ce este egală valoarea expresiei $\log_6 108 - \log_6 3$?
- A) -1; B) 2; C) -3; D) 4.
9. Rezolvați inecuația $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$.
- A) $(-\infty; 5)$; C) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$;
 B) $(5; +\infty)$; D) $(0; 5)$.

10. Prin care din punctele date trece graficul funcției $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

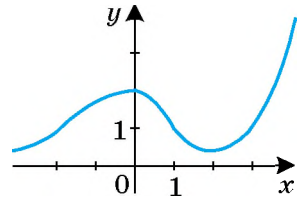
- A) (2; 1); B) (2; -1); C) $(2; \frac{1}{2})$; D) (2; 0).

11. Pentru ce valori ale lui a și b se îndeplinește egalitatea $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$?

- A) $a > 0, b < 0$; C) $a < 0, b < 0$;
B) $a < 0, b > 0$; D) așa valori nu există.

12. În figura dată este desenat graficul funcției $y = f(x)$, definită pe mulțimea numerelor reale. Câte rădăcini are ecuația $\ln f(x) = 0$?

- A) nici o rădăcină;
B) două rădăcini;
C) trei rădăcini;
D) este imposibil de determinat.



13. Indicați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $\log_{0,2}(3 - 2x) < -1$.

- A) -2; B) -1; C) 1; D) așa soluție nu există.

14. Care este mulțimea soluțiilor inecuației $\log_x \sqrt{x} < 1$?

- A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; D) \emptyset .

15. Rezolvați ecuația $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

- A) 0; 5; B) 0; C) 5; D) 1; 4.

16. Comparați valorile expresiilor $\log_4 5, \log_6 4, \log_{0,2} 3$.

- A) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; C) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
B) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; D) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Găsiți derivata funcției $y = x^3 e^x$.

- A) $y' = 3x^2 e^x$; C) $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$;
B) $y' = 3x^2 e^x - x^3 e^x$; D) $y' = x^3 e^x \ln 3$.

18. Găsiți intervalele de descreștere ale funcției $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

- A) $(-\infty; 0), (1; \sqrt{e}]$; C) $(0; \sqrt{e}]$;
B) $(0; 1), (1; \sqrt{e}]$; D) $(0; 1)$.



PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Proprietățile funcției $y = a^x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$

Domeniul de definiție	\mathbb{R}
Domeniul de valori	$(0; +\infty)$
Zerourile funcției	–
Intervalele de constantă ale semnului	$y > 0$ pe \mathbb{R}
Cresterea / descreșterea	Dacă $a > 1$, atunci funcția este crescătoare; dacă $0 < a < 1$, atunci funcția este descrescătoare.
Diferențiere	Diferențiabilă

Ecuatii exponențiale

Pentru $a > 0$ și $a \neq 1$ egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ se îndeplinește atunci și numai atunci, când $x_1 = x_2$.

Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci ecuația $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$.

Inecuații exponențiale

Dacă $a > 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) > g(x)$; dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.

Logaritmul și proprietățile lui

Logaritmul numărului pozitiv b în baza a , unde $a > 0$ și $a \neq 1$, se numește exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul a , pentru a obține numărul b .

Identitatea logaritmică fundamentală:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Dacă $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci sunt adevărate egalitățile:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Dacă $x > 0$, $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$ se realizează egalitatea $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, atunci este adevărată egalitatea

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, atunci se îndeplinește egalitatea

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, atunci pentru orice $\beta \neq 0$ se realizează egalitatea $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$.

Proprietățile funcției $y = \log_a x$

Domeniul de definiții	$(0; +\infty)$
Domeniul valorilor (codomeniul)	\mathbb{R}
Zerourile funcției	$x = 1$
Intervalele de semn constant	Dacă $a > 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(0; 1)$, $y > 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$, $y > 0$ pe intervalul $(0; 1)$
Creșterea / descreșterea	Dacă $a > 1$, atunci funcția este crescătoare; dacă $0 < a < 1$, atunci funcția este descrescătoare.
Diferențiere	Diferențiabilă

Ecuțiile logaritmice

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci ecuațiile de forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ sunt echivalente cu oricare din sistemele $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Inecuații logaritmice

Dacă $a > 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Derivatele funcțiilor logaritmică și exponențială

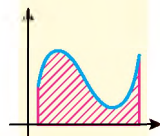
$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

§2 INTEGRALA ȘI APLICAREA EI



În acest paragraf veți face cunoștință cu operația, inversă diferențierii și veți învăța proprietățile acestei operații.

Veți extinde clasa figurilor ariile căror le veți putea calcula. Veți face cunoștință cu noțiunea de „integrală determinată” și veți clarifica sensul ei geometric.

9. Primitiva

Voi știți, că găsirea derivatei a unei funcții date se numește diferențiere. O operație inversă, adică găsirea unei funcții după derivata ei, se numește **integrare**.

Definiție. Funcția F se numește funcția **primitivă** (sau pe scurt **primitiva**) a funcției f pe intervalul I , dacă pentru toți $x \in I$ se efectuează egalitatea

$$F'(x) = f(x).$$

De exemplu, funcția $F(x) = x^2$ este primitiva funcției $f(x) = 2x$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$, deoarece pe \mathbb{R} se efectuează egalitatea $(x^2)' = 2x$.

Deseori în problemele, legate de funcția primitivă, intervalul I este omis. În aceste cazuri, se consideră, că $I = (-\infty; +\infty)$. Astfel, funcția $F(x) = \cos x$ este primitiva funcției $f(x) = -\sin x$, deoarece se efectuează egalitatea $(\cos x)' = -\sin x$.

Să dăm mai un exemplu. Funcția $F(x) = \sqrt{x}$ este primitiva funcției $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$, deoarece pe acest interval se efectuează egalitatea $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Să cercetăm funcțiile $y = x^2 + 1$ și $y = x^2 - 2$. Fiecare din ele are una și aceeași derivată $y = 2x$. Astfel, ambele funcții $y = x^2 + 1$ și $y = x^2 - 2$ sunt primitivele funcției $y = 2x$. Este clar, că fiecare dintre funcțiile de forma $y = x^2 + C$, unde C – un număr arbitrar, este primitiva funcției $y = 2x$. Deci, problema aflării primitivei funcției are o mulțime de soluții.

Scopul integrării constă în aceea, ca pentru funcția dată să se găsească toate primitivele ei pe intervalul dat.

Corelațiile dintre toate primitivele funcției date, le arată următoarea teoremă.

Teorema 9.1 (proprietatea fundamentală a primitivelor). Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I și C – număr arbitrar, atunci funcția

$$y = F(x) + C$$

de asemenea este primitiva funcției f pe intervalul I .

Orice primitivă a funcției f pe intervalul I se poate reprezenta în forma $y = F(x) + C$, unde C – un număr oarecare.

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I , atunci însemnarea $F(x) + C$, unde C – număr arbitrar, se numește **aspectul general al primitivei** funcției f pe intervalul I .

Din proprietatea fundamentală a primitivei rezultă, că graficele oricăror două primitive ale funcției date, pot fi obținute unul din altul prin deplasarea paralelă de-a lungul axei ordonatei (fig. 9.1).

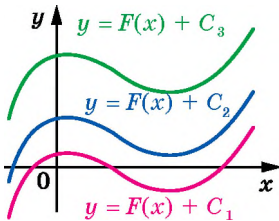


Fig. 9.1

Totalitatea tuturor primitivelor funcției $y = f(x)$ pe intervalul I se numește **integrală nedefinită** și se notează

$$\int f(x) dx$$

(se citește: «integrala fe de ix de ix»).

În timpul rezolvării problemelor cu primitivă este convenabil de folosit tabelul prezentat în forzațul 3.

Problema 1. Găsiți aspectul general al primitivelor funcției $f(x) = x^5$.

Rezolvare: Folosind tabelul primitivelor, obținem, că una din primitivele funcției $f(x) = x^5$ este funcția $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Atunci după teorema 9.1 scrierea $\frac{x^6}{6} + C$, unde C – număr arbitrar, este aspectul general al primitivelor. ◀

Din rezolvarea problemei 1 rezultă, că

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Problema 2. Pentru funcția $f(x) = \cos x$ găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

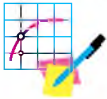
Rezolvare: Folosind tabelul primitivelor, obținem, că primitiva căutată are forma $F(x) = \sin x + C$, unde C – număr arbitrar. Să găsim acest număr.

Din condiție rezultă, că $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$. Atunci $\sin\frac{\pi}{6} + C = 3$. Având în vedere, că $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, găsim: $C = 2,5$.

Deci, primitiva căutată are forma $F(x) = \sin x + 2,5$. ◀



1. Care funcție se numește primitiva funcției f pe intervalul I ?
2. Formulați proprietatea fundamentală a primitivei.
3. Care scriere se numește aspectul general al primitivei?
4. Ce se numește integrală nedefinită? Cum se notează ea?



EXERCIȚII

9.1.° Determinați, este oare funcția F primitiva funcției f :

- 1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
- 2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$;
- 3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
- 4) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2.° Demonstrați, că funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I :

- 1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
- 2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
- 3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$.

9.3.° Este oare funcția $F(x) = \frac{1}{x^2}$ primitiva funcției $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ pe intervalul:

- 1) $(0; +\infty)$;
- 2) $(-2; 2)$;
- 3) $(-\infty; 0]$;
- 4) $(-6; 0)$?

9.4.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcțiilor:

- 1) $f(x) = 5$;
- 2) $f(x) = x$;
- 3) $f(x) = x^6$;
- 4) $f(x) = 2^x$;
- 5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
- 6) $f(x) = \sqrt{x}$ pe intervalul $[1; +\infty)$;
- 7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ pe intervalul $(-\infty; -3)$;
- 8) $f(x) = x^{-5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

9.5.° Găsiți aspectul general al primitivei funcției:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $f(x) = 0$; | 4) $f(x) = \frac{1}{x^{20}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$; |
| 2) $f(x) = x^8$; | 5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ pe intervalul $(4; +\infty)$; |
| 3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$; | 6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ pe intervalul $[0,5; +\infty)$. |

9.6.* Pentru funcția f găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul dat:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$; | 3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$. |
| 2) $f(x) = \sin x$, $B(\pi; -1)$; | |

9.7.* Pentru funcția f găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul indicat:

- 1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;
- 2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;
- 3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

9.8.* Pentru funcția f găsiți pe intervalul I primitiva F , care primește această valoare în punctul dat:

- 1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;
- 2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;
- 3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;
- 4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

9.9.* Pentru funcția f găsiți pe intervalul I primitiva F , care primește valoarea dată în punctul dat:

- 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;
- 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;
- 3) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$.

9.10.** Indicați în figura 9.2 graficul, care poate fi graficul primitivei funcției $f(x) = \cos 3x$.

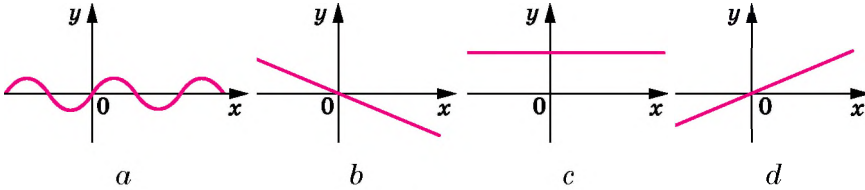


Fig. 9.2

9.11.** Indicați graficul pe figura 9.3, care poate fi graficul primitivei funcției $f(x) = \ln 2$.

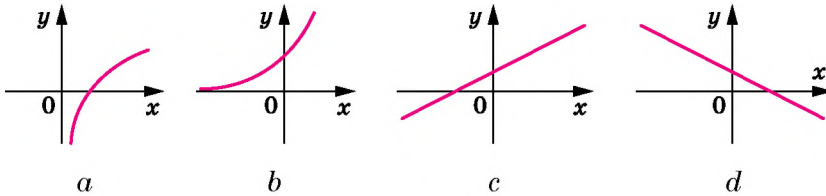


Fig. 9.3

9.12.** Pentru funcția $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ găsiți oricare două primitive, distanța între punctele corespunzătoare ale graficelor cărora (adică a punctelor cu abscisele egale) este egală cu 2.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

9.13. Rezolvați inecuația:

- 1) $\log_2(1,5x - 3) \leq 1 + 2 \log_2 0,3$;
- 2) $\log_{0,4}(3,5 - 5x) \geq 2 \log_{0,4} 0,2 - 1$.

9.14. Simplificați expresia:

- 1) $\frac{2 \sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg} \alpha \sin(\pi + \alpha)}$;
- 2) $\frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \sin(\pi + \alpha)} + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

10. Regulele de aflare ale primitivei

În timpul găsirii derivatei funcției voi ați folosit regulile de diferențiere. În acest punct noi vom examina regulile găsirii primitivelor.

Teorema 10.1. *Dacă funcțiile F și G sunt corespunzător primitivele funcțiilor f și g pe intervalul I , atunci pe acest interval funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$.*

Demonstrație. Din condiție rezultă, că pentru orice $x \in I$ se efectuează egalitățile $F'(x) = f(x)$ și $G'(x) = g(x)$. Atunci pentru toți x din intervalul I avem:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Deci, funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$ pe intervalul I . ◀

Din teorema 10.1 rezultă, că

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C,$$

Unde C – număr arbitrar.

Analogic se poate de demonstrat, că

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx = F(x) - G(x) + C.$$

Teorema 10.2. *Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I și k – un număr arbitrar, atunci pe acest interval funcția $y = kF(x)$ este primitiva funcției $y = kf(x)$.*

Acum se poate scrie:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx = kF(x) + C,$$

unde C – număr arbitrar.

Problema 1. Găsiți aspectul general al primitivelor funcției $f(x) = x^2 + \cos x$.

Rezolvare: Primitiva funcției $y = x^2$ este funcția $y = \frac{x^3}{3}$. Primitiva funcției $y = \cos x$ este funcția $y = \sin x$.

Folosindu-ne de teorema 10.1 obținem, că funcția $y = \frac{x^3}{3} + \sin x$ este primitiva funcției f , date în condiție. Atunci scrierea $\frac{x^3}{3} + \sin x + C$ este aspectul general al funcției f . ◀

Problema 2. Pentru funcția $f(x) = 5 \sin x$ găsiți primitiva F , care satisface condiția $F(0) = 0$.

Rezolvare: Primitiva funcției $y = \sin x$ este funcția $y = -\cos x$. Folosind teorema 10.2, obținem, că funcția $y = -5 \cos x$ este primitiva funcției $y = 5 \sin x$, date în condiție. Atunci, există așa un număr C , că $F(x) = -5 \cos x + C$. Găsim numărul C din condiția $F(0) = 0$. Avem: $-5 \cos 0 + C = 0$. De unde $C = 5$.

Răspuns: $F(x) = -5 \cos x + 5$. ◀

Problema 3. Viteza mișcării unui punct material pe axa de coordonate variază în conformitate cu legea $v(t) = 3t^2 + 4t$. Găsiți legea mișcării $y = s(t)$, dacă $s(0) = 3$ m (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde).

Rezolvare: Funcția $y = s(t)$ este primitiva funcției $y = v(t)$ pe intervalul $[0; +\infty)$. Atunci se poate scrie:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + C,$$

unde C – număr arbitrar. Găsim numărul C din condiția $s(0) = 3$. Avem:

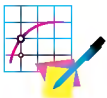
$$t^3 + 2t^2 + C = 3, \text{ de aici } C = 3.$$

Deci, legea mișcării căutată se dă prin formula

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 3. \blacktriangleleft$$



1. Cum de găsit primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$?
2. Cum de găsit primitiva funcției $y = kf(x)$, unde k – un număr oarecare?



EXERCIȚII

10.1.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcției:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $f(x) = 4 - 2x$; | 5) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ pe intervalul $(-\infty; 0)$; |
| 2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$; | 6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ pe intervalul $(0; +\infty)$; |
| 3) $f(x) = 5 \sin x + \cos x$; | 7) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$; |
| 4) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$; | 8) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$. |

10.2.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcției:

- | | | |
|---------------------|----------------------------|--|
| 1) $f(x) = x + 3$; | 2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; | 3) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$; |
|---------------------|----------------------------|--|

$$4) f(x) = \frac{9}{\cos^2 x} - 3 \sin x \text{ pe intervalul } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$5) f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x} \text{ pe intervalul } (0; +\infty);$$

$$6) f(x) = \frac{9}{x^{10}} + \frac{8}{x^9} \text{ pe intervalul } (-\infty; 0).$$

10.3.* Pentru funcția f pe intervalul I găsiți primitiva F , care satisface condiția dată:

$$1) f(x) = 1 - 2x, I = (-\infty; +\infty), F(3) = 2;$$

$$2) f(x) = 3x^2 - 4x, I = (-\infty; +\infty), F(1) = 4;$$

$$3) f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}, I = (0; +\infty), F\left(\frac{1}{4}\right) = 1;$$

$$4) f(x) = (2 - 3x)^2, I = (-\infty; +\infty), F(1) = 0.$$

10.4.* Pentru funcția f pe intervalul I găsiți primitiva F , graficul căreia trece prin punctul dat:

$$1) f(x) = 3 - 6x, I = (-\infty; +\infty), A(-1; 0);$$

$$2) f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1, I = (-\infty; +\infty), B(1; 5);$$

$$3) f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}, I = (0; +\infty), C(4; 10);$$

$$4) f(x) = 2 \sin x, I = (-\infty; +\infty), D\left(\frac{\pi}{2}; 0\right).$$

10.5.* Pentru funcția $f(x) = 4x^3 + 4x$ găsiți primitiva F , unul din zerourile căreia este egal cu -1 . Găsiți restul zerourilor a acestei primitive.

10.6.* Pentru funcția $f(x) = x^2 - 12$ găsiți primitiva F , unul din zerourile căreia este egal cu 3 .

10.7.** Funcțiile F_1 și F_2 sunt primitivele funcției $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Graficul funcției F_1 trece prin punctul $A(1; 2)$, iar al funcției F_2 – prin punctul $B(0; 5)$. Graficul căreia dintre funcțiile F_1 sau F_2 , este situat mai sus?

10.8.** Funcțiile F_1 și F_2 sunt primitivele funcției $f(x) = (2x - 1)^2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Graficul funcției F_1 trece prin punctul $A(2; 6)$, iar al funcției F_2 – prin punctul $B(-1; 1)$. Graficul căreia dintre funcțiile F_1 sau F_2 , este situat mai sus?

10.9.** Viteza punctului material care se deplasează de-a lungul axei de coordonate variază în conformitate cu legea $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Scrieți formula dependenței coordonatelor ei de timp, dacă în momentul inițial $t = 0$ punctul se afla în originea de coordonate (viteza mișcării se măsoară în metri pe secundă).

- 10.10.**** Corpul se deplasează de-a lungul axei de coordonate cu o viteză, care în orice moment t se determină după formula $v(t) = 6t^2 + 1$. Găsiți formula care exprimă dependența coordonatei punctului de timp, dacă în momentul $t = 3$ corpul se găsea la distanța de 10m de la originea de coordonate (viteza mișcării se măsoară în metri pe secundă).
- 10.11.**** Pentru funcția $f(x) = -2x + 5$ găsiți așa o primitivă, ca graficul ei să aibă doar un singur punct comun cu dreapta $y = 2$.
- 10.12.**** Pentru funcția $f(x) = x + 1$ găsiți așa o primitivă, ca graficul ei să aibă doar un singur punct comun cu dreapta $y = -4$.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

10.13. Rezolvați ecuația:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;

3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$.

2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

10.14. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2,5x)$;

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$.

11. Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată

Analizăm funcția f , care este continuă pe intervalul $[a; b]$ și primește valori nenegative. Figura, limitată de graficul funcției f și dreptele $y = 0$, $x = a$ și $x = b$ se numește *trapez curbiliniu*.

În figura 11.1 sunt prezentate exemple de trapeze curbilinii.

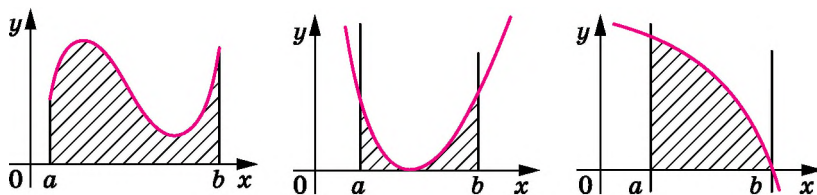


Fig. 11.1

Să cercetăm teorema, care dă posibilitatea de a calcula aria trapezului curbiliniu.

Teorema 11.1. *Aria S a trapezului curbiliniu limitat de graficul funcției $y = f(x)$ și dreptele $y = 0$, $x = a$ și $x = b$ ($a < b$), se poate calcula după formula*

$$S = F(b) - F(a),$$

unde F – oricare primitivă a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

Problema 1. Găsiți aria S a figurii mărginită de graficul funcției $f(x) = \sin x$ și dreptele $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ și $x = \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare: În figura 11.2 este reprezentat **trapezul curbiliniu**, aria cărui trebuie de-o găsit.

Una din primitivele funcției $f(x) = \sin x$ pe intervalul $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ este funcția $F(x) = -\cos x$. Atunci $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Răspuns: $\frac{1}{2}$. ◀

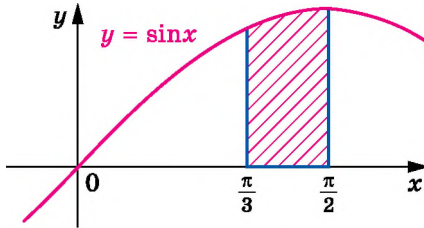


Fig. 11.2

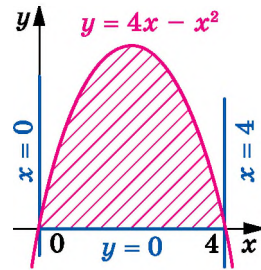


Fig. 11.3

Problema 2. Găsiți aria S a figurii limitate de graficul funcției $f(x) = 4x - x^2$ și dreapta $y = 0$.

Rezolvare: Graficul funcției f intersectează dreapta $y = 0$ în punctele $x_1 = 0$ și $x_2 = 4$ (fig. 11.3). Atunci figura aria cărui trebuie de-o găsit este trapezul curbiliniu, limitat de graficul funcției f și de dreptele $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Una din primitivele funcției f pe intervalul $[0; 4]$ este funcția $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Atunci

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Răspuns: $\frac{32}{3}$. ◀

Definiție. Fie F – primitiva funcției f pe intervalul I , numerele a și b , unde $a < b$, aparțin intervalului I . Diferența $F(b) - F(a)$ se numește **integrala determinată a funcției f pe intervalul $[a; b]$** .

Integrala definită a funcției f pe intervalul $[a; b]$ se notează $\int_a^b f(x) dx$ (se citește «integrala de la a până la b fe de ix de ix»). Deci,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

unde F – primitivă arbitrară a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

De exemplu, funcția $F(x) = x^3$ este primitiva funcției $f(x) = 3x^2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Atunci pentru numere arbitrare a și b , unde $a < b$ se poate scrie:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Menționăm, că valoarea diferenței $F(b) - F(a)$ nu depinde de aceea care primitivă a funcției f am ales. Într-adevăr, fiecare primitivă G a funcției f pe intervalul I se poate scrie în forma $G(x) = F(x) + C$, unde C – număr arbitrar. Atunci

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Egalitatea (1) se numește **formula lui Newton-Leibniz**.

Deci, pentru calcularea integralei determinate $\int_a^b f(x) dx$ după formula

lui Newton-Leibniz trebuie:

- 1) de găsit orice primitivă F a funcției f pe intervalul $[a; b]$;
- 2) de calculat valoarea primitivei F în punctele $x = b$ și $x = a$;
- 3) de găsit diferența $F(b) - F(a)$.

În timpul calculării integralelor determinate, diferența $F(b) - F(a)$ se notează $F(x) \Big|_a^b$.

Folosind o astfel de însemnare, să calculăm, de exemplu, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$.

Avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Problema 3. Calculați $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx$.

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right) = 6 \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Răspuns: $6 \frac{8}{15}$. ◀

Formula lui Newton-Leibniz permite să stabilim legătura între integrala determinată și aria S a trapezului curbiliniu, limitat de graficul funcției $y = f(x)$ și dreptele $y = 0$, $x = a$ și $x = b$ ($a < b$).

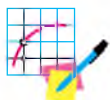
Folosind teorema 11.1 se poate scrie:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Această formulă exprimă sensul **geometric al integralei determinate**.



1. Care figură se numește trapez curbiliniu?
2. După ce formulă se calculează aria trapezului curbiliniu?
3. Ce se numește integrală determinată?
4. Scrieți formula lui Newton-Leibniz.
5. În ce constă sensul geometric al integralei determinate?



EXERCII

11.1.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, prezentat în figura 11.4.

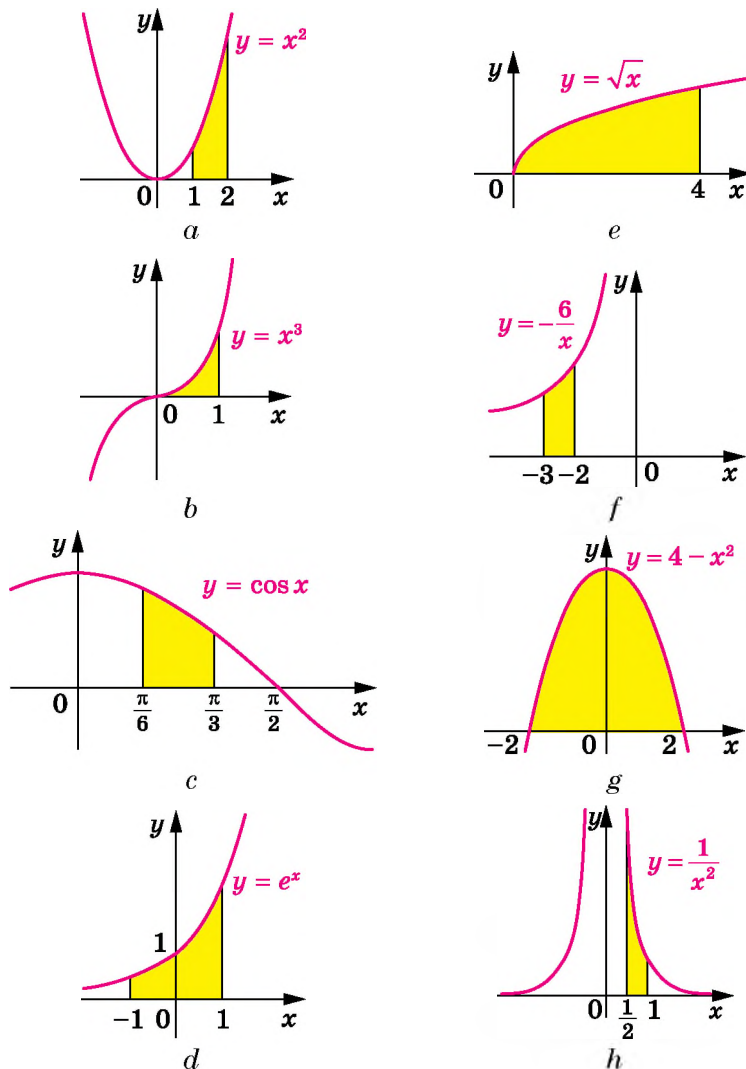


Fig. 11.4

11.2.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, prezentat în figura 11.5.

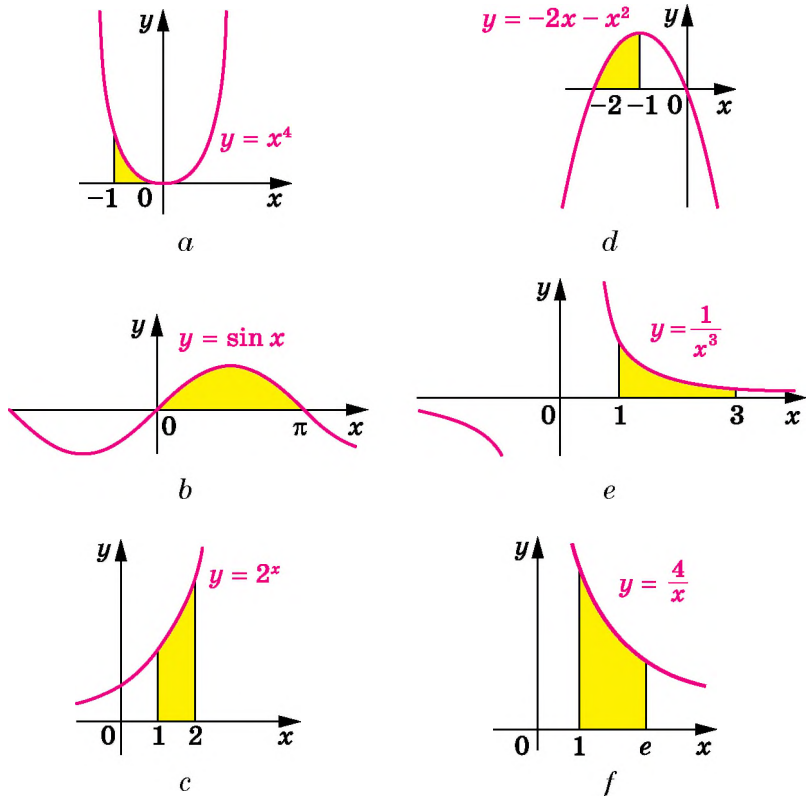


Fig. 11.5

11.3.° Calculați integrala determinată:

$$1) \int_5^7 x dx;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx;$$

$$7) \int_{e^3}^{e^3} \frac{dx}{x};$$

$$2) \int_3^8 dx;$$

$$5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$8) \int_1^{10} \frac{dx}{x^2};$$

$$3) \int_{-3}^0 x^2 dx;$$

$$6) \int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$9) \int_{-2}^3 3^x dx.$$

11.4.° Calculați integrala determinată:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_{-4}^{-2} 2dx; & 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx; & 5) \int_0^4 e^x dx; \\
 2) \int_1^2 x^3 dx; & 4) \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x^4}; & 6) \int_1^e \frac{dx}{x}.
 \end{array}$$

11.5.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat:

- de parabola $y = x^2 + 1$ și dreptele $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
- de sinusoida $y = \cos x$ și dreptele $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
- de graficul funcției $y = -x^3$ și dreptele $y = 0$, $x = -2$;
- de parabola $y = 3 - 2x - x^2$ și dreptele $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;
- de hiperbola $y = \frac{1}{2x}$ și dreptele $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;
- de parabola $y = 2x - x^2$ și axa absciselor.

11.6.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile:

- $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
- $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
- $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$.

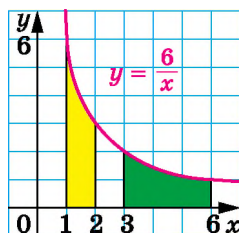


Fig. 11.6

11.7.° Demonstrați, că trapezele curbilinii prezentate în figura 11.6 sunt egale.

11.8.° Calculați integrala determinată:

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-4}^{-2} (2x + 4) dx; & 4) \int_1^3 (4x^3 - 4x + 3) dx; \\
 2) \int_0^6 (3x^2 - x) dx; & 5) \int_{-2}^1 (x - 3)^2 dx; \\
 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x) dx; & 6) \int_1^e \left(\frac{1}{x} - x \right) dx.
 \end{array}$$

11.9.° Calculați integrala determinată:

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_{-1}^1 (1 - 5x^4) dx; & 3) \int_0^1 (2x - 1)^2 dx; \\
 2) \int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2 \right) dx; & 4) \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx.
 \end{array}$$

11.10.** Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile:

1) $y = x^2, y = 4;$

8) $y = x^2 + 2, y = x + 4;$

2) $y = 2x^2, y = 2x;$

9) $y = x^2 + 2x + 1, y = x + 3;$

3) $y = e^x, y = 1, x = 2;$

10) $y = -x^2 + 2x, y = x^2;$

4) $y = \frac{4}{x}, y = 1, x = 1;$

11) $y = x^3, y = x^2;$

5) $y = \frac{4}{x}, y = 4, x = 4;$

12) $y = e^x, y = e, x = 0;$

6) $y = x^2 - 4x + 5, y = 5;$

13) $y = \frac{7}{x}, x + y = 8;$

7) $y = 2 + x - x^2, y = 2 - x;$

14) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

11.11.** Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat:

1) de graficul funcției $y = x^3$ și dreptele $y = 8, x = 1;$ 2) de parabola $y = 0,5x^2$ și dreapta $y = -x;$ 3) de parabola $y = 4 - x^2$ și dreapta $y = 3;$ 4) de parabola $y = 6 + x - x^2$ și dreapta $y = 6 - 2x;$ 5) de parabolele $y = x^2 - 4x + 4$ și $y = 4 - x^2;$ 6) de hiperbola $y = \frac{3}{x}$ și dreptele $y = 3, x = 3;$ 7) de graficul funcției $y = e^{-x}$ și dreptele $y = e, x = 0;$ 8) de hiperbola $y = \frac{5}{x}$ și dreapta $x + y = 6.$

11.12.** Pentru ce valori a lui a se îndeplinește inecuația:

1) $\int_0^a (4 - 2x) dx < 3,$ unde $a > 0;$ 2) $\int_{\log_{0,2} 6}^a 0,2^x dx > \frac{19}{\ln 0,2},$ unde $a > \log_{0,2} 6?$

11.13.** Pentru ce valori ale lui $a,$ mai mari decât $\frac{1}{2},$ se îndeplinește

inegalitatea $\int_{\frac{1}{2}}^a \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx > 1,5?$

11.14.* Pentru ce valori ale lui a aria figurii, limitată de liniile $y = x^2,$ $y = 0, x = a,$ este egală cu 9?

11.15.* Pentru ce valori ale lui a aria figurii, limitate de liniile $y = 2x^3,$ $y = 0, x = a,$ este egală cu 8?



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

11.16. Calculați valoarea expresiei:

$$1) (4^{-0.25} - 2^{0.5}) \left(4^{-0.25} + (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \right); \quad 3) \sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2} \right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5} \right)^3}.$$

$$2) \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)};$$

11.17. Găsiți suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2 - 3x < 4$.



«CU INTELECTUL EI A DEPĂȘIT SPECIA UMANĂ»

Aceste cuvinte mărețe sunt scrise de urmași despre remarcabilul savant englez fizicianul și matematicianul Isaac Newton. În istoria științei, alături I. Newton se află o altă figură gigantă, a savantului german Gottfried Wilhelm Leibniz, care a lăsat în urmă sa o urmă nepieritoare în filozofie, matematică, drept, logică, diplomatie, istorie, politologie. Printre marea moștenire științifică a acestor geniali savanți, un loc aparte, aparține realizării legate de crearea calculului diferențial și integral – științei despre derivate și primitive.



Isaac Newton
(1643–1727)



Gottfried Wilhelm
Leibniz
(1646–1716)

Merită de subliniat faptul, că Newton și Leibniz și-au creat propriile teorii în acel timp în care noțiunile și termenii obișnuiți pentru noi nu existau sau nu aveau conținut exact. Încercați să vă imaginați un manual de matematică care nu are termenii «mulțime», «funcție», «număr real» etc. Mai mult decât atât, multe denumiri moderne comode atunci nu au obținut o aplicare general acceptată. Unele din ele, lui Newton și Leibniz, a trebuit să le inventeze, să le generalizeze și să le adapteze la necesități. De exemplu, Leibniz a început să noteze operația înmulțire cu un punct (înainte se foloseau simbolurile: \square , \times , $*$, M etc); operația de împărțire – cu două puncte (înainte des se folosea litera D); Newton a extins notația pentru putere a^n pentru cazul valorilor întregi și fracționare ale lui n , iar notația \sqrt{x} a generalizat-o până la $\sqrt[n]{x}$. Termenul «funcție» și simbolul integralei « \int » sunt întâlnite pentru prima dată în lucrările lui Leibniz.

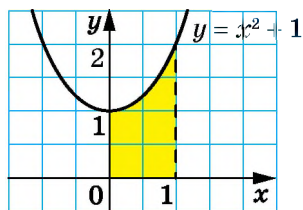
În general, istoria dezvoltării matematicii poate fi împărțită în două perioade: înainte și după apariția derivatei și integralei. Descoperirile lui Newton și Leibniz au permis savanților să rezolve rapid și ușor problemele care au fost considerate complet inaccesibile.

ÎNSĂRCINAREA NR. 2 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

- Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = x^4$?
 A) $F(x) = 4x^3$; B) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; C) $F(x) = x^5$; D) $F(x) = \frac{x^5}{4}$.
- În care dintre următoarele cazuri, funcția F este primitiva funcției f ?
 A) $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$; C) $f(x) = x$, $F(x) = 1$;
 B) $f(x) = 2^x$, $F(x) = 2^x \ln 2$; D) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.
- Arătați aspectul general al primitivei funcției $f(x) = \frac{4}{x^5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.
 A) $-\frac{1}{x^4}$; B) $-\frac{1}{x^4} + C$; C) $-\frac{20}{x^6} + C$; D) $-\frac{2}{3x^6} + C$.
- Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = \frac{1}{x}$ pe intervalul $(-\infty; -1]$?
 A) $F(x) = -1 - \ln x$; C) $F(x) = 1 - \ln(-x)$;
 B) $F(x) = \ln x + 1$; D) $F(x) = \ln(-x) - 1$.
- Arătați aspectul general al primitivei funcției $f(x) = e^x - 4x^3$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$.
 A) $e^x + C$; B) $e^x - 12x^2 + C$; C) $\frac{e^{x+1}}{x+1} - x^4 + C$; D) $e^x - x^4 + C$.
- Funcția F este primitiva funcției $f(x) = x - 3$. Prin care din următoarele puncte trece graficul funcției F , dacă $F(2) = 5$?
 A) $(0; 8)$; B) $(-2; 17)$; C) $(1; 5,5)$; D) $(4; 4)$.
- Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = 7^{x^2}$?
 A) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7}$; C) $F(x) = 7^x$;
 B) $F(x) = 7^x \ln 7$; D) $F(x) = \frac{7^{x+1}}{x+1}$.
- Calculați integrala $\int_0^3 x^2 dx$.
 A) 27; B) 9; C) 6; D) 3.
- Calculați integrala $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$.
 A) 0,2; B) 0,8; C) -0,2; D) -0,8.
- Calculați integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.
 A) 0; B) 1; C) 2; D) -1.

11. Calculați aria figurii vopsite care este prezentată în figură.

- A) $\frac{4}{3}$; C) 1;
 B) $\frac{1}{3}$; D) 2.

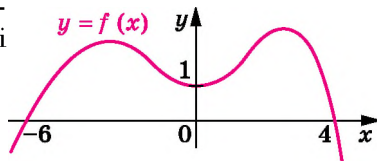


12. Calculați integrala $\int_{-1}^4 (f(x) + 1) dx$, dacă $\int_{-1}^4 f(x) dx = 2$.
- A) 3; B) 5; C) 7; D) 9.

13. În figură este prezentat graficul funcției $y = f(x)$. Găsiți valoarea expresiei

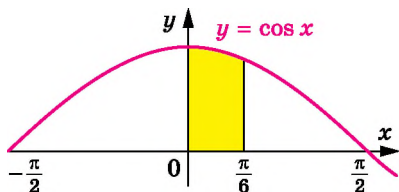
$$\int_{-6}^0 f'(x) dx - \int_0^4 f'(x) dx.$$

- A) 0; C) 1;
 B) 2; D) nu este posibil de găsit.



14. Calculați aria figurii vopsite care este prezentată în figură.

- A) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 B) $\frac{1}{2}$; D) 1.

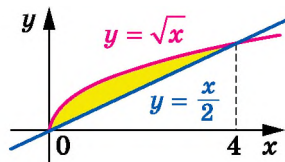


15. Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

- A) $12\frac{2}{3}$; B) $14\frac{1}{3}$; C) $14\frac{2}{3}$; D) $15\frac{1}{3}$.

16. Valoarea căreia dintre integralele prezentate este egală cu aria figurii vopsite, prezentată în figură?

- A) $\int_0^4 \frac{x}{2} dx$; C) $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx$;
 B) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$; D) $\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} \right) dx$.



17. Calculați aria figurii, limitată de liniile $y = x^2$, $y = 2 - x$.

- A) 3,5; B) 4; C) 4,5; D) 5.

18. Pentru ce valoare a lui a , dreaptă $x = a$ împarte figura limitată de graficul funcției $y = \frac{10}{x}$ și dreptele $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, în două figuri egale?

- A) 4; B) 5; C) 10; D) așa valoare nu există.



PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Primitiva

Funcția F se numește funcție primitivă (sau pe scurt primitiva) a funcției f pe intervalul I , dacă pentru toți $x \in I$ se îndeplinește egalitatea $F'(x) = f(x)$.

Proprietatea fundamentală a primitivei

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I și C – număr arbitrar, atunci funcția $y = F(x) + C$ de asemenea este primitiva funcției f pe intervalul I .

Orice primitivă a funcției f pe intervalul I se poate da în forma $y = F(x) + C$, unde C – un număr oarecare.

Integrala nedefinită

Totalitatea tuturor primitivelor funcției $y = f(x)$ pe intervalul I se numește integrală nedefinită a ei și se scrie $\int f(x) dx$.

Regulile de gășire a primitivei

Dacă funcțiile F și G sunt primitivele funcțiilor f și g pe intervalul I , atunci pe acest interval funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$.

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I și k – un număr oarecare, atunci pe acest interval funcția $y = kF(x)$ este primitiva funcției $y = kf(x)$.

Aria trapezului curbiliniu

Aria S a trapezului curbiliniu, limitat de graficul funcției $y = f(x)$ și dreptele $y = 0$, $x = a$ și $x = b$ ($a < b$) se poate calcula după formula $S = F(b) - F(a)$, unde F – oricare primitivă a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

Integrala determinată

Fie funcția F – primitiva funcției f pe intervalul I , numerele a și b , unde $a < b$, aparțin intervalului I . Diferența $F(b) - F(a)$ se numește integrala determinată a funcției f pe intervalul $[a; b]$ și se notează

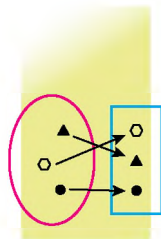
$$\int_a^b f(x) dx.$$

Formula Newton-Leibniz

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, unde F o primitivă arbitrară a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

§3

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ, A TEORIEI PROBABILITĂȚII ȘI DE STATISTICĂ MATEMATICĂ



În acest paragraf veți învăța metode combinatorice, de calcul a cantității diferitor mulțimi, formate după anumite reguli; cu determinarea clasică a probabilității unui eveniment întâmplător; veți începe a învăța statistica matematică - știința despre culegerea datelor și a prelucrării, și analizei lor.

12. Regulile combinatorice pentru sumă și produs

În câte moduri elevii din clasa voastră pot sta unul după altul în rând la bufet? În câte moduri se poate de ales în clasa voastră șeful clasei și adjunctul lui? În câte moduri pot fi distribuite medaliile de aur, argint și bronz la campionatul mondial de fotbal?

Răspunzând la aceste întrebări, trebuie de calculat câte combinații diferite, formate după anumite reguli, se pot face din elementele unei mulțimi finite de date. Capitolul de matematică, care studiază metodele de rezolvare a astfel de probleme, se numește **combinatorică**.

La baza rezolvării majorității problemelor combinatorice sunt două reguli: regula sumei și regula produsului.

Să analizăm așa un exemplu. Pe un turist l-au interesat 5 trasee turistice din regiunea Herson și 7 trasee turistice din Carpați. Să aflăm în câte moduri își poate organiza el vacanța sa, având timp doar pentru un singur traseu.

Deoarece de tot sunt $5 + 7 = 12$ trasee diferite, atunci unul dintre ele poate fi ales în 12 moduri.

Deci, pentru calculul numărului total de trasee, am adunat numărul de trasee din regiunea Herson și numărul de trasee din Carpați. Această metodă este numită **regula combinatorică a sumei**.

Revenim la exemplul cu alegerea traseului. Dacă turistul dispune de timp pentru două trasee și dorește să meargă mai întâi în regiunea Herson și apoi în Carpați, își poate organiza vacanța în 35 moduri. De fapt, dacă de ales un traseu prin regiunea Herson, atunci perechea lui poate fi oricare din cele 7 trasee carpatice. Deoarece trasee din regiunea Herson sunt 5, atunci numărul de perechi (trasee din regiunea Herson; trasee din Carpați) este egal cu $7 + 7 + 7 + 7 + 7$, adică este egal cu pro-

dusul $7 \cdot 5 = 35$. Această metodă este numită **regula combinatorică a produsului**.

Aceste considerații ilustrează următorul tabel.

		Trasee din Carpați						
		1	2	3	4	5	6	7
Trasee prin Herson	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Problema 1. 1. Câte numere din trei cifre pot fi alcătuite din cifrele 1, 2, 3 astfel încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite?

Rezolvare: Prima cifră în acest număr din trei cifre poate fi oricare cifră din 1, 2 sau 3. Avem 3 variante.

Deoarece toate cifrele în acest număr din trei cifre trebuie să fie diferite, atunci indiferent care ar fi prima cifră, a doua cifră a numărului poate fi orice cifră dintre cele două rămase. Deci, pentru fiecare dintre cele trei variante de alegere a primei cifre există 2 variante pentru a doua cifră. Folosind regula produsului, avem că primele două cifre ale numărului din trei cifre pot fi alese în $3 \cdot 2 = 6$ moduri.

Deoarece toate cifrele din numărul de trei cifre trebuie să fie diferite, atunci este clar că primele două cifre ale numărului determină în mod univoc ultima a treia cifră. De aceea din cifrele 1, 2, 3 pot fi alcătuite $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ numere de trei cifre, astfel încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite.

Răspuns: 6. ◀

În timpul rezolvării problemei 1, a trebuit să calculăm produsul $3 \cdot 2 \cdot 1$. În problemele de combinatorică produsul numerelor consecutive naturale de la 1 până la n se întâlnesc atât de des încât a primit denumirea specială «**factorial**» și se notează

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

(scrierea « $n!$ » se citește «ne factorial»).

De exemplu, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Problema 2. Pentru a proteja informațiile din calculator se folosește parola – o succesiune de litere latine cu lungimea de la 3 până la 5 simboluri (parola poate conține mai multe litere identice). Câte parole diferite se pot crea folosind 26 de litere latine?

Rezolvare: Cercetăm numărul de parole diferite din trei simboluri. Primul simbol poate fi ales oricare literă. Deci, avem 26 de variante. Folosind regula produsului, avem, că există 26^3 parole diferite din trei simboluri.

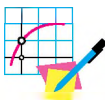
Raționând analogic, se poate de stabilit, că numărul de parole din patru simboluri este egal cu 26^4 , iar parole cu cinci simboluri – 26^5 .

Astfel, folosind regula sumei, obținem, că numărul total de parole alcătuiește $26^3 + 26^4 + 26^5$.

Răspuns: $26^3 + 26^4 + 26^5$. ◀



1. Dați exemple de probleme, rezolvarea cărora studiază combinatorica.
2. Ce se numește factorialul numărului? Cum el se notează?



EXERCIȚII

12.1.° Din orașul A la orașul B sunt 4 căi, iar din orașul B la orașul C trec 3 căi (fig. 12.1). În câte modalități se poate ajunge din orașul A în orașul C ?

12.2.° Spre vârful muntelui sunt deschise 5 itinerare. În câte moduri alpinistul poate urca și coborî de pe munte? Răspundeți la această întrebare cu condiția că urcarea și coborârea are loc pe marșrute diferite.

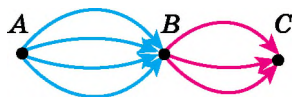


Fig. 12.1.

12.3.° În cafenea se oferă un meniu din 3 mâncăruri de felul întâi, 6 – de felul doi și 5 – de felul trei. Câte modalități sunt pentru a alege masa de prânz din trei feluri de mâncăruri (câte o mâncare de fiecare fel)?

12.4.° Câte numere din cinci cifre se pot alcătui din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 astfel, încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite?

12.5.° Câte numere din patru cifre se pot scrie cu ajutorul cifrelor 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.6.° Câte numere din trei cifre există, toate cifrele cărora să fie impare?

12.7.° Să cercetăm silabele din două litere, prima din care este consoană, iar a doua – vocală. Câte astfel de silabe diferite se pot alcătui din literele cuvântului:

1) sabie;

2) pantaloni?

12.8.* În coș sunt 10 mere și 7 pere. Anton alege măr sau pară. După aceasta Maxim alege măr și pară. În ce caz Maxim are mai multe posibilități pentru alegere: când Anton a luat măr sau când Anton a luat pară?

12.9.* În figura 12.2 este arătată schema drumurilor, care duc de la orașul A la orașul B. În câte moduri se poate ajunge din orașul A în orașul B?

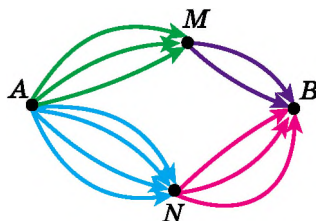


Fig. 12.2.

12.10.* În cafenea se oferă un meniu din 3 salate diferite, 6 diferite feluri de mâncare din carne și 5 deserturi diferite. Câte moduri există pentru a alege masa de prânz din două feluri diferite de mâncare?

12.11.* Câte numere din cinci cifre, toate cifrele în care să fie diferite, se poate alcătui din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 dacă aceste numere ar trebui să înceapă:

1) cu cifra 1;

2) cu scrierea «34»?

12.12.* Câte numere din patru cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5?

12.13.* Câte numere din trei cifre există, toate cifrele cărora să fie pare?

12.14.* Câte numere de telefon din șapte cifre există, care nu încep cu numărul 0?

12.15.* Moneda se aruncă de 4 ori. Câte diferite succesiuni de stemă și de cifre pot fi obținute?

12.16.* Zarul este aruncat de 3 ori. Câte succesiuni diferite de puncte pot fi obținute?

12.17.* Câte numere pare din trei cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.18.* Câte numere impare din trei cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.19.* Câte numere din cinci cifre, toate cifrele cărora trebuie să fie diferite, se poate alcătui din numerele 0, 1, 2, 3, 4?

12.20.* Câte numere pare din cinci cifre, se poate alcătui din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 astfel, încât în fiecare număr cifrele să fie diferite?

12.21.** Câte numere din cinci cifre există, care se împart la 5 fără rest?

12.22.** Câte numere din șapte cifre există, care se împart la 25 fără rest?

12.23.* Magazinul de cărți are 4 ediții diferite ale poemului « Eneida », 3 ediții diferite ale piesei « Natalka Poltavka » și 2 ediții diferite ale piesei « Moskalul vrăjitor ». Afară de asta, există 5 cărți diferite care conțin poemul « Eneida » și piesa « Natalka Poltavka », și 6 cărți diferite, care conțin piesele « Natalka Poltavka » și « Moskalul vrăjitor ». În câte moduri se poate face o cumpărătură care să conțină câte un exemplar din fiecare aceste creații?

12.24.* Câte numere din șapte cifre există, toate cifrele cărora au aceeași paritate?



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

12.25. Rezolvați ecuațiile:

$$1) \sqrt{2,1x+1} = x-1;$$

$$4) 2\sqrt{x-2} = \sqrt[4]{x-2} + 15;$$

$$2) 2x + \sqrt{3x-2} = 3;$$

$$5) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2;$$

$$3) \sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6;$$

$$6) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5.$$

12.26. Găsiți cea mai mare valoare întregă a inecuației

$$x^2 + 3(\sqrt{3-x})^2 - 13 \leq 0.$$

13. Permutări. Aranjamente. Combinări

Anișoara, Olga și Ion au intrat în bufetul școlii. În câte moduri pot ei să se repartizeze la coadă? Este clar, că există 6 variante.

Anișoara, Olga, Ion Olga, Ion, Anișoara Ion, Anișoara, Olga
Anișoara, Ion, Olga Olga, Anișoara, Ion Ion, Olga, Anișoara

Încă un exemplu.

Orarul zilnic conține 7 lecții. În câte modalități se poate alcătui ora-
rul zilnic astfel, încât toate cele 7 lecții să fie diferite? Cu alte cuvinte,
câte permutări există din 7 lecții?

Așa probleme se numesc probleme la găsirea numărului de **permu-
tări**. Numărul de permutări din n elemente se notează cu simbolul P_n .
Pentru oricare n natural este adevărată formula

$$P_n = n! \tag{1}$$

Deci, trei copii se pot alinia la coadă în $3! = 6$ moduri, iar numărul
de ore din 7 lecții este de $7! = 5040$.

Problema 1. În câte moduri pot să se alinieze 5 mașini într-o coloană?

Rezolvare: În problema dată trebuie de calculat numărul de permutări din 5 elemente. Folosind formula (1), avem: $P_5 = 5! = 120$.

Răspuns: 120. ◀

Să cercetăm încă câteva probleme tipice din combinatorică.

Problema 2. Conform regulilor FIFA¹ în partea finală a campionatului mondial de fotbal participă 32 de echipe. În câte moduri, pot fi distribuite medaliile de aur, argint și bronz (trei locuri premiante) între echipe?

Rezolvare: Primul loc poate ocupa oricare dintre cele 32 de echipe, locul al doilea - oricare dintre cele 31 de echipe rămase, iar al treilea - oricare dintre celelalte 30 de echipe rămase. După regula produsului, numărul de variante posibile de repartizare a locurilor este egal cu $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$.

Răspuns: 29 760. ◀

Rezolvând această problemă, noi am aflat, câte moduri există pentru a repartiza 3 echipe pe pedestalul de premiere alegându-le din 32 de participanți. Se spune, că am găsit numărul de **aranjamente** de 32 de elemente luate câte 3 elemente.

Numărul tuturor aranjamentelor posibile de n elemente luate câte k elemente se notează cu simbolul A_n^k , folosind prima literă a cuvântului francez *arrangement* – repartizare, aranjare.

Rezultatul obținut în problema despre distribuirea locurilor premiante, permite să facem concluzia, că $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$.

În general, pentru oricare n și k naturale astfel încât $k \leq n$, adevărată este formula

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \quad (2)$$

Prin definiție, este primit, că $0! = 1$. Această convenție, permite de scris formula (2) mai compact:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Să cercetăm următoarele două probleme. În câte moduri clasa, în care sunt 30 de elevi și eleve, se poate alege șeful clasei și adjunctul lui? Prin câte moduri în această clasă pot fi numiți doi elevi de serviciu?

¹ Federația Internațională a Asociațiilor de Fotbal

Răspunsul la prima întrebare este cunoscut: acesta-i A_{30}^2 . Pentru a răspunde la a doua întrebare, trebuie de stabilit numărul de modalități pentru a forma din 30 de elemente o mulțime de 2 elemente. În acest caz, se spune că este necesar să se găsească numărul de **combinări** de 30 de elemente luate câte 2 elemente.

Numărul tuturor combinațiilor posibile de n elemente luate câte k elementele se notează cu simbolul C_n^k , folosind prima literă a cuvântului francez *combinasion* – combinație.

Deci, problema despre aflarea numărului de moduri în care se poate numi elevii de serviciu se formulează astfel: cu ce este egal C_{30}^2 ?

Se poate de demonstrat, că are loc formula

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (3)$$

Problema 3. Pe o circumferință sunt notate 8 puncte. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?

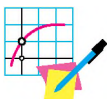
Rezolvare. Numărul căutat de triunghiuri este egal cu numărul de combinații de 8 elemente luate câte 3 elemente. Folosind formula (3), obținem:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Răspuns: 56 de triunghiuri. ◀



1. După care formulă se poate de calculat numărul de permutări de n elemente?
2. După care formulă se poate de calculat numărul de aranjamente de n elemente luate câte k elemente?
3. După care formulă se poate de calculat numărul de combinații de n elemente luate câte k elemente?



EXERCIȚII

13.1.° În câte moduri se pot aranja pe raft 7 cărți diferite?

13.2.° În școală sunt 20 de clase și 20 de conducători de clasă. În câte moduri se poate repartiza conducerea claselor între profesori?

- 13.3.**° În câte moduri se pot așeza 5 persoane în automobil, dacă fiecare dintre ei poate conduce automobilul?
- 13.4.**° Într-o echipă de fotbal, care este compusă din 11 jucători, trebuie de ales căpitan și adjunctul lui. În câte moduri se poate face acest lucru?
- 13.5.**° O comisie compusă din 15 persoane, trebuie să aleagă președinte, adjunctul lui și secretar. În câte moduri se poate face aceasta?
- 13.6.**° În clasa a 9-a se studiază 12 obiecte. Orarul zilnic conține 6 lecții. În câte moduri se poate alcătui orarul zilnic astfel, încât toate cele 6 lecții să fie diferite?
- 13.7.**° În partea finală a Campionatului European de Fotbal participă 16 echipe. Prin câte metode pot fi distribuite medaliile de aur, argint și bronz?
- 13.8.**° În clasă învață 32 de elevi și eleve. Fiecare doi dintre ei au făcut schimb de fotografii unul cu altul. Câte fotografii în total au fost date?
- 13.9.**° În clasa cu studii aprofundate a matematicii sunt 29 de elevi și eleve. În câte moduri se poate de format o echipă din 5 persoane pentru a participa la olimpiada de matematică?
- 13.10.**° Este dat poligonul regulat cu n laturi. Câte patrulatere există cu vârfurile, care se află printre vârfurile poligonului dat cu n laturi
- 13.11.**° Pe plan sunt marcate 10 puncte astfel, că oricare trei din ele nu se află pe o dreaptă. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?
- 13.12.**° Câte numere diferite de șase cifre pot fi formate din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 astfel, încât cifrele să nu se repete, iar cifrele extreme să fie pare?
- 13.13.**° Printre 20 de muncitori sunt 7 zugravi. În câte moduri se poate de alcătuit o echipă din 5 lucrători astfel, încât să includă exact 2 zugravi?
- 13.14.**° Pentru loteria școlară, au fost pregătite 100 de bilete, dintre care 12 sunt câștigătoare. Primul elev alege la întâmplare 10 bilete. Câte variante de alegere există, până când el va alege exact 3 bilete câștigătoare?
- 13.15.**** Pe o dreaptă sunt notate 12 puncte, iar pe dreapta paralelă ei – 7 puncte. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?
- 13.16.**** Dreapta și circumferința nu au puncte comune. Pe circumferință sunt notate 9 puncte roșii, iar pe dreaptă – 15 puncte albastre. Se știe că nici o dreaptă care trece prin două puncte roșii nu conține puncte albastre. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

13.17. Pantalonii sunt mai scumpi decât o cămașă cu 30% și mai ieftini decât un veston cu 22%. Cu câte procente o cămașă este mai ieftină decât un veston?

13.18. Calculați valoarea expresiei:

$$1) 3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}};$$

$$3) \frac{18}{5^{\log_5 2}};$$

$$2) \log_6 144 - \log_6 4;$$

$$4) \log_2 7 \cdot \log_7 4.$$

14. Determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu

Pentru a găsi probabilitatea unor evenimente, nu trebuie obligatoriu să se efectueze experiențe sau observații. Este destul de experiența de viață și de bunul simț.

Problema 1. Fie, că într-o cutie sunt 15 bile de biliard, numerotate de la 1 până la 15. Care este probabilitatea evenimentului, că bila aleasă va avea număr multiplu la 3?

Rezolvare: Este clar că în acest test sunt 15 rezultate egal posibile. Dintre acestea, sunt 5 care ne satisfac: atunci când sunt extrase bilele cu numerele 3, 6, 9, 12, 15. De aceea este natural să presupunem că probabilitatea unui eveniment «a scoate bila cu numărul care este multiplu lui 3» este egală cu $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Răspuns: $\frac{1}{3}$. ◀

Rezolvarea multor probleme de probabilitate poate fi descrisă cu o astfel de schemă.

- Fie în timpul experienței se poate obține unul din n rezultate egal posibile.
- Se cercetează un eveniment oarecare A , care este provocat de m rezultate. Le vom numi *prielnice (favorabile)*.
- Probabilitatea $P(A)$ a evenimentului A se poate calcula după formula

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

O astfel de schemă se numește **determinarea clasică a probabilității** unui eveniment aleatoriu.

Problema 2. Câștigătorii etapei școlare a concursului de talente au devenit Marina, Svetlana, Andrei și Dumitru. La concursul regional de talente trebuie de trimis doi elevi învingători. S-a hotărât de ales echipa prin tragere la sorți. Care este probabilitatea evenimentului că un băiat și o fată vor reprezenta școala la concursul raional?

Rezolvare: În timpul tragerii la sorți, trebuie de ales o pereche, care va merge la concurs, din următoarele 6 rezultate egal posibile:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) Marina și Svetlana; | 4) Svetlana și Andrei; |
| 2) Marina și Andrei; | 5) Svetlana și Dumitru; |
| 3) Marina și Dumitru; | 6) Andrei și Dumitru. |

Printre aceste perechi există 4 perechi, care constau dint-un băiat și o fată. Deci, probabilitatea evenimentului «va reprezenta școala băiat și fată» este egală cu $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Răspuns: $\frac{2}{3}$. ◀

Să analizăm încă un exemplu.

Fie că într-o cutie se află 9 bile verzi. Care este probabilitatea faptului că bila aleasă va fi de culoare verde? culoare galbenă?

După condițiile date orice bilă aleasă va fi de culoare verde.

Evenimentul, care în conformitate cu această mulțime de condiții sigur va avea loc în orice experiență, se numește **sigur** (verosimil).

Probabilitatea acestui eveniment se consideră egală cu 1. Cu alte cuvinte, dacă A – este un eveniment sigur, atunci $P(A) = 1$.

Deci, probabilitatea că bila aleasă va fi de culoare verde este egală cu 1.

Deoarece în cutie nu sunt bile de culoare galbenă, de aceea de ales o bilă de culoare galbenă este imposibil.

Evenimentul, care conform complexului de condiții nu se poate petrece nici într-o experiență, se numește **imposibil**.

Probabilitatea acestui eveniment este egală cu 0. Cu alte cuvinte, dacă A – eveniment imposibil, atunci $P(A) = 0$.

Pentru a calcula probabilitatea evenimentului aleatoriu, noi trebuia să calculăm numărul de rezultate egal posibile în experiența dată și numărul de rezultate favorabile.

Adesea, aceste calcule sunt legate cu determinarea numărului de diferite combinații, care conform unei reguli anumite pot fi compuse din elementele mulțimii finite date, de aceea aplicarea regulilor combinatorice este o metodă eficientă pentru rezolvarea multor probleme din teoria probabilității.

Problema 3. Pe o tarabă comercială se află 28 de mere - 15 galbene și 13 roșii. Cumpărătorul a cumpărat 3 mere, pe care vânzătorul le-a ales aleatoriu. Care este probabilitatea că toate merele cumpărate sunt galbene?

Rezolvare: Din 28 de mere vânzătorul poate alege 3 mere prin C_{28}^3 metode. Să calculăm, câte dintre aceste procedee sunt astfel, că toate trei mere sunt galbene. Din 15 mere galbene vânzătorul poate alege 3 mere prin C_{15}^3 procedee.

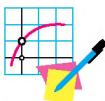
Deci, probabilitatea evenimentului aleatoriu A – de ales trei mere galbene este egală $P(A) = \frac{C_{15}^3}{C_{28}^3}$.

Folosind formula $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, se poate calcula $P(A) = \frac{5}{36}$.

Răspuns: $\frac{5}{36}$. ◀



Ce formulă se folosește pentru determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu?



EXERCIȚII

- 14.1.° Probabilitatea de a cumpăra un aparat electric defectat este de 0,007. Este corect că în orice lot de 1000 de aparate electrice există 7 defectate?
- 14.2.° Probabilitatea de a numeri în țintă este de 75%. Ar putea oare să fie astfel, că într-o serie din 100 de împușcături, vor fi 98 de nimeriri în țintă?
- 14.3.° În sertar sunt 8 creioane albastre și 12 roșii. Care este probabilitatea de a lua la întâmplare din sertar un:
- 1) pix;
 - 2) creion?
- 14.4.° Din cifrele 2, 4, 6, 8 se formează un număr de trei cifre. Care este probabilitatea că acest număr se va împărți fără rest:
- 1) la 5;
 - 2) la 2?

- 14.5.° Care este probabilitatea ca prin schimbarea literelor în cuvântul «matematică» să obținem cuvântul «literatură»?
- 14.6.° Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se alege la întâmplare un număr. Care este probabilitatea, că acest număr:
- 1) este egal cu 2;
 - 2) este egal cu 5;
 - 3) este impar;
 - 4) este multiplul lui 4;
 - 5) nu se împarte la 3 fără rest;
 - 6) este multiplul lui 11?
- 14.7.° Care este probabilitatea faptului, că chemând un elev din clasa voastră la tablă, profesorul v-a chema un băiat?
- 14.8.° Care este probabilitatea aceea, ca numărul din două cifre ales aleatoriu să fie multiplul lui 11?
- 14.9.° În cutie au fost 17 fișe, numerotate de la 1 până la 17. Din cutie aleatoriu s-a luat o fișă. Care este probabilitatea că pe ea va fi scris numărul:
- 1) 12;
 - 2) par;
 - 3) multiplu la 3;
 - 4) nu-i multiplul lui 5;
 - 5) cu două cifre;
 - 6) prim?
- 14.10.° Pe 15 fișe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 15. Care este probabilitatea evenimentului, că numărul scris pe fișa aleatoriu aleasă, va fi:
- 1) impar;
 - 2) compus;
 - 3) nu se împarte fără rest nici la 2, nici la 3?
- 14.11.° În cutie se află bile: a albastre, b galbene și c roșii. Care este probabilitatea, că bila aleasă la întâmplare va fi:
- 1) galbenă;
 - 2) albastră;
 - 3) nu roșie?
- 14.12.° În sacul lui Moș Crăciun sunt n ursuleți de pluș, m bomboane și k mandarine. Care este probabilitatea, că cadoul ales aleatoriu va fi:
- 1) ursuleț;
 - 2) comestibil;
 - 3) nu bomboană?
- 14.13.° Pe raft sunt 12 caiete, din care 5 sunt în pătrățele. Care este probabilitatea că 2 caiete alese aleatoriu vor fi în pătrățele?
- 14.14.° În colecția lui Andrei sunt 40 de monede din diferite țări, dintre care 6 ucrainene. Andrei a luat aleatoriu 3 monede. Care este probabilitatea ca toate aceste monede vor fi ucrainene?
- 14.15.° În cutie sunt 12 bile galbene și 15 albastre. Care este probabilitatea faptului, că din cele opt bile alese la întâmplare, cinci vor fi galbene?

14.16.* Pentru loterie au fost pregătite 1000 de bilete, dintre care 15 câștigătoare. Care este probabilitatea, că din trei bilete alese la întâmplare, toate vor fi câștigătoare?

14.17.* În sertar sunt creioane și pixuri. Se știe, că creioane sunt cu 12 bucăți mai puține decât pixuri. Câte creioane sunt în sertar, dacă probabilitatea, că obiectul ales la întâmplare este:

1) pix, este egală cu $\frac{5}{8}$; 2) creion, este egală cu $\frac{1}{6}$?

14.18.* Setul de cadouri conține 12 baloane verzi și câteva baloane roșii. Câte baloane roșii sunt în set, dacă probabilitatea că balonul, ales aleatoriu, este:

1) verde, este egală cu $\frac{3}{7}$;

2) roșu, este egală cu $\frac{2}{5}$?



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

14.19. Un turist parcurge calea din punctul A în punctul B timp de 3 ore, iar ce-l de-al doilea turist din punctul B în punctul A – timp de 6 ore. Peste câte ore ei se vor întâlni, dacă vor porni în același timp unul la întâmpinarea altuia din punctele A și B ?

14.20. Efectuați calcule și înregistrați rezultatul în formă standard:

1) $(2,6 \cdot 10^3) \cdot (4,5 \cdot 10^{-8})$; 2) $\frac{3,6 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-4}}$.

15. Elemente de statistică matematică

Cu ce tiraj ar trebui de tipărit un manual de matematică pentru clasa 11?

Merită oare ca un anumit politician să-și înainteze candidatura sa pentru alegerile ordinare ale primarului?

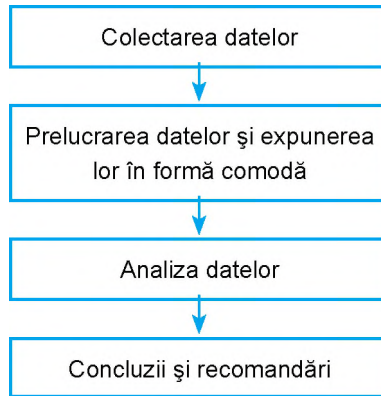
Câte kilograme de pește și produse maritime consumă în mediu pe an un locuitor al Ucrainei?

Este oare profitabil să închiriezi un stadion pentru un concert al artistului dat?

La acestea și multe alte întrebări ajută de găsit răspunsul statistica.

Definiție. Statistica (de la lat. *status* - stare) este știința despre primirea, prelucrarea și analiza datelor cantitative, care caracterizează fenomenele de masă.

Cercetarea statistică constă din câteva etape:



Să ne oprim la fiecare etapă separat.

Colectarea datelor

Voi știți, că obiceiurile dăunătoare, alimentarea incorectă, modul de viață sedentar provoacă boli cardiovasculare. Doctorii au ajuns la această concluzie, examinând, desigur, nu toți oamenii de pe planetă.

Este clar că cercetarea a fost *selectivă*, dar cu caracter *de masă*.

În statistică, totalitatea obiectelor, pe baza cărora se efectuează cercetările, se numește **selecție**.

În acest exemplu, selecția s-a compus din mai multe milioane de oameni.

Trebuie de remarcat faptul că concluzia statistică, bazată numai pe cantitatea elementelor selecției, nu este întotdeauna adevărată. De exemplu, dacă noi cercetând popularitatea artistului, ne vom limita cu sondajul oamenilor, care au venit la concertul lui, atunci rezultatele obținute nu vor fi obiective, pentru că ei au venit la concert anume de aceea, că acest artist le place. Statisticienii spun că selecția ar trebui să fie **reprezentativă** (de la fr. *representatif* - reprezentativ).

Astfel, medicii, studiind factorii de risc pentru bolile cardiovasculare, au examinat persoanele de vârste diferite, ocupații, naționalități etc.

Deci, *colectarea datelor ar trebui să se bazeze pe selecția în masă și reprezentativă*. Uneori selecția poate coincide cu mulțimea tuturor obiectelor pentru care se desfășoară cercetările. Un exemplu al unei astfel de cercetări este efectuarea evaluării externe independente la limba ucraineană.

Mijloacele de prezentare a datelor

Informația colectată (totalitatea datelor) este comod de-o prezentat în formă de tabele, grafice, diagrame.

Să analizăm câteva exemple.

Exemplul 1. «Eurovisionul» - concurs internațional de cântece de muzică ușoară. În tabel sunt reprezentate rezultatele evaluării interpretilor ucraineni la concursul de «Eurovision» în perioada anilor 2003–2018.

Anul	Interpretul	Locul	Numărul total de puncte primite
2003	Alexandru Ponomariov	14	30
2004	Ruslana	1	280
2005	"Greenjolly"	19	30
2006	Tina Karol	7	145
2007	Verka Serduchka	2	235
2008	Ani Lorak	2	230
2009	Svetlana Loboda	12	76
2010	Aliosha	10	108
2011	Mika Newton	4	159
2012	Gaitana	15	65
2013	Zlata Ogniewicz	3	214
2014	Maria Yaremchuk	6	113
2015	<i>N u a u p a r t i c i p a t</i>		
2016	Jamala	1	534
2017	O. Torvald	24	36
2018	Melovin	17	130

Приклад 2. În figura 15.1 sunt datele generalizate despre densitatea lemnului (raportul dintre masa lemnului la volumul lui) pentru unele specii de copaci.

Приклад 3. În figura 15.2 este prezentat graficul schimbării numărului de abonați la legătura telefonică prin cablu din lume în perioada anilor 1997–2016.

Приклад 4. În diagrama circulară (fig. 15.3) este reprezentată repartizarea populației lumii după părțile ei (a lumii).

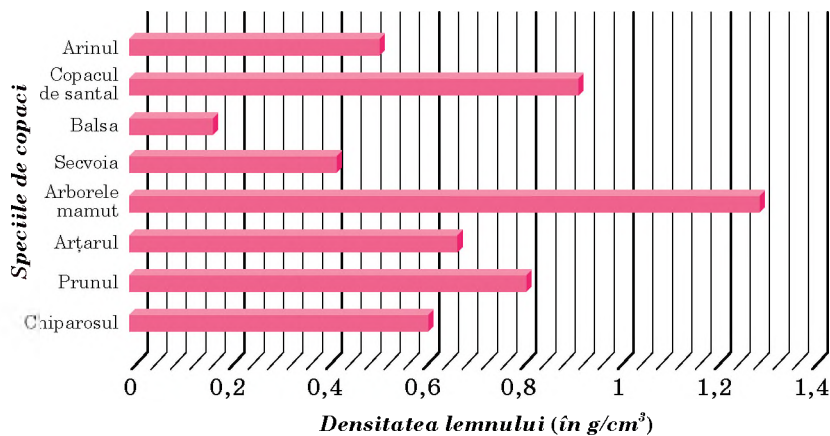


Fig. 15.1

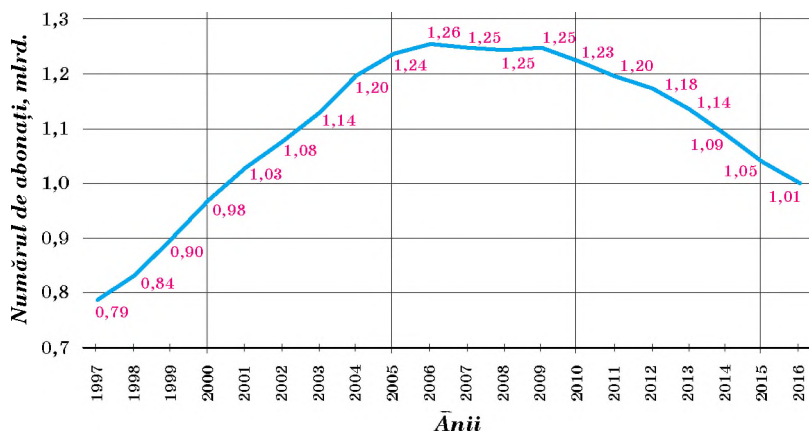


Fig. 15.2

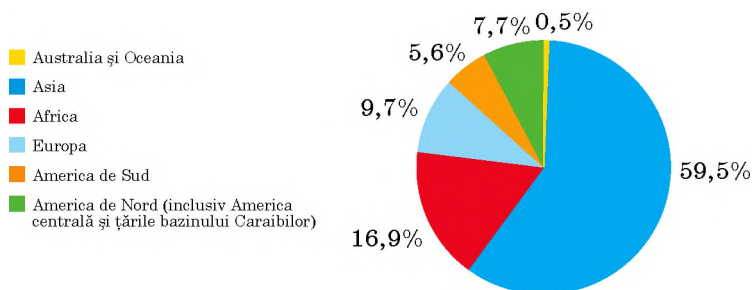


Fig. 15.3

Mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale unei anumite experiențe în statistică s-a convenit de-o numit **totalitate generală**. Corelația dintre totalitatea generală și selecție este ilustrată în figura 15.4.

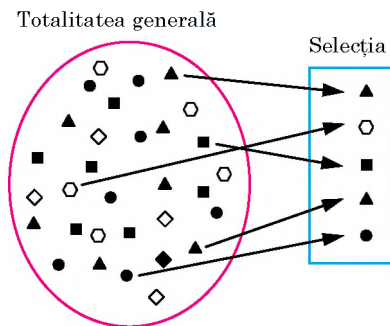


Fig. 15.4

Una dintre principalele sarcini ale statisticii constă în aceea ca pe baza analizei datelor din selecție de făcut concluzie despre toată totalitatea generală. Analizând datele colectate se evidențiază unul sau mai mulți indici generali, care caracterizează cele mai importante particularități ale totalității generale. De exemplu, dacă selecția este alcătuită din date numerice, atunci diferența dintre valorile cea mai mare și cea mai mică ale datelor selecției se numește **amplitudinea** selecției. Parametri importanți ai selecției sunt, de asemenea, **valoarea medie**, **mediana** și **moda**.

Fie, că selecția este formată din datele numerice x_1, x_2, \dots, x_n .

Valoare medie a acestei selecției se numește numărul

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

De exemplu, în tabel sunt date rezultatele evaluării cunoștințelor elevilor ucraineni la olimpiadele matematice internaționale pe parcursul anilor 2009–2018 (echipa de participanți la olimpiadele matematice internaționale este formată nu mai mult de 6 persoane).

Anul	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Numărul de medalii	6	6	6	5	5	6	6	6	5	6

Pentru selecția dată **valoarea medie** este egală:

$$\bar{x} = \frac{6+6+6+5+5+6+6+6+5+6}{10} = \frac{57}{10} = 5,7.$$

Deoarece, pe an pot fi câștigate nu mai mult de 6 medalii, valoarea medie de 5,7 indică faptul că echipa Ucrainei evaluează cu succes la acest forum de prestigiu.

Să atragem atenția la faptul, că valoarea mediei a selecției se determină numai în cazul, în care datele colectate sunt numere.

Să analizăm o selecție, care constă din astfel de date care pot fi comparate una cu alta. Dacă cantitatea de date este impară și ele sunt scrise în ordine crescătoare, atunci **mediana** acestei selecții este numită cea din care este plasată în mijlocul listei.

De exemplu, în multe universități din Ucraina a fost introdusă evaluarea cunoștințelor studenților nu după o scală numerică, ci după scara literelor: A, B, C, D, E, F (A este cea mai mare, F este cea mai mică notă). Fie, că în timpul sondajului a 9 studenți, cu privire la rezultatul examenului final s-a primit următoarea selecție (consecutivitatea notelor):

$$F, F, D, D, \mathbf{C}, C, C, B, A$$

Vedem că în mijlocul listei este litera C . Deci, mediana selecției date este nota C .

Dacă selecția constă din număr par de date, de exemplu:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6,$$

atunci mediana selecției date se numește oricare dintre datele x_3 sau x_4 , adică oricare dintre cele două date aflate în mijlocul acestei enumerări.

De exemplu, dacă la cele 9 note date mai sus a studenților de adăugat mai o notă E , atunci obținem așa o secvență:

$$F, F, E, D, \mathbf{D}, \mathbf{C}, C, C, B, A.$$

Se vede, că în mijlocul listei sunt literele D și C . Deci, mediana selecției date sunt notele D și C .

Atrageți atenția la faptul, că în exemplele aduse aflarea medianei selecției datele cercetate nu sunt numere.

Dacă datele studiate sunt numere, în cazul cantității pare de date mediană a selecției se permite de asemenea de considerat media aritmetică a două numere situate în mijlocul acestei liste ordonate. De exemplu, dacă de analizat o selecție din patru date numerice:

$$1, 2, 3, 7,$$

atunci numărul $\frac{2+3}{2} = 2,5$ se poate considera mediană a acestei selecții.

Să cercetăm o altă caracteristică a selecției. **Modă** a selecției date sunt numite acele date care apar în enumerare cel mai des. Dacă astfel de date sunt câteva, fiecare din ele este moda selecției date. De exemplu,

dacă selecția este alcătuită din șase numere: 1, 2, 2, 3, 3, 3, atunci numărul 3 este moda selecției date.

În tabel este prezentat numărul de medalii de fiecare fel, pe care elevii ucraineni le-au câștigat la olimpiadele internaționale de matematică în perioada anilor 1993–2018.

Medalii de aur	Medalii de argint	Medalii de bronz	Fără medalii
38	59	44	15

Numărul 59 arată, că elevii ucraineni cel mai des câștigau medalii de argint. Indicatorul «medalii de argint» este moda datelor expuse.



1. Ce se numește amplitudinea selecției?
2. Ce se numește valoarea medie a selecției?
3. Explicați, ce se numește mediana selecției.
4. Ce se numește moda selecției?



EXERCIȚII

- 15.1.°** Scrieți numele elevilor, care au fost interogați de profesor la lecția trecută de matematică în timpul controlului temei de acasă. Ce este totalitatea generală și selecție din studiul statistic referitor la rezultatele executării temei de acasă.
- 15.2.°** Rezultatul lucrului al unui program de calculator, care modelează un studiu statistic este un număr oarecare întreg cuprins între -128 și 128 . După 5 lansări consecutive, programul a afișat următoarele rezultate: 62, -15 , 31, 103, -22 . Ce este totalitatea generală în acest studiu statistic? Ce este selecție? Găsiți amplitudinea selecției.
- 15.3.°** Elevii au fost sondați referitor la obiectul lor preferat în școală. Care indici statistici (amplitudinea, valoarea medie, mediana, moda) pot fi determinați pentru datele colectate?
- 15.4.°** La comanda întreprinderilor din industria ușoară sunt efectuate cercetări, rezultatele căror sunt mărimile hainelor în format internațional (simbolurile: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Care pot fi indicii statistici (amplitudinea, valoarea medie, mediana, moda) determinați pentru datele colectate?

15.5.° Se dă selecția: 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 12. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda selecției date.

15.6.° Se dă selecția: 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda selecției date.

15.7.° Printre elevii și elevele din clasa 11 s-a efectuat un sondaj: cât timp în fiecare zi petrec ei la aer proaspăt. Rezultatele sondajului sunt prezentate sub forma unei diagrame reprezentată în figura 15.5. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda selecției date.

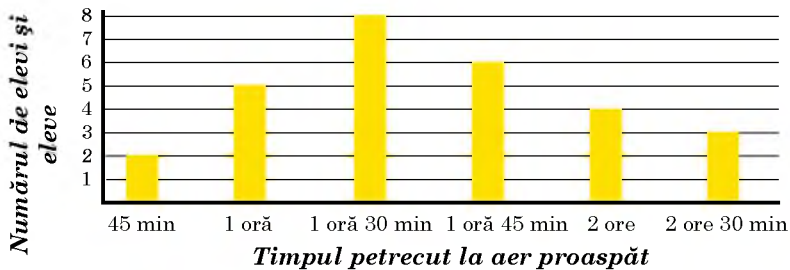


Fig. 15.5

15.8.° Determinați valoarea medie și mediana selecției 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6.

15.9.° Folosind tabelul temperaturilor medii ale aerului în ianuarie în unele orașe ale lumii, calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda selecției date.

Orașul	Temperatura, °C	Orașul	Temperatura, °C
Amsterdam	3	Moscova	-10
Atena	8	Nairobi	27
Buenos Aires	23	New York	0
Hong Kong	24	Rio de Janeiro	30
Ierusalim	8	Roma	8
Kiev	-6	Singapore	27
Montreal	-11	Tokyo	3

15.10.* Folosind tabelul roadei semințelor de floarea-soarelui în Ucraina, calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda selecției date.

Anul	Roada q/ha	Anul	Roada q/ha
2006	14	2012	17
2007	12	2013	22
2008	15	2014	19
2009	15	2015	22
2010	15	2016	22
2011	18	2017	20

15.11.* La campionatul Ucrainei de fotbal în anii 2017-2018 echipa «Șahtar» care a devenit campioană a Ucrainei, a jucat 32 de meciuri în care de două ori a marcat 5 goluri, de 3 ori - 4 goluri, de 9 ori - 3 goluri, de 8 ori - 2 goluri, de 6 ori - un gol și în 4 meciuri nu au marcat nici un gol. Calculați numărul mediu de goluri înscrise de «Șahtar» într-un meci.

15.12.* În timpul semestrului, o studentă a obținut 45 de note dintre care 7 de cinci, 22 de patru și 16 de trei. Calculați media notelor studentei.

15.13.** La evaluarea externă independentă a elevilor la matematică în anul 2018, s-a propus sarcina de testare: «Găsiți domeniul de definiție al funcției: $y = \frac{x+1}{x-2}$.

A	B	C
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

D	E
$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

»

În diagrama (fig. 15.6) sunt prezentate datele despre numărul de elevi, care au rezolvat această problemă. Găsiți moda răspunsurilor elevilor. Pentru răspunsul corect a fost dat 1 punct, iar pentru răspunsul necorect – 0 puncte. Calculați valoarea medie și mediana numărului de puncte care a fost obținut de către participanții la testare pentru această sarcină.

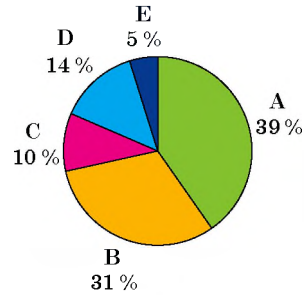


Fig. 15.6

- 15.14.**** Compania de telefonie vrea să știe despre numărul de apeluri telefonice pe care omul le face pe parcursul zilei. Datele pentru 100 de persoane sunt prezentate în diagramă (figura 15.7). Calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda a acestei selecții.

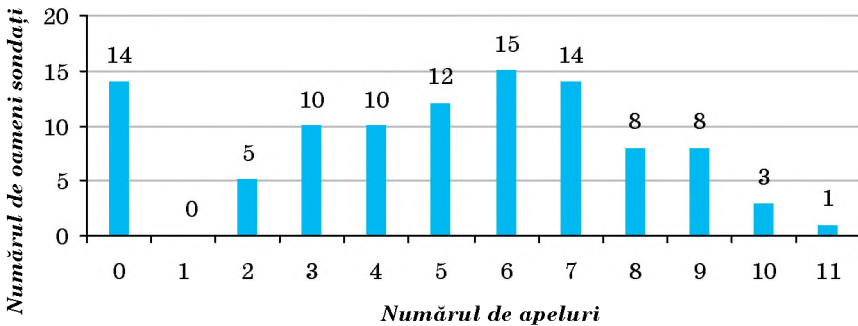


Fig. 15.7

- 15.15.**** În diagrama din figura 15.8 sunt prezentate datele despre numărul de cărți pe care le-au citit în timp de o lună 50 de școlari sondați. Calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana și moda a acestei selecții.

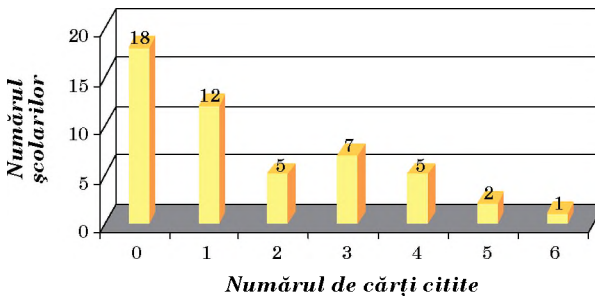


Fig. 15.8



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

15.16. Calculați valoarea expresiei:

$$1) \sqrt[6]{(8 - \sqrt{7})^6} + \sqrt[4]{(2 - \sqrt{7})^4};$$

$$2) \sqrt[8]{(\sqrt{5} - 6)^8} + \sqrt[7]{(\sqrt{5} - 3)^7}.$$

15.17. Cu ce este egală valoarea expresiei:

$$1) \log_{27} \log_8 \sqrt[5]{32}; \quad 3) \frac{25^{\frac{2}{5}} \cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}};$$

$$2) 36^{\frac{1}{3} \log_6 64 - 3 \log_6 2}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{9}}?$$

15.18. Găsiți valoarea expresiei $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, dacă $\cos \alpha = -0,8$

$$\text{și } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

ÎNSĂRCINAREA NR. 3 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

- Câte numere de șase cifre care sunt multiplele lui 10 și toate cifrele cărora sunt diferite, pot fi scrise folosind cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?
A) 36; B) 60; C) 24; D) 120.
- Câte numere pare de trei cifre pot fi scrise cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
A) 288; B) 405; C) 360; D) 720.
- În secția de atletica ușoară, se ocupă 30 de băieți și 10 fete. În câte moduri, se poate face o echipă din 7 persoane astfel, ca în ea să fie cinci băieți și două fete?
A) $C_{30}^5 \cdot C_{10}^2$; C) $C_{30}^{10} \cdot C_5^2$;
B) $C_{30}^5 + C_{10}^2$; D) $C_{30}^{10} + C_5^2$.
- Sunt 6 flori diferite. În câte moduri se poate alcătui un buchet din 3 flori sau din 5 flori?
A) $C_6^3 \cdot C_6^5$; C) $A_6^3 \cdot A_6^5$;
B) $C_6^3 + C_6^5$; D) $A_6^3 + A_6^5$.
- Într-o cutie sunt 15 bile: 10 albastre și 5 verzi. Care este probabilitatea faptului, că bila luată din cutie la întâmplare va fi galbenă?
A) 1; B) 0,5; C) 0; D) -1.
- În cutie sunt 10 bile albe și 5 bile roșii. Care este cel mai mic număr de bile ce ar trebui să fie luat la întâmplare din cutie, încât probabilitatea că printre ele obligatoriu vor fi 2 bile albe, să fie egală cu 1?
A) 5 bile; B) 6 bile; C) 7 bile; D) 10 bile.
- Fie probabilitatea evenimentului A egală cu $P(A)$. În ce caz evenimentul A se numește adevărat?
A) $P(A) = 0$; C) $P(A) > 0,99$;
B) $P(A) > 0$; D) $P(A) = 1$.
- Probabilitatea de a cumpăra o pereche de cizme rebut a unei companii renumite este 0,023. Câte perechi de încălțăminte rebut se conțin garantat în lotul de 1000 de perechi de cizme ale acestei companii?
A) mai puțin de 23; C) exact 23;
B) mai mult de 23; D) este imposibil de răspuns.
- Formând un număr de telefon, abonatul a uitat a doua cifră a numărului. Care este probabilitatea evenimentului că el v-a forma numărul corect din prima încercare?
A) 0,01; B) 0,1; C) 0,5; D) 1.

10. În clasă învață 18 fete și 12 băieți. Aleatoriu este aleasă o persoană pentru participarea la adunarea școlară. Care este probabilitatea că se va alege băiat?

- A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{2}{5}$.

11. Pe 20 de fișe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 20. Care este probabilitatea ca numărul, scris pe fișa selectată aleatoriu, nu se împarte fără rest nici la 4, nici la 5?

- A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{11}{20}$; D) $\frac{3}{5}$.

12. Pe 5 fișe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 5. Care este probabilitatea că produsul numerelor scrise pe două fișe, luate aleatoriu, va fi egal cu un număr impar?

- A) 0,2; B) 0,3; C) 0,5; D) 0,25.

13. Cu ce este egală mediana totalității datelor 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

- A) 5; B) 4; C) 3; D) 2.

14. Cu ce este egală mediana selecției 10, 16, 11, 12, 14, 15, 14, 15, 12, 14, 10?

- A) 13; B) 14; C) 12; D) 12,5.

15. După datele recensământului populației din Ucraina din anul 2001 structura de vârstă a populației s-a caracterizat prin următoarele date:

Vârsta	Numărul populație permanente, mii. persoane
0–9	4533,3
10–19	7308,1
20–29	6891,6
30–39	6621,2
40–49	7298,7
50–59	5245,3
60–69	5522,2
70–79	3740,0
80 și mai mult	1060,8

Care grupă de vârstă a determinat moda componentei de vârstă a populației din Ucraina în 2001?

A) 0–9; B) 10–19; C) 40–49; D) 80 și mai mari.

16. Conform rezultatelor testării la matematică a 25 de elevi din clasa a unsprezecea s-a format tabelul distribuirii numărului de erori, comise de un elev:

Numărul de erori	0	1	2	3	4
Numărul de elevi	5	4	6	8	2

Găsiți valoarea medie a selecției.

A) 2,5; B) 1,88; C) 2; D) 1,92.

17. Conform condiției problemei 16 indicați moda selecției date.

A) 0; B) 8; C) 3; D) 4.

18. La aruncarea monedei de 20 de ori la rând, a căzut stema. Care este probabilitatea că la următoarea aruncare iarăși v-a cădea stema?

A) 0,5; B) $\frac{1}{21}$; C) $\frac{1}{2^{21}}$; D) 0.



PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Permutări

Numărul de permutări de n elemente se notează cu simbolul P_n .
Pentru oricare n natural este adevărată formula $P_n = n!$.

Aranjamente

Numărul tuturor aranjamentelor posibile de n elemente luate câte k elemente, se notează cu simbolul A_n^k .

Pentru orice n și k naturale astfel, că $k \leq n$, este adevărată formula

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Combi-nații

Numărul tuturor combinațiilor posibile de n elemente luate câte k elemente se notează cu simbolul C_n^k .

Pentru orice n și k natural astfel, că $k \leq n$, este adevărată formula

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu

Probabilitatea P a evenimentului A se poate calcula după formula

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

unde n – numărul de rezultate egal posibile care pot fi obținute în timpul experienței, m – numărul de rezultate favorabile care determină evenimentul A .

Elemente ale statisticii matematice

Amplitudinea selecției, care constă din date numerice, se numește diferența dintre valorile cea mai mare și cea mai mică ale datelor selecției.

Valoarea medie a selecției, care constă din datele numerice

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \text{ , se numește numărul } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Mediana selecției, ce constă dintr-un număr impar de date, se numește cea din date care este situată în mijlocul listei, când datele sunt scrise în ordine crescătoare.

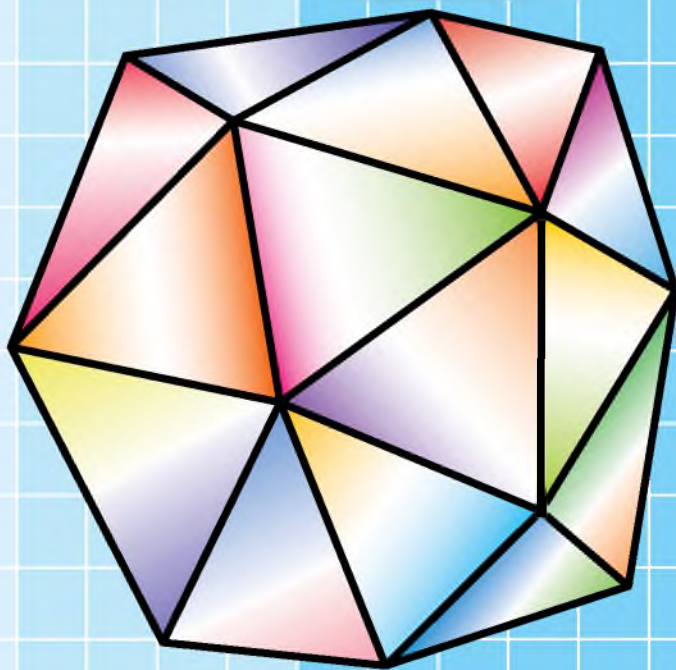
Mediana selecției, ce constă dintr-un număr par de date, se consideră oricare dintre cele două date, situate în mijlocul listei, când datele sunt scrise în ordine crescătoare, sau media lor aritmetică (dacă datele studiate sunt numere).

Modă selecției se numesc acelea date care se întâlnesc în enumerare cel mai des.

Capitolul 2

Geometrie

- § 4. Poliedre
- § 5. Corpuri de rotație
- § 6. Volumele corpurilor.
Aria sferei



§4

POLIEDRE



În acest paragraf o să precizați și extindeți cunoștințele despre poliedre. O să obțineți informații noi despre prismă, piramidă și alte tipuri separate ale lor.

16. Prisma

În figura 16.1 sunt prezentate figurile spațiale cunoscute vouă. Fiecare din aceste figuri are dimensiuni finite și se alcătuiește din suprafață (granițele figurii) și a părții de spațiu mărginită de această suprafață.

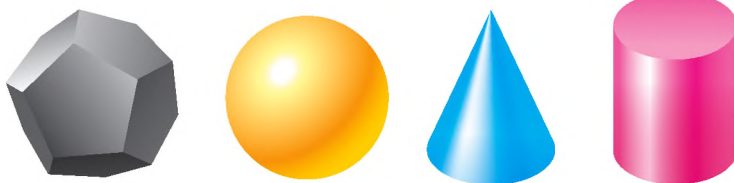


Fig. 16.1

Poliedrul, bila, conul, cilindrul sunt considerate figuri, care se numesc **corpuri geometrice** sau pur și simplu **corpuri**.

Nu orice figură în spațiu este corp. De exemplu, dreapta, planul, unghiul diedru nu sunt corpuri. Aceste figuri sunt infinite. Definiția strictă a corpului este în afara cursului cercetat.

Definiție. Poliedru se numește corpul, suprafața căruia se alcătuiește dintr-un număr finit de poligoane.

Cu astfel de elemente ale poliedrelor, ca fețe, muchii și vârfuri, voi deja sunteți cunoscuți.

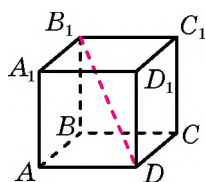


Fig. 16.2

Două fețe ale poliedrului se numesc megieșe, dacă ele au o muchie comună. De exemplu, fețele $A_1B_1C_1D_1$ și A_1B_1BA ale cubului $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (fig. 16.2) sunt vecine, deoarece muchia A_1B_1 la ele este comună.

Admitem, că punctul M este vârf al poliedrului. Unghiul cu vârful M al feței poliedrului se numește **unghiul plan al poliedrului de la vârful M** . De exemplu, în figura 16.2 unghiul DAB este unghi plan al cubului la vârful A .

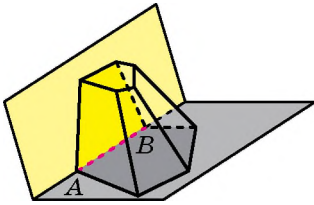


Fig. 16.3.

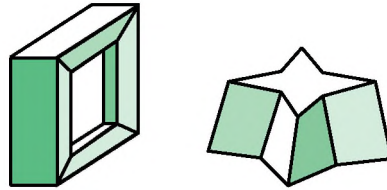


Fig. 16.4

Unghiul diedru al poliedrului de la muchia AB se numește unghiul diedru cu muchia AB , fețele cărui conțin fețele megieșe ale poliedrului, pentru care muchia AB este comună (fig. 16.3).

Segmentul care unește două vârfuri, ce nu aparțin unei fețe, se numește **diagonala poliedrului**. De exemplu, segmentul DB_1 este diagonala cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 16.2).

Poliedrele sunt convexe și concave (neconvexe).

Definiție. Poliedrul se numesc **convex**, dacă el este amplasat de aceeași parte a planului fiecărei fețe a lui.

Cubul și tetraedrul sunt exemple de poliedre convexe. În figura 16.4. sunt prezentate poliedre ne convexe.

Toate fețele poliedrelor convexe sunt poligoane convexe.

Aria suprafeței poliedrului se numește suma ariilor tuturor fețelor lui.

Să ne oprim mai detaliat la tipul poliedrului deja cunoscut de voi – prisma.

Definiție. Poliedrul, două fețe ale cărui sunt poligoane egale cu n laturi, care se află în plane paralele, iar restul n fețe sunt paralelograme, se numește **prismă cu n laturi**.

Vă amintim, că paralelogramele, despre care merge vorba în definiție, se numesc fețe laterale ale prisme; poligoane egale cu n laturi sunt bazele prisme; laturile bazei sunt muchiile bazei prisme; muchiile, care nu aparțin bazelor, sunt muchiile laterale ale prisme (fig. 16.5).

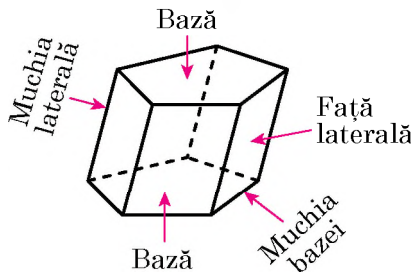


Fig. 16.5

Deoarece fețele laterale megieșe ale prisme sunt paralelograme, ce au latura comună – muchia laterală, atunci *toate muchiile laterale ale prisme sunt egale și paralele*.

Înălțimea prisme este numită perpendiculara coborâtă dintr-un punct oarecare al planului unei baze pe planul altei baze (Fig. 16.6). **Lungimea înălțimii prisme este egală cu distanța dintre planele bazelor ei.**

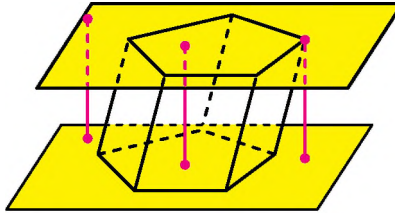


Fig. 16.6

Definiție. Prisma este numită **dreaptă**, dacă muchiile laterale ale ei sunt perpendiculare pe planul bazei.

De exemplu, paralelipipedul dreptunghic este un tip aparte de prismă dreaptă.

Fiecare muchie laterală a prisme drepte este înălțimea ei. Toate fețele laterale ale prisme drepte sunt dreptunghiuri.

Dacă prisma nu este dreaptă, atunci ea este numită **oblică**.

Definiție. Prisma este numită **regulată**, dacă ea este dreaptă și baza ei este un poligon regulat.

De exemplu, cubul este un tip separat de prismă patrulateră regulată.

În figura 16.7 sunt reprezentate prismele regulate triunghiulară și hexagonală.

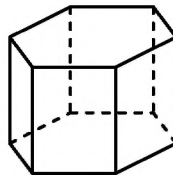
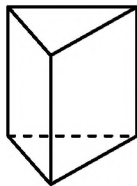


Fig. 16.7

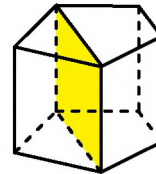


Fig. 16.8

Să cercetăm o prismă convexă cu n laturi ($n > 3$). Secțiunea prisme cu un plan, care trece prin două muchii laterale, ce nu aparțin unei fețe, intersectează bazele prisme pe diagonale (fig. 16.8). Astfel de secțiune este numită **secțiune diagonală a prisme**.

Secțiunea diagonală a oricărei prisme este un paralelogram, iar a prisme drepte – un dreptunghi.

Arie a suprafeței laterale a prisme este numită suma ariilor tuturor fețelor laterale. **Aria suprafeței prisme** (se mai numește: „**aria suprafeței totale a prisme**”) este numită suma ariilor tuturor fețelor ei.

Evident, că se execută astfel de egalitate:

$$S_t = S_l + 2S_{\text{bază}},$$

unde S_t este aria suprafeței prisme, S_l – aria suprafeței laterale a prisme, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei prisme.

Teorema 16.1. *Aria suprafeței laterale a prisme drepte este egală cu produsul perimetrului bazei ei și a muchiei laterale a prisme.*

Demonstrație. Fiecare față laterală a prisme drepte este un dreptunghi, o latură a căruia este muchia bazei, iar a doua – muchia laterală. Fie a_1, a_2, \dots, a_n – lungimile muchiilor bazei prisme, b – lungimea muchiei laterale. Atunci $S_l = a_1 b + a_2 b + \dots + a_n b = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) b$, deoarece suma, scrisă în paranteze, este egală cu perimetrul bazei prisme, atunci teorema este demonstrată. ◀

Rezultatul teoremei 16.1 este comod să fie prezentat de formula cu aspectul:

$$S_l = P_{\text{bază}} \cdot b,$$

unde $P_{\text{bază}}$ este perimetrul bazei prisme drepte, b – lungimea muchiei laterale a prisme.

Legătura dintre poliedrele, studiate în acest punct este ilustrată de schema, prezentată în figura 16.9.

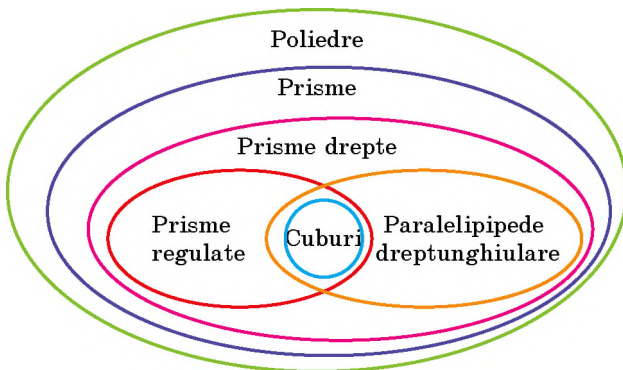
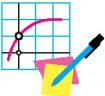


Fig. 16.9



1. Ce se numește poliedru?
2. Care fețe ale poliedrului se numesc megieșe?
3. Ce se numește unghi diedru al poliedrului?
4. Care poliedru se numește convex?
5. Ce se numește prismă?
6. Ce se numește înălțimea prisme?
7. Care prismă este numită dreaptă? oblică?
8. Care prismă este numită regulată?
9. Ce se numește secțiune diagonală a prisme?
10. Ce se numește arie a suprafeței prisme? suprafeței laterale a prisme?
11. Cu ce este egală aria suprafeței laterale a prisme drepte?



EXERCIȚII

- 16.1.**° Care este cel mai mic număr de fețe pe care îl poate avea o prismă? Această prismă are câte: 1) vârfuri; 2) muchii; 3) muchii laterale?
- 16.2.**° Prisma are 12 fețe. Care poligon se află în baza ei?
- 16.3.**° În ce prismă muchiile laterale sunt paralele cu înălțimea ei?
- 16.4.**° Este oare corectă afirmația:
- 1) muchia laterală a prisme drepte este perpendiculară la oricare diagonală a bazei ei;
 - 2) dacă toate muchiile prisme sunt egale, atunci ea este regulată;
 - 3) dacă toate muchiile prisme drepte sunt egale, atunci ea este regulată?
- 16.5.**° Baza prisme drepte este un trapez isoscel, unul din unghiurile căruia este egal cu 110° (fig. 16.10). Aflați unghiurile diedre ale prisme de la muchiile laterale.
- 16.6.**° Latura bazei, prisme regulate patrulateră este egală cu 3 cm, iar înălțimea – $3\sqrt{6}$ cm. Aflați diagonala prisme.
- 16.7.**° Latura bazei prisme regulate triunghiulare este egală cu 5 cm, iar diagonala feței laterale – 13 cm. Aflați înălțimea prisme.
- 16.8.**° Aflați aria suprafeței laterale a prisme drepte, înălțimea căreia este egală cu 6 cm, iar baza este paralelogramul cu laturile 2 cm și 3 cm.

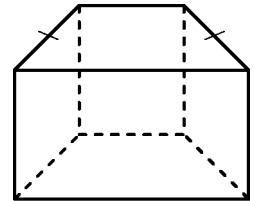


Fig. 16.10

- 16.9.° Aflați latura bazei prismei heptagonale regulate, înălțimea căreia este egală cu 10 cm, iar aria suprafeței laterale – 420 cm^2 .
- 16.10.° Aflați aria suprafeței totale a prismei patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu a , iar înălțimea cu H .
- 16.11.° Aflați aria suprafeței totale a prismei triunghiulare regulate, latura bazei căreia este egală cu a , iar înălțimea cu H .
- 16.12.° Unghiul dintre muchia laterală și planul bazei prismei oblice este egal cu 30° , înălțimea prisme este egală cu 10 cm. Aflați muchia laterală a prisme.
- 16.13.° Punctele D și E sunt mijlocurile muchiilor AC și BC ale prisme regulate $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 16.11). Planul, care trece prin dreapta DE și creează cu planul ABC unghiul de 30° , intersectează muchia CC_1 în punctul F . Aflați aria secțiunii create a prisme, dacă latura bazei ei este egală cu 12 cm.

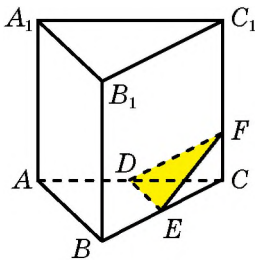


Fig. 16.11

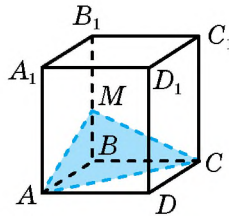


Fig. 16.12

- 16.14.° Prin diagonala AC a bazei prisme regulate $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ s-a dus un plan, care creează cu planul ABC un unghi de 45° și intersectează muchia BB_1 în punctul M (fig. 16.12). Aflați aria secțiunii create a prisme, dacă latura bazei ei este egală cu 8 cm.
- 16.15.° Latura bazei prisme regulate patrulatere este egală cu a , iar unghiul dintre diagonala prisme și fața laterală alcătuieste 30° . Aflați:
1) înălțimea prisme;
2) unghiul dintre diagonala prisme și planul bazei.
- 16.16.° Aflați diagonalele prisme regulate hexagonale, fiecare muchie a căreia este egală cu a .
- 16.17.° Baza prisme drepte este un romb cu latura a și unghiul ascuțit α . Diagonala mare a prisme creează cu planul bazei unghiul β . Aflați înălțimea prisme.

- 16.18.*** Baza unei prisme drepte, diagonalele căreia sunt egale cu 10 cm și 16 cm, este un romb. Găsiți laturile bazei prisme, dacă înălțimea ei este egală cu 4 cm.
- 16.19.*** Laturile bazei prisme triunghiulare drepte sunt egale cu 5 cm, 12 cm și 13 cm, iar aria suprafeței totale – 270 cm². Aflați înălțimea prisme.
- 16.20.*** Aria suprafeței laterale a prisme patrulater regulate este egală cu 96 cm², iar aria suprafeței totale – 128 cm². Aflați înălțimea prisme.
- 16.21.*** Calculați aria suprafeței laterale a prisme patrulater regulate, diagonala căreia este egală cu 12 cm și este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30°.
- 16.22.*** Diagonala prisme patrulater regulate este egală cu 5 cm, iar diagonala feței laterale – 4 cm. Aflați aria suprafeței laterale a prisme.
- 16.23.**** Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) este baza prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$. Prin dreapta CC_1 s-a dus planul, care este perpendicular la dreapta AB și intersectează muchia AB în punctul D . Aflați aria secțiunii create a prisme, dacă $AD = 18$ cm, $BD = 2$ cm, iar înălțimea prisme este egală cu 8 cm.
- 16.24.**** Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) este baza prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$, iar segmentul CM – mediana triunghiului ABC . Înălțimea prisme este egală cu ipotenuza bazei ei. Aflați aria secțiunii prisme cu planul, care trece prin dreptele CC_1 și CM , dacă $AC = 30$ cm, $BC = 40$ cm.
- 16.25.**** Fiecare muchie a prisme regulate $ABCA_1B_1C_1$ este egală cu a . Aflați:
- 1) aria secțiunii prisme, care trece prin punctele A , B și C_1 ;
 - 2) unghiul dintre planul secțiunii date și planul bazei al prisme.
- 16.26.**** Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) este baza prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$. Planul care trece prin dreapta AC , creează cu planul bazei unghiul β și intersectează muchia BB_1 în punctul D . Aflați aria secțiunii create, dacă $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.
- 16.27.**** Baza prisme drepte este un romb cu unghiul ascuțit α , diagonala mare a rombului este egală cu d . Prin diagonala mică a bazei de jos și vârful unghiului ascuțit al bazei de sus s-a dus un plan, care creează cu planul bazei de jos a prisme unghiul β . Aflați:
- 1) înălțimea prisme;
 - 2) aria secțiunii create a prisme.

- 16.28.** Baza prisme drepte $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este trapezul isoscel $ABCD$, bazele căruia BC și AD sunt egale corespunzător cu 11 cm și 21 cm, iar latura laterală – 13 cm. Aria secțiunii diagonale a prisme este egală cu 180 cm^2 . Aflați aria suprafeței laterale a prisme.
- 16.29.** Diagonala feței laterale a prisme hexagonale regulate este egală cu 10 cm, iar aria suprafeței laterale – 288 cm^2 . Aflați latura bazei și înălțimea prisme.
- 16.30.* Înălțimea prisme patrulater regulate este egală cu h . În fețele laterale megieșe sunt duse două diagonale, care au extremitate comună. Aflați aria secțiunii, care trece prin diagonalele date, dacă unghiul dintre ele este egal cu α .
- 16.31.* Înălțimea prisme patrulater regulate este egală cu h . Unghiul dintre diagonalele a două fețe laterale, care au capăt comun, este egal cu α . Aflați aria secțiunii, care trece prin diagonalele date.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 16.32. Baza triunghiului isoscel obtuzunghic este egală cu 18 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui – 15 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.
- 16.33. Diagonala mare a rombului este egală cu d , iar unghiul ascuțit al lui este egal cu α . Aflați:
- 1) latura rombului;
 - 2) diagonala mică a rombului;
 - 3) aria rombului;
 - 4) raza circumferinței, înscrise în romb.

17. Paralelipipedul

Definiție. Paralelipiped se numește prisma, bazele căreia sunt paralelograme.

În figura 17.1 este prezentat paralelipipedul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Oricare față a paralelipipedului este paralelogram.

Două fețe nemegieșe ale paralelipipedului se numesc **fețe opuse ale paralelipipedului**. De exemplu, în figura 17.1 fețele $AA_1 B_1 B$ și $DD_1 C_1 C$ sunt opuse.

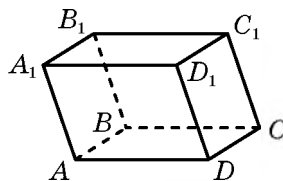


Fig. 17.1

Deoarece $AA_1 \parallel DD_1$ și $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (fig. 17.1), atunci după criteriul de paralelism ale planelor $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Raționând analogic, se poate demonstra, că *oricare două fețe opuse ale paralelipipedului se află în plane paralele*.

Paralelipipedul este numit **drept**, dacă muchiile lui laterale sunt perpendiculare la planul bazei. La paralelipipedul drept toate fețele laterale sunt dreptunghiuri, iar bazele – paralelograme.

Paralelipipedul drept se numește **dreptunghic**, dacă bazele lui sunt dreptunghiuri.

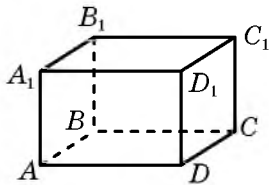


Fig. 17.2

În figura 17.2 este prezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Toate fețele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.

Prisma patrulateră regulată este un tip separat de paralelipiped dreptunghic.

Lungimile a trei muchii ale paralelipipedului dreptunghic, care pornesc dintr-un vârf, se numesc **dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghic**. În figura 17.2 lungimile mu-

chiilor AB , AD și AA_1 sunt dimensiunile paralelipipedului dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Paralelipipedul dreptunghiular se numește **cube**, dacă toate dimensiunile lui sunt egale. Toate fețele cubului sunt pătrate.

Legătura între paralelipipede și tipurile lor separate este ilustrată de schema, prezentată în figura 17.3.

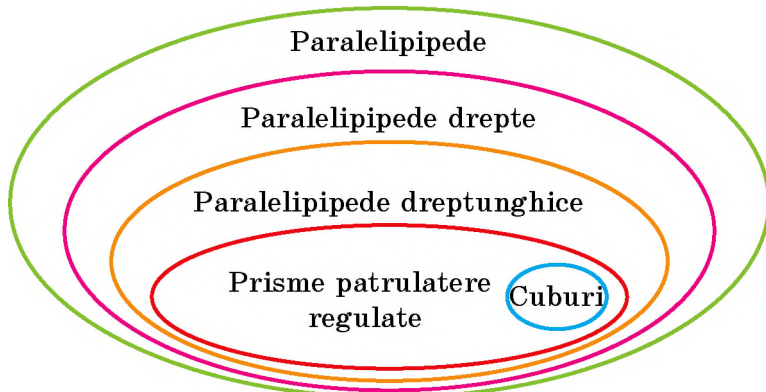


Fig. 17.3

Teorema 17.1. *Pătratul oricărei diagonale a paralelipedului dreptunghiular este egal cu suma pătratelor dimensiunilor lui.*

Demonstrație. Să considerăm diagonala AC_1 a paralelipedului dreptunghiular $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 17.4).

Să demonstrăm, că $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Deoarece triunghiul ABC este dreptunghi ($\angle ABC = 90^\circ$), atunci se poate scrie: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Deoarece $BC = AD$, atunci

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \quad (1)$$

Paralelipedul dat este dreptunghi, de aceea $C_1 C \perp ABC$. Deci, triunghiul ACC_1 este dreptunghi ($\angle ACC_1 = 90^\circ$). Atunci $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Deoarece $CC_1 = AA_1$, atunci $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$.

Ținând cont de (1), se poate scrie:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Pentru restul diagonalelor demonstrația este analogică. ◀

Din teorema 17.1 reiese, că diagonalele paralelipedului dreptunghiular sunt egale.

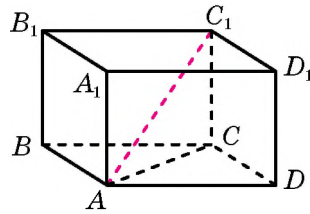
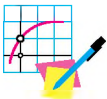


Fig. 17.4



1. Ce se numește paraleliped?
2. Care fețe ale paralelipedului se numesc opuse?
3. Care paraleliped se numește drept?
4. Care paraleliped se numește dreptunghi?
5. Ce se numesc dimensiuni ale paralelipedului dreptunghi?
6. Care paraleliped drept se numește cub?
7. Formulați teorema despre pătratul diagonalei paralelipedului dreptunghi.



EXERCIȚII

- 17.1.° Se poate oare de considerat corectă astfel de definiție a cubului: „Cub se numește prisma patrulateră regulată, înălțimea căruia este egală cu latura bazei”?
- 17.2.° Demonstrați, că în paralelipedul drept planul secțiunii diagonale este perpendicular pe planul bazei.

17.3.° Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 5 cm și 12 cm, iar diagonala paralelipipedului creează cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați înălțimea paralelipipedului.

17.4.° Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 7 cm și 24 cm, iar înălțimea – 4 cm. Aflați aria secțiunii diagonale a paralelipipedului.

17.5.° Aflați diagonala paralelipipedului dreptunghic, dimensiunile cărui sunt egale cu 2 cm, 3 cm și 6 cm.

17.6.° Aflați dimensiunile paralelipipedului dreptunghic, dacă ele se raportează ca $1 : 2 : 2$, iar diagonala paralelipipedului este egală cu 6 cm.

17.7.° Muchia cubului este egală cu a . Cu ce este egală diagonala cubului?

17.8.° Aria suprafeței cubului este egală cu 216 cm^2 . Aflați aria secțiunii diagonale a lui.

17.9.* Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABC-DA_1B_1C_1D_1$ (fig. 17.5), $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 7 \text{ cm}$, $AA_1 = 12 \text{ cm}$. Aflați unghiul:

- 1) dintre dreapta DC_1 și planul BCC_1 ;
- 2) dintre dreapta B_1D și planul ABB_1 .

17.10.* Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABC-DA_1B_1C_1D_1$ (fig. 17.5), $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 7 \text{ cm}$, $AA_1 = 12 \text{ cm}$. Aflați unghiul:

- 1) dintre dreapta DC_1 și planul $A_1B_1C_1$;
- 2) dintre dreapta B_1D și planul ABC .

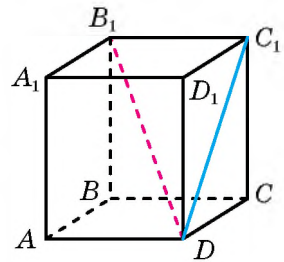


Fig. 17.5

17.11.* Din patru cuburi egale, muchia cărora este egală cu 1 cm, s-a alcătuit un paralelipiped dreptunghic. Cu ce este egală aria suprafeței totale a acestui paralelipiped?

17.12.* Baza paralelipipedului drept este romb cu unghiul ascuțit α și diagonala mică d . Diagonala mare a paralelipipedului face cu planul bazei unghiul β . Aflați aria suprafeței laterale a paralelipipedului.

17.13.* Baza paralelipipedului drept este romb cu latura de 6 cm și unghiul de 60° . Diagonala mică a paralelipipedului este egală cu diagonala mare a bazei lui. Aflați aria suprafeței laterale a paralelipipedului.

17.14.* Laturile bazei paralelipipedului drept sunt egale cu $2\sqrt{2} \text{ cm}$ și 4 cm, iar unul din unghiurile bazei este egal cu 45° . Diagonala mare a paralelipipedului este egală cu 7 cm. Aflați aria suprafeței laterale a paralelipipedului.

- 17.15.**** Laturile bazei paralelipipedului drept sunt egale cu 2 cm și $2\sqrt{3}$ cm, iar unul din unghiurile bazei este egal cu 30° . Aria secțiunii diagonale a paralelipipedului, care trece prin diagonala mică a bazei, este egală cu 8 cm^2 . Aflați aria suprafeței totale a paralelipipedului.
- 17.16.**** Demonstrați, că dacă diagonalele paralelipipedului drept sunt egale, atunci acest paralelipiped este dreptunghic.
- 17.17.**** Baza $ABCD$ a paralelipipedului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este pătrat. Vârful A_1 este egal depărtat de la toate vârfurile bazei $ABCD$. Aflați înălțimea paralelipipedului, dacă latura bazei este egală cu 8 cm, iar muchia laterală a paralelipipedului – 6 cm.
- 17.18.**** Baza $ABCD$ a paralelipipedului oblic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este pătrat, iar planele fețelor $AA_1 B_1 B$ și $CC_1 D_1 D$ sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflați aria feței $AA_1 D_1 D$, dacă fiecare muchie a paralelipipedului este egală cu 8 cm.
- 17.19.*** Baza paralelipipedului drept este romb, iar ariile secțiunilor diagonale sunt egale corespunzător cu S_1 și S_2 . Aflați aria suprafeței laterale a paralelipipedului.
- 17.20.*** Baza paralelipipedului drept este romb, aria căruia este egală cu S . Ariile secțiunilor diagonale sunt egale corespunzător cu S_1 și S_2 . Aflați muchia laterală a paralelipipedului.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 17.21.** Aflați aria trapezului isoscel, bazele căruia sunt egale cu 23 cm și 17 cm, iar diagonala – 25 cm.
- 17.22.** Latura laterală mică a trapezului dreptunghic este egală cu 10 cm, iar unul din unghiuri – 45° . Aflați aria acestui trapez, dacă în el se poate înscrie o circumferință.

18. Piramida

Definiție. Poliedrul, o față a căruia este poligon cu n laturi, iar restul fețelor – triunghiuri, ce au un vârf comun, se numește **piramidă cu n laturi**.

Vă amintim, că triunghiurile, care au vârf comun, se numesc fețe laterale ale piramidei, iar însuși vârful – vârf al piramidei; poligonul cu n laturi, despre care se spune în definiție, se numește baza piramidei.

iar laturile lui –muchii bazei piramidei; muchiile, care nu aparțin bazei, se numesc muchii laterale ale piramidei (fig. 18.1).

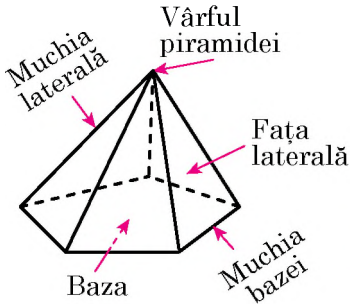


Fig. 18.1

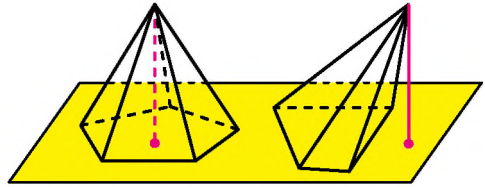


Fig. 18.2

Înălțime **a piramidei** este numită perpendiculara, coborâtă din vârful piramidei pe planul bazei (fig. 18.2).

Să cercetăm piramida convexă cu n laturi ($n > 3$). Secțiunea piramidei cu planul, care trece prin două muchii laterale, ce nu aparțin unei fețe, intersectează baza piramidei pe diagonală (fig. 18.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune diagonală a piramidei**.

Secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi.

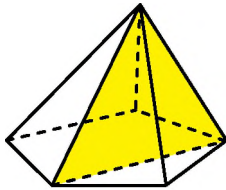


Fig. 18.3

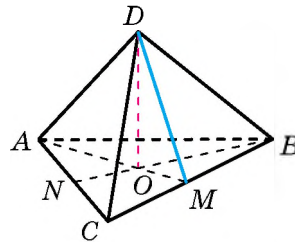


Fig. 18.4

Definiție. Piramida este numită **regulată**, dacă baza ei este un poligon regulat și piciorul înălțimii piramidei este centrul acestui poligon.

În figura 18.4 este prezentată piramida triunghiulară regulată $ADBC$ cu baza ABC . Triunghiul ABC este echilateral. Proiecția vârfului D pe planul ABC este centrul triunghiului – punctul O . Pentru aflarea acestui punct în figura 18.4 s-au dus medianele AM și BN ale triunghiului ABC .

În figura 18.5 este prezentată piramida patrulateră regulată $EABCD$. Patrulaterul $ABCD$ este pătrat, punctul O – centrul lui, segmentul EO este înălțimea piramidei. Deoarece centrul pătratului coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor lui, atunci se poate de făcut concluzia: proiecția vârfului piramidei patrulatere regulate pe planul bazei – acesta-i punctul de intersecție al diagonalelor pătratului, care este baza piramidei.

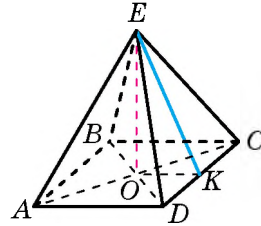


Fig. 18.5

Piramida triunghiulară regulată, în care toate fețele sunt egale, se numește **tetraedru regulat**.

Menționăm unele proprietăți ale piramidei regulate.

Toate muchiile laterale ale piramidei regulate sunt egale, toate fețele laterale ale piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele egale (demonstrați aceasta de sine stătător).

Apotemă a piramidei regulate este numită înălțimea feței laterale, coborâtă din vârful piramidei.

În figura 18.4 este dus segmentul DM , unde punctul M – mijlocul muchiei BC . Deoarece triunghiul BCD este isoscel cu baza BC , atunci segmentul DM este înălțimea lui. Deci, segmentul DM este apotema piramidei triunghiulare regulate $DABC$.

În figura 18.5 segmentul EK , unde K este mijlocul muchiei DC , este apotema piramidei patrulatere regulate $EABCD$.

Toate apotemele piramidei regulate sunt egale (demonstrați aceasta de sine stătător).

Aria suprafeței laterale a piramidei este numită suma ariilor tuturor fețelor laterale. **Aria suprafeței piramidei** (se mai spune: **aria suprafeței totale a piramidei**) se numește suma ariilor tuturor fețelor ei.

Evident, că se execută astfel de egalitate:

$$S_t = S_l + S_{\text{bază}},$$

Unde S_t – aria suprafeței piramidei, S_l – aria suprafeței laterale a piramidei, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei piramidei.

Teorema 18.1. *Aria suprafeței laterale a piramidei regulate este egală cu produsul perimetrului bazei ei și a apotemei.*

Demonstrație. Să cercetăm piramida regulată cu n laturi cu muchia bazei, ce este egală cu a și apotema, ce este egală cu d . Atunci aria feței laterale este egală cu $\frac{1}{2}ad$. Toate fețele laterale a piramidei

regulate cu n laturi sunt triunghiuri egale, ceea ce înseamnă că aria suprafeței laterale este egală cu $\left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n$, adică $S_l = \left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n = \frac{1}{2}(an) \cdot d$. Deoarece produsul an este egal cu perimetrul bazei, atunci teorema este demonstrată. ◀

Rezultatul teoremei 18.1 este comod de-l prezentat în aspect de formulă

$$S_l = \frac{1}{2} P_{\text{bază}} \cdot d,$$

Unde $P_{\text{bază}}$ este perimetrul bazei piramidei, d – lungimea apotemei piramidei regulate.

Se poate demonstra, că au loc astfel de afirmații.

1) *Dacă muchiile laterale ale piramidei sunt egale sau muchiile laterale creează cu planul bazei unghiuri egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este centrul circumferinței circumscrise poligonului, care este baza piramidei.*

De exemplu, dacă muchiile laterale ale piramidei sunt egale, iar baza ei este triunghi dreptunghic, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este mijlocul ipotenuzei bazei (fig. 18.6).

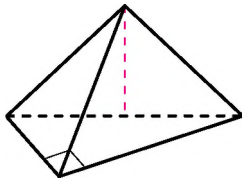


Fig. 18.6

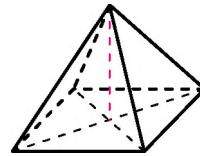


Fig. 18.7

2) *Dacă toate unghiurile diedre ale piramidei convexe de la muchiile bazei sunt egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este centrul circumferinței înscrise în poligonul, care este baza piramidei.*

De exemplu, dacă baza piramidei este romb și toate unghiurile diedre de la muchiile bazei sunt egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este punctul de intersecție al diagonalelor rombului (fig. 18.7).

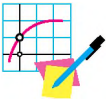
3) *Dacă fiecare din unghiurile diedre ale piramidei convexe de la muchiile bazei sunt egale cu α , atunci aria suprafeței laterale a piramidei S_l se poate calcula cu formula*

$$S_l = \frac{S_{\text{bază}}}{\cos \alpha},$$

unde $S_{\text{bază}}$ – aria bazei piramidei.



1. Ce se numește piramidă?
2. Ce se numește înălțimea piramidei?
3. Care secțiune se numește secțiune diagonală a piramidei?
4. Care piramidă este numită regulată?
5. Ce se numește apotema piramidei regulate?
6. Ce este numită aria suprafeței piramidei? suprafeței laterale a piramidei?
7. Cu ce este egală aria suprafeței laterale a piramidei regulate?



EXERCIȚII

18.1.° Piramida cu n - laturi are câte:

- 1) vârfuri; 2) fețe; 3) muchii?

18.2.° Care este cel mai mic număr de fețe pe care îl poate avea piramida?

18.3.° În figura 18.8. este prezentată piramida triunghiulară regulată $SABC$. Desenați figura în caiet și reprezentați:

- 1) înălțimea piramidei;
- 2) unghiul de înclinație a muchiei SA la planul bazei;
- 3) unghiul liniar al unghiului diedru al piramidei de la muchia BC .

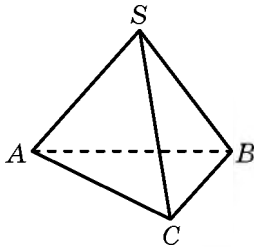


Fig. 18.8

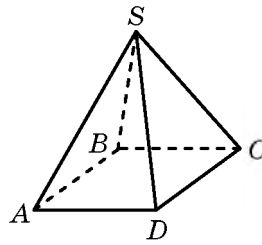


Fig. 18.9

18.4.° În figura 18.9 este prezentată piramida patrulateră regulată $SABCD$. Desenați figura în caiet și reprezentați:

- 1) înălțimea piramidei;
- 2) unghiul de înclinație a muchiei SC la planul bazei;
- 3) unghiul liniar al unghiului diedru al piramidei de la muchia AD .

18.5.° Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu 12 cm, iar muchia laterală face cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați înălțimea piramidei.

- 18.6.**° Înălțimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 8 cm, iar muchia laterală face cu planul bazei unghiul de 45° . Aflați latura bazei piramidei.
- 18.7.**° Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu 6 cm, iar înălțimea piramidei – 4 cm. Aflați:
- 1) apotema piramidei;
 - 2) unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei.
- 18.8.**° Apotema prisme triunghiulare regulate este egală cu 2 cm, iar latura bazei – 6 cm. Aflați:
- 1) înălțimea piramidei;
 - 2) unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei.
- 18.9.**° Latura bazei piramidei heptagonale regulate este egală cu 10 cm, iar apotema ei – 20 cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
- 18.10.**° Unghiul plan de la vârful piramidei octogonale regulate este egal cu 30° , iar muchia laterală – 2 cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei:
- 18.11.**° Aria suprafeței laterale a piramidei pentagonale regulate este egală cu 300 cm^2 , iar apotema ei – 15 cm. Aflați latura bazei piramidei.
- 18.12.**° Fiecare muchie a piramidei patrulatere regulate este egală cu 10 cm. Aflați aria suprafeței totale a piramidei.
- 18.13.**° Fiecare muchie a piramidei patrulatere regulate este egală cu 4 cm. Aflați aria suprafeței totale a piramidei.
- 18.14.**• Baza piramidei $MABCD$ este paralelogramul $ABCD$, diagonala BD a căruia este egală cu 4 cm. Înălțimea piramidei trece prin punctul intersecției al diagonalelor bazei, iar muchia laterală MA , ce este egală cu 8 cm, face cu planul bazei unghiul de 45° . Aflați muchia MD .
- 18.15.**• Baza piramidei este rombul, latura căruia este egală cu 13 cm, iar una din diagonale – 24 cm. Piciorul înălțimii piramidei este punctul de intersecție al diagonalelor bazei piramidei. Găsiți muchiile laterale ale piramidei, dacă înălțimea ei este egală cu 16 cm.
- 18.16.**• Muchia laterală a piramidei hexagonale regulate, egală cu b , creează cu planul bazei unghiul β . Aflați aria secțiunii diagonale a piramidei, care trece prin diagonala mare a bazei.
- 18.17.**• Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu α , iar muchia laterală creează cu planul bazei unghiul α . Aflați aria secțiunii diagonale a piramidei.

- 18.18.*** Demonstrați că în piramida regulată:
- 1) muchiile laterale creează unghiuri egale cu planul bazei;
 - 2) unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale.
- 18.19.*** Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu a , iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu α . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei
- 18.20.*** Diagonala bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu d , iar unghiul diedru al piramidei la muchia bazei este egal cu α . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
- 18.21.*** Apotema piramidei patrulatere regulate este egală cu 6 cm și creează cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
- 18.22.*** Înălțimea piramidei triunghiulare regulate este egală cu 5 cm, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu 45° . Aflați ari suprafeței laterale a piramidei.
- 18.23.**** Punctele D , E și F sunt mijlocurile muchiilor AB , AM și MC a piramidei regulate $MABC$ corespunzător, $AB = 8$ cm, $AM = 12$ cm.
- 1) Construiți secțiunea piramidei ce trece prin punctele D , E și F .
 - 2) Demonstrați, că secțiunea construită este dreptunghi.
 - 3) Aflați aria secțiunii.
- 18.24.**** Construiți secțiunea piramidei triunghiulare regulate cu planul, care trece prin piciorul înălțimii ei, paralel cu muchiile neconcurente ale piramidei. Aflați perimetrul acestei secțiuni, dacă latura bazei piramidei este egală cu 9 cm, iar muchia laterală – 12 cm.
- 18.25.**** Baza piramidei este triunghiul dreptunghic, ipotenuza căruia este egală cu 32 cm. Înălțimea piramidei este egală cu 12 cm. Aflați muchiile laterale ale piramidei, dacă ele creează unghiuri egale cu planul bazei.
- 18.26.**** Baza piramidei este dreptunghiul cu laturile 6 cm și 8 cm, iar fiecare muchie laterală face cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați înălțimea piramidei.
- 18.27.**** Baza piramidei este romb cu latura de 8 cm și unghiul de 30° . Fiecare din unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45° . Aflați:
- 1) aria suprafeței laterale a piramidei;
 - 2) înălțimea piramidei.

- 18.28.*** Baza piramidei este triunghiul cu laturile de 5 cm, 12 cm și 13 cm, iar toate unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 30° . Aflați:
- 1) aria suprafeței laterale a piramidei;
 - 2) înălțimea piramidei.
- 18.29.*** Baza piramidei este trapezul isoscel, bazele căruia sunt egale cu 4 cm și 16 cm, iar toate unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 60° . Aflați:
- 1) aria suprafeței laterale a piramidei;
 - 2) înălțimea piramidei.
- 18.30.*** Baza piramidei este dreptunghiul cu laturile de 4 cm și 12 cm. Planele a două fețe laterale sunt perpendiculare pe planul bazei. Planul încă a unei fețe, care trece prin latura mare a bazei, face cu planul bazei unghiul de 45° . Aflați:
- 1) înălțimea piramidei;
 - 2) aria suprafeței laterale a piramidei.
- 18.31.*** Baza piramidei este pătratul cu latura de 12 cm. Planele a două fețe laterale sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflați aria suprafeței totale a piramidei, dacă înălțimea ei este egală cu 5 cm.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 18.32.** Prelungirile laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M , $CD : CM = 3 : 5$, segmentul BC este baza mică a trapezului. Suma bazelor trapezului este egală cu 26 cm. Aflați segmentul AD .
- 18.33.** Diagonalele trapezului $ABCD$ cu bazele BC și AD se intersectează în punctul O . Aflați raportul ariilor triunghiurilor BOC și AOD , dacă $BC = 3$ cm, $AD = 9$ cm.



FRUMUSEȚEA ȘI INTELECTUL UCRAINEI

Roxolana, Solomia Krušelnițka, Lesea Ukrainka sunt femeile ucrainene din trecut cunoscute lumii întregi.

Fetele ucrainene contemporane devin cele mai bune nu numai în politică și artă, dar și pe arena competițiilor matematice. În cea mai prestigioasă olimpiadă Europeană de matematică pentru fetețe (EGMO) școlăritele ucrainene Sofia Dubova (2014), Olga Șevcenko (2017), și Alina Garbuzova (2018) de trei ori au câștigat întâietatea printre toți participanții, rezolvând absolut toate problemele propuse. În general, comanda ucraineană de fete până la ora actuală rămâne singura comandă din Europa, care de trei ori a devenit prima în colocviul oficial pe echipe. Astfel de realizări au convins comunitatea europeană să aleagă locul petrecerii EGMO în anul 2019 orașul Kiev. Suntem convinși că încă o dată vom vedea intelectualele noastre în fruntea pedestalului de onoare.



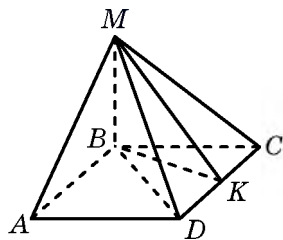
**Comanda Ucrainei la prima olimpiadă EGMO
(Cambridge, Marea Britanie, anul 2012)**

Componenta echipei (*de la stânga la dreapta*): Haritonova Elena (argint); Cravcenko Iulia (argint); Pavliuk Maria (argint); Sediuk Iaroslava (argint)

ÎNSĂRCINAREA NR. 4 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

- Calculați aria suprafeței laterale a prisme drepte, baza căreia este paralelogramul cu laturile de 8 cm și 22 cm, iar înălțimea prisme este egală cu 15 cm.
A) 900 cm^2 ; B) 450 cm^2 ; C) 600 cm^2 ; D) 2640 cm^2 .
- Cu ce este egală înălțimea prisme patrulatere regulate, dacă latura bazei ei este egală cu $9\sqrt{2}$ cm, iar diagonala prisme este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30° ?
A) $9\sqrt{3}$ cm; B) $9\sqrt{2}$ cm; C) $6\sqrt{3}$ cm; D) $6\sqrt{2}$ cm.
- Baza prisme drepte este triunghiul isoscel cu latura laterală 6 cm și unghiul 120° la vârf. Diagonala feței laterale a prisme, care conține baza triunghiului isoscel, este înclinată la planul bazei cu unghiul de 60° . Aflați înălțimea prisme.
A) 9 cm; B) 18 cm; C) 12 cm; D) $6\sqrt{3}$ cm.
- Găsiți diagonala feței laterale a prisme patrulatere regulate, dacă latura bazei ei este egală cu 6 cm, iar diagonala prisme – 10 cm.
A) 4 cm; B) $2\sqrt{2}$ cm; C) 8 cm; D) $4\sqrt{3}$ cm.
- Calculați aria suprafeței laterale a prisme triunghiulare regulate, fețele laterale ale căreia sunt pătrate cu diagonala de 8 cm.
A) 32 cm^2 ; B) 96 cm^2 ; C) 64 cm^2 ; D) 192 cm^2 .
- Baza prisme drepte este romb cu diagonalele 10 cm și 24 cm. Diagonala mică a prisme este egală cu 26 cm. Calculați aria suprafeței laterale a prisme.
A) 312 cm^2 ; B) 624 cm^2 ; C) 2496 cm^2 ; D) 1248 cm^2 .
- Diagonala paralelipipedului dreptunghiular este egală cu $\sqrt{29}$ cm, iar două dimensiuni ale lui – 2 cm și 3 cm. Aflați cea de-a treia dimensiune a paralelipipedului dreptunghiular.
A) 2 cm; B) $\sqrt{15}$ cm; C) 4 cm; D) $3\sqrt{2}$ cm.
- În paralelipipedul dreptunghiular $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ se cunoaște, că $AD = 24$ cm, $CD = 5$ cm, $AA_1 = 10$ cm. Cu ce este egală aria patrulatereului $A_1 B_1 C D$?
A) 100 cm^2 ; B) 120 cm^2 ; C) 125 cm^2 ; D) 130 cm^2 .
- Calculați aria suprafeței laterale a piramidei hexagonale regulate, latura bazei căreia este egală cu 8 cm, iar apotema – 12 cm.
A) 288 cm^2 ; B) 576 cm^2 ; C) 144 cm^2 ; D) 192 cm^2 .

10. Bază a piramidei $MABCD$, prezentată în figură, este un pătrat, muchia laterală MB este perpendiculară pe planul bazei piramidei, punctul K este mijlocul segmentului CD . Indicați unghiul linear al unghiului diedru al piramidei de la muchia CD .



- A) $\angle MAB$; C) $\angle MKB$;
 B) $\angle MDB$; D) $\angle MCB$.
11. Înălțimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 12 cm, iar apotema – 15 cm. Calculați aria suprafeței laterale a piramidei.
 A) 540 cm^2 ; B) 270 cm^2 ; C) 1080 cm^2 ; D) 720 cm^2 .
12. Latura bazei a piramidei triunghiulare regulate este egală cu 6 cm, iar înălțimea piramidei – $\sqrt{22}$ cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
 A) 90 cm^2 ; B) 45 cm^2 ; C) 60 cm^2 ; D) 30 cm^2 .
13. Latura bazei a piramidei patrulatere regulate este egală cu a , iar secțiunea diagonală este un triunghi dreptunghic. Aflați înălțimea piramidei.
 A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; D) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.
14. Unghiul diedru al piramidei patrulatere regulate de la muchia bazei este egal cu α . Aflați înălțimea piramidei.
 A) $2a \sin \alpha$; B) $2a \cos \alpha$; C) $2a \operatorname{tg} \alpha$; D) $\frac{2a}{\operatorname{tg} \alpha}$.
15. Latura bazei a piramidei triunghiulare regulate este egală cu 8 cm, iar fața laterală este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30° . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
 A) 32 cm^2 ; B) 64 cm^2 ; C) $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$; D) $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
16. Muchia laterală a piramidei patrulatere regulate este egală cu 8 cm și creează cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați apotema piramidei.
 A) 4 cm; B) $2\sqrt{14}$ cm; C) $4\sqrt{7}$ cm; D) $4\sqrt{2}$ cm.
17. Baza piramidei este romb cu latura a și unghiul α . Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu β . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
 A) $\frac{a^2 \sin \alpha}{\cos \beta}$; B) $\frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta}$; C) $a^2 \sin \alpha \cos \beta$; D) $\frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cos \beta$.

18. În baza piramidei se află triunghiul dreptunghic cu cateta b și unghiul opus ei β . Muchiile laterale ale piramidei creează cu planul bazei unghiul γ . Aflați înălțimea piramidei.

- A) $\frac{btg\gamma}{2\cos\beta}$ B) $\frac{btg\gamma}{2\sin\beta}$; C) $\frac{1}{2}b\cos\beta tg\gamma$; D) $\frac{1}{2}b\sin\beta tg\gamma$.



PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Poliedrul

Poliedru se numește corpul, suprafața căruia este alcătuită dintr-un număr finit de poligoane.

Poliedrul se numește convex, dacă el este amplasat de aceeași parte a planului oricăreia din fețele lui.

Prisma

Poliedrul, două fețe ale căruia sunt poligoane egale cu n laturi, ce se află în plane paralele, iar restul n fețe sunt paralelograme se numește prismă cu n laturi.

Prisma este numită dreaptă, dacă muchiile ei sunt perpendiculare pe planul bazei.

Prisma este numită regulată, dacă ea este dreaptă și baza ei este un poligon regulat.

Înălțimea prisme este numită perpendiculara, coborâtă dintr-un punct oarecare al planului unei baze pe planul altei baze.

Aria suprafeței laterale a prisme drepte

Aria suprafeței laterale a prisme drepte este egală cu produsul perimetrului bazei ei și a muchiei laterale a prisme.

Paralelipipedul

Paralelipiped este numită prisma, baza căreia este un paralelogram. Paralelipipedul este numit drept, dacă muchiile lui laterale sunt perpendiculare pe planul bazei.

Paralelipipedul drept este numit dreptunghiular, dacă bazele lui sunt dreptunghiuri.

Lungimile a trei muchii ale paralelipipedului dreptunghiular care pornesc dintr-un vârf, se numesc dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghiular.

Paralelipipedul dreptunghiular se numește cub, dacă dimensiunile lui sunt egale.

Proprietatea paralelipipedului dreptunghiular

Pătratul oricărei diagonale a paralelipipedului dreptunghiular este egal cu suma pătratelor dimensiunilor lui.

Piramida

Poliedrul, o față a căruia este un poligon cu n laturi, iar restul fețelor – triunghiuri, ce au un vârf comun, se numește piramidă cu n laturi.

Înălțimea piramidei este numită perpendiculara, coborâtă din vârful piramidei pe planul bazei.

Piramida este numită regulată, dacă baza ei este un poligon regulat și piciorul înălțimii piramidei este centrul acestui poligon.

Toate muchiile laterale ale piramidei regulate sunt egale, toate fețele piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele.

Apotemă a piramidei regulate este numită înălțimea feței laterale, dusă din vârful piramidei.

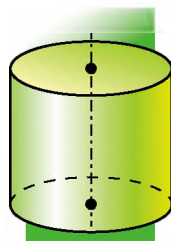
Aria suprafeței laterale a piramidei

Aria suprafeței laterale a piramidei este numită suma ariilor tuturor fețelor laterale ale ei.

Aria suprafeței laterale a piramidei regulate este egală cu jumătatea produsului perimetrului ei și a apotemei.

§5

CORPURI DE ROTAȚIE



În acest paragraf veți face cunoștință mai detaliat cu corpurile deja cunoscute nouă – cilindrul, conul, sfera, o să studiați proprietățile lor.

19. Cilindrul

Să ne închipuim, că dreptunghiul OO_1A_1A se rotește în jurul laturii OO_1 (fig. 19.1). În timpul rotației se creează figura, care se numește **cilindru**. Cercurile cu centrele O și O_1 care s-au creat în rezultatul rotației laturilor OA și O_1A_1 , se numesc **bazele cilindrului**, iar figura, care s-a creat în rezultatul rotației laturii A_1A , este numită **suprafața laterală a cilindrului**. Segmentele, care formează suprafața laterală a cilindrului, se numesc **generatoarele cilindrului** (fig. 19.2).

Evident, că toate generatoarele cilindrului sunt egale și perpendiculare pe planul bazei.

Înălțime **a cilindrului** se numește perpendiculara, coborâtă din oricare punct al planului unei baze pe planul altei baze. Înălțimea cilindrului este egală cu generatoarea lui.

Dreapta, care trece prin centrele bazelor cilindrului, este numită **axa cilindrului**. În figura 19.2 dreapta OO_1 este axa cilindrului.

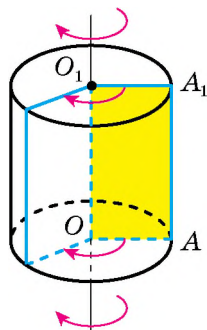


Fig. 19.1

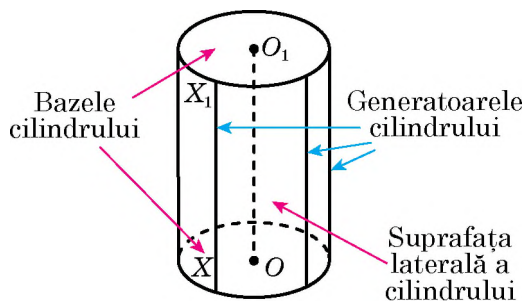


Fig. 19.2

Corp de rotație se numește corpul, obținut în rezultatul rotației unei oarecare figuri plane în jurul unei drepte.

Cilindrul este exemplul unui corp de rotație.

Dacă intersectăm cilindrul cu un plan, ce trece prin axa lui, atunci în secțiune se obține un dreptunghi, două laturi ale căruia sunt diametrele bazelor cilindrului, iar altele două – generatoarele cilindrului (fig. 19.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune axială a cilindrului**.

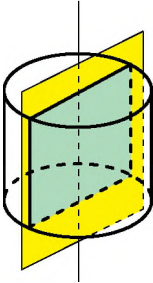


Fig. 19.3

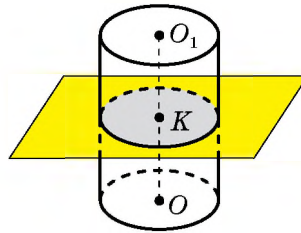


Fig. 19.4

Să intersectăm cilindrul cu un plan, paralel bazelor cilindrului (fig. 19.4). Secțiunea cilindrului cu planul, paralel bazelor (sau perpendicular pe axa cilindrului), este cercul, care este egal cu baza cilindrului.

Să ne închipuim, că suprafața cilindrului este tăiată după circumferințele bazelor și o generatoare oarecare (fig. 19.5), iar apoi am desfășurat-o pe un plan. Figura obținută se numește **desfășurata cilindrului pe plan** sau pur și simplu **desfășurata cilindrului**. Ea este alcătuită din doua cercuri, care sunt egale cu bazele cilindrului, și un dreptunghi, care este numit desfășurata suprafeței laterale a cilindrului (fig. 19.6).

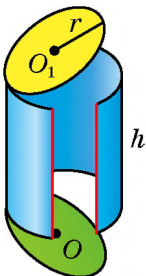


Fig. 19.5

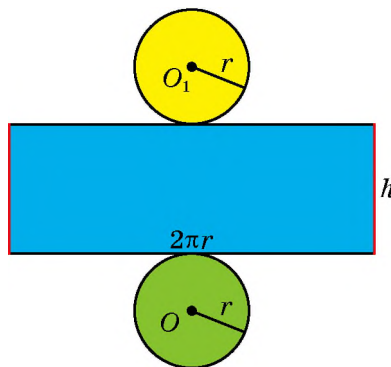


Fig. 19.6

Dacă generatoarea cilindrului este egală cu h , iar raza bazei cilindrului – r , atunci laturile desfășuratei suprafeței laterale a cilindrului sunt egale cu h și $2\pi r$.

Ca arie a suprafeței laterale a cilindrului este considerată aria desfășuratei suprafeței laterale a lui. Deci,

$$S_l = 2\pi r h,$$

unde S_l este aria suprafeței laterale a cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Aria totală a suprafeței cilindrului este numită suma ariilor a suprafeței laterale a cilindrului și a două baze ale lui. Avem:

$$S_t = S_l + 2S_{\text{bază}},$$

unde S_t – aria totală a suprafeței cilindrului, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei cilindrului.

Aria bazei cilindrului este egală cu πr^2 . Atunci obținem formula

$$S_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

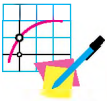
Din cursul de geometrie al clasei a 10-a știți, că proiecția paralelă a circumferinței este figura care se numește elipsă. De aceea, reprezentând cilindrul, bazele lui se desenează în formă de elipse. În practică pentru reprezentarea elipselor este comod de folosit riglele șabloane (fig. 19.7).



Fig. 19.7



1. Care corp se numește cilindru?
2. Descrieți, ce se numește suprafață laterală a cilindrului.
3. Ce sunt numite baze ale cilindrului? axă a cilindrului? înălțime a cilindrului?
4. Care corp se numește corp de rotație?
5. Ce se numește secțiune axială a cilindrului?
6. Din ce figuri constă desfășurata cilindrului?
7. După ce formulă se calculează aria suprafeței laterale a cilindrului?
8. După ce formulă se calculează aria suprafeței totale a cilindrului?



EXERCIIU

- 19.1.**° Înălțimea cilindrului este egală cu 6 cm, iar raza bazei – 5 cm. Aflați aria secțiunii axiale a cilindrului.
- 19.2.**° Aria secțiunii axiale a cilindrului este egală cu 128 cm^2 . Aflați înălțimea cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu 4 cm.
- 19.3.**° Diagonala secțiunii axiale a cilindrului este egală cu d , și creează cu planul bazei cilindrului unghiul α . Aflați:
- 1) înălțimea cilindrului;
 - 2) aria bazei cilindrului.
- 19.4.**° Aria bazei cilindrului este egală cu $49\pi \text{ cm}^2$ iar unghiul dintre diagonala secțiunii axiale și generatoarea cilindrului este egal cu 30° . Găsiți înălțimea cilindrului.
- 19.5.**° Cu ce este egală aria suprafeței laterale a cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 2 cm, iar înălțimea – 9 cm?
- 19.6.**° Dreptunghiul cu laturile de 1 cm și 3 cm se rotește în jurul laturii mai mari. Aflați:
- 1) diagonala secțiunii axiale a cilindrului creat;
 - 2) aria suprafeței totale a acestui cilindru.
- 19.7.**° Pătratul cu latura de 8 cm se rotește în jurul unei laturi a lui. Aflați:
- 1) diagonala secțiunii axiale a cilindrului creat;
 - 2) aria suprafeței totale a acestui cilindru.
- 19.8.**° Punctele O și O_1 – centrele bazelor de jos și de sus corespunzător ale cilindrului (fig. 19.8). Punctul A este un punct arbitrar al circumferinței, care mărginește baza cilindrului. Segmentul O_1A este egal cu 6 cm și face cu planul bazei cilindrului unghiul de 60° . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

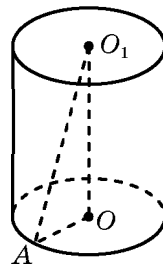


Fig. 19.8

- 19.9.**° Înălțimea cilindrului este egală cu 5 cm, iar diametrul bazei – 24 cm. Aflați distanța de la centrul uneia din bazele cilindrului până la un punct al circumferinței altei baze.
- 19.10.*** Diagonala desfășuratei suprafeței laterale a cilindrului este egală cu d și creează cu una din laturile desfășuratei unghiul α . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.
- 19.11.*** Pătratul, diagonala căruia este egală cu 4 cm, este desfășurata suprafeței laterale a cilindrului. Aflați aria bazei acestui cilindru.
- 19.12.*** Cum se va schimba – se va mări sau micșora – și de câte ori aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă:
- 1) raza bazei lui se va mări de k ori;
 - 2) înălțimea cilindrului se va micșora de k ori;
 - 3) înălțimea cilindrului se va mări de k ori, iar raza bazei se va micșora de k ori?
- Ce funcție este dependența ariei suprafeței laterale a cilindrului de:
- 1) raza bazei lui;
 - 2) înălțimea cilindrului?
- 19.13.*** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul de 120° , iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60° . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă lungimea coardei date este egală cu 6 cm.
- 19.14.*** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul de 90° , iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60° . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu 8 cm.
- 19.15.**** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α . Segmentul, care unește centrul bazei de sus cu unul din capetele coardei duse, creează cu planul bazei unghiul β . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă distanța de la centrul bazei de jos până la coarda dusă este egală cu a .
- 19.16.**** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul β . Segmentul, care unește centrul bazei de sus cu mijlocul coardei date, este egal cu m și creează cu planul bazei unghiul α . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.
- 19.17.**** Paralel cu axa cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 10 cm, iar înălțimea – 12 cm, este dusă o secțiune, ce este pătrat. Aflați distanța de la axa cilindrului până la planul secțiunii.
- 19.18.**** Paralel cu axa cilindrului este dusă o secțiune, ce reteză de la circumferința bazei un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Segmentul care unește centrul bazei de sus a cilin-

drului, cu punctul circumferinței bazei de jos, creează cu planul bazei unghiul β , iar raza bazei este egală cu R . Aflați aria acestei secțiuni.

19.19.** Paralel cu axa cilindrului este dusă o secțiune, ce este depărtată de ea cu $\sqrt{3}$ cm, și retează de la circumferința bazei arc, măsură în grade a căruia este egală cu 120° . Aflați aria acestei secțiuni, dacă diagonala ei este egală cu 10 cm.

19.20.* Punctele O și O_1 sunt corespunzător centrele bazelor de jos și de sus ale cilindrului, iar punctul A aparține bazei de jos a cilindrului (fig. 19.9). Pe segmentul OO_1 este notat punctul B astfel, că dreapta AB intersectează suprafața laterală a cilindrului. Construiți punctul de intersecție al dreptei AB cu suprafața laterală a cilindrului.

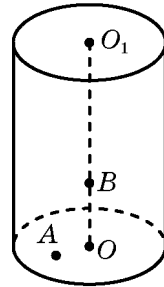


Fig. 19.9

19.21.* Raza bazei cilindrului este egală cu 9 cm. Din mijlocul segmentului OO_1 , unde punctele O și O_1 sunt corespunzător centrele bazelor de jos și de sus ale cilindrului, este dusă o semidreaptă, care intersectează planul bazei de jos în punctul, depărtat de centrul acestei baze cu 12 cm. Această semidreaptă intersectează generatoarea cilindrului în punctul, depărtat de planul bazei de jos cu 2 cm. Aflați înălțimea cilindrului.

19.22.* Înălțimea cilindrului este egală cu 20 cm. Prin mijlocul generatoarei este dusă dreapta, care intersectează segmentul, ce unește centrele bazelor, în punctul, depărat cu 6 cm de la planul bazei de jos, iar înseși acest plan – în punctul, depărtat cu 15 cm de la centrul bazei de jos. Aflați raza bazei cilindrului.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

19.23. Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la baza lui, este egală cu h , iar unghiul dintre laturile lui egale este egal cu α . Aflați raza circumferinței înscrise în triunghiul dat.

19.24. Bazele unui trapez sunt egale cu 6 cm și 27 cm, iar una din laturile laterale – 13 cm. Aflați raza circumferinței, înscrise în trapezul dat.

19.25. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este egală cu 6 cm, iar aria suprafeței laterale – 288 cm^2 . Aflați diagonala mare a prisme.

20. Conul

Să ne imaginăm, că triunghiul dreptunghic AOB cu unghiul drept O se rotește în jurul laturii AO (fig. 20.1). În timpul rotației se creează figura, care este numită **con**. Cercul cu centrul O , care se creează în rezultatul rotației laturii OB , este numit **baza conului**, iar figura, care s-a creat în rezultatul rotației laturii AB , este numită **suprafața laterală a conului**. Segmentele, ce creează suprafața laterală a conului, sunt numite **generatoarele conului** (fig. 20.2).

Toate generatoarele conului sunt egale și fac unghiuri egale cu planul bazei.

Capătul comun al tuturor generatoarelor conului este numit **vârful conului**. În figura 20.1 punctul A este vârful conului.

Dreapta, care trece prin vârful conului și centrul bazei lui, se numește **axa conului**. În figura 20.1 dreapta AO este axa conului. Axa conului este perpendiculară pe planul bazei lui.

Înălțimea conului este numită perpendiculara, coborâtă din vârful conului pe planul bazei. Piciorul înălțimii conului este centrul bazei lui. Înălțimea conului aparține axei lui. În figura 20.1 segmentul AO este înălțimea conului.

Conul ca și cilindrul, este corp de rotație.

Dacă conul este intersectat de un plan, ce trece prin axa lui, atunci se creează în secțiune un triunghi isoscel, laturile laterale ale căruia sunt generatoarele conului, baza lui este diametrul bazei conului (fig. 20.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune axială a conului**.

Să ne imaginăm, că suprafața conului este tăiată după circumferința bazei și o generatoarea oarecare (fig. 20.4), apoi de-l desfășurat pe un plan. Figura obținută este numită **desfășurata conului pe plan**, sau pur și simplu **desfășurata conului** (fig. 20.5). Ea este alcătuită dintr-un

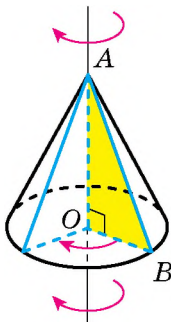


Fig. 20.1

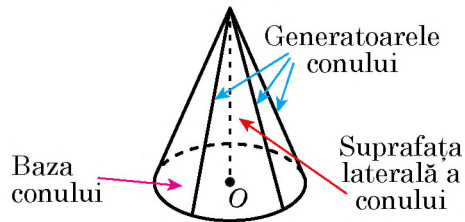


Fig. 20.2

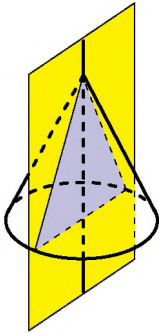


Fig. 20.3

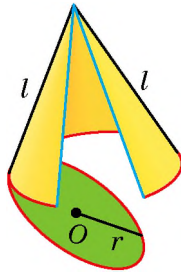


Fig. 20.4

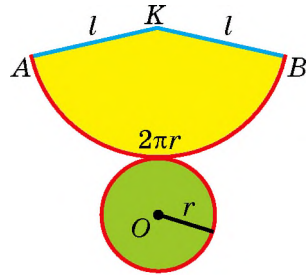


Fig. 20.5

cerc, ce este egal cu baza conului, și un sector de cerc, care este numit **desfășurata suprafeței laterale a conului**.

Dacă generatoarea conului este egală cu l , iar raza bazei conului – r , atunci raza sectorului circular este egală cu l , iar lungimea arcului sectorului – $2\pi r$. Fie măsura în grade a unghiului AKB (fig. 20.5) este egală cu α . Atunci lungimea arcului AB este egală cu $\frac{\pi l \alpha}{180}$. Avem:

$$2\pi r = \frac{\pi l \alpha}{180}. \text{ De aici}$$

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \quad (1)$$

Ca arie S_1 a suprafeței laterale a conului este considerată aria desfășurată a suprafeței laterale a lui. Avem: $S_1 = \frac{\pi l^2 \alpha}{360}$. Ținând cont de egalitatea (1) obținem:

$$S_1 = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l.$$

Deci, aria suprafeței laterale a conului se calculează după formula

$$S_1 = \pi r l,$$

unde r este raza bazei conului, l – lungimea generatoarei conului.

Aria totală a suprafeței conului este numită suma ariilor suprafeței laterale și a bazei conului. Avem:

$$S_t = S_1 + S_{\text{bază}}$$

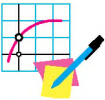
Unde S_1 este aria suprafeței laterale a conului, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei conului.

Aria bazei conului este egală cu πr^2 . Atunci obținem formula

$$S_t = \pi r l + \pi r^2$$



1. Care corp se numește con?
2. Descrieți, ce se numește suprafață laterală a conului.
3. Ce se numește baza conului? axa conului? înălțimea conului?
4. Ce se numește secțiune axială a conului?
5. Din ce figuri este alcătuită desfășurata conului?
6. Ce este considerat ca arie a suprafeței laterale a conului?
7. După ce formulă se calculează aria suprafeței laterale a conului?
8. După ce formulă se calculează aria totală a suprafeței conului?



EXERCIȚII

- 20.1.° Înălțimea conului este egală cu 4 cm, iar generatoarea lui – 6 cm. Aflați raza bazei conului.
- 20.2.° Raza bazei conului este egală cu 5 cm, iar generatoarea – 13 cm. Aflați înălțimea conului.
- 20.3.° Aflați raza bazei și înălțimea conului, dacă generatoarea lui este egală cu 18 cm, iar secțiunea axială este un triunghi regulat.
- 20.4.° Raza bazei conului este egală cu 2 cm, secțiunea axială a lui – un triunghi isoscel dreptunghiular. Aflați înălțimea și generatoarea conului.
- 20.5.° Raza bazei conului este egală cu 9 cm, iar unghiul dintre generatoare și planul bazei este egal cu 30° . Aflați aria:
 - 1) suprafeței laterale a conului;
 - 2) secțiunii axiale a conului.
- 20.6.° Raza bazei conului este egală cu 6 cm, iar înălțimea – 8 cm. Aflați aria:
 - 1) suprafeței laterale a conului;
 - 2) suprafeței totale a conului.
- 20.7.° Înălțimea conului este egală cu H , iar unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei este egal cu α . Aflați aria:
 - 1) secțiunii axiale a conului;
 - 2) suprafeței laterale a conului.
- 20.8.° Generatoarea conului este egală cu α , iar unghiul în secțiunea axială de la vârful conului este egal cu α . Aflați aria:
 - 1) secțiunii axiale a conului;
 - 2) suprafeței laterale a conului.

- 20.9.**° Triunghiul dreptunghic, ipotenuza căruia este egală cu 8cm, iar unul din unghiuri este egal cu 30° , se rotește în jurul catetei mai mari. Aflați aria suprafeței laterale a conului obținut.
- 20.10.**° Aflați aria secțiuni axiale, care se creează în rezultatul rotației triunghiului dreptunghic cu ipotenuza de 17cm și cateta 15 cm, în jurul celeilalte catete.
- 20.11.**° Raza bazei conului este egală cu 15 cm, iar distanța de la centrul bazei până la generatoarea conului – 12 cm. Aflați lungimile generatoarei și a înălțimii.
- 20.12.**° Înălțimea conului este egală cu $4\sqrt{5}$ cm, iar distanța de la centrul bazei până la mijlocul generatoarei conului – 6 cm. Aflați aria suprafeței totale a conului.
- 20.13.**° În baza conului s-a dus o coardă cu lungimea α , ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei este egal cu β . Aflați înălțimea conului.
- 20.14.**° În baza conului s-a dus o coardă, ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Unghiul dintre înălțimea conului și generatoare este egal cu β , iar lungimea generatoarei este egală cu m . Aflați lungimea coardei date.
- 20.15.**° Triunghiul dreptunghic cu catetele 5 cm și 12 cm se rotește în jurul drepte ce conține ipotenuza lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.16.**** Planul, dus prin două generatoare ale conului, intersectează baza după o coardă, ce întinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu β ($0^\circ < \beta < 180^\circ$). Aflați aria secțiunii create, dacă înălțimea conului este egală cu H , iar unghiul dintre planul secțiunii create și planul bazei conului este egal cu α .
- 20.17.**** Prin două generatoare ale conului, unghiul dintre care este egal cu 60° , s-a dus un plan. Acest plan intersectează baza conului după o coardă cu lungimea de 8 cm, ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 90° . Aflați aria suprafeței laterale a conului.
- 20.18.**** Triunghiul isoscel ascuțitunghic cu baza a și unghiul de la bază α se rotește în jurul drepte ce conține latura laterală a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.19.**** Triunghiul isoscel cu baza a și unghiul opus ei α se rotește în jurul drepte ce conține latura bazei lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

- 20.20.**** Trapezul dreptunghic cu bazele 6 cm și 9 cm și înălțimea 4 cm se rotește în jurul drepte ce conține baza mare a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.21.**** Trapezul dreptunghic cu bazele 3 cm și 4 cm și unghiul ascuțit 45° se rotește în jurul drepte ce conține baza mică a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.22.**** Rombul cu latura 10 cm și unghiul 60° se rotește în jurul drepte ce conține una din laturile rombului. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.23.**** Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 10 cm și 26 cm, iar latura laterală este egală cu baza mică. Trapezul se rotește în jurul drepte ce conține baza mare a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.
- 20.24.**** Desfășurata suprafeței laterale a conului este sectorul, raza căruia este egală cu 12 cm, iar măsura în grade a arcului – 240° . Aflați raza bazei conului.
- 20.25.**** Desfășurata suprafeței laterale a conului este sectorul, raza căruia este egală cu 5 cm. Aflați unghiul de la centru al acestui sector, dacă înălțimea conului este egală cu 4 cm.
- 20.26.**** Prin două generatoare ale conului este dus un plan, care creează cu planul bazei conului unghiul α . Distanța de la centrul bazei conului până la acest plan este egală cu a , iar unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei este egal cu β . Aflați raza bazei conului.
- 20.27.**** Segmentul MO este înălțimea conului, segmentele MA și MB – generatoarele lui, $MO = 4\sqrt{2}$ cm. Distanța de la punctul O până la dreapta AB este egală cu 2 cm. Aflați distanța de la punctul O până la planul AMB .



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 20.28.** Segmentele AD și CE sunt medianele triunghiului ABC . Aflați latura AC , dacă $AB = 8\sqrt{5}$ cm, $BC = 6\sqrt{5}$ cm, și $AD \perp CE$.
- 20.29.** Aria trapezului isoscel este egală cu $32\sqrt{3}$ cm², iar unghiul ascuțit – 60° . Aflați latura laterală a trapezului, dacă se știe, că trapezul se poate înscrie în circumferință.
- 20.30.** Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu unghiul de la bază egal cu 30° și latura laterală 12 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei face cu planul bazei unghiul de 60° . Aflați înălțimea piramidei.

21. Bila și sfera

În punctele precedente ați făcut cunoștință cu două exemple de corpuri de rotație – cilindrul și conul. Încă un exemplu de corp de rotație este bila sau corpul sferic.

În figura 21.1 este prezentată figura, obținută prin rotația semicercului în jurul dreptei, care conține diametrul AB . Astfel de figură se numește **bilă**.

La rotația semicircumferinței cu diametrul AB se creează suprafața, care se numește **sferă** (fig. 21.1). Sfera este suprafața bilei obținute.

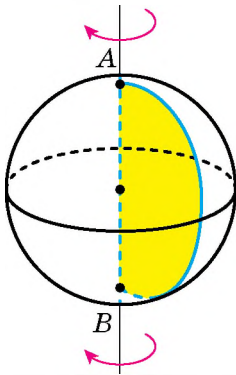


Fig. 21.1

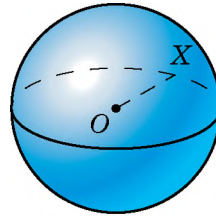


Fig. 21.2

Mijlocul segmentului AB este numit **centrul sferei**. Orice segment, care unește un punct al sferei cu centrul ei, este numit **raza sferei**. Lungimea acestui segment de asemenea este primit de-l numit **rază a sferei**. În figura 21.2 segmentul OX este raza sferei.

Se poate demonstra că *toate razele sferei sunt egale*.

Cu alte cuvinte, *toate punctele sferei sunt egal depărate de la centrul ei*.

Segmentul, care unește două puncte ale sferei și trece prin centrul ei, este numit **diametrul sferei**. Dacă raza sferei este egală cu r , atunci diametrul este egal cu $2r$.

Centrul, raza și diametrul bilei este numit centrul, raza și diametrul sferei, care este suprafața acestei bile.

Se poate demonstra, că *distanța de la orice punct al bilei până la centrul ei nu este mai mare decât raza ei*.

În cursul de planimetrie ați făcut cunoștință cu cazurile de amplasare reciprocă a circumferinței și dreptei. Să cercetăm amplasarea reciprocă a sferei și a planului.

Admitem, că raza sferei date este egală cu r , iar distanța de la centrul O al sferei până la planul dat α este egală cu d .

Cazul I. Admitem, că $d > r$. În acest caz sfera și planul nu au puncte comune (fig. 21.3).

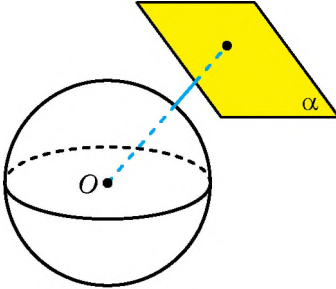


Fig. 21.3

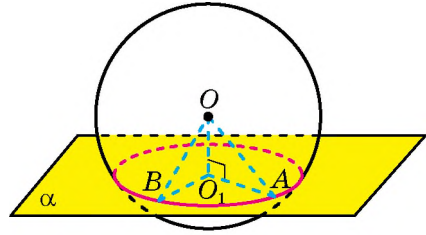


Fig. 21.4

Cazul II. Fie $d < r$. În acest caz secțiunea sferei de către plan este o circumferință (fig. 21.4).

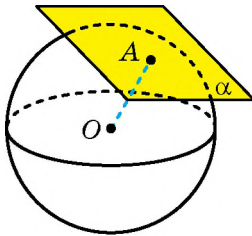


Fig. 21.5

Ținând cont de această afirmație, se poate face astfel de concluzie: dacă distanța de la centrul bilei până la plan este mai mică decât raza bilei, atunci secțiunea bilei de către plan este un cerc.

Dacă planul trece prin centrul bilei, atunci cercul, obținut în secțiune, se numește **cercul mare al bilei**.

Cazul III. Fie $d = r$. În acest caz sfera și planul au numai un punct comun (fig. 21.5).

Definiție. Planul, care are cu sfera numai un singur punct comun, este numit **plan tangent la sferă**.

Acest punct comun este numit **punct de tangență**. În figura 21.5 punctul A este punct de tangență.

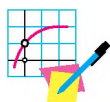
Are loc o astfel de teoremă

Teorema 21.1. *Planul tangent la sferă este perpendicular la raza, dusă în punctul de tangență.*




1. Ce se numește sferă? bilă?
2. Explicați, care punct se numește centrul sferei?

3. Ce se numește raza sferei? raza bilei?
4. Ce se numește diametrul sferei? diametrul bilei?
5. Cu ce este egal diametrul sferei, dacă raza ei este egală cu r ?
6. Ce este secțiunea sferei de către plan, dacă distanța de la centrul sferei până la plan este mai mică decât raza sferei?
7. Ce este numit cercul mare al bilei?
8. Care plan este numit planul tangent la sferă?
9. Ce proprietate are raza, dusă în punctul de tangență al planului și sferei?



EXERCIȚII

- 21.1.° Dați exemple de obiecte din lumea înconjurătoare, obiecte, folosite în viața de toate zilele, care au formă de sferă (bilă).
- 21.2.° Raza bilei este egală cu $\sqrt{5}$ cm. Aparține oare bilei punctul A , dacă el este depărtat de centrul bilei:
 - 1) cu 2 cm;
 - 2) cu 2,3 cm?
- 21.3.° Punctele C și D se află pe sfera cu centrul O , diametrul căreia este egal cu 8 cm. Aflați segmentul CD , dacă triunghiul COD este dreptunghic.
- 21.4.° Pe sfera cu centrul O , s-au notat punctele A și B astfel, că $AB = 18$ cm. Aflați raza sferei, dacă distanța de la punctul O până la dreapta AB este egală cu 12 cm.
- 21.5.° Sunt date sfera cu raza de 6 cm și planul α . Care trebuie să fie distanța de la centrul sferei până la planul α , ca:
 - 1) sfera și planul să nu aibă puncte comune;
 - 2) sfera și planul să aibă numai un punct comun;
 - 3) secțiunea sferei cu planul secant să fie circumferință;
 - 4) secțiunea sferei și a planului să fie circumferința cu cea mai mare lungime posibilă?
- 21.6.° Diametrul sferei este egal cu 20 cm, iar distanța de la centrul ei până la planul α este egală cu 12 cm. Au oare puncte comune sfera dată și planul α ?
- 21.7.° Câte plane, ce sunt tangente la sferă, se pot duce prin punctul:
 - 1) care aparține acestei sfere;
 - 2) care este amplasat în afara sferei?

- 21.8.° 1) Care paralelă geografică este cea mai mare circumferință a globului Pământesc?
 2) Aflați lungimea cercului polar al Pământului, acceptând raza Pământului egală cu 6400 km. Răspunsul rotunjiți-l până la mii de kilometri.
 3) Calculați calea, pe care o parcurge într-o zi localitatea în care trăiți ca urmare a rotației Pământului în jurul axei sale.
- 21.9.° Raza bilei este egală cu 5 cm. Aflați aria cercului mare a ei.
-  21.10.° Demonstrați, că dacă planul α intersectează sfera cu centrul O în circumferința de secțiune cu centrul O_1 , atunci $OO_1 \perp \alpha$.
- 21.11.° Sfera este secționată cu un plan, distanța de la care până la centrul sferei este egală cu 6 cm. Lungimea liniei de intersecție a sferei cu planul este egală cu 16π cm. Aflați raza sferei.
- 21.12.* Secțiunea bilei cu raza de 13 cm cu un plan este un cerc, aria căruia este egală cu 25π cm². Aflați distanța de la centrul bilei până la planul secțiunii.
- 21.13.* Prin capătul diametrului bilei cu raza R este dus un plan, care face cu acest diametru unghiul α , $\alpha \neq 90^\circ$. Aflați aria secțiunii create a bilei.
- 21.14.* Aflați lungimea liniei de intersecție a sferei cu planul, depărtat de la centrul sferei cu 2 cm, dacă raza sferei, dusă într-un punct al acestei linii, creează cu planul dat unghiul de 30° .
- 21.15.* Vârfurile unui dreptunghi se află pe sfera cu raza de 26 cm. Aflați distanța de la centrul sferei până la planul dreptunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 12 cm și 16 cm.
- 21.16.* Pe suprafața sferei sunt notate punctele A , B și C astfel, că $AB = BC = 15$ cm, $\angle ABC = 120^\circ$. Aflați distanța de la centrul sferei până la planul ABC , dacă raza sferei este egală cu 17 cm.
- 21.17.* Vârfurile triunghiului cu laturile de 1 cm, $\sqrt{3}$ cm și 2 cm se află pe sferă. Aflați raza sferei, dacă distanța de la centrul ei până la planul acestui triunghi este egală cu $4\sqrt{3}$ cm.
- 21.18.* Două bile razele căroră sunt egale cu 7 cm și 9 cm, au un centru comun. Planul α este tangent la bila mică. Aflați aria secțiunii bilei mari cu planul α .
- 21.19.* Raza sferei este egală cu 40 cm. Punctul A , care aparține planului, ce este tangent la această sferă, este depărtat de punctul tangenței cu 9 cm. Aflați distanța de la punctul A până la cel mai apropiat de el punct al sferei.

- 21.20.**** Prin punctul M al sferei cu raza de 112 cm s-a dus un plan tangent. Pe acest plan este notat punctul K , distanța de la care până la cel mai depărtat punct al sferei este egală cu 225 cm. Aflați distanța dintre punctele M și K .
- 21.21.*** Secțiunile bilei, planele cărora sunt perpendiculare, au o coardă comună cu lungimea de 12 cm. Aflați razele bilelor, dacă ariile secțiunilor date sunt egale cu 64π cm² și 100π cm².
- 21.22.*** Secțiunile bilelor, planele cărora sunt perpendiculare, au o coardă comună. Distanța de la centrul bilei până la planul uneia din secțiuni este egală cu 4 cm, iar până la planul alteia – 5 cm. Aflați lungimea coardei comune a acestor secțiuni, dacă raza bilelor este egală cu $5\sqrt{2}$ cm.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 21.23.** Aflați lungimea circumferinței, circumscrise trapezului isoscel cu bazele de 6 cm și 8 cm și înălțimea 7 cm.
- 21.24.** Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la baza lui, este egală cu 32 cm, iar raza circumferinței înscrise – 12 cm. Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiului.
- 21.25.** Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu a , iar unghiul dintre apotemele a două fețe megieșe este egal cu 60° . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

ÎNSĂRCINAREA NR. 5 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

- Calculați aria suprafeței laterale a cilindriului, secțiunea axială a căruia este un pătrat cu latura de 8 cm.
A) 32π cm²; B) 64π cm²; C) 128π cm²; D) 256π cm².
- Înălțimea unui cilindru este egală cu 8 cm, raza bazei – 5 cm. La distanța de 4 cm de la axa cilindriului paralel cu ea este dus un plan. Aflați aria secțiunii create.
A) 40 cm²; B) 24 cm²; C) 48 cm²; D) 64 cm².
- Înălțimea cilindriului este egală cu 6 cm, iar aria suprafeței laterale a lui – 24π cm². Cu ce este egală aria bazei cilindriului?
A) 4π cm²; B) 4 cm²; C) 3π cm²; D) 6π cm².

4. O coardă a bazei de jos a cilindrului este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α . Segmentul, care unește centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde, este înclinat la planul bazei sub unghiul β . Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă raza bazei este egală cu r .

- A) $2\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$; C) $2\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$;
 B) $2\pi r^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$; D) $2\pi r^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$.

5. Unghiul dintre generatoare și planul bazei conului este egal cu 60° , iar înălțimea conului este de $9\sqrt{3}$ cm. Cu ce este egală generatoarea conului?

- A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm; B) $18\sqrt{3}$ cm; C) 13,5 cm; D) 18 cm.

6. Raza bazei conului este egală cu 12 cm, iar unghiul de la vârful secțiunii axiale – 120° . Aflați înălțimea conului.

- A) $6\sqrt{3}$ cm; B) $8\sqrt{3}$ cm; C) $12\sqrt{3}$ cm; D) $4\sqrt{3}$ cm.

7. Calculați aria suprafeței laterale a conului, diametrul bazei căreia este egal cu 12 cm, iar generatoarea – 17 cm.

- A) 102π cm²; B) 204π cm²; C) 34π cm²; D) 68π cm².

8. Aria suprafeței laterale a conului este egală cu 240π cm². Cu ce este egală înălțimea conului, dacă raza bazei lui este egală cu 12 cm?

- A) 12 cm; B) 16 cm; C) 20 cm; D) 2 cm.

9. Paralel cu axa cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 8 cm, s-a dus un plan, ce intersectează baza cilindrului după o coardă, care întinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 120° . Aflați aria secțiunii, dacă diagonala ei este egală cu 16 cm.

- A) 64 cm²; B) $64\sqrt{3}$ cm²; C) 16 cm²; D) $16\sqrt{3}$ cm².

10. În baza conului s-a dus o coardă, care este văzută din centrul bazei sub unghiul α , iar din vârful conului – sub unghiul β . Aflați aria suprafeței laterale a conului, dacă raza bazei lui este egală cu r .

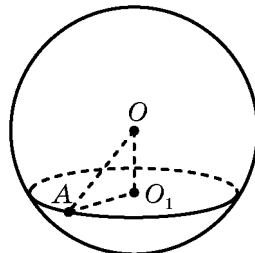
- A) $\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$; C) $\frac{\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$;
 B) $\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$; D) $\frac{\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$.

11. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu 6 cm, iar unghiul alăturat ei este egal cu 30° . Aflați aria suprafeței laterale a conului, creat în rezultatul rotației acestui triunghi în jurul catetei date.

- A) $24\pi\sqrt{3}$ cm²; B) $12\pi\sqrt{3}$ cm²; C) 24π cm²; D) 12π cm².

12. În bila cu centrul O , reprezentată în desen, s-a aplicat secțiunea cu centrul O_1 la distanța de 12 cm de la centrul bilei. Aflați raza bilei, dacă raza secțiunii este egală cu 9 cm.

- A) 10 cm; C) 15 cm;
B) 12 cm; D) 21 cm.



13. Prin capătul razei bilei s-a dus o secțiune, care creează cu această rază unghiul de 45° . Aflați raza bilei, dacă aria secțiunii bilei este egală cu 36π cm².

- A) $6\sqrt{2}$ cm; C) $12\sqrt{2}$ cm;
B) 6 cm; D) 12 cm.

14. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu c , iar unul din unghiurile ascuțite este egal cu α . Aflați aria suprafeței laterale a conului, creat în rezultatul rotației acestui triunghi în jurul catetei, opuse unghiului dat.

- A) $\frac{\pi c^2}{\sin \alpha}$; B) $\pi c^2 \sin \alpha$; C) $\pi c^2 \cos \alpha$; D) $\frac{\pi c^2}{\cos \alpha}$.

15. Prin două generatoare ale conului, unghiul dintre care este egal cu 45° s-a dus o secțiune. Aflați aria acestei secțiuni, dacă înălțimea conului este egală cu h și creează cu generatoarea lui un unghi de 30° .

- A) $\frac{h^2\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{h^2\sqrt{2}}{6}$; C) $\frac{2h^2\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{h^2\sqrt{2}}{3}$.

16. Planul α este tangent la bila cu centrul O în punctul A . Punctul B aparține planului α și este depărtat de la centrul bilei cu 10 cm. Aflați segmentul AB , dacă raza bilei este egală cu 6 cm.

- A) 8 cm; B) 6 cm; C) $2\sqrt{34}$ cm; D) 2 cm.

17. Diagonala desfășuratei suprafeței laterale a cilindrului este egală cu $4\pi\sqrt{5}$ cm, iar raza bazei cilindrului – 2 cm. Aflați înălțimea cilindrului.

- A) 9π cm; B) 8π cm; C) 9 cm; D) 8 cm.

18. Aria suprafeței laterale a unui cilindru este egală cu 28 cm². Cu ce este egală aria suprafeței laterale a altui cilindru, dacă razele bazelor ale acestor cilindre sunt egale, iar înălțimea celui de-al doilea cilindru este de 3 ori mai mică decât înălțimea primului cilindru?

- A) 14 cm²; B) 7 cm²; C) 56 cm²; D) Nu se poate stabili.



PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 5

Aria suprafeței laterale a cilindrului

Ca arie S_l a suprafeței laterale a cilindrului este considerată aria desfășurată suprafeței laterale a lui.

$S_l = 2\pi rh$, unde S_l este aria suprafeței laterale a cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Aria suprafeței totale a cilindrului

$S_t = S_l + 2S_{\text{bază}}$, unde S_t – aria suprafeței totale a cilindrului, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei cilindrului.

$$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Aria suprafeței laterale a conului

Ca arie S_l a suprafeței laterale a conului este considerată aria desfășurată suprafeței laterale a lui.

$S_l = \pi rl$, unde r – este raza bazei, l – lungimea generatoarei conului.

Aria suprafeței totale a conului

$S_t = S_l + S_{\text{bază}}$, unde S_t – aria suprafeței totale a conului, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei conului.

$$S_t = \pi rl + \pi r^2$$

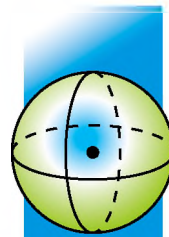
Amplasarea reciprocă a sferei și planului

Dacă distanța de la centrul sferei până la plan este mai mică decât raza sferei, atunci secțiunea sferei cu planul secant este o circumferință.

Planul, care are cu sfera un singur punct comun, se numește plan tangent la sferă. Acest punct comun se numește punct de tangență. În acest caz distanța de la centrul sferei până la acest plan este egală cu raza sferei.

Planul tangent la sferă este perpendicular pe raza, dusă în punctul de tangență.

§6 VOLUMELE CORPURILOR. ARIA SFEREI



În acest capitol mai detaliat o să faceți cunoștință cu noțiunea de volum deja cunoscută, o să studiați formule noi pentru calcularea volumelor poliedrelor și corpurilor de rotație. O să vă învățați să găsiți suprafața sferei.

22. Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prisme și a piramidei

Cu o astfel de mărime, ca volumul, vă ciocniți adesea în viața cotidiană: volumul unui pachet de suc, volumul unui borcan de sticlă, indicii consumului a apei sau combustibilului pe contoare (fig. 22.1). Cu noțiunea de volum ați făcut cunoștință în cursul de matematică clasa a 5-a. Totodată această noțiune de multe ori ați folosit-o, de exemplu, la lecțiile de fizică și chimie.



Fig. 22.1

Studiind planimetria, voi frecvent v-ați întâlnit cu o astfel de mărime, ca aria figurii. Volumul corpului în stereometrie este analogul ariei figurii în planimetrie. De observat această analogie nu este complicat, dacă comparăm definiția ariei poligonului, studiată de voi în clasa a 8-a, cu o astfel de definiție.

Definiție. Volumul corpului se numește mărimea pozitivă, care posedă astfel de proprietăți:

- 1) corpurile egale au volume egale;
- 2) dacă corpul e compus din câteva alte corpuri, atunci volumul lui este egal cu suma volumelor acestor corpuri;
- 3) ca unitate de măsură a volumului corpului, se va alege cubul unitate, adică cubul cu muchia, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.

Studierea volumelor corpurilor o vom începe de la poliedre.

De măsurat volumul poliedrului aceasta înseamnă de comparat volumul lui cu volumul cubului unitate. Ca rezultat vom obține o valoare numerică a volumului poliedrului dat. Acest număr indică, de câte ori volumul poliedrului dat se deosebește de volumul cubului unitate.

Vom arăta, cum, bazându-ne pe definiție, de aflat volumul, de exemplu, a paralelipipedului dreptunghiular cu muchiile 1 cm, 1 cm și 3 cm (fig. 22.2).

Astfel de paralelipiped se poate împărți în trei cuburi cu muchia de 1 cm. Din proprietatea a 2-a a volumului reiese, că volumul paralelipipedului dat este egal cu trei volume ale cubului cu muchia de 1 cm (prescurtat se scrie 3 cm^3).

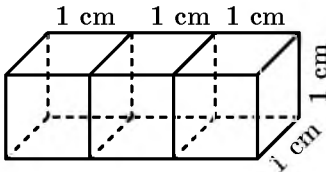


Fig. 22.2

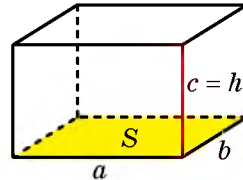


Fig. 22.3

În timpul calculării volumelor corpurilor este comod de aplicat formulele care oferă posibilitatea aflării volumului corpului conform unor anumite elemente ale lui.

În particular, *dacă măsurătorile paralelipipedului dreptunghiular sunt egale cu a , b și c , atunci volumul lui V se poate calcula după formula*

$$V = abc$$

Atragem atenția, că produsul ab este egal cu aria S a bazei paralelipipedului dreptunghiular, iar muchia c este înălțimea lui (fig. 22.3). Atunci formula volumului paralelipipedului dreptunghiular se poate scrie astfel:

$$V = Sh$$

Această formulă se folosește și pentru calcularea volumului prisme.

Teorema 22.1. *Volumul V al prisme cu înălțimea, ce este egală cu h , și baza, aria căreia este egală cu S , se poate calcula după formula*

$$V = Sh$$

Aflarea volumelor corpurilor este o problemă complicată. Nu în zădar formula calculării volumului piramidei, găsită de savanții Greciei Antice, se consideră una din cele mai mari realizări ale științei antice.

Teorema 22.2. *Volumul V al piramidei, cu înălțimea, ce este egală cu h , și baza, aria căreia este egală cu S , se poate calcula după formula*

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Problemă. Baza piramidei patrulateră $MABCD$ este dreptunghiul $ABCD$. Fața laterală AMB este perpendiculară la planul bazei. Aflați volumul piramidei, dacă $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $MA = MB = 13$ cm.

Rezolvare: Ducem înălțimea MK a triunghiului AMB (fig. 22.4). Deoarece $AMB \perp ABC$, atunci $MK \perp ABC$. Deci, segmentul MK – este înălțimea piramidei date.

Deoarece $MA = MB$, atunci segmentul MK este mediana triunghiului AMB . De aici $AK = KB = 5$ cm.

Din triunghiul dreptunghic MKA obținem:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$

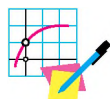
Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 120 cm^2 . Acum putem afla volumul V al piramidei:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 = 480 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Răspuns: 480 cm^3 . ◀



1. Ce se numește volumul corpului?
2. Ce înseamnă a măsura volumul poliedrului?
3. După ce formule se calculează volumul paralelipipedului dreptunghiular?
4. După ce formulă se calculează volumul prisme?
5. După ce formulă se calculează volumul piramidei?



EXERCIȚII

22.1.° Cu ce este egal volumul prisme, aria bazei căreia este egală cu 12 cm^2 , iar înălțimea – 5 cm ?

- 22.2.**° Aflați volumul cubului, diagonala căruia este egală cu $2\sqrt{3}$ cm.
- 22.3.**° Cum se va modifica volumul cubului, dacă fiecare din muchiile lui de le mărit de 3-i ori?
- 22.4.**° Aflați volumul prisme triunghiulare regulate, fiecare muchie a căreia este egală cu a .
- 22.5.**° Aflați volumul prisme hexagonale regulate, fiecare muchie a căreia este egală cu a .
- 22.6.**° Aflați volumul prisme patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu a , iar unghiul dintre diagonala prisme și planul bazei este egal cu α .
- 22.7.**° Înălțimea prisme triunghiulare regulate este egală cu h , iar diagonala feței laterale creează cu planul bazei unghiul α . Aflați volumul prisme.
- 22.8.**° Muchiile paralelipipedului dreptunghiular sunt proporționale cu numerele 2, 3 și 6, iar diagonala lui este egală cu 14 cm. Aflați volumul paralelipipedului.
- 22.9.**° Dimensiunile paralelipipedului dreptunghiular sunt egale cu 4 cm, 6 cm și 9 cm. Aflați muchia cubului, al cărui volum este egal cu volumul paralelipipedului dat.
- 22.10.**° Secțiunea terasamentului căii ferate are forma unui trapez, baza de jos a căruia este egală cu 15 m, baza de sus – 8 m, iar înălțimea – 3,2 m. Câți metri cubi de pământ vor fi necesari, pentru a construi 1 km, de terasament.
- 22.11.**° Hala, în care vor lucra a lucrători, are forma unui paralelipiped dreptunghiular. Pentru ca încăperea halei să corespundă normelor sanitare, pentru fiecare lucrător al halei trebuie să revină b m³ de aer. Care trebuie să fie în acest caz înălțimea h a halei, dacă aria podului ei alcătuiește S m²?
- 22.12.**° Găsiți capacitatea unei magazii cu acoperișul în două ape (fig. 22.5), dacă lungimea magaziei este egală cu 12 m, lățimea – 8 m, înălțimea pereților – 3,5 m, iar înălțimea crestei acoperișului – 6 m (grosimea pereților se neglijează).
- 22.13.**° Aflați volumul piramidei:
- 1) baza căreia este un pătrat cu latura de 2 cm, iar înălțimea piramidei este egală cu 2 cm;
 - 2) baza căreia este un romb cu diagonalele 2 cm și 3 cm, iar înălțimea piramidei este egală cu 10 cm;
 - 3) baza căreia este un triunghi cu laturile de 6 cm și 9 cm și cu unghiul dintre ele de 30°, iar înălțimea piramidei este egală cu 12 cm.

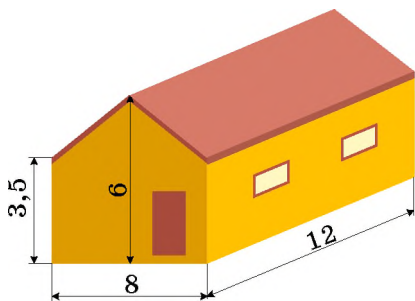


Fig. 22.5

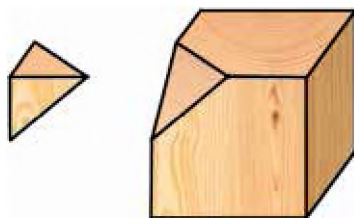


Fig. 22.6

- 22.14.°** Aflați înălțimea piramidei, volumul căreia este egal cu 20 cm^3 , iar aria bazei – 15 cm^2 .
- 22.15.°** Baza piramidei este un dreptunghi, laturile căruia se raportează ca $2 : 3$, înălțimea piramidei este egală cu 5 cm , iar volumul – 90 cm^3 . Aflați perimetrul bazei piramidei
- 22.16.°** Cum se va modifica volumul piramidei, dacă fiecare latură a bazei ei se va mări de 3 ori, iar înălțimea – de 4 ori?
- 22.17.°** Latura bazei a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 5 cm , iar muchia laterală – 13 cm . Aflați volumul piramidei
- 22.18.°** Latura bazei a unei piramide patrulateră regulate este egală cu 4 cm , iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu 60° . Aflați volumul piramidei.
- 22.19.°** Un cub de lemn, muchia căruia este egală cu 12 cm , s-a tăiat în două părți: o piramidă triunghiulară și un heptaedru (fig. 22.6). Aflați volumul heptaedrului, dacă planul tăieturii trece prin mijlocul a trei muchii ale cubului, care au un vârf comun.
- 22.20.°** Latura bazei, unei piramide triunghiulare regulate este egală cu 6 cm , iar muchia laterală creează cu planul bazei un unghi de 45° . Aflați volumul piramidei.
- 22.21.*** Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de 8 cm , și unghiul de 60° . Diagonala mică a prisme este egală cu 17 cm . Aflați volumul prisme.
- 22.22.*** Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 12 cm și creează cu planul bazei un unghi de 30° . Unghiul dintre diagonala bazei și una din laturile ei este egal cu 60° . Aflați volumul paralelipedului.
- 22.23.*** Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu bazele 3 cm și 11 cm și diagonala 10 cm . Diagonala prisme este egală cu 26 cm . Aflați volumul prisme.

22.24.* Baza unei prisme oblice este un paralelogram cu laturile de 3 cm și 8 cm și unghiul de 30° . Muchia laterală a prisme este egală cu 12 cm și creează cu planul bazei 45° . Aflați volumul prisme.

22.25.* Baza unei prisme oblice este un triunghi cu laturile de $4\sqrt{3}$ cm și 5 cm și unghiul dintre ele de 120° . Muchia laterală a prisme este egală cu 20 cm și creează cu înălțimea prisme unghi de 60° . Aflați volumul prisme.

22.26.* Volumul unei prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$, prezentată în figura 22.7, este egal cu V . Punctul D este mijlocul muchiei AA_1 . Aflați volumul piramidei $DABC$.

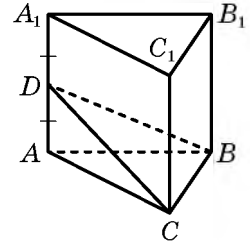


Fig. 22.7

22.27.* Aflați volumul piramidei patrulater regulate, muchia căreia este egală cu b și creează cu înălțimea piramidei unghiul α .

22.28.* Aflați volumul tetraedrului regulat muchia căruia este egală cu a .

22.29.* Aflați volumul piramidei triunghiulare regulate, muchia laterală a căreia este egală cu b și creează cu planul bazei unghiul α .

22.30.** Diagonala unei prisme patrulater regulate este egală cu d și creează cu planul bazei unghiul α . Aflați volumul prisme.

22.31.** Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu d și creează cu planul bazei unghiul α , iar cu planul feței laterale – unghiul β . Aflați volumul paralelipipedului.

22.32.** Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, dacă diagonalele ei $A_1 D$ și $A_1 E$ sunt egale cu 13 cm și 12 cm corespunzător.

22.33.** Baza unei prisme drepte $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este rombul $ABCD$. Se cunoaște, că $\angle BAD = \alpha$, $AC = d$. Prin dreapta BD și punctul C_1 s-a dus un plan, care creează cu planul bazei unghiul β . Aflați volumul prisme.

22.34.** Baza unei prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul ABC . Se cunoaște, că $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Planul $A_1 BC$ creează cu planul bazei unghiul α . Aflați volumul prisme.

22.35.** Baza unei prisme oblice $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul echilateral ABC cu latura a . Vârful prismei A_1 este egal depărtat de la vârfurile triunghiului ABC , iar unghiul dintre muchia AA_1 și planul bazei este egal cu α . Aflați volumul prisme.

- 22.36.**** Baza prismei oblice $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este pătratul $ABCD$ cu latura a , muchia laterală a prisme este egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vârful A_1 al prisme este egal depărtat de la laturile pătratului $ABCD$. Aflați volumul prisme.
- 22.37.**** Baza unei piramide este triunghiul cu laturile $3\sqrt{10}$ cm, $3\sqrt{10}$ cm și 6 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei este egală cu 13 cm. Aflați volumul piramidei.
- 22.38.**** Baza unei piramide este dreptunghiul cu laturile 24 cm și 18 cm, iar fiecare muchie laterală a ei este egală cu 25 cm. Aflați volumul piramidei.
- 22.39.**** Baza unei piramide este triunghiul dreptunghic cu cateta a și unghiul alăturat ei egal cu α . Fiecare muchie laterală a piramidei este înclinată la planul bazei sub unghiul egal cu β . Aflați volumul piramidei.
- 22.40.**** Baza unei piramide este triunghiul isoscel, latura laterală a căruia este egală cu b . Unghiul dintre laturile laterale ale bazei piramidei este egal cu β . Fiecare muchie laterală a piramidei creează cu planul bazei ei unghiul α . Aflați volumul piramidei.
- 22.41.**** Baza unei piramide este rombul cu latura a și unghiul α . Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazelor sunt egale cu β . Aflați volumul piramidei.
- 22.42.**** Baza unei piramide este trapezul, laturile paralele ale căruia sunt egale cu 4 cm și 10 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45° , iar înălțimea piramidei este egală cu $2\sqrt{5}$ cm. Aflați volumul piramidei.
- 22.43.**** Baza unei piramide este triunghiul cu laturile 6 cm, 25 cm și 29 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 60° . Aflați volumul piramidei.
- 22.44.**** Baza unei piramide este un triunghi regulat cu latura a . Două fețe laterale ale piramidei sunt perpendiculare pe bază, iar a treia este înclinată la ea sub unghiul de 60° . Aflați volumul piramidei.
- 22.45.**** Baza unei piramide este un triunghi regulat cu latura a . Una din fețele laterale ale piramidei este perpendiculară pe bază, iar altele două sunt înclinate la ea sub unghiul de 45° . Aflați volumul piramidei.
- 22.46.**** Baza piramidei $MABCD$ este pătratul $ABCD$. Muchia laterală AMB este perpendiculară la planul bazei, $MA = MB$, distanța de la punctul M până la dreapta CD este egală cu 10 cm. Aflați volumul piramidei, dacă înălțimea ei este egală cu 8 cm.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 22.47. Înălțimile paralelogramului sunt egale cu 8 cm și 12 cm, iar unghiul dintre ele – 60° . Aflați aria paralelogramului.
- 22.48. Diagonala mare a trapezului dreptunghic împarte înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, în segmentele cu lungimile de 9 cm și 15 cm, iar latura laterală mare a trapezului este egală cu baza mică a lui. Aflați aria trapezului.
- 22.49. Sunt dați vectorii $\vec{m}(3; -2; p)$ și $\vec{n}(-9; 6; -12)$.
- 1) Pentru care valoare a lui p vectorii \vec{m} și \vec{n} sunt coliniari?
 - 2) Pentru care valoare a lui p vectorul \vec{m} va fi perpendicular la axa z ?

23. Volumele corpurilor de rotație. Aria sferei

În figura 23.1 sunt reprezentate prismele regulate cu 6, 12 și 24 fețe, aria bazei fiecăreia din ele este egală cu S , iar înălțimea – h . Atunci volumul fiecăreia din aceste prisme este egal cu Sh .

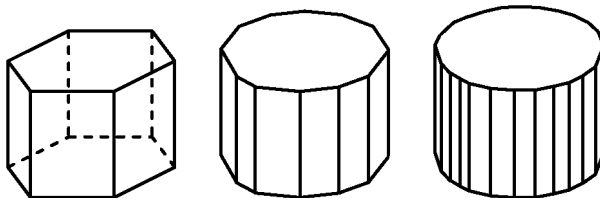


Fig. 23.1

Atragem atenția, cu cât este mai mare numărul de laturi al bazei prismei, cu atât această prismă este mai asemănătoare cu cilindrul. Aceste raționamente ne însuflă, că are loc așa o teoremă.

Teorema 23.1. *Volumul cilindrului V cu aria bazei S și înălțimea h se poate calcula după formula*

$$V = Sh$$

Dacă raza bazei cilindrului este egală cu r , atunci formula dată se poate scrie în aspectul

$$V = \pi r^2 h$$

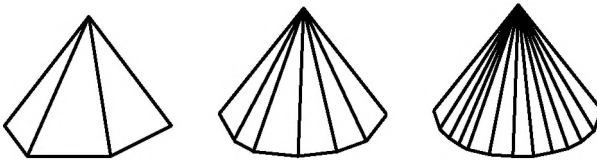


Fig. 23.2

În figura 23.2 sunt prezentate piramidele regulate cu 6, 12 și 24 fețe, aria bazei fiecăreia din ele fiind egală cu S , iar înălțimea – h . Atunci volumul fiecăreia din aceste piramide este egal cu $\frac{1}{3}Sh$.

Atragem atenția, cu cât este mai mare numărul de laturi al bazei piramidei, cu atât această piramidă este mai asemănătoare cu conul. Aceste raționamente ne însușă, că are loc așa o teoremă.

Teorema 23.2. *Volumul conului V cu aria bazei S și înălțimea h se poate calcula după formula*

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Dacă raza bazei conului este egală cu r , atunci formula dată se poate scrie în aspectul

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Spre deosebire de cilindru și con, sfera nu se poate „aproxima” prin poliedre regulate, de aceea volumul sferei se determină prin altă modalitate. Formulele pentru calculul volumului sferei și a ariei sferei pentru prima dată au fost obținute de genialul matematician al Greciei Antice Arhimede.

Teorema 23.3. *Volumul V al bilei cu raza R se poate calcula după formula*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

iar aria S a sferei cu raza R se poate calcula conform formulei

$$S = 4\pi R^2$$

Problemă. Aflați volumul conului, generatoarea căruia este egală cu l și este înclinată la planul bazei sub unghiul φ .

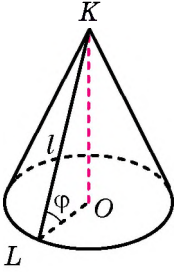


Fig. 23.3

Rezolvare: În figura 23.3 este reprezentat conul, generatoarea căruia KL este egală cu l și face cu planul bazei unghiul φ . Fie O , centrul bazei conului. Din triunghiul dreptunghic KLO aflăm raza bazei r și înălțimea h . Avem:

$$r = l \cos \varphi,$$

$$h = l \sin \varphi.$$

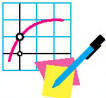
Folosind formula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, aflăm volumul conului:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Răspuns: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi$. ◀




1. După care formule se calculează volumul cilindului?
2. După care formule se calculează volumul conului?
3. După care formulă se calculează volumul sferei?
4. După care formulă se calculează aria sferei?



EXERCIȚII

- 23.1.°** Aflați volumul cilindului, raza bazei căruia este egală cu 4 cm, iar înălțimea – 5 cm.
- 23.2.°** Aflați înălțimea cilindului, volumul căruia este egal cu $98\pi \text{ cm}^3$, iar raza bazei – 7 cm.
- 23.3.°** Aflați raza bazei cilindului, volumul căruia este egal cu $252\pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea – 7 cm.
- 23.4.°** Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii dreptunghiului cu laturile a și b în jurul dreptei, care conține latura lui, ce este egală cu b .
- 23.5.°** Înălțimea cilindului este egală cu H , iar secțiunea axială a cilindului este un pătrat. Aflați volumul cilindului.
- 23.6.°** Diagonala secțiunii axiale a cilindului este egală cu 20 cm și creează cu planul bazei un unghi de 30° . Aflați volumul cilindului.

- 23.7.**° Într-un vas cilindric, umplut cu apă, au scufundat o piesă metalică. Totodată s-a dovedit, că piesa este acoperită în întregime de apă. Nivelul apei în vas s-a ridicat cu 14 cm, fără să ajungă la marginea de sus a vasului. Aflați volumul piesei, dacă diametrul interior al vasului este egal cu 20 cm.
- 23.8.**° Aflați volumul conului, raza bazei căruia este egală cu 6 cm, iar înălțimea – 5 cm.
- 23.9.**° Aflați înălțimea conului, volumul căruia este egal cu 24π cm³, iar raza bazei – 3 cm.
- 23.10.**° Volumul conului este egal cu 50 cm³, iar înălțimea – 6 cm. Aflați raza bazei conului.
- 23.11.**° O movilă de pietriș are forma unui con, raza bazei căruia este 2,1 m, iar generatoarea – 3,5 m. Câte tone alcătuiește masa pietrișului, adunată în această movilă, dacă masa 1 m³ de pietriș este egală cu 3 t? Rotunjiți răspunsul până la unități.
- 23.12.**° Secțiunea axială a conului este triunghi echilateral, iar raza bazei conului este egală cu R . Aflați volumul conului.
- 23.13.**° Aflați volumul conului, înălțimea căruia este egală cu 4 cm, iar unghiul dintre generatoare și planului bazei este egal cu 30°.
- 23.14.**° Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 10 cm, unul din unghiuri – 60°. Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dat în jurul dreptei, care conține cateta, alăturată unghiului dat.
- 23.15.**° Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 13 cm, iar una din catete – 5 cm. Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dat în jurul dreptei, care conține cateta dată.
- 23.16.**° Aflați volumul bilei, raza căreia este egală cu 3 cm.
-  **23.17.**° Demonstrați, că volumele a două bile se raportează ca cuburile razelor lor.
- 23.18.**° De câte ori este necesar de mărit raza bilei, ca volumul ei să se mărească de 5 ori?
- 23.19.**° Volumele a două bile se raportează ca 8 : 25. Găsiți raportul razelor lor.
- 23.20.**° Raza sferei este egală cu 5 cm. Cu ce este egală aria ei?
- 23.21.**° Aflați raza sferei, aria căreia este egală cu 256π cm².
- 23.22.**° Raza unei bile au mărit-o de 7 ori. Cum s-a modificat aria suprafeței ei?

- 23.23.**° Cum trebuie de schimbat raza bilei, ca aria suprafeței ei să se micșoreze de 3 ori?
- 23.24.**° Volumele a două bile se raportează ca 27 : 125. Cum se raportează ariile suprafețelor lor?
- 23.25.*** Un fir de aluminiu cu diametrul de 10 mm are masa de 16,3 kg. Greutatea specifică a aluminiului este egală cu 2600 kg/m^3 . Care este lungimea firului? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.
- 23.26.*** O țevă de plumb, grosimea peretelui căreia este egală cu 4 mm, are diametrul interior 32 mm. Greutatea specifică a plumbului este egală cu $11\,400 \text{ kg/m}^3$. Câte kilograme alcătuiește masa țevii, dacă lungimea ei este egală cu 15 m? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.
- 23.27.*** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α , $0 < \alpha < 180^\circ$. Segmentul, ce unește centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde, face cu planul bazei unghiul β . Aflați volumul cilindrului, dacă înălțimea lui este egală cu m .
- 23.28.*** În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care se vede din centrul acestei baze sub unghiul de 90° , iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60° . Aflați volumul cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu R .
- 23.29.*** Unghiul de la vârful secțiunii axiale a conului este egal cu α , iar distanța de la centrul bazei conului până la generatoare este egală cu m . Aflați volumul conului.
- 23.30.*** În baza conului o coardă cu lungimea a subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α , $0 < \alpha < 180^\circ$. Unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei lui este egal cu β . Aflați volumul conului.
- 23.31.*** Coarda bazei conului subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 60° . Segmentul, ce unește vârful conului cu mijlocul coardei date, face cu planul bazei conului unghi de 60° . Înălțimea conului este egală cu $\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul conului.
- 23.32.*** Din vasul ce are forma unui con cu înălțimea de 8 cm și diametrul bazei 12 cm, umplut cu apă până la margini, au turnat apa într-un vas ce are forma cilindrului (fig. 23.4). Diametrul bazei cilindrului este egal cu 8 cm. Care trebuie să fie cea mai mică înălțime a vasului cilindric, ca apa din el să nu se verse?

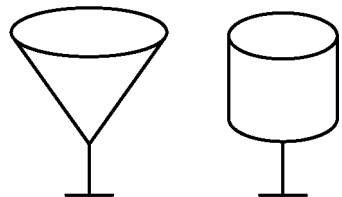


Fig. 23.4

- 23.33.*** Stogul de fân are formă de cilindru cu vârful conic. Raza bazei lui este egală cu 2,5 m, înălțimea stogului întreg – 4 m, iar înălțimea părții cilindrice a lui – 2,2 m. Densitatea fânului este egală cu 30 kg/m^3 . Câte tone va alcătui masa stogului? Răspunsul rotunjiți-l până la zecimi.
- 23.34.*** Bila metalică, cu raza de 15 cm au topit-o și din metalul topit au format câteva bile, razele cărora sunt egale cu 3 cm. Câte astfel de bile s-au turnat? Pierderile de metal în timpul topirii de le neglijat.
- 23.35.*** Trei bile de metal, razele cărora sunt egale cu 3 cm, 4 cm și 5 cm, le-au topit și din metalul obținut au turnat o bilă. Care va fi raza bilei obținute. Pierderile metalului în timpul retopirii se vor neglija.
- 23.36.*** Aria cercului mare a bilei este egală cu S . Aflați aria suprafeței bilei date.
- 23.37.*** Un plan, depărtat de la centrul sferei cu 7 cm, intersectează sfera după o linie, lungimea căreia este egală cu 6π cm. Aflați aria sferei.
- 23.38.*** Aria secțiunii bilei cu planul, depărtat de la centrul ei cu 4 cm, este egală cu $24\pi \text{ cm}^2$. Aflați aria suprafeței sferei.
- 23.39.*** Câți metri de pânză cu lățimea de 1 m vor trebui pentru confecționarea unui montgolfier, raza căruia, este egală cu 2 m, dacă pentru conexiunea detaliilor sferei și a rămășițelor se cheltuie 10% de pânză? Răspunsul rotunjiți-l până la zecimi.
- 23.40.*** În care caz se cheltuie mai multă materie primă: pentru nichelarea unei bile cu diametrul de 6 cm sau pentru nichelarea a 8 bile cu diametrul de 1 cm fiecare?
- 23.41.**** Paralel cu axa cilindrului s-a dus o secțiune, distanța de la planul căreia până la axa cilindrului este egală cu 12 cm. Diagonala secțiunii este egală cu $10\sqrt{5}$ cm, iar raza bazei cilindrului – 13 cm. Aflați volumul cilindrului.
- 23.42.**** Planul, paralel cu axa bazei cilindrului, retează de la circumferința bazei un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α , $0^\circ < \alpha < 80^\circ$. Diagonala secțiunii obținute creează cu axa cilindrului unghiul β și este depărtată de la ea la distanța d . Aflați volumul cilindrului.
- 23.43.**** Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului cu laturile 10 cm, 17 cm și 21 cm în jurul dreptei, care conține latura mai mare a lui.
- 23.44.**** Trapezul isoscel cu bazele 1 cm și 25 cm îl rotesc în jurul dreptei, ce conține baza mai mare a lui. Aflați volumul corpului obținut, dacă se cunoaște, că în trapezul dat se poate înscrie o circumferință.

- 23.45.**** Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dreptunghic în jurul dreptei ce conține ipotenuza acestui triunghi, dacă se știe cateta lui α și unghiul β alăturat acestei catete.
- 23.46.**** Ariile a două secțiuni paralele ale sferei, amplasate de aceeași parte de centrul ei, sunt egale cu $400\pi \text{ cm}^2$ și $49\pi \text{ cm}^2$. Aflați aria suprafețelor bilelor, dacă distanța dintre planele secțiunilor este egală cu 9 cm.
- 23.47.**** Ariile a două secțiuni paralele ale sferei, amplasate pe ambele părți față de centrul ei, sunt egale cu $9\pi \text{ cm}^2$ și $25\pi \text{ cm}^2$. Aflați aria suprafețelor sferelor, dacă distanța dintre planele secțiunilor este egală cu 8 cm.



EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 23.48.** Într-o circumferință este înscris patrulaterul $ABCD$. Unghiul A este de 3 ori mai mare decât unghiul C , iar unghiul B de 5 ori mai mic decât unghiul A . Aflați unghiul D .
- 23.49.** În triunghiul isoscel MKE ($MK = KE$) bisectoarea unghiului E intersectează latura MK în punctul C . Aflați unghiurile triunghiului MKE , dacă $\angle KCE = 126^\circ$.
- 23.50.** Modulul vectorului $\vec{a}(2; m + 1; m + 5)$ este egal cu $2\sqrt{3}$. Este oare vectorul \vec{a} coliniar cu vectorul $\vec{b}(-1; m + 4; m + 2)$?

ÎNSĂRCINAREA NR. 6 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

- Muchia cubului au micșorat-o de 3 ori. De câte ori s-a micșorat volumul lui?
A) de 3 ori; B) de 6 ori; C) de 9 ori; D) de 27 ori.
- Diagonala feței cubului este egală cu a . Cu ce este egal volumul cubului?
A) $\frac{a^3}{8}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; C) $\frac{a^3}{9}$; D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.
- Calculați volumul prisme triunghiulare regulate, latura bazei căreia este egală cu 20 cm, iar înălțimea – 9 cm.
A) $300\sqrt{3}$ cm³; B) 300 cm³; C) 900 cm³; D) $900\sqrt{3}$ cm³.
- Calculați volumul prisme, baza căreia este un paralelogram cu laturile 6 cm și 4 cm și unghiul 45°, iar înălțimea prisme este egală cu $7\sqrt{2}$ cm.
A) 168 cm³; B) 84 cm³; C) 56 cm³; D) 70 cm³.
- Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza c și unghiul de 30°. Diagonala feței laterale care conține cateta, opusă unghiului dat, este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60°. Găsiți volumul prisme.
A) $\frac{3c^3}{16}$; B) $\frac{3c^3}{8}$; C) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{16}$; D) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{8}$.
- Calculați volumul piramidei, baza căreia este un romb cu diagonalele 10 cm și 18 cm, iar înălțimea piramidei constituie 20 cm.
A) 1800 cm³; B) 600 cm³; C) 1200 cm³; D) 300 cm³.
- Latura bazei piramidei patrulateră regulate este egală cu a , iar secțiunea diagonală a ei este un triunghi echilateral. Găsiți volumul piramidei.
A) $\frac{a^3}{3}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; D) $\frac{a^3}{6}$.
- Baza piramidei este un dreptunghi cu laturile ce sunt egale cu 6 cm și 8 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei creează cu planul bazei unghiul de 60°. Găsiți volumul piramidei.
A) $240\sqrt{3}$ cm³; B) 160 cm³; C) 80 cm³; D) $80\sqrt{3}$ cm³.
- Baza piramidei este triunghiul cu laturile 39 cm, 39 cm și 30 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45°. Găsiți volumul piramidei.
A) 900 cm³; B) 600 cm³; C) 1800 cm³; D) 1200 cm³.

10. Calculați volumul cilindrului, secțiunea axilă a căruia este pătratul cu latura de 8 cm.
A) $64\pi \text{ cm}^3$; B) $96\pi \text{ cm}^3$; C) $128\pi \text{ cm}^3$; D) $512\pi \text{ cm}^3$.
11. Cu ce este egală raza bazei cilindrului, volumul căruia alcătuiește $36\pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea este egală cu 4 cm?
A) 9 cm; B) 3 cm; C) 6 cm; D) $2\sqrt{3}$ cm.
12. Înălțimea conului este egală cu 9 cm, iar volumul lui – $6\pi \text{ cm}^3$. Cu ce este egală aria bazei conului?
A) 2 cm^2 ; B) $2\pi \text{ cm}^2$; C) $3\pi \text{ cm}^2$; D) 6 cm^2 .
13. Razele conului și a cilindrului sunt egale, înălțimea cilindrului este egală cu 8 cm, iar înălțimea conului – 6 cm. Aflați raportul volumului cilindrului la volumul conului.
A) 4 : 3; B) 1 : 1; C) 4 : 1; D) 3 : 1.
14. Aria totală a suprafeței conului este egală cu $200\pi \text{ cm}^2$, iar generatoarea lui – 17 cm. Aflați volumul conului.
A) $960\pi \text{ cm}^3$; B) $320\pi \text{ cm}^3$; C) $480\pi \text{ cm}^3$; D) $120\pi \text{ cm}^3$.
15. În baza conului este dusă o coardă cu lungimea de 12 cm, care se vede din centrul bazei sub unghiul de 120° . Aflați volumul conului, dacă generatoarea lui este egală cu 8 cm.
A) $64\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$; B) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$; C) $192\pi \text{ cm}^3$; D) $64\pi \text{ cm}^3$.
16. Calculați volumul sferei cu raza de 3 cm.
A) $36\pi \text{ cm}^3$; B) $9\pi \text{ cm}^3$; C) $108\pi \text{ cm}^3$; D) $54\pi \text{ cm}^3$.
17. Găsiți rapoartele ariilor a două sfere, razele cărora sunt egale cu 5 cm și 10 cm.
A) 1 : 5; B) 1 : 2; C) 1 : 8; D) 1 : 4.
18. Cu ce este egală raza sferei, aria căreia este de $100\pi \text{ cm}^2$?
A) 100 cm; B) 50 cm; C) 5 cm; D) 20 cm.

**PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 6****Volumul corpului**

Volumul corpului se numește mărimea pozitivă, care posedă astfel de proprietăți:

- 1) corpurile egale au volume egale;
- 2) dacă corpul e compus din câteva alte corpuri, atunci volumul lui este egal cu suma volumelor acestor corpuri;
- 3) ca unitate de măsură a volumului corpului, se va alege cubul unitate, adică cubul cu muchia, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.

Volumul prisme

$V = Sh$, unde V este volumul prisme, S – aria bazei prisme, h – lungimea înălțimii prisme.

Volumul piramidei

$V = \frac{1}{3}Sh$, unde V – volumul piramidei, S – aria bazei piramidei, h – lungimea înălțimii piramidei.

Volumul cilindrului

$V = \pi r^2 h$, unde V este volumul cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Volumul conului

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, unde V este volumul conului, r – raza bazei conului, h – lungimea înălțimii conului.

Volumul bilei

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, unde V este volumul bilei, R – raza bilei.

Aria bilei

$S = 4\pi R^2$, unde S este aria bilei, R – raza bilei.

§7

REPETAREA CURSULUI DE MATEMATICĂ

24. Probleme pentru repetarea cursului de algebră

Devizibilitatea numerelor naturale. Criteriile de divizibilitate.

- 24.1.** Care din numerele 24, 75, 83, 378, 573, 898 sunt divizibile fără rest: 1) cu 2; 2) cu 3?
- 24.2.** Care din numerele 28, 85, 108, 135, 240, 396 sunt divizibile fără rest: 1) cu 5; 2) cu 9?
- 24.3.** Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor: 1) 24 și 42; 2) 18 și 30; 3) 128 și 192; 4) 328 și 624.
- 24.4.** Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor: 1) 16 și 32; 2) 9 și 14; 3) 18 și 12; 4) 16 și 24.
- 24.5.** Înlocuiți asteriscul în scrierea 400^* cu așa o cifră, ca numărul obținut să fie multiplu lui: 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 3. Cercetați toate cazurile posibile.
- 24.6.** Câtul incomplet, obținut de la împărțirea a două numere cu două cifre este egal cu 9, iar restul – cu 8. Cu ce este egal deîmpărțitul?
- 24.7.** Maria locuiește în apartamentul nr. 40 a unui bloc de locuință cu 5 etaje. În fiecare scară, la fiecare etaj sunt repartizate câte 3 apartamente în ordinea creșterii numerelor: prima – la stânga, a doua – la mijloc, a treia – la dreapta.
- 1) Care este numărul scării, în care trăiește Maria?
 - 2) La ce etaj locuiește fetița?
 - 3) Unde se află apartamentul ei: la stânga, la mijloc sau la dreapta?
- 24.8.** Care număr este împărțitorul a oricărui număr natural?
- 24.9.** Care din numerele 4025, 7540, 2754, 6225 se împarte fără rest cu 3, dar nu se împart fără rest cu 2?
- 24.10.** Câte numere de două cifre, multiple cu numărul: 1) 5; 2) 9; 3) 7, există?
- 24.11.** Cărțile pot fi amplasate în mod egal pe 12 polițe sau pe 8 polițe. Câte cărți sunt, dacă se știe, că sunt mai multe de 100 de cărți, dar mai puține de 140?
- 24.12.** Merele pot fi repartizate în mod egal în 12 pachete, sau, tot în mod egal, în 16 pachete. Câte mere sunt, dacă se știe, că sunt mai mult de 80 de mere, dar mai puțin de 120?

- 24.13.** Care este cel mai mic număr care trebuie adunat cu numărul 826, pentru ca suma obținută să se împartă fără rest în același timp cu 3 și cu 10?
- 24.14.** Într-o livadă cresc meri și vișini, totodată meri sunt de 3 ori mai mulți decât vișini. Cu care din numerele aduse mai jos se poate egala cantitatea totală de pomi din livadă?
1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.
- 24.15.** Cu ce este egal restul ce se obține la împărțirea cu 7 a valorii expresiei $(5n + 8) - (5 - 2n)$, unde n – număr natural arbitrar?
- 24.16.** În fiecare buchet trebuie să fie 4 trandafiri albi și 3 roșii. Care este cea mai mare cantitate de astfel de buchete ce pot fi compuse din 36 de trandafiri roșii și 45 de trandafiri albi?
- 24.17.** Care este una și aceeași cifră, ce trebuie pusă în scrierea ****25**** în locul fiecărui asterisc, ca numărul obținut să fie multiplu lui 6?

Numere raționale și operații cu ele

- 24.18.** Repartizați în ordine descrescătoare numerele:

$$1) \frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{13}{15}; \quad 2) \frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{24}, \frac{5}{12}.$$

- 24.19.** Aflați toate numerele naturale c , pentru care este adevărată inecuația:

$$1) \frac{6}{11} < \frac{c}{11} < 1; \quad 2) \frac{2}{9} < \frac{c}{18} < \frac{5}{6}.$$

- 24.20.** Aflați toate valorile naturale ale lui x , pentru care este adevărată inecuația $\frac{x}{9} < \frac{22}{45}$.

- 24.21.** Câte fracții există:

- 1) cu numitorul 24, care sunt mai mari ca $\frac{3}{8}$, dar mai mici decât $\frac{2}{3}$;
- 2) cu numitorul 18, care sunt mai mari ca $\frac{7}{9}$, dar mai mici decât 1;
- 3) cu numitorul 28, care sunt mai mari ca $\frac{3}{7}$, dar mai mici decât $\frac{4}{7}$?

- 24.22.** O limuzină parcurge distanța dintre două orașe în 5 ore, iar un camion – în 8 ore. Care dintre aceste automobile va parcurge o distanță mai mare: limuzina în 3 ore sau camionul în 5 ore?

- 24.23.** Câte fracții regulate cu numitorul 12 există?

- 24.24.** Câte fracții neregulate cu numărătorul 10 există?

24.25. Căru din intervalele date aparține numărul $\frac{10}{15}$:

- 1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

24.26. Calculați valoarea expresiei:

- 1) $\frac{9}{11} - \frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{16} + \frac{7}{24} - \frac{5}{8}$; 7) $4\frac{7}{30} - 1\frac{11}{20}$;
 2) $\frac{11}{16} - \frac{9}{32}$; 5) $2\frac{3}{4} + 6\frac{7}{10}$; 8) $\frac{5}{7} - 0,6$;
 3) $\frac{14}{15} - \frac{9}{10}$; 6) $5\frac{2}{9} - 2\frac{5}{7}$; 9) $0,35 + \frac{8}{15}$.

24.27. Calculați valoarea expresiei:

- 1) $1 - \frac{3}{25} \cdot 2\frac{1}{7} - 1\frac{8}{9} \cdot \frac{27}{170}$; 4) $(-5,16 + 5,02) \cdot (2,5 - 4)$;
 2) $\left(9 - 2\frac{1}{7} \cdot 3\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{27}{35}$; 5) $\frac{5}{32} : \frac{5}{12} - 3\frac{1}{4} : 1\frac{2}{11}$;
 3) $\left(5\frac{1}{16} - 1\frac{1}{8}\right) \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{14}\right)$; 6) $\left(7 - 1\frac{5}{9} : \frac{7}{24}\right) : \left(-\frac{25}{36}\right)$.

24.28. Care din fracțiile zecimale ordinare date nu pot fi transformate în fracție zecimală finită:

- 1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

24.29. Un tractorist poate ara un câmp în 12 ore, iar altul – în 8 ore. Ce parte din câmp pot ei ara, lucrând împreună, în decursul a 3 ore?

24.30. La un magazin au adus 540kg fructe, din ele $\frac{4}{9}$ constituiau merele, iar restul – perele. Câte kilograme de pere au adus la magazin?

24.31. În decursul a trei zile au introdus programe antivirus în 105 computatoare. În prima zi au introdus programe în $\frac{3}{7}$ computatoare, iar în a doua zi – în $\frac{7}{12}$ din restul computatoarelor. În câte computatoare au instalat programe antivirus în a treia zi?

24.32. Trebuie de ambalat $27\frac{1}{2}$ kg zahăr în pachete a câte $\frac{3}{4}$ kg în fiecare. Câte pachete pline se vor obține?

24.33. Care este cea mai mică cantitate de borcane cu capacitatea de 0,3l necesară pentru ca în ea să încapă 4l de miere?

- 24.34.** Un zugrav poate repara cabinetul de matematică în 48 ore, iar alt zugrav – în 96 ore. În câte ore, lucrând împreună, ei pot repara acest cabinet?
- 24.35.** Doi muncitori lucrând împreună, pot executa un lucru oarecare în 6 ore. Unul din ei, lucrând de sine stătător, poate îndeplini acest lucru în 10 ore. În câte ore, lucrând singur, poate al doilea muncitor îndeplini acest lucru?

Mărimi proporționale. Calcule procentuale

- 24.36.** O fetiță are o oarecare sumă de bani cu care dânsa poate procura 18 caiete la fel. Câte caiete poate achiziționa fetița de această sumă de bani, dacă ele: 1) se vor iefteni de 2 ori; 2) se vor scumpi de 1,5 ori?
- 24.37.** Din 12m de peluză au cusut 8 bluze la fel. Câte astfel de bluze pot fi confecționate din 18 m peluză?
- 24.38.** Șase escavatoare identice, lucrând împreună, au săpat groapa fundației în 18 ore. În câte ore 4 astfel de escavatoare, lucrând împreună, vor săpa două astfel de gropi pentru fundație?
- 24.39.** Se știe că din 50 kg de făină se obțin 70 kg pâine. Câte kilograme de pâine vor obține din 150 kg făină? Câte kilograme de făină trebuie pentru a coace 14 kg de pâine?
- 24.40.** Cu castraveți au sădit $\frac{1}{3}$ din grădină, iar cu roșii – 30%. Cu care plante, cu castraveți sau roșii, au sădit o parcelă mai mare?
- 24.41.** 20% din caietele cumpărate erau în pătrățele, iar restul – în linii. De câte ori mai mult au cumpărat caiete în linii, decât în pătrățele?
- 24.42.** Aliajul conține 9% zinc. Câte kilograme de zinc se conțin în 270 kg de aliaj?
- 24.43.** Prețul mărfii la început l-au mărit cu 50%, apoi l-au micșorat cu 50%. S-a mărit sau s-a micșorat și cu câte procente, prețul inițial al mărfii?
- 24.44.** Prețul mărfii la început l-au micșorat cu 20%, iar apoi l-au mărit cu 30%. Cum și cu câte procente s-a schimbat prețul inițial în urma acestor două reconsiderări?
- 24.45.** Un deponent a pus în bancă 60 000 grn. pe două conturi diferite. Pentru primul din conturi banca plătește 5% dobândă anuală, iar al doilea – 7% dobândă anuală. Peste un an deponentul a primit venitul, pentru depozitul cu 5% dobândă, cu 1200 grn. mai mult, decât pentru depozitul cu 7% dobândă. Câți bani a pus el pe fiecare cont?

- 24.46.** Au amestecat o soluție de 50% a acidului cu soluția de 20% a aceluiași acid și au obținut 600 g soluție de 30% de acid. Câte grame de fiecare soluție au amestecat?
- 24.47.** Câte kilograme de aliaj, ce conține 30% cupru, și câte kilograme de aliaj ce conține 40% cupru trebuie de luat, pentru a obține 50kg de aliaj ce conține 36% cupru?
- 24.48.** În prima zi turistul a parcurs 16 km, ceea ce constituie 40% din lungimea itinerarului turistic. Aflați lungimea acestui itinerar.
- 24.49.** Minereul de fier conține 70% fier. Cât minereu trebuie de luat, pentru a obține 84 t de fier?
- 24.50.** Într-un cinematograful sunt 480 de locuri, din care în timpul rulării filmului erau ocupate 408. Câte procente constituie locurile ocupate?
- 24.51.** În soluția de sare de 10 procente cu masa 200 g au turnat 300 g apă. Care este conținutul procentual al sării în soluția obținută?
- 24.52.** Prețul mărfii a crescut de la 1600 grn. până la 1640 grn. Cu câte procente a crescut prețul mărfii?
- 24.53.** Prețul mărfii a scăzut de la 3200 grn. până la 2560 grn. Cu câte procente a scăzut prețul?
- 24.54.** Un depozitar a pus pe cont în bancă 60 000 grn cu 10% dobândă anuală. Câți bani vor fi pe contul lui peste 2 ani?

Expresii raționale

- 24.55.** Pentru care valori x_1 și x_2 sunt satisfăcute egalitățile $x_1 - x_2 = 7$, $x_1 x_2 = 4$. Aflați anume pentru aceste valori ale lui x_1 și x_2 valoarea expresiei:

$$1) x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2; \quad 2) x_1^2 + x_2^2; \quad 3) (x_1 + x_2)^2.$$

- 24.56.** Simplificați fracția:

$$1) \frac{3a}{12b}; \quad 2) \frac{8xy}{4xz}; \quad 3) \frac{20m^2}{15m^3}; \quad 4) \frac{3a^2bc}{21abc^4}; \quad 5) \frac{36m^5n^4}{24m^2n^7}; \quad 6) \frac{39p^6q^9}{65p^9q^6}.$$

- 24.57.** Simplificați fracția:

$$1) \frac{4a + 12b}{4a}; \quad 4) \frac{6y^2 - 3y}{4 - 8y}; \quad 7) \frac{7a^2 + 7a + 7}{14a^3 - 14};$$

$$2) \frac{7x - 14y}{3x - 6y}; \quad 5) \frac{4p^2 + 28pq + 49q^2}{49q^2 - 4p^2}; \quad 8) \frac{x^2 - 7x}{x^2 - 9x + 14};$$

$$3) \frac{x^2 - 25}{2x + 10}; \quad 6) \frac{a^3 - 27}{9a - 27}; \quad 9) \frac{x^2 - 64}{32 + 4x - x^2}.$$

24.58. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

$$1) \frac{2a+5b}{ab} - \frac{2a-b}{ab};$$

$$3) \frac{5x+6}{5-x} + \frac{3x+16}{x-5};$$

$$2) \frac{x^2+8x}{4-x^2} - \frac{4x-4}{4-x^2};$$

$$4) \frac{36-10x}{(x-6)^2} - \frac{2x-x^2}{(6-x)^2};$$

24.59. Simplificați expresia:

$$1) \frac{4n+5m}{m} - \frac{6n^2+5m^2}{mn};$$

$$6) 8 - \frac{3a+8c}{c};$$

$$2) \frac{a+2}{3a-3} + \frac{3-a}{5a-5};$$

$$7) \frac{m+1}{m-1} - \frac{m^2+1}{m^2-1};$$

$$3) \frac{x-5}{x+5} - \frac{x-1}{x-5};$$

$$8) \frac{b^2}{2ab+a^2+b^2} + \frac{a-b}{a+b};$$

$$4) \frac{4b}{3b-24} + \frac{3b}{16-2b};$$

$$9) \frac{3a}{9a^2-1} - \frac{a+2}{3a^2+a};$$

$$5) \frac{4}{m^2-36} - \frac{2}{m^2-6m};$$

24.60. Efectuați înmulțirea:

$$1) \frac{a^3}{b^4} \cdot \frac{b^2}{a^3};$$

$$3) \frac{a}{7b} \cdot 7a;$$

$$5) \frac{17x^4}{y^8} \cdot \frac{y^6}{34x^7};$$

$$2) \frac{4m^2}{k^6} \cdot \frac{mk^6}{16};$$

$$4) 20x^{16} \cdot \frac{y^4}{5x^4};$$

$$6) \frac{8k^9}{9mp} \cdot \frac{81m^2}{56k^6p^2};$$

24.61. Aflați câtul:

$$1) \frac{14}{a^2} : \frac{28}{a^6};$$

$$3) \frac{45}{m^8} : \frac{36}{m^7n^2};$$

$$5) 35m^4 : \frac{21m^3}{n^2};$$

$$2) \frac{b^5}{6} : \frac{b^3}{48};$$

$$4) \frac{6x^7}{y^8} : (36x^7y^2);$$

$$6) \frac{16a^3b^8}{33c^5} : \left(-\frac{12a^2}{55c^6} \right);$$

24.62. Simplificați expresia:

$$1) \frac{4x+4y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x+y};$$

$$4) \frac{3c+6}{9c^2-6c+1} \cdot \frac{3c-1}{c+2};$$

$$2) \frac{24b}{b^2-16} \cdot \frac{b-4}{3b};$$

$$5) \frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2);$$

$$3) \frac{8}{m^2-25n^2} \cdot (m-5n);$$

$$6) (p^2-36k^2) : \frac{p+6k}{p};$$

24.63. Simplificați expresia:

$$1) \left(\frac{m}{m-2} - 1 \right) : \frac{6m}{mn-2n};$$

$$2) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) : \frac{a+b}{2ab};$$

3) $\frac{6x}{x+2} - \frac{x-6}{3x+6} \cdot \frac{72}{x^2-6x}$;

5) $\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right) : \frac{4m}{1-m^2}$;

4) $\left(a - \frac{15a-25}{a+5}\right) : \frac{a^2-5a}{a+5}$;

6) $\left(\frac{2a-6}{a^2-4a+4} - \frac{a-4}{a^2-2a}\right) : \frac{a^2-8}{a^3-4a}$.

Ecuatii algebrice. Sistem de ecuatii algebrice

24.64. Rezolvați ecuațiile:

1) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$;

3) $\frac{x+2}{x+2} = 1$;

5) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = 0$;

2) $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$;

4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = 0$;

6) $\frac{10-4x}{x+9} + \frac{6x+8}{x+9} = 0$.

24.65. Rezolvați ecuațiile:

1) $\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4}{1-4x^2}$;

3) $\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$;

2) $\frac{x^2+8x}{x+10} = \frac{20}{x+10}$;

4) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$.

24.66. Rezolvați ecuațiile:

1) $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$;

2) $x^4 - 3x^2 - 70 = 0$.

24.67. Pentru care valoare a lui b ecuația are o rădăcină:

1) $2x^2 + 8x - b = 0$;

2) $5x^2 - bx + 20 = 0$?

24.68. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 7x - 3y = 23; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 6, \\ 6x + 5y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 7y = 38, \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$

24.69. Dreapta $y = kx + b$ trece prin punctele $M(3; 3)$ și $E(1; 7)$. Scrieți ecuația acestei drepte.

24.70. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + xy - 5y = -3, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

24.71. Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda grafică:

1) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 2x + y = -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x + 2y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y = 6, \\ x + y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y = -6. \end{cases}$

24.72. Determinați cu ajutorul metodei grafice cantitatea de soluții a sistemului de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y + x = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x^2 + y = 4x. \end{cases}$

**Inegalități numerice și proprietățile lor.
Inecuații pătratice și liniare și sistemele lor.**

24.73. Se dă: $-4 < x < 2$. Apreciați valoarea expresiei: 1) $3x - 1$; 2) $8 - 5x$.

24.74. Se dă: $2 < x < 6$ și $3 < y < 4$. Estimați valoarea expresiei:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) xy ; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $5x + 2y$; 6) $3x - 4y$.

24.75. Evaluați lungimea liniei medii a trapezului cu bazele x cm și y cm, dacă $8 < x < 12$, $7 < y < 14$.

24.76. Aflați mulțimea soluțiilor a inecuației:

1) $(x + 2)^2 \geq 0$; 3) $(x + 2)^2 > 0$; 5) $0x < -5$; 7) $0x < 5$;
2) $(x + 2)^2 \leq 0$; 4) $(x + 2)^2 < 0$; 6) $0x \geq -5$; 8) $0x \geq 5$.

24.77. Rezolvați inecuația:

1) $8x + 4 \leq 30 - 5x$; 3) $0,3(8 - 3y) \leq 3,2 - 0,8(y - 7)$;
2) $9 - 4x < 6x - 25$; 4) $\frac{x+4}{3} - \frac{x+2}{6} \leq 4$.

24.78. Aflați cea mai mare soluție întregă a inecuației:

1) $3x + 9 > 5x - 7$; 2) $14x^2 - (2x - 3)(7x + 4) \leq 14$.

24.79. Aflați cea mai mică soluție întregă a inecuației:

1) $x - 5 < 3x + 8$; 2) $18x^2 - (3x - 2)(6x + 5) \leq 20$.

24.80. Pentru care valori ale lui a ecuația:

1) $x^2 + x - a = 0$ nu are soluții;
2) $2x^2 - 16x + 5a = 0$ are cel puțin o soluție reală?

24.81. Rezolvați sistemul de inecuații?

1) $\begin{cases} 7x - 1 \geq 5x - 3, \\ 3x + 6 \geq 8x - 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x(x - 3) - x(2 + 3x) < 4, \\ 6x^2 - (2x - 3)(3x + 4) < 17; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 0,6(x - 6) \leq x + 2, \\ 4x + 7 > 2(x + 6,5); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5x - 10}{6} > \frac{2x + 1}{3}, \\ \frac{3x + 1}{2} - 4x > 5 - \frac{3x - 2}{4}. \end{cases}$

24.82. Aflați soluțiile întregi ale sistemului de inecuații:

1) $\begin{cases} 6x - 7 < 3x + 17, \\ 8 - 2x > 14 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 20 \geq x + 5, \\ 2x + 2 \geq 4x - 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 1 > 2x + 4, \\ 6x - 5 \leq 13 - x. \end{cases}$

24.83. Rezolvați inecuația:

1) $x^2 - 6x - 7 < 0$; 6) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;
2) $x^2 + 2x - 48 \geq 0$; 7) $4x^2 - 16x \leq 0$;
3) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; 8) $4x^2 - 49 > 0$;
4) $-x^2 - 4x - 3 < 0$; 9) $2x^2 - x + 1 > 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$; 10) $3x^2 - 4x + 2 \leq 0$.

24.84. Câte soluții întregi are inecuația:

1) $20 + 8x - x^2 > 0$;

2) $4x^2 - 17x + 4 \leq 0$?

Puteri și rădăcini

24.85. Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $5^{-2} + 5^{-1}$; 2) $6^{-2} - 12^{-1}$; 3) $0,08^0 + 0,9^0$; 4) $(4 \cdot 2^{-3} - 10^{-1})^{-1}$?

24.86. Exprimați în formă de fracție expresia:

1) $a^{-3} + a^{-4}$;

3) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-2}$;

2) $mn^{-5} + m^{-5}n$;

4) $(x^{-4} + y^{-4}) \cdot (x^4 + y^4)^{-1}$.

24.87. Aflați valoarea expresiei:

1) $\frac{3^{12} \cdot 27^3}{9^9}$;

3) $100^{-2} : 1000^{-6} \cdot 0,01^8$;

5) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^7}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^7$;

4) $(0,2^{-3})^{-2} : 25^{-4}$;

6) $\frac{6^{-14}}{81^{-3} \cdot 16^{-4}}$.

24.88. Aflați valoarea expresiei:

1) $-3\sqrt{0,16} + 0,8$;

4) $(3\sqrt{8})^2 + (8\sqrt{3})^2$;

2) $\frac{1}{9} \cdot (\sqrt{18})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{28}\right)^2$;

5) $0,2\sqrt[3]{1000} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{81}$;

3) $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)^2$;

6) $\sqrt[3]{-128} + 3(\sqrt[3]{9})^9 - 4\sqrt[3]{216}$.

24.89. Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

1) $\sqrt{3-a}$;

3) $\sqrt{a^4+1}$;

5) $\sqrt[3]{a-8}$;

2) $\sqrt{a^2}$;

4) $\sqrt[3]{x+4}$;

6) $\sqrt[6]{-x^2}$?

24.90. Rezolvați ecuația:

1) $x^2 = 7$;

3) $x^7 = 9$;

5) $x^4 = 16$;

2) $x^2 = -16$;

4) $x^5 = -2$;

6) $x^6 = 5$.

24.91. Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,4}$;

3) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$;

5) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}}$;

2) $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$;

4) $\sqrt[9]{2^7 \cdot 7^4} \cdot \sqrt[9]{7^5 \cdot 2^{20}}$;

6) $\sqrt[5]{\sqrt{17}-7} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{17}+7}$.

24.92. Simplificați expresia:

1) $\sqrt{9x^8y^{10}}$, dacă $y \geq 0$;

3) $\sqrt[7]{k^7}$;

2) $\sqrt{0,64x^6y^2}$, dacă $x \leq 0$, $y \geq 0$;

4) $\sqrt[3]{0,008p^{24}n^{30}}$.

24.93. Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[3]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^8}; \quad 3) \sqrt{(\sqrt{23}-7)^2} - \sqrt{(\sqrt{23}-3)^2};$$

$$2) \sqrt[4]{(\sqrt{5}-6)^4}; \quad 4) \sqrt[6]{(5-4\sqrt{2})^6} + \sqrt[5]{(5-4\sqrt{2})^5}.$$

24.94. Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

$$1) \sqrt{18a^8}; \quad 3) \sqrt[3]{-m^{10}}; \quad 5) \sqrt[4]{-81a^{11}};$$

$$2) \sqrt[4]{x^9}; \quad 4) \sqrt[6]{a^{10}b^9}, \text{ dacă } a \leq 0; \quad 6) \sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}.$$

24.95. Simplificați expresia (variabilele primesc valori nenegative):

$$1) \sqrt[4]{b^3\sqrt{b^4}}; \quad 2) \sqrt[3]{c^7\sqrt{c^2}}; \quad 3) \sqrt[6]{a^2\sqrt{a^2}}.$$

24.96. Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{405}; \quad 3) (5-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7});$$

$$2) (\sqrt{99} - \sqrt{44})\sqrt{11}; \quad 4) (\sqrt{14} - \sqrt{11})(\sqrt{14} + \sqrt{11}).$$

24.97. Simplificați fracția:

$$1) \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}; \quad 2) \frac{a-3\sqrt{a}}{a-9}; \quad 3) \frac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[6]{x-2}}.$$

24.98. Comparați:

$$1) \sqrt{39} \text{ și } 2\sqrt{10}; \quad 3) 4 \text{ și } \sqrt[3]{65}; \quad 5) \sqrt[4]{6} \text{ și } \sqrt[3]{35};$$

$$2) 0,3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \text{ și } \sqrt{0,4}; \quad 4) 3\sqrt[3]{3} \text{ și } 2\sqrt[3]{10}; \quad 6) \sqrt[4]{7} \text{ și } \sqrt[3]{3}.$$

24.99. Aflați valoarea expresiei:

$$1) 5^{3,6} \cdot 5^{-1,2} \cdot 5^{1,6}; \quad 3) \left(7\frac{4}{11}\right)^{\frac{11}{20}} \cdot 49^{1,1};$$

$$2) (3^{-0,8})^7 : 3^{-2,6}; \quad 4) 81^{-2,25} \cdot 9^{3,5} \cdot 27^{\frac{2}{3}}.$$

24.100. Simplificați fracția:

$$1) \frac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}; \quad 3) \frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}; \quad 5) \frac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{ab^{0,5}-a^{0,5}b};$$

$$2) \frac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}; \quad 4) \frac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m+m^{0,5}n^{0,5}+n}; \quad 6) \frac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}.$$

Ecuții iraționale

24.101. Câte rădăcini are ecuația:

$$1) \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} = 0; \quad 2) \sqrt{x-4} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[4]{6-x} = 0?$$

24.102. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sqrt{3x-3} = \sqrt{4x^2-6x-1}$;

4) $\sqrt{12+x-2x^2} = 2-x$;

2) $\sqrt{x^2+x-4} = \sqrt{-2x}$;

5) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$;

3) $\sqrt{x+7} = x+5$;

6) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{x-4} = 4$.

24.103. Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$;

3) $\sqrt[3]{4-4x+x^2} - \sqrt[3]{2-x} - 2 = 0$;

2) $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 3 = 0$;

4) $\sqrt{\frac{3x}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{3x}} = 1$.

Funcții și proprietățile lor

24.104. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$;

4) $f(x) = \sqrt{x-7} + \frac{x+2}{x-8}$;

2) $f(x) = \frac{7x+14}{x^2-7x}$;

5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;

3) $f(x) = \sqrt[6]{x+6} + \sqrt[4]{4-x}$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2+4x-21} - \frac{6}{x^2-49}$.

24.105. În fig. 24.1 este reprezentat punctul, prin care trece graficul funcției $y = f(x)$. Dintre funcțiile date arătați această funcție.

1) $f(x) = x^{-4}$; 2) $f(x) = \frac{4}{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{17+x}$; 4) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

24.106. Construiți graficul funcției date, folosindu-vă de el, indicați intervalele de semn constant ale funcției, intervalele ei de creștere și intervalele de descreștere ale ei.

1) $y = 2 - x^2$; 2) $y = (x+4)^2$; 3) $y = 8 - 2x - x^2$; 4) $y = x^2 - 2x + 3$.

24.107. Aflați domeniul de definiție și construiți graficul funcției:

1) $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{4-x}$;

2) $f(x) = \frac{4x-16}{x^2-4x}$.

24.108. Se știe, că $f(-4) = -2$. Aflați $f(4)$, dacă funcția f este: 1) pară; 2) impară.

24.109. Este pară sau impară funcția:

1) $f(x) = 6x^3 - 7x^5$; 4) $f(x) = x^2 + x - 3$;

2) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^3-2x}$;

3) $f(x) = \sqrt{6-x^2}$;

6) $f(x) = (x+5)(x-1) - 4x$?

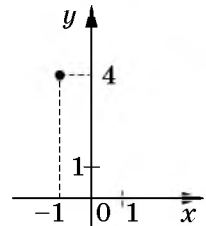


Fig. 24.1

24.110. Reprezentați proporționalitatea directă cu o formulă, dacă se știe că graficul ei trece prin punctul $M(3; -7)$.

24.111. Aflați valoarea lui b , dacă se știe, că graficul funcției $y = -\frac{1}{6}x + b$ trece prin punctul $M(12; 5)$.

24.112. Aflați valoarea lui k , dacă se știe, că graficul funcției $y = kx - 10$ trece prin punctul $M(-4; 2)$.

24.113. Toate punctele graficului al funcției $y = kx + b$ au aceeași ordonată, care este egală cu -5 . Aflați valorile lui k și b .

24.114. Definiți printr-o formulă funcția liniară al cărei grafic este reprezentat în figura 24.2.

24.115. Aflați valoarea lui k pentru care graficul funcției $y = \frac{k}{x}$ trece prin punctele:

1) $A(-5; 8)$; 2) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$.

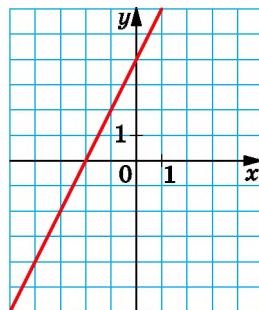


Fig. 24.2

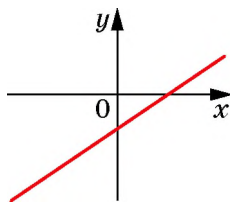
24.116. Pentru care valori ale lui p și q graficul funcției $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele $A(-1; 4)$ și $B(-2; 3)$?

24.117. Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $y = x^6$ pentru x din intervalul: 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$.

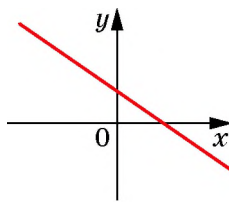
24.118. Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $y = x^{-3}$ pentru x din intervalul: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

24.119. În figura 24.3 este reprezentat graficul funcției liniare $y = kx + b$. Arătați afirmația adevărată:

1) $k > 0, b > 0$; 2) $k > 0, b < 0$; 3) $k < 0, b > 0$; 4) $k < 0, b < 0$.



a



b

Fig. 24.3

Progresii

- 24.120.** Aflați rația progresiei aritmetice (x_n) , dacă:
 1) $x_1 = 17, x_9 = -7$; 2) $x_5 = -3, x_{14} = 42$.
- 24.121.** Aflați primul termen al progresiei aritmetice (y_n) , dacă:
 1) $y_{10} = -19, d = -2$; 2) $y_5 = 13, y_{16} = 46$.
- 24.122.** Aflați numărul termenului al progresiei aritmetice (z_n) , care este egal cu 3,2, dacă $z_1 = 9,2$ și $d = -0,6$.
- 24.123.** Este oare numărul 24 termen al progresiei aritmetice (b_n) , dacă $b_1 = 8$ și $d = 3$? În cazul răspunsului afirmativ indicați numărul acestui termen.
- 24.124.** Se dă progresia aritmetică 4,9; 4,5; 4,1; Începând cu care număr termenii ei vor fi negativi?
- 24.125.** Pentru care valoare a lui m valorile expresiilor $3m - 1, m^2 + 1$ și $m + 3$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.
- 24.126.** Progresia aritmetică (a_n) este definită cu formula termenului n . $a_n = 0,2n + 5$. Aflați suma primilor douăzeci și șase de termeni.
- 24.127.** Aflați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice (a_n) , dacă:
 1) $a_1 = 6, a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34, a_{14} = -54$.
- 24.128.** Aflați suma a tuturor numerelor naturale, multiple lui 11, care nu depășesc numărul 341.
- 24.129.** Aflați suma a tuturor numerelor naturale, multiple lui 9, care nu depășesc numărul 156.
- 24.130.** Aflați suma tuturor numerelor cu două cifre, care-s multiple lui 8.
- 24.131.** Aflați rația progresiei geometrice (b_n) , dacă:
 1) $b_1 = 108, b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6, b_4 = 30$.
- 24.132.** Aflați primul termen al progresiei geometrice (c_n) , dacă $c_4 = 40, c_7 = -320$.
- 24.133.** Numărul 192 este termenul progresiei $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, \dots$. Aflați numărul acestui termen.
- 24.134.** Care trei numere trebuie introduse între numerele 48 și 243, ca ele împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică?
- 24.135.** Aflați suma primilor patru termeni ai progresiei geometrice (b_n) , dacă:
 1) $b_4 = 280, q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2}, b_5 = 4\sqrt{2}, q < 0$.

Funcții trigonometrice

24.136. Pentru care valori ale lui α este posibilă egalitatea $\cos x = \alpha - 2$?

24.137. Aflați valorile cea mai mare și cea mai mică ale expresiei:

1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $6 + \sin^2\alpha$.

24.138. Comparați:

1) $\operatorname{tg} 140^\circ$ și $\operatorname{tg}(-140^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ și $\cos\frac{5\pi}{7}$;
2) $\cos 50^\circ$ și $\sin 350^\circ$; 4) $\cos 5$ și $\sin 4$.

24.139. Oare este pară sau impară funcția dată cu formula:

1) $f(x) = 2x + \sin x$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2$;
2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{(2-x)\cos x}{2-x}$?

24.140. Calculați valorile funcțiilor trigonometrice cu argumentul α , dacă:

1) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ și $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ și $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

24.141. Simplificați expresia:

1) $\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} + \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$; 2) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

24.142. Demonstrați identitatea:

1) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;
2) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

24.143. Simplificați expresia:

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi - \alpha)$;
2) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}{\sin(270^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)\cos(90^\circ + \alpha)}$.

24.144. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$.

24.145. Demonstrați identitatea:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha(1 + \cos 4\alpha) - \sin 4\alpha = 0$; 2) $\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ecuatii trigonometrice

24.146. Rezolvați ecuația:

$$1) \sin 5x = -\frac{1}{2};$$

$$4) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1;$$

$$5) \operatorname{tg} 7x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$3) \cos \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 1.$$

24.147. Aflați rădăcinile cea mai mare, cea mai mică ale ecuației

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

24.148. Câte rădăcini ale ecuației $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ aparține intervalului $[0; \pi]$?

24.149. Rezolvați ecuația:

$$1) 6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0;$$

$$4) \cos 8x - 5\cos 4x - 2 = 0;$$

$$2) \sin^2 3x + 3\cos 3x = 3;$$

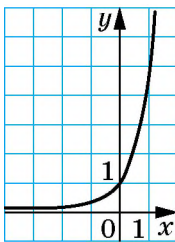
$$5) \frac{3}{\cos^2 x} + 5\operatorname{tg} x - 11 = 0;$$

$$3) \cos 2x - 3\sin x = 2;$$

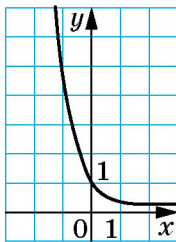
$$6) 3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

15. Funcția exponențială. Ecuatii și inecuații exponențiale

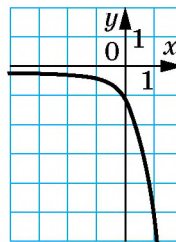
24.150. În o figură din 24.4, $a-d$ este reprezentat graficul funcției $y = 0.2^{-x}$. Arătați această figură.



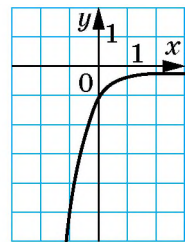
a



b



c



d

Fig. 24.4

24.151. Are este domeniul de valori al funcției $f(x) = 9^x + 2$?

24.152. Se știe că $0,7^m > 0,7^n$. Comparați numerele m și n .

24.153. Care din funcțiile date nu este crescătoare:

$$1) y = e^x;$$

$$2) y = \pi^x;$$

$$3) y = \left(\frac{e}{2}\right)^x;$$

$$4) y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x ?$$

24.154. Rezolvați ecuația:

$$1) 8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4};$$

$$4) \left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216};$$

$$2) 0,75^{x+1} = \frac{16}{9};$$

$$5) 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7};$$

$$3) \sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}};$$

$$6) 8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0.$$

24.155. Aflați mulțimea soluțiilor a inecuației:

$$1) \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1};$$

$$3) 1,3^{x^2-4x+2} \leq 1,69;$$

$$2) 1 < 10^{x+1} \leq 100\,000;$$

$$4) 0,4^{x^2+2x+2} \leq 0,16.$$

24.156. Rezolvați ecuația:

$$1) 3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7;$$

$$3) 7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6;$$

$$2) 2^{x+1} + 2^{x-3} = 68;$$

$$4) 4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262.$$

24.157. Rezolvați inecuația:

$$1) 4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13;$$

$$3) 0,5^{x+3} - 0,5^{x+2} + 0,5^{x+1} < 0,375;$$

$$2) 5^{x+1} + 5^{x-2} < 630;$$

$$4) 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17.$$

24.158. Rezolvați ecuația:

$$1) 4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0;$$

$$4) 9 - 2^x = 2^{3-x};$$

$$2) 9^x + 3^x - 6 = 0;$$

$$5) (0,2)^{2x-2} - 126 \cdot (0,2)^x + 5 = 0;$$

$$3) 49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0;$$

$$6) \frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4.$$

24.159. Rezolvați inecuația:

$$1) 25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0;$$

$$3) 3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0,5x} + 3 \geq 0;$$

$$2) 4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leq 0;$$

$$4) \left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leq 0.$$

Funcția logaritmică. Ecuații și inecuații logaritmice

24.160. Calculați:

$$1) 2^{1-\log_2 7};$$

$$4) \log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5};$$

$$2) 5^{3 \log_5 2};$$

$$5) \lg 20 + \lg 50;$$

$$3) 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 5};$$

$$6) \log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}.$$

24.161. Domeniul de definiție al căreia din funcțiile date este mulțimea numerelor reale:

$$1) y = \lg(x+1); \quad 2) y = \lg(x^2-1); \quad 3) y = \lg(x^2+1); \quad 4) y = \lg x^2?$$

24.162. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \lg \lg x$;

2) $y = \log_{x-2} (x^2 + x + 3)$.

24.163. În figura 24.5 este reprezentat graficul funcției descrescătoare $y = f(x)$, definită pe mulțimea numerelor reale. Câte soluții are ecuația $f(x) = \log_4 x$?

24.164. Construiți graficul funcției:

1) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$;

3) $y = e^{\ln(4-x^2)}$.

2) $y = 10^{\lg \sin x}$;

24.165. Comparați numerele m și n , dacă:

1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$;

2) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n$.

24.166. Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a 7 < \log_a 6$;

2) $\log_a 5 > 0$.

24.167. Comparați cu zero numărul:

1) $\log_2 \frac{1}{5}$;

2) $\log_3 4$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$;

4) $\log_{\frac{1}{6}} 10$.

24.168. Rezolvați ecuația:

1) $\log_{0,2} (x^2 + 4x) = -1$;

4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;

2) $\lg x = 3 - \lg 20$;

5) $\lg(5x + 2) = \frac{1}{2} \lg 36 + \lg 2$;

3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$;

6) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (2x - 4)$.

24.169. Rezolvați ecuația:

1) $\lg(2x - 1) + \lg(x + 5) = \lg 13$;

2) $\log_3 (2x - 7) + \log_3 (x - 1) = 2 + \log_3 2$;

3) $\log_{0,5} (4 - x) + \log_{0,5} (x - 1) = -1$;

4) $\log_7 (-x) + \log_7 (1 - x) = \log_7 (x + 3)$.

24.170. Rezolvați ecuația:

1) $3 \log_3^2 x + 7 \log_3 x - 6 = 0$;

3) $\frac{2}{\lg x + 2} - \frac{1}{\lg x - 4} = 1$;

2) $\ln^2 x - 4 \ln x - 21 = 0$;

4) $\log_9 x + \log_x 9 = 2,5$.

24.171. Aflați mulțimea soluțiilor a inecuației:

1) $\log_7 (2x - 1) < 2$;

5) $\log_6 (x + 1) < \log_6 (2x + 5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) > 1$;

6) $\log_2 (2x - 3) > \log_2 (3x - 5)$;

3) $\log_4 (x + 1) < -\frac{1}{2}$;

7) $\ln (x^2 - 3) > \ln (3x - 7)$;

4) $\log_{0,2} (x^2 + 4x) \geq -1$;

8) $\log_{0,7} (3x - 1) < \log_{0,7} (3 - x)$.

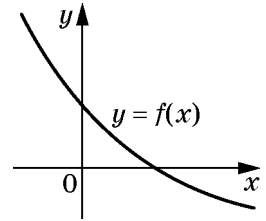


Fig. 24.5

24.172. Rezolvați inecuația:

$$1) \log_2 x + \log_2(x+1) \leq 1; \quad 2) \log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{6}}(x+3).$$

24.173. Rezolvați inecuația:

$$1) \lg^2 x - \lg x \geq 0; \quad 3) 3 \log_8^2 x + 2 \log_8 x - 5 \geq 0.$$

$$2) \ln^2 x + \ln x \leq 0;$$

Derivata și aplicarea ei

24.174. Aflați derivata funcției:

$$1) y = x^6 + 2x^4 + \frac{4}{x^2} - 1; \quad 4) y = (3-2x)\sqrt{x};$$

$$2) y = \frac{1}{2x^3} + \frac{4}{x}; \quad 5) y = 2^x \cos x;$$

$$3) y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1); \quad 6) y = \frac{3x-1}{x^2+1}.$$

24.175. Calculați valoarea derivatei a funcției date în punctul x_0 :

$$1) f(x) = \frac{3x^2}{1-x}, \quad x_0 = -1;$$

$$2) f(x) = \frac{1+\sin x}{4-\sin x}, \quad x_0 = 0;$$

$$3) f(x) = \cos x - \sin \frac{\pi}{3}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$4) f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1.$$

24.176. Punctul material se mișcă pe dreapta de coordonate după legea $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ (timpul t se măsoară în secunde, deplasarea s - în metri). Peste câte secunde de la începutul mișcării punctul se va opri?

24.177. Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției date în punctul cu abscisa x_0 :

$$1) f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = -2; \quad 2) f(x) = \sin x \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

24.178. La graficul funcției $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ este dusă tangenta, al cărei coeficient unghiular este egal cu -9 . Găsiți coordonatele punctului de tangentă.

24.179. Aflați coordonatele punctului al parabolei $y = x^2 - 3x + 2$, în care tangenta, dusă la parabolă este paralelă cu dreapta $y = 6 - x$.

24.180. Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$, și care este paralelă cu dreapta $y = 5x - 8$.

24.181. Funcția $y = f(x)$ este definită în intervalul $[-8; 3]$ și are derivata în fiecare punct al domeniului de definiție. În figura 24.6 este reprezentat graficul derivatei ei $y = f'(x)$. Arătați:

- 1) intervalele de creștere și descreștere ale funcției $y = f(x)$;
- 2) punctele de minim și punctele de maxim ale funcției $y = f(x)$.

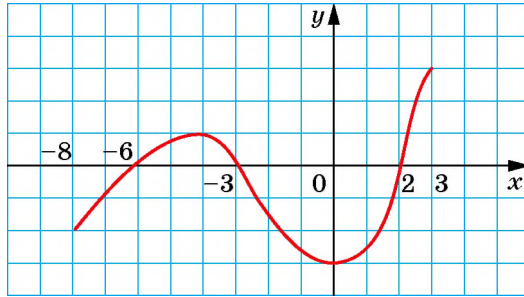


Fig. 24.6

24.182. Aflați intervalele de creștere și de descreștere și punctele de extremum ale funcției:

- 1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$;
- 2) $f(x) = x^3 + 2x - 10$;
- 3) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$;
- 4) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 4}$;
- 5) $f(x) = \frac{x}{e} - e^x$;
- 6) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

24.183. Aflați valorile cea mai mare și cea mai mică ale funcției:

- 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ pe intervalul $[-2; 0]$;
- 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ pe intervalul $[0; 4]$;
- 3) $f(x) = \cos x - \sin x$ pe intervalul $[0; 2\pi]$;
- 4) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ pe intervalul $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

24.184. Cercetați funcția și construiți graficul ei:

- 1) $f(x) = x^3 - 9x$;
- 2) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$.

Integrarea și aplicarea ei

24.185. Aflați forma generală a primitivelor ale funcției:

- 1) $f(x) = x - \frac{2}{x^5}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
- 2) $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

24.186. Pentru funcția f aflați pe intervalul arătat I primitiva F , al cărei grafic trece prin punctul dat M :

1) $f(x) = 2x + 4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 1)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 8)$.

24.187. Calculați integrala:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;

3) $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx$;

2) $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 4) dx$;

4) $\int_0^{\pi} (6 \cos x - 3 \sin x) dx$.

24.188. Calculați aria figurii, mărginită de liniile:

1) $y = 2 - x^2$, $y = 0$;

3) $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$.

Elemente ale teoriei probabilităților și ale statisticii matematice

24.189. În cantină sunt bucate de : felul întâi – 3, felul 2 – 6 și felul trei – 4. În câte moduri se poate compune din ele prânzul?

24.190. În câte moduri se pot repartiza pe o poliță 8 cărți diferite?

24.191. În câte feluri se pot alege din 32 de elevi trei delegați la conferința școlară?

24.192. Într-o orchestră sunt 16 violoniști și 12 altiști. În câte moduri se poate alcătui un trio din doi violoniști și un altist?

24.193. Câte numere cu cinci cifre există; care sunt scrise cu ajutorul cifrelor 2, 3, 4, 5, 6 și ale căror toate cifre sunt diferite, și care se împart fără rest la 5?

24.194. Într-o cutie sunt 12 bile verzi și 18 bile albastre. Care este probabilitatea evenimentului, că bila aleasă la întâmplare va fi: 1) verde; 2) albastră; 3) roșie; 4) verde sau albastră?

24.195. Într-o loterie sunt puse în joc 6 automobile, 18 motocicletele și 42 de biciclete. De tot au fost emise 3000 bilete de loterie. Care este probabilitatea că cumpărând un bilet: 1) se poate câștiga o motocicletă; 2) se poate câștiga un oarecare premiu; 3) poate să nu se câștige nici un premiu?

24.196. Din numerele naturale de la 1 până la 16 inclusiv un elev a numit la întâmplare unul din ele. Care este probabilitatea a ceea, că acest număr va fi împărțitorul al numărului 16?

24.197. Care este probabilitatea faptului că numărul de două cifre, luat la întâmplare, se împarte fără rest cu 12?

- 24.198.** Într-o cutie sunt 3 albe și 4 albastre bile. Care este cea mai mică cantitate de bile, ce trebuie scoase la întâmplare, pentru ca probabilitatea evenimentului, că printre ele va fi măcar o bilă albastră, să fie egală cu 1?
- 24.199.** Pentru fișe numerotate cu numerele 1, 2, 3 și 4. Care este probabilitatea evenimentului, că produsul numerelor a două fișe, luate la întâmplare, va fi multiplu lui 3?
- 24.200.** Într-o cutie sunt bile roșii și galbene. Câte bile roșii sunt în cutie, dacă probabilitatea de a scoate din ea la întâmplare o bilă roșie este egală cu $\frac{3}{8}$, iar bile galbene în cutie sunt 20?

24.201. Pe 30 fișe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 30. Care este probabilitatea a aceea, că numărul, scris pe fișa, luată la întâmplare, se împarte fără rest cu 3 și nu se împarte fără rest cu 2?

24.202. Din 28 piese de domino se ia una la întâmplare și se calculează suma balurilor de pe ea (în figura 24.7 este reprezentată piesa, suma balurilor pe care este egală cu 7). Care este probabilitatea alegerii a piesei, suma balurilor de pe care este egală cu:

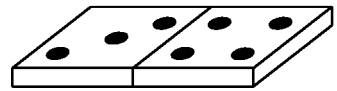


Fig. 24.7

- 1) 4; 2) 7; 3) 10; 4) 12; 5) 15?

24.203. În graficul reprezentat pe figura 24.8, este reprezentat volumul vânzării tocurelor într-un magazin de papetărie în decursul a 6 luni. Câte tocure vindeau în mediu în decursul unei luni?

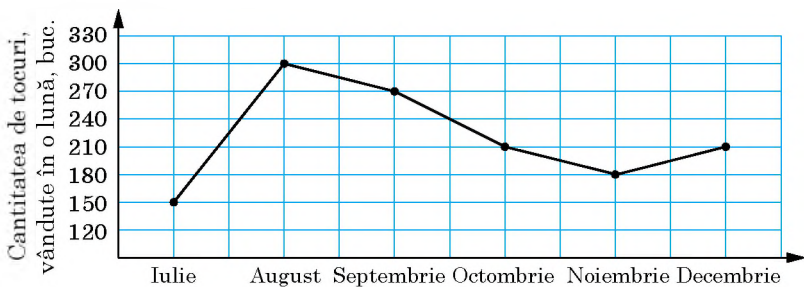


Fig. 24.8

24.204. Valoarea medie a probei 7, 10, y , 14 este egală cu 11. Cu ce este egal y ?

24.205. Aflați valoarea medie, moda, mediana și amplitudinea a setului de date:

- 1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;
2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12.

24.206. Cu elevii și elevele clasei a 11-a a fost petrecut sondajul: cât timp le trebuie zilnic pentru îndeplinirea temelor de acasă. Rezultatele sondajului au fost expuse în formă de diagramă în coloane, ce este reprezentată, în figura 24.9. Aflați moda și valoarea medie a selecției date.

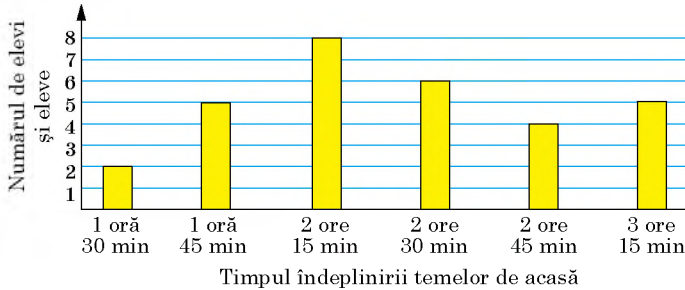


Fig. 24.9

24.207. Conform rezultatelor a dictării la limba maternă în clasa a 11-a a fost alcătuită tabela, în care au reprezentat repartizarea cantității de greșeli, pe care le-a comis o persoană:

Numărul de greșeli	0	1	2	3	4
Numărul de elevi și eleve	5	4	6	8	2

Aflați moda și valoarea medie a selecției, construiți diagrama în coloane corespunzătoare.

25. Probleme pentru repetarea cursului de geometrie

Triunghiuri

- 25.1.** Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic, ipotenuza căruia este cu 7 cm mai mare ca una din catete, iar a doua catetă este egală cu 21 cm.
- 25.2.** Una din catetele triunghiului dreptunghic este egală cu 15 cm, iar mediana, dusă la ipotenuză, $-8,5$ cm. Calculați aria triunghiului dat.
- 25.3.** Înălțimea triunghiului isoscel împarte latura laterală a lui în segmentele cu lungimea de 1 cm și 12 cm, considerând de la vârful unghiului de la bază. Aflați baza triunghiului dat.
- 25.4.** Înălțimea AD a triunghiului ABC împarte latura BC în segmentele BD și CD astfel, că $BD = 15$ cm, $CD = 5$ cm. Aflați latura AC , dacă $\angle B = 30^\circ$.

25.5. Dintr-un punct la o dreaptă sunt duse două oblice, proiecțiile cărorora pe dreaptă sunt egale cu 5 cm și 9 cm. Aflați distanța de la punctul dat până la această dreaptă, dacă una din oblice este cu 2 cm mai mare decât alta.

25.6. Aflați aria triunghiului ABC , reprezentat în figura 25.1.

25.7. Înălțimea triunghiului isoscel obtuzunghic, dusă la baza lui, este egală cu 8 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui – 13 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.

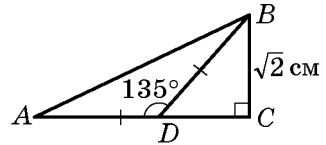


Fig. 25.1

25.8. Înălțimea triunghiului dreptunghic cu unghiul ascuțit α , dusă la ipotenuză, este egală cu h . Aflați ipotenuza acestui triunghi.

25.9. Punctul de tangentă al circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, împarte ipotenuza lui în segmentele 8 cm și 12 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

25.10. Continuarea laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul O . Aflați latura AB , dacă $AO = 18$ cm, $BC : AD = 5 : 9$.

25.11. Prelungirea laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul F , $AB : BF = 3 : 7$, AD este baza mare a trapezului. Diferența bazelor trapezului este egală cu 6 cm. Aflați baza AD .

25.12. Unghiul de la vârf al primului triunghi isoscel este egal cu unghiul de la vârf al celui de-al doilea triunghi isoscel. Baza și înălțimea dusă la ea a primului triunghi sunt egale corespunzător cu 30 cm și 8 cm, iar latura laterală a celui de-al doilea triunghi – 51 cm. Cu ce este egal perimetrul triunghiului al doilea?

25.13. Pe latura BC a triunghiului ABC s-a notat punctul K astfel, că $\angle CAK = \angle ABC$, $BK = 12$ cm, $KC = 4$ cm. Aflați latura AC .

25.14. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AD \parallel BC$) se intersectează în punctul O , $BO : OD = 3 : 4$, $BC = 18$ cm. Aflați baza AD a trapezului.

25.15. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se intersectează în punctul O , $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ cm. Aflați segmentul OD .

25.16. În triunghiul ABC este înscris rombul $CDEF$ astfel, cum este indicat în figura 25.2. Aflați latura BC a triunghiului, dacă $AC = 15$ cm, iar latura rombului este egală cu 10 cm.

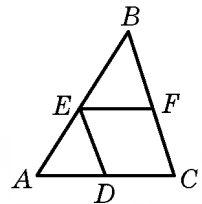


Fig. 25.2

25.17. Punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC , Punctul K – mijlocul laturii AC . Aria triunghiului AMK este egală cu 12 cm^2 . Cu ce este egală aria patrulaterului $BMKC$?

25.18. Punctul D este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC , punctul E – mijlocul laturii BC . Aria patrulaterului $ADEC$ este egală cu 27 cm^2 . Cu ce este egală aria triunghiului ABC ?

25.19. Segmentul CM este mediana triunghiului ABC , reprezentat în figura 25.3, segmentul DE linia medie a triunghiului MBC . Cu ce este egală aria patrulaterului $MDEC$, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 48 cm^2 ?

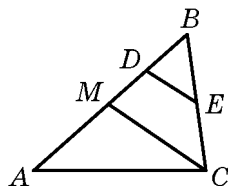


Fig. 25.3

25.20. Dreapta, paralelă laturii AC a triunghiului ABC , intersectează latura AB în punctul M , iar latura BC – în punctul K . Aflați aria triunghiului ABC , dacă $BM = 3 \text{ cm}$, $AM = 4 \text{ cm}$, iar aria patrulaterului $AMKC$ este egală cu 80 cm^2 .

25.21. Mijlocul laturii laterale a triunghiului isoscel este depărtată de la baza lui cu 9 cm . Aflați distanța de la punctul de intersecție al medianelor triunghiului până la baza lui.

25.22. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC punctul de intersecția al medianelor este depărtat de la vârful B cu 6 cm . Aflați distanța de la mijlocul laturii laterale a triunghiului până la baza lui.

25.23. Raza circumferinței, înscrise în triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$), este egală cu 12 cm , iar distanța de la centrul acestei circumferințe până la vârful B – 20 cm . Aflați perimetrul triunghiului dat.

25.24. Latura laterală a triunghiului isoscel se împarte de punctul de tangență al circumferinței înscrise în raportul $8 : 9$, socotind de la vârful unghiului de la baza triunghiului. Aflați aria triunghiului, dacă raza circumferinței înscrise este egală cu 16 cm .

25.25. Două laturi ale triunghiului, unghiul dintre care este egal cu 60° , se raportează ca $5 : 8$, iar a treia latură este egală cu 21 cm . Aflați laturile necunoscute ale triunghiului.

25.26. Suma a două laturi ale triunghiului este egală cu 16 cm , iar unghiul dintre ele – 120° . Aflați cea mai mică dintre laturi, dacă latura a treia a triunghiului este egală cu 14 cm .

25.27. Aflați unghiul A al triunghiului ABC , dacă $BC = 7 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$.

25.28. Aflați aria cercului, circumscris triunghiului cu laturile de 7 cm , 8 cm și 9 cm .

25.29. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 25 cm și 29 cm. Aflați raza circumferinței înscrise în triunghiul dat.

Чотирикутники. Правильні многокутники

25.30. Înălțimea paralelogramului, dusă din vârful unghiului obtuz, este egală cu 6 cm și împarte latura paralelogramului în jumătate. Aflați diagonala mai mică a paralelogramului, dacă unghiul ascuțit al lui este egal cu 30° .

25.31. Bisectoarea unghiului obtuz a paralelogramului împarte latura lui în raportul $3 : 7$, socotind de la vârful unghiului ascuțit, care este egal cu 45° . Calculați aria paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 52 cm.

25.32. Bisectoarea unghiului D a dreptunghiului $ABCD$ intersectează latura AB în punctul M , $BM = 5$ cm, $AD = 3$ cm. Aflați perimetrul dreptunghiului.

25.33. Calculați aria rombului, una din diagonalele căruia este egală cu 16 cm, iar latura – 10 cm.

25.34. Diagonala mare a rombului este egală cu c , iar unghiul obtuz – α . Aflați perimetrul rombului.

25.35. Aflați înălțimea trapezului isoscel, bazele căruia sunt egale cu 23 cm, și 17 cm, iar diagonala cu 25 cm.

25.36. Aflați aria trapezului, reprezentat în figura 25.4.

25.37. Latura laterală a trapezului isoscel, circumscris circumferinței, este egală cu a , iar unul din unghiuri – 60° . Aflați aria trapezului.

25.38. Latura laterală a trapezului dreptunghic este egală cu 16 cm, iar unghiul ascuțit – 30° . Aflați aria acestui trapez, dacă în el se poate înscrie o circumferință.

25.39. Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 1 cm și 17 cm, iar diagonala împarte unghiul obtuz al lui în jumătate. Aflați aria trapezului.

25.40. Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 15 cm și 33 cm, iar diagonala împarte unghiul ascuțit al lui în jumătate. Aflați aria trapezului.

25.41. Circumferința, înscrisă în trapezul isoscel, împarte cu punctul de tangență latura laterală în două segmente cu lungimile de 8 cm și 18 cm. Aflați aria trapezului.

25.42. Circumferința, înscrisă în trapezul dreptunghic, împarte cu punctul de tangență latura laterală mai mare în două segmente cu lungimile de 8 cm și 50 cm. Aflați perimetrul trapezului.

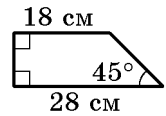


Fig. 25.4

- 25.43. Cu ce este egal unghiul BAD al patrulaterului $ABCD$, înscris în circumferință, dacă $\angle ACD = 37^\circ$, $\angle ADB = 43^\circ$?
- 25.44. Diagonala BD , a patrulaterului $ABCD$ este diametrul circumferinței circumscrise lui, M este punctul de intersecție al diagonalelor lui, $\angle ABD = 32^\circ$, $\angle CBD = 64^\circ$. Aflați unghiul BMC .
- 25.45. Cum se raportează latura triunghiului regulat, înscris în circumferință, la latura triunghiului regulat circumscris acestei circumferințe?
- 25.46. Cum se raportează latura hexagonului regulat, înscris în circumferință, la latura hexagonului regulat, circumscris acestei circumferințe?
- 25.47. Coarda comună a două circumferințe, ce se intersectează, este latura unui triunghi regulat, înscris într-o circumferință, și latură a unui pătrat înscris în altă circumferință. Lungimea acestei coarde este egală cu a . Aflați distanța dintre centrele circumferințelor, dacă ele se află de părți diferite ale coardei.

Circumferința și cercul

- 25.48. Aflați măsura în grade a arcului de circumferință, lungimea căruia este egală cu π cm, dacă raza circumferinței este egală cu 12 cm.
- 25.49. Lungimea arcului de circumferință este egală cu 2π cm, iar măsura în grade a lui – 60° . Aflați raza circumferinței.
- 25.50. Segmentul AB este diametrul circumferinței, $AB = 24$ cm. Punctul A este depărtat de la tangenta, la această circumferință cu 4 cm. Aflați distanța de la punctul B până la această tangentă.
- 25.51. Perpendiculara, coborâtă dintr-un punct al circumferinței pe diametrul ei, împarte diametrul în două segmente, diferența cărora este egală cu 21 cm. Aflați lungimea circumferinței, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 10 cm.
- 25.52. Două circumferințe cu centrele O_1 și O_2 au punctul de tangentă exterior C . Dreapta, care trece prin punctul C , intersectează circumferința cu centrul O_1 în punctul A , iar a doua circumferință – în punctul B . Coarda AC este egală cu 12 cm, iar coarda BC – 18 cm. Aflați razele circumferințelor, dacă $O_1O_2 = 20$ cm.
- 25.53. În unghiul, mărimea căruia este egală cu 60° , sunt înscrise două circumferințe, care sunt tangente exterior. Aflați raza circumferinței mai mari, dacă raza celei mici este egală cu 6 cm.

Coordonatele carteziene

- 25.54.** Punctul C este mijlocul segmentului AB , $A(-4; 3)$, $C(2; 1)$. Aflați coordonata punctului B .
- 25.55.** Vârfurile triunghiului sunt punctele $A(-3; 1)$, $B(2; -2)$ și $C(-4; 6)$. Aflați mediana AM a triunghiului ABC .
- 25.56.** Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, $B(4; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(-2; -2)$. Aflați coordonatele vârfului A .
- 25.57.** Aflați coordonatele punctului, care aparține axei ordonatelor și este egal depărtată de punctele $C(3; 2)$ și $D(1; -6)$.
- 25.58.** Circumferința este dată cu ecuația $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 12$. Cum este situat punctul $A(-2; 3)$ față de această circumferință?
- 25.59.** Alcătuiți ecuația circumferinței, diametrul căreia este segmentul MK , dacă $M(-3; 4)$, $K(5; 10)$.
- 25.60.** Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctele $A(-1; 4)$ și $B(-3; -2)$.
- 25.61.** Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctul $A(\sqrt{3}; 5)$ și face cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul de 60° .
- 25.62.** Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctul $P(2; -5)$ și este paralelă cu dreapta $y = -0,5x + 9$.
- 25.63.** Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A(-1; 5)$, $B(4; 6)$, $C(3; 1)$ și $D(-2; 0)$ este romb.
- 25.64.** Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A(2; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-3; 1)$ și $D(-2; -3)$ este dreptunghi.
- 25.65.** Aflați distanța de la punctul $M(4; -5; 6)$ până la planul xz .
- 25.66.** Aflați distanța de la punctul $A(3; -2; 1)$ până la originea de coordonate.
- 25.67.** Aflați distanța dintre punctele $A(2; -3; -4)$ și $B(-6; -3; 2)$.
- 25.68.** Punctele $A(-4; 2; -6)$ și $B(-14; -10; 2)$ sunt simetrice în raport cu punctul C . Aflați coordonatele punctului C .
- 25.69.** Aflați coordonatele punctului, care este simetric cu punctul $M(-1; 2; 3)$ în raport cu planul xy .

Vectori

- 25.70.** Se dau vectorii $\vec{a}(3; -1)$ și $\vec{b}(1; -2)$. Aflați coordonatele vectorului \vec{m} , dacă $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

25.71. Se cunoaște, că $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Aflați $|\vec{c}|$, dacă $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(-2; 3)$.

25.72. Calculați produsul scalar $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, dacă $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

25.73. Se dau punctele $M(4; -2)$, $N(1; 1)$ și $P(3; 3)$.
Aflați produsul scalar al vectorilor \overline{MN} și \overline{MP} .

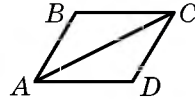


Fig. 25.5

25.74. În figura 25.5 este prezentat rombul $ABCD$, în care $AB = 2$ cm, $\angle ABC = 120^\circ$. Aflați produsul scalar al vectorilor \overline{AB} și \overline{AC} .

25.75. Latura hexagonului regulat $ABCDEF$ este egală cu 1. Calculați produsul scalar:

1) $\overline{BA} \cdot \overline{CD}$; 2) $\overline{AD} \cdot \overline{CD}$.

25.76. Aflați unghiul dintre vectorii $\vec{a}(-1; -1)$ și $\vec{b}(2; 0)$.

25.77. Pe latura CD a paralelogramului $ABCD$ s-a notat punctul M astfel, că $CM : MD = 2 : 3$. Exprimați vectorul \overline{AM} prin vectorii \vec{a} și \vec{b} , unde $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AD}$.

25.78. Pe laturile BC și CD ale paralelogramului $ABCD$ s-au notat corespunzător punctele E și F astfel, că $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Exprimați vectorul \overline{EF} prin vectorii $\overline{AB} = \vec{a}$ și $\overline{AD} = \vec{b}$.

25.79. Aflați modulul vectorului \overline{AB} , dacă $A(-2; 8; 7)$, $B(-6; 5; 6)$.

25.80. Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}(5; m + 1; -3)$ și $\vec{b}(-10; 4; 6)$ vor fi coliniari?

25.81. Pentru care valoare a lui n vectorii $\vec{a}(3; 2; 6)$ și $\vec{b}(-8; 3; n)$ vor fi perpendiculari?

25.82. Aflați unghiul dintre vectorii $\vec{a}(-1; 1; 0)$ și $\vec{b}(1; 0; -1)$.

Transformări geometrice

25.83. Câte translații paralele există, pentru care imaginea dreptei este:
1) însăși această dreaptă; 2) dreapta paralelă ei?

25.84. Scrieți ecuația circumferinței, care este imaginea circumferinței $x^2 + y^2 = 4$ la translația paralelă cu vectorul $\vec{a}(2; -3)$.

25.85. Arătați deplasarea, pentru care imaginea patrulaterului $ABCD$, reprezentat în figura 25.6 este patrulaterul $MNKP$.

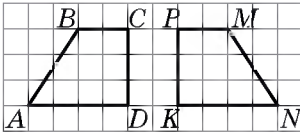


Fig. 25.6

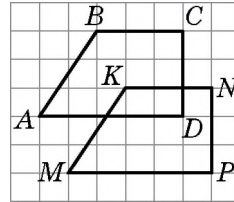


Fig. 25.7

25.86. Indicați mișcarea la care imagine a patrulaterului $ABCD$, reprezentat în figura 25.7, este patrulaterul $MKNP$.

25.87. La translația paralelă cu vectorul \vec{a} imaginea punctului $A(-3; 7)$ este punctul $B(2; 3)$. Ce coordonate are punctul $C(1; -5)$ la translarea paralelă cu vectorul \vec{a} ?

25.88. La translația paralelă cu vectorul \vec{a} imaginea punctului $A(-5; 6)$ este punctul $B(2; -1)$. Ce coordonate are preimaginea punctului $D(10; -3)$ la translarea paralelă cu vectorul \vec{a} ?

25.89. Ce coordonate are imaginea punctului $A(-4; 6)$ la simetria în raport cu originea de coordonate?

25.90. Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul $A(2; -4)$ în raport cu punctul $M(3; -1)$?

25.91. Ce coordonate are imaginea punctului $A(-2; 5)$ la simetria în raport cu: 1) axa absciselor; 2) axa ordonatelor?

25.92. Câte axe de simetrie are dreptunghiul, care nu este pătrat?

25.93. Punctul O este centrul hexagonului regulat $ABCDEF$, reprezentat în figura 25.8. Indicați imaginea laturii CD la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu un unghi de 120° .

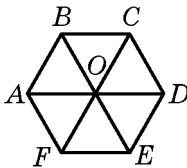


Fig. 25.8

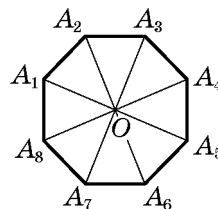


Fig. 25.9

25.94. Punctul O este centrul octogonului regulat, reprezentat în figura 25.9. Indicați imaginea laturii A_4A_1 la rotația în jurul punctului O împotriva acelor de ceasornic cu unghiul de 135° .

25.95. Pătratul $CDEF$, reprezentat în figura 25.10, este imaginea pătratului $ABCD$ la rotația după acele ceasornicului cu unghiul de 90° . Care punct este centrul de rotație?

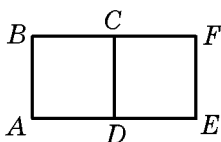


Fig. 25.10

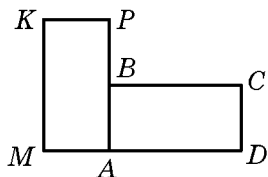


Fig. 25.11

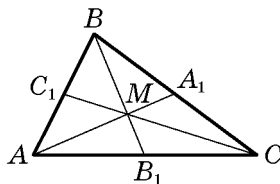


Fig. 25.12

25.96. Dreptunghiul $AMKP$, reprezentat în figura 25.11, este imaginea dreptunghiului $ABCD$ la rotația contra acelor de ceasornic cu unghiul de 90° . Care punct este centrul de rotație?

25.97. Medianele triunghiului ABC , reprezentat în figura 25.12, se intersectează în punctul M . Aflați coeficientul: 1) de omotetie cu centrul M , la care punctul C_1 este imaginea punctului C ; 2) al omotetiei cu centrul B , la care punctul M este imaginea punctului B_1 .

25.98. Punctul $A_1(-1; 4)$ este imaginea punctului $A(2; -8)$ la omotetia cu centrul în originea de coordonate. Cu ce este egal coeficientul de omotetie?

Poliedre

25.99. Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 6 cm și 8 cm, iar diagonala lui este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60° . Aflați muchia laterală a paralelipipedului.

25.100. Baza prisme drepte este triunghiul dreptunghic cu catetele 5 cm și 12 cm. Aflați aria suprafeței laterale a prisme, dacă muchia laterală a ei este egală cu 10 cm.

25.101. Latura bazei prisme triunghiulare regulate este egală cu 8 cm, iar diagonala feței laterale – 17 cm. Aflați aria suprafeței laterale a prisme.

25.102. Diagonala prisme patrulater regulate este egală cu 25 cm, iar diagonala feței laterale – 20 cm. Aflați înălțimea prisme.

- 25.103.** Laturile bazei prisme triunghiulare drepte se raportează ca $15 : 10 : 9$. Aflați laturile bazei, dacă aria suprafeței laterale a prisme este egală cu 816 cm^2 , iar muchia laterală – 12 cm .
- 25.104.** Înălțimea prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$ este egală cu 12 cm , $AC = BC$, $AB = 8 \text{ cm}$, diagonala feței BB_1C_1C este egală cu 13 cm . Aflați arii secțiunii prisme, care trece prin dreapta AB și punctul C_1 .
- 25.105.** Latura bazei prisme hexagonale regulate este egală cu a , cea mai mare diagonală a prisme este înclinată la planul bazei sub unghiul α . Aflați aria suprafeței laterale a prisme.
- 25.106.** Este dată prisma dreaptă $ABCA_1B_1C_1$. Unghiul dintre planele ABC și A_1BC este egal cu β . Aflați înălțimea prisme, dacă $BC = a$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$.
- 25.107.** Baza paralelipipedului drept este romb cu latura a și unghiul ascuțit α . Diagonala mică a paralelipipedului face cu planul bazei unghiul β . Aflați aria suprafeței totale a paralelipipedului.
- 25.108.** Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu $\sqrt{3} \text{ cm}$, iar înălțimea piramidei – $2\sqrt{2} \text{ cm}$. Aflați muchia laterală a piramidei.
- 25.109.** Latura bazei piramidei patrulateră regulate este egală cu 6 cm , iar muchia laterală a piramidei – 5 cm . Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
- 25.110.** Baza piramidei este dreptunghiul, o latură a căruia este egală cu a . Unghiul dintre această latură și diagonala dreptunghiului este egală cu α . Fiecare muchie laterală a piramidei face cu planul bazei unghiul β . Aflați înălțimea piramidei.
- 25.111.** Baza piramidei este romb, diagonalele căruia sunt egale cu 40 cm și 30 cm , iar înălțimea piramidei este egală cu 5 cm . Aflați aria suprafeței totale a piramidei, dacă unghiurile diedre de la muchiile bazei ei sunt egale.
- 25.112.** Baza piramidei $DABC$ este triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Planele ABD și ACD sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei, dacă $AB = 26 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $AD = 18 \text{ cm}$.

Corpuri de rotație

- 25.113.** Aflați aria suprafeței totale a cilindrului, înălțimea căruia este egală cu 12 cm , iar raza bazei – 5 cm .

- 25.114.** Secțiunea axială a cilindrului este pătratul cu latura de 8 cm. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.
- 25.115.** Cum se va modifica – se va mări sau micșora – și de câte ori aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă:
- 1) raza bazei lui de o mărit de 3 ori, iar înălțimea – de 4 ori;
 - 2) raza bazei lui de o micșorat de 2 ori, iar înălțimea de o mărit de 6 ori?
- 25.116.** În cilindru s-a dus secțiunea, care este paralelă axei lui și este depărtată de la ea cu 3 cm. Diagonala secțiunii este egală cu 16 cm și face cu planul bazei cilindrului unghiul de 60° . Aflați raza bazei cilindrului.
- 25.117.** În cilindru s-a dus secțiunea, care este paralelă axei lui și taie de la circumferința bazei arcul, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Diagonala secțiunii creează cu planul bazei unghiul β . Aflați aria secțiunii, dacă raza bazei cilindrului este egală cu R .
- 25.118.** Prin generatoarea cilindrului s-au dus două secțiuni, fiecare fiind paralelă cu axa cilindrului. Planele acestor secțiuni sunt perpendiculare. Aflați aria secțiunii axiale a cilindrului, dacă aria uneia din secțiunile date este egală cu 30 cm^2 , iar a celei de a doua – 40 cm^2 .
- 25.119.** Diametrul bazei conului este egal cu 6 cm, iar înălțimea lui – 4 cm. Aflați generatoarea conului.
- 25.120.** Generatoarea conului este egală cu m , iar unghiul dintre generatoare și înălțime este egal cu α . Aflați aria suprafeței laterale a conului.
- 25.121.** Generatoarea conului este egală cu 25 cm, iar înălțimea – 24 cm. Aflați aria suprafeței totale a conului.
- 25.122.** Raza bazei și înălțimea conului au fost mărite de 2 ori. De câte ori se va mări aria suprafeței laterale a conului?
- 25.123.** Raza bazei conului s-a mărit de 6 ori, iar generatoarea lui a fost micșorată de 3 ori. Cum s-a modificat aria suprafeței laterale a conului – s-a mărit sau s-a micșorat – și de câte ori?
- 25.124.** Prin vârful conului și coarda bazei, ce subîntinde arcul de 60° , s-a dus planul, care face cu planul bazei unghiul de 30° . Aflați aria secțiunii create, dacă raza bazei conului este egală cu 4 cm.
- 25.125.** Secțiunea axială a conului este triunghi dreptunghic. Raza bazei conului este egală cu R . Aflați aria secțiunii axiale a conului.

- 25.126.** Coarda bazei conului, lungimea căreia este egală cu a , se vede din centrul bazei sub unghiul α . Unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei este egal cu β . Aflați înălțimea conului.
- 25.127.** Sfera este intersectată de planul, care este depărtat de la centrul ei cu 24 cm. Aflați raza sferei, dacă lungimea secțiunii obținute alcătuiește $\frac{3}{5}$ din lungimea secțiunii cu planul, ce trece prin centrul ei.
- 25.128.** Vârfurile triunghiului dreptunghic se află pe sfera, raza căreia este egală cu $3\sqrt{5}$ cm. Aflați distanța de la centrul sferei până la planul triunghiului, dacă catetele triunghiului sunt egale cu 8 cm și 15 cm.

Volumele corpurilor. Aria sferei

- 25.129.** Baza paralelipipedului dreptunghic este pătrat. Diagonala paralelipipedului este egală cu 8 cm și face cu planul feței laterale unghiul de 30° . Aflați volumul paralelipipedului dreptunghic.
- 25.130.** Fețele laterale ale prisme hexagonale regulate sunt pătrate, iar diagonala mare a ei este egală cu d . Aflați volumul prisme.
- 25.131.** Baza prisme drepte este trapez isoscel cu bazele de 4 cm și 10 cm, și latura laterală 5 cm. Muchia laterală a prisme este egală cu 10 cm. Aflați volumul prisme.
- 25.132.** Diagonala prisme patrulatere regulate este egală cu 13 cm, iar diagonala muchiei laterale – 12 cm. Aflați volumul prisme.
- 25.133.** Baza prisme drepte este triunghiul isoscel cu unghiul de 30° la bază. Diagonala feței laterale a prisme, care conține latura laterală a bazei, este egală cu 8 cm și este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60° . Aflați volumul prisme.
- 25.134.** Baza prisme drepte este romb cu diagonalele 5 cm și 12 cm. Diagonala mică a prisme este egală cu 13 cm. Calculați volumul prisme.
- 25.135.** Aflați volumul piramidei patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu 6 cm, iar secțiunea diagonală este triunghi echilateral.
- 25.136.** Înălțimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 12 cm, iar apotema – 15 cm. Calculați volumul piramidei.
- 25.137.** Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu $16\sqrt{3}$ cm, iar apotema – 17 cm. Calculați volumul piramidei.

- 25.138.** Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu 6 cm, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei – 30° . Aflați volumul piramidei
- 25.139.** Paralel cu axa cilindrului este dusă secțiunea, care este pătratul cu latura de 4 cm și secționează de la circumferința bazei arcul, măsura în grade a căreia este egală cu 90° . Aflați volumul cilindrului.
- 25.140.** Coarda bazei de jos a cilindrului este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α . Segmentul, care unește centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde este înclinat la planul bazei sub unghiul β . Aflați volumul cilindrului, dacă generatoarea lui este egală cu m .
- 25.141.** Volumul conului este egal cu $96\pi \text{ cm}^3$, iar raza bazei este egală cu 6 cm. Aflați aria suprafeței laterale a conului.
- 25.142.** În baza conului s-a dus coarda cu lungimea de $2\sqrt{2}$ cm la distanța de 1 cm de la centrul bazei. Aflați volumul conului, dacă generatoarea lui este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60° .
- 25.143.** Înălțimea conului este egală cu 12 cm, iar unghiul de la vârful secțiunii axiale – 120° . Aflați volumul conului.
- 25.144.** La distanța de 12 cm de la centrul bilei s-a dus un plan. Aria secțiunii create este egală cu $64\pi \text{ cm}^2$. Aflați aria suprafeței bilei.
- 25.145.** Lungimea liniei de intersecție a bilei cu planul, care este depărtat de la centrul ei cu $\sqrt{5}$ cm, este egală cu 4π cm. Aflați volumul bilei.

PRIETENIM CU CALCULATORUL

În acest an de învățământ voi sistematizați și perfecționați cunoștințele voastre, care o să vă permită să folosiți calculatorul în timpul studierii cursului de matematică. Determinați de sine stătător, ce lucru tehnic voi puteți executa cu ajutorul calculatorului; în ce mod să prezentați materialele, ce se studiază într-un aspect mai intuitiv. Vă recomandăm de asemenea să alcătuiți algoritmi pentru rezolvarea exercițiilor și programe pentru realizarea lor în limbajul de programare, pe care îl studiați. Mai jos sunt prezentate însărcinări, care corespund temelor, ce se studiază; însă cu aceste însărcinări deloc nu se limitează posibilitățile aplicării calculatorului în cursul școlar de matematică.

Însărcinările cursului de matematică clasa a 11-a pentru executare cu ajutorul calculatorului

Pentru punctul 1 „Funcția exponențială și proprietățile ei”

Dați exemple din cursurile de fizică, biologie, chimie și alte discipline școlare, în care un proces oarecare poate fi descris cu funcția exponențială. Modelați aceste procese cu ajutorul procesorului tabelar; construiți grafice.

Este oare în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare, pe care-l studiați, posibilitatea calculării a^x ?

Pentru punctul 2 „Ecuatii exponențiale”

Folosindu-vă de noțiunea puterii cu exponent real, scrieți algoritmul rezolvării ecuației $a^x = b$ pentru $a > 0$ și $b > 0$ date. Considerați, că rezultatul căutat este găsit, dacă a^x diferă de b mai puțin decât cu 0,01.

Pentru punctul 3 „Inecuații exponențiale”

Folosindu-vă de noțiunea puterii cu exponent real, scrieți algoritmul pentru rezolvarea aproximativă a inecuației $a^x > b$ pentru $a > 0$ și b date. Cercetați de asemenea inecuațiile $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$.

Pentru punctul 4 „Logaritmul și proprietățile lui”

Găsiți în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare, pe care-l studiați, mijloace pentru calcularea logaritmilor. În care bază se calculează logaritmul? Cum de folosit aceste mijloace pentru calcularea logaritmului în oricare bază necesară?

Pentru punctul 5 „Funcția logaritmică și proprietățile ei”

Alcătuiți în procesorul tabelar tabelul valorilor funcțiilor exponențiale și logaritmice cu una și aceeași bază, mai mare decât 1; mai mică

decât 1. Construiți graficele acestor funcții pe un ecran. Care proprietăți ale acestor funcții ilustrează graficele obținute?

Pentru punctul 8 „Derivatele funcțiilor exponențială și logaritmică”

În ce mod în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare pe care-l studiați, se dă numărul e ? Sunt oare mijloace pentru calcularea logaritmului natural?

Pentru punctul 9 „Primitiva”

Folosind mijloacele construirii graficelor funcțiilor, alcătuiți algoritmul construirii graficului primitivei funcției liniare.

Pentru Punctul 11 „Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată”

Admitem că voi dispuneți de subprogramul, care calculează valoarea unei oarecare funcții în oricare punct. Cum de calculat integrala determinată a acestei funcții în intervalul dat?

Calculați în acest mod câteva integrale din exercițiile pentru acest paragraf și comparați rezultatele cu rezultatele, pe care le-ați obținut în timpul executării exercițiilor.

Pentru punctul 12 „Regulile combinatoricii pentru sumă și produs”

Cu ce mijloace în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare pe care-l studiați, se poate calcula factorialul unui număr? Alcătuiți în procesorul tabelar tabelul valorilor a câtorva factoriale a primelor numere naturale.

Pentru punctul 13 „Permutări. Aranjamente. Combinații”

Admitem, că voi dispuneți de programul, care calculează factorialul numărului. Folosind acest subprogram, alcătuiți algoritmul pentru calcularea numărului de permutări, aranjamente și combinații.

Pentru punctul 14 „Determinarea clasică a probabilității evenimentului aleatoriu”

Faceți cunoștință cu noțiunea „Generator de numere aleatorii”. Găsiți în limbajul de programare, pe care îl studiați, mijloacele de obținere a numerelor aleatorii.

Pentru punctul 15 „Elemente de statistică matematică”

Formați un set de valori cu folosirea generatorului de numere aleatorii. Completați cu aceste valori un tabel. Aflați amplitudinea, valoarea medie, moda și mediana setului de numere obținute.

Pentru punctul 16 „Prisma”

Construiți în redactorul grafic imaginea prisme drepte, prisme oblice, imaginea înălțimii prisme, secțiunii diagonale a prisme. Con-

struiți proiecțiile prisme pe planul, paralel bazei prisme, și pe planul, paralel înălțimii prisme.

Pentru punctul 17 „Paralelipipedul”

Construiți în redactorul grafic imaginea paralelipipedului; paralelipipedului dreptunghic. Ce proprietăți ale acestui corp și ce proprietăți ale proiectării paralele trebuie de luat în considerare pentru a obține o imagine adecvată?

Pentru punctul 18 „Piramida”

Construiți în redactorul grafic imaginile diferitor piramide. Construiți imaginea înălțimii piramidei, unghiului diedru al piramidei de la muchia bazei.

Pentru punctul 19 „Cilindrul”

Alcătuți un program, care după raza bazei și înălțimea date ale cilindrului va calcula aria suprafeței laterale și aria suprafeței totale a lui.

Pentru punctul 20 „Conul”

Alcătuți un program, care după raza bazei și înălțimea date ale conului va calcula aria suprafeței laterale și aria suprafeței totale a lui.

Pentru punctul 21 „Bila și sfera”

Alcătuți un program, care după raza dată a bilei și distanța dată de la centrul bilei până la un plan determină:

- amplasarea reciprocă a bilei și a planului;
- aria secțiunii bilei cu acest plan;
- lungimea liniei de intersecție a suprafeței bilei cu acest plan.

Pentru punctul 22 „Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prisme și piramidei ”

Alcătuți un program pentru calcularea volumului:

- 1) prisme regulate cu n laturi, cu latura bazei a și înălțimea h ;
- 2) piramide regulate cu n laturi, cu latura bazei a și înălțimea h ;

Pentru punctul 23 „Volumele corpurilor de rotație. Aria sferei”

Alcătuți un program pentru calcularea:

- 1) volumelor corpurilor de rotație (conului, cilindrului, bilei);
- 2) ariei suprafeței sferei.

Construiți cu ajutorul redactorului de diagrame în *Word* sau *Excel* o diagramă cu coloane. Alegeți tipul diagramei „spațială” și reprezentarea a unui șir de date în aspect de diferite corpuri geometrice (prisme, conuri etc.). Folosind cunoștințele obținute despre volumele corpurilor, determinați care din aceste figuri oferă o închipuire mai adecvată despre corespunderea mărimilor reprezentate pe diagramă cu realitatea.

Răspunsuri și indicații la exerciții

- 1.12.** 1) $-6a^{\sqrt{5}} - 13$; 2) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}}$. **1.13.** 1) $4^x ab$; 2) $\frac{1}{a^2 \sqrt{5}}$. **1.14.** 1) Da; 2) da; 3) nu; 4) nu. **1.15.** 36. **1.16.** $[-2; 4]$. **1.18.** 3) $(-4; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$. **1.19.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **1.20.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.22.** 1) Nu are rădăcina; 2) o mulțime de rădăcini; 3) 2 rădăcini. **1.23.** 1) 1 rădăcină; 2) o mulțime de rădăcini; 3) 2 rădăcini. **1.24. Indicație.** Găsiți domeniul de definiție al funcției date. **1.25.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; -1. **1.26.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.29.** 2) $33 \cdot 2^{x-4}$; 3) $13 \cdot 3^{x-1}$; 4) $5 \cdot 2^{x+1}$; 5) $-29 \cdot 6^{x-1}$; 6) $12 \cdot 9^x$. **1.30.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$; 2) $[0; 16]$. **1.31.** 1) $(-\infty; 16]$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $(-1; 1)$.
- 2.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) -1; 2. **2.7.3.** $-\frac{1}{3}$; 4) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **2.8.3.** $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$. **2.11.** 1) -1; 1; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **2.12.** 1) -1; 1; 2) -1; 3) 0; 4) 2. **2.13.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 3; 3) 0; $\frac{1}{2}$; 4) 2.
- 2.14.** 1) 4; 2) 0; $\frac{1}{3}$; 3) 2. **2.15.** 1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 1. **2.16.** -1; 2. **2.17.** 2. **2.18.** 0. **2.19.** 1) 0; 1; 2) 0; -1; 3) -1; 4) 0. **2.20.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.21.** $[-3; 2) \cup (2; 7]$. **2.22.** $\frac{1}{2}$.
- 3.4.** 5) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 6) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 7) $(-\infty; 0)$; 8) $[-1; 2]$. **3.5.** 3) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 5) $(-1; +\infty)$. **3.6.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.7.** 1) -5; 2) 7. **3.9.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 4]$. **3.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-\infty; 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$. **3.12.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$. **3.15.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.16.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **3.17.** $[0; 1]$. **3.18.** $[0; 4]$. **3.19.** 1) $(0; 1)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$. **3.20.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$. **3.21.** 1,5. **3.22.** 1.
- 4.17.** 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **4.18.** 1) 1; 2) -1; 3) -1. **4.19.** 2) 4; 3) 60; 4) 180. **4.20.** 1) 72; 2) 10. **4.21.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) 2; 4) 4. **4.22.** 1) -5; 2) -2; 3) 6; 4) 9. **4.23.** 2) 144; 3) 64; 4) 1; 5) 0; 6) 48. **4.24.** 1) 9; 2) 10; 4) 2. **4.25.** 0. **4.26.** $\lg 2$. *Indicație.* În fiecare din logaritmi treceți la baza 10. **4.27.** $\frac{5}{2}$. **4.30.** $\frac{a+3b}{a-b}$.

4.31. 1) $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$; 2) $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -\frac{7}{9}$.

5.17. 2) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$.

5.18. 2) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 3) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 5.19. 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

5.20. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. 5.21. 1) 1 rădăcină; 2) 1 rădăcină; 3) 1 rădăcină. 5.22. 1) 1 ră-

dăcină; 2) 1 rădăcină. 5.23. 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$;

4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. 5.24. 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. 5.25. 1) $\log_4 5 > \log_5 4$;

2) $\log_{1,5} 1,3 < \log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8 < \log_{0,8} 0,7$. 5.27. 1) toate numerele reale, cu excepția numerelor de tipul $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) toate numerele de tipul $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $(-2; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$; 4) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 5) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$;

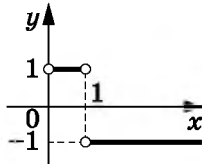
6) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 7) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 8) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$.

5.28. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) toate numerele reale, cu excepția numerelor de tipul $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) toate numerele de tipul $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

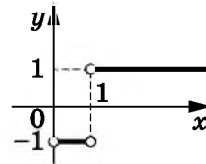
4) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 5) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 6) $(-1; 1) \cup (1; 2)$. 5.29. 1) Vezi desenul;

2) vezi desenul. 5.30. 1) 7; 2) nu are rădăcini; 3) 1; 4) 15;

5) $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Pentru sarcina 5.29 (1)



Pentru sarcina 5.29 (2)

6.5. 1) 16; 2) 64; 3) 27; 4) 6; 5) 6; 6) 512. 6.6. 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10} . 6.7. 1) -2; 6; 2) 5;

3) nu are rădăcini; 4) -2. 6.8. 1) -2; 2) nu are rădăcini. 6.9. 1) 4; 2) 2; 3) 5; 4) 4.

6.10. 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) -1. 6.11. 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) 8; $10^7 - 2$.

6.12. 1) -8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 6.13. 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 6.

6.14. 1) 0; 13; 2) -2. 6.15. 1) 4; 2) 7. 6.16. 1) 3; 2) 8. 6.17. 1) 3; 4; 2) 1; 3) 4; 4) 3.

6.18. 1) 4; 2) 3. 6.20. 1) Crește pe intervalul $[-2; 1]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -2$; 2) crește pe intervalele $(-\infty; -3)$ și $(-3; 0]$, $x_{\max} = 0$; 3) crește pe intervalul $[-1; 5]$, $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 5$. 6.21. $y = -8x + 18$.

7.5. 1) 21; 2) 26. 7.6. 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. 7.7. 1) $(1; +\infty)$; 2) $(0; 1)$;

3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$.

7.8. 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$;

2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) $(3; 6]$; 6) $(1; 3]$.

7.10. 1) $(2; 3)$; 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup (0; 1]$; 4) $[0; 1) \cup (1; 2]$; 5) $(-3; -1)$;

6) $(4; 5]$. **7.11.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; 4)$; 4) $(5; 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$;

6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **7.12.** 1) $[-1; 0)$; 2) $(1; 2]$; 3) $[11; +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **7.13.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$;

2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) $(0,0001; 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0; 4] \cup [8; +\infty)$;

6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.14.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0; 0,1] \cup [1000; +\infty)$;

3) $(0,5; 4)$; 4) $[0,04; 5]$. **7.15.** 1; -20. **7.16.** $(1; -2)$ și $\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{27}\right)$. **7.17.** $y = -x + 2$.

8.9. 1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2 \ln 2)x - 2 \ln 2$; 4) $y = 4x - 1$.

8.10. 1) $y = x - 1$; 2) $y = 2x + 1$. **8.11.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.12.** $y = -1600$.

8.13. 1) $y = ex$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$. **8.14.** 1) Crește pe intervalul $[0; +\infty)$, descrește

pe intervalul $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) crește pe intervalul $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, descrește pe

intervalul $(-\infty; 0]$ și $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 3) crește pe intervalul

$[3; +\infty)$, descrește pe intervalele $(-\infty; 2)$ și $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$; 4) crește pe intervalul

$(-\infty; 1]$, descrește pe intervalul $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 5) crește pe intervalul

$\left[e^{\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, descrește pe intervalul $\left(0; e^{\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{\frac{1}{3}}$; 6) crește pe intervalul

$(0; 1]$, descrește pe intervalul $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 7) crește pe intervalul $(0; +\infty)$;

8) crește pe intervalul $[e; +\infty)$, descrește pe intervalele $(0; 1)$ și $(1; e]$, $x_{\min} = e$.

8.15. 1) Crește pe intervalul $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, descrește pe intervalul $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$,

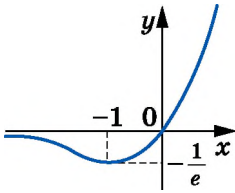
$x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 2) crește pe intervalul $(-\infty; -2]$, descrește pe intervalul $[-2; +\infty)$,

$x_{\max} = -2$; 3) crește pe intervalul $[1; +\infty)$, descrește pe intervalul $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$;

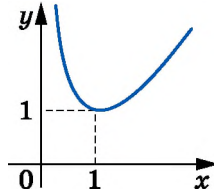
4) crește pe intervalul $(0; e]$, descrește pe intervalul $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 5) crește pe intervalul $[1; +\infty)$, descrește pe intervalul $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 6) crește pe

intervalul $(0; e^2]$, descrește pe intervalul $[e^2; +\infty)$, $x_{\max} = e^2$. **8.16.** $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$.

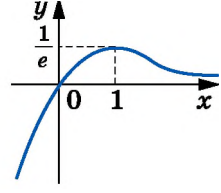
8.17. $\frac{1}{e^2}$; 0.



Pentru însărcinarea
8.18 (1)



Pentru însărcinarea
8.18 (2)



Pentru însărcinarea
8.19

8.18. 1) Privește desenul; 2) privește desenul. 8.19. Privește desenul.

8.20. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 8.21. 1) (4; 4); 2) (4; -4).

9.6. 1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$; 2) $y = -\cos x - 2$; 3) $y = e^x - 7$. 9.7. 1) $y = \frac{x^4}{4} + 1$; 2) $y = \sin x + 2$; 3) $y = \frac{3^x}{\ln 3}$. 9.8. 1) $y = -\frac{1}{x} - 6$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$; 3) $y = \ln(-x) + 4$;

4) $y = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$. 9.9. 1) $y = 2\sqrt{x} + 2$; 2) $y = \ln x - 1$; 3) $y = x^2 - 24$.

9.13. 1) (2; 2, 12]; 2) [0,68; 0,7). 9.14. 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) 2.

10.3. 1) $F(x) = x - x^2 + 8$; 2) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$; 3) $F(x) = 4x + \frac{1}{x} - 4$; 4) $f(x) = \frac{(3x-2)^3}{9} - \frac{1}{9}$. 10.4. 1) $F(x) = 3x - 3x^2 + 6$; 2) $F(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$; 3) $F(x) =$

$x^2 - 2\sqrt{x} - 2$; 4) $F(x) = -2 \cos x$. 10.5. $F(x) = x^4 + 2x^2 - 3$, primitiva mai are încă un zerou, care este egal cu 1. 10.6. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 12x + 27$. 10.7. F_{Σ} . 10.8. F_{Σ} .

10.9. $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t$. 10.10. $s(t) = 2t^3 + t - 47$ sau $s(t) = 2t^3 + t - 67$. 10.11. $F(x) = -x^2 + 5x - \frac{17}{4}$. 10.12. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 3,5$. 10.13. 1) πn , $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) πn , $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 10.14. 1) $(-\infty; -2,5) \cup (0; 2,5]$; 2) $[-2; 1)$.

11.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2} \ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$. 11.6. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) $8 \ln 2$.

11.8. 4) 70; 5) 39; 6) $1,5 - 0,5e^2$. 11.9. 2) -45; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $1\frac{3}{4}$. 11.10. 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$;

3) $e^2 - 1$; 4) $4 \ln 4 - 3$; 5) $12 - 4 \ln 4$; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1;

13) $24 - 7 \ln 7$; 14) $\sqrt{2} - 1$. 11.11. 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6 - 3 \ln 3$;

7) 1; 8) $12 - 5 \ln 5$. 11.12. 1) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(\log_{0,2} 6; +\infty)$. 11.13. $(1; +\infty)$.

11.14. 3; -3. 11.15. 2; -2. 11.16. 1) -1,5; 2) 1; 3) 1. 11.17. 6.

12.1. 4 · 3. 12.2. 5 · 5, 5 · 4. 12.3. 3 · 6 · 5. 12.4. 5!. 12.5. 6^4 . 12.6. 5^3 . 12.7. 1) 3 · 2; 2) 3 · 3. 12.8. Când Anton a luat un măr. 12.9. $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$.

12.10. $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **12.11.** 1) 4!; 2) 3!. **12.12.** $5 \cdot 6^3$. **12.13.** $4 \cdot 5^2$. **12.14.** $9 \cdot 10^6$. **12.15.** 2^4 . **12.16.** 6^3 . **12.17.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **12.18.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **12.19.** I mod. 4; 4!; modul II. $5! - 4!$. **12.20.** $4! \cdot 2$. **12.21.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **12.22.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **12.23.** $4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$. **12.24.** $5^7 + 4 \cdot 5^6$. **12.25.** 1) 4!; 2) 1; 3) 2; 4) 83; 5) 1; 6) 4. **12.26.** 3. **13.1.** 7!. **13.2.** 20!. **13.3.** 5!. **13.4.** A_{11}^2 . **13.5.** A_{15}^3 . **13.6.** A_{12}^6 . **13.7.** A_{16}^3 . **13.8.** A_{32}^2 . **13.9.** C_{29}^5 . **13.10.** C_n^4 . **13.11.** C_{10}^3 . **13.12.** $A_3^3 \cdot A_5^4$. **13.13.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **13.14.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **13.15.** $7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2$. **13.16.** I mod. $C_9^3 + 15 \cdot C_9^2 + 9 \cdot C_{15}^2$; modul II. $C_{24}^3 - C_{15}^3$. **13.17.** 40 %.

14.1. Nu. **14.2.** Da. **14.3.** 1) 0; 2) 1. **14.4.** 1) 0; 2) 1. **14.6.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$.

14.9. 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **14.11.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **14.12.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **14.13.** $\frac{5}{33}$.

14.14. $\frac{1}{494}$. **14.15.** $\frac{C_{12}^5}{C_{27}^8}$. **14.16.** $\frac{C_{16}^2}{C_{1900}^3}$. **14.17.** 1) 18; 2) 3. **14.18.** 2) 8. **14.19.** 2 ore.

15.3. Moda. **15.4.** Mediana și moda. **15.11.** $2,21875 \approx 2,2$ mingi în timpul unui joc. **15.12.** 3,8. **15.17.** 1) 6; 2) 3. **15.18.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) 1. **15.19.** $-0,96$.

16.13. 18 cm^2 . **16.14.** $32\sqrt{2} \text{ cm}^2$. **16.15.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45° . **16.16.** $2a$, $a\sqrt{5}$.

16.17. $2a \cos \frac{\alpha}{2} \text{ tg } \beta$. **16.18.** 9 cm. **16.19.** 7 cm. **16.20.** 6 cm. **16.21.** $72\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

16.22. $12\sqrt{7} \text{ cm}^2$. **16.23.** 48 cm^2 . **16.24.** 1250 cm^2 . **16.25.** 1) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

16.26. $\frac{a^2}{2 \cos \beta \text{ tg}^2 \beta \text{ tg } \alpha}$. **16.27.** 1) $\frac{1}{2} d \text{ tg } \beta$; 2) $\frac{d^2 \text{ tg } \alpha}{4 \cos \beta}$. **16.28.** 522 cm^2 . **16.29.** 6 cm,

8 cm sau 8 cm, 6 cm. **16.30.** $\frac{1}{2} h^2 \text{ tg } \alpha$. **16.31.** $\frac{h^2 \sin \alpha}{2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.32.** $3\sqrt{10} \text{ cm}$.

17.5. 7 cm. **17.6.** 2 cm, 4 cm, 4 cm. **17.7.** $a\sqrt{3}$. **17.8.** $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

17.9. 1) $\arctg \frac{5}{12}$; 2) $\arctg \frac{7}{13}$. **17.10.** 1) $\arctg \frac{12}{5}$; 2) $\arctg \frac{6\sqrt{74}}{37}$. **17.11.** 18 cm^2

sau 16 cm^2 . **17.12.** $\frac{2d^2 \text{ tg } \beta}{\sin \frac{\alpha}{2} \text{ tg } \frac{\alpha}{2}}$. **17.13.** $144\sqrt{2} \text{ cm}^2$. **17.14.** $12(\sqrt{2} + 2) \text{ cm}^2$.

17.15. $4(5\sqrt{3} + 4) \text{ cm}^2$. **17.17.** 2 cm. **17.18.** 64 cm^2 . **17.19.** $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **17.20.** $\sqrt{\frac{S_1 S_2}{2S}}$.

17.21. 300 cm^2 . **17.22.** $50(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$.

18.12. $100(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2$. **18.13.** $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. **18.14.** 6 cm. **18.15.** 20 cm,

$\sqrt{281} \text{ cm}$, 20 cm, $\sqrt{281} \text{ cm}$. **18.16.** $\frac{1}{2} b^2 \sin 2\beta$. **18.17.** $\frac{1}{2} a^2 \text{ tg } \alpha$. **18.19.** $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$.

18.20. $\frac{d^2}{2 \cos \alpha}$. **18.21.** 72 cm^2 . **18.22.** $75\sqrt{6} \text{ cm}^2$. **18.23.** 3) 24 cm^2 . **18.24.** 20 cm.

18.25. 20 cm. **18.26.** $5\sqrt{3}$ cm. **18.27.** 1) $32\sqrt{2}$ cm²; 2) 2 cm. **18.28.** 1) $20\sqrt{3}$ cm²; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **18.29.** 1) 160 cm²; 2) $4\sqrt{3}$ cm. **18.30.** 1) 4 cm; 2) $(32 + 8\sqrt{10} + 24\sqrt{2})$ cm². **18.31.** 360 cm². **18.32.** 16 cm. **18.33.** 1 : 9.

19.8. $18\pi\sqrt{3}$ cm². **19.9.** 13 cm. **19.10.** $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$. **19.11.** 2π cm². **19.13.** $24\pi\sqrt{2}$ cm². **19.14.** 128π cm². **19.15.** $\frac{2\pi a^2 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. **19.16.** $\frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$. **19.17.** 8 cm. **19.18.** $2R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$. **19.19.** 48 cm². **19.20.** *Indicație.* Construiți secțiunea axială a cilindrului, care trece prin punctul A. **19.21.** 16 cm. **19.22.** 10 cm. **19.23.** $h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)$. **19.24.** 6 cm. **19.25.** $4\sqrt{13}$ cm.

20.7. 1) $\frac{H^2}{\operatorname{tg} \alpha}$; 2) $\frac{\pi H^2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$. **20.8.** 1) $\frac{1}{2}a^2 \sin \alpha$; 2) $\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}$. **20.11.** 25 cm, 20 cm. **20.12.** 160π cm². **20.13.** $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. **20.14.** $2m \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta$. **20.15.** $\frac{1020\pi}{13}$ cm².

20.16. $\frac{H^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$. **20.17.** $32\pi\sqrt{2}$ cm². **20.18.** $\frac{1}{2}\pi a^2 \operatorname{tg} \alpha (2\cos \alpha + 1)$. **20.19.** $\frac{\pi a^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

20.20. 84π cm². **20.21.** $\pi(9 + \sqrt{2})$ cm². **20.22.** $200\pi\sqrt{3}$ cm². **20.23.** 240π cm².

20.24. 8 cm. **20.25.** 216° . **20.26.** $\frac{a}{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta}$. **20.27.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. **20.28.** 10 cm.

20.29. 8 cm. **20.30.** $12\sqrt{3}$ cm.

21.13. $\pi R^2 \cos^2 \alpha$. **21.14.** $4\pi\sqrt{3}$ cm. **21.15.** 24 cm. **21.16.** 8 cm. **21.17.** 7 cm. **21.18.** 32π cm². **21.19.** 1 cm. **21.20.** 15 cm. **21.21.** $8\sqrt{2}$ cm. **21.22.** 6 cm. **21.23.** 10π cm. **21.24.** 25 cm. **21.25.** $a^2\sqrt{2}$.

22.2. 8 cm³. **22.5.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **22.7.** $\frac{h^3\sqrt{3}}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$. **22.8.** 288 cm³. **22.9.** 6 cm. **22.10.** 36 800 m³. **22.11.** $h = \frac{ab}{S}$. **22.12.** 456 m³. **22.18.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm³. **22.19.** 1692 cm³.

22.20. 18 cm³. **22.21.** $480\sqrt{3}$ cm³. **22.22.** $162\sqrt{3}$ cm³. **22.23.** 1152 cm³. **22.26.** $\frac{V}{6}$.

22.27. $\frac{2}{3}b^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$. **22.28.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **22.29.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$.

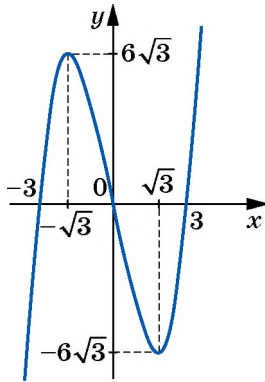
22.30. $d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$. **22.31.** $d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$. **22.32.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ cm³.

22.33. $\frac{1}{4}d^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$. **22.34.** $\frac{1}{4}c^3 \sin 2\beta \sin \beta \operatorname{tg} \alpha$. **22.35.** $\frac{1}{4}a^3 \operatorname{tg} \alpha$. **22.36.** $\frac{a^3}{2}$.

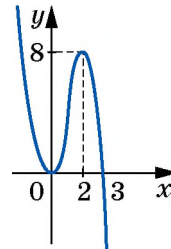
22.37. 108 cm³. **22.38.** 2880 cm³. **22.39.** $\frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{12 \cos \alpha}$. **22.40.** $\frac{1}{6}b^3 \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

- 22.41.** $\frac{1}{6}a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$. **22.42.** $\frac{280}{3} \text{ cm}^3$. **22.43.** $40\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **22.44.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$. **22.45.** $\frac{a^3}{16}$.
22.46. 96 cm^3 . **22.47.** $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$. **22.48.** 936 cm^2 . **22.49.** 1) $p = 4$; 2) $p = 0$.
23.4. $\pi a^2 b$. **23.5.** $\frac{\pi H^3}{4}$. **23.6.** $750\pi \text{ cm}^3$. **23.11.** 39 t. **23.12.** $\frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$.
23.13. $64\pi \text{ cm}^3$. **23.14.** $125\pi \text{ cm}^3$. **23.15.** $240\pi \text{ cm}^3$. **23.24.** 9 : 25. **23.25.** 80 m.
23.26. 77 kg. **23.27.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \beta}$. **23.28.** πR^3 . **23.29.** $\frac{\pi m^3}{3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. **23.30.** $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{24 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.
23.31. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3$. **23.32.** 6 cm. **23.33.** 1,6 t. **23.34.** 125 bile. **23.35.** 6 cm.
23.37. $232\pi \text{ cm}^2$. **23.38.** $160\pi \text{ cm}^2$. **23.39.** 55,3 m. **23.41.** $3380\pi \text{ cm}^3$. **23.42.**
 $\frac{2\pi a^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}$. **23.43.** $448\pi \text{ cm}^3$. **23.44.** $225\pi \text{ cm}^3$. **23.45.** $\frac{1}{3}\pi a^3 \sin \beta \operatorname{tg} \beta$.
23.46. $2500\pi \text{ cm}^2$. **23.47.** $136\pi \text{ cm}^2$. **23.48.** 153° . **23.49.** $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$. **23.50.** Da.
24.13. 14. **24.14.** 20. **24.15.** 3. **24.16.** 11 buchete. **24.17.** 4. **24.21.** 1) 6; 2) 3;
3) 3. **24.32.** 36 pachete. **24.33.** 14 borcane. **24.34.** 32 de ore. **24.35.** 15 ore.
24.36. 1) 36 caiete; 2) 12 caiete. **24.38.** 54 ore. **24.43.** S-a micșorat cu 25%.
24.45. 45 000 grn, 15 000 grn. **24.46.** 200 g, 400 g. **24.47.** 20 kg, 30 kg. **24.51.** 4%.
24.54. 72 600 grn. **24.65.** 1) Nu are rădăcini; 2) 2; 3) 4; 4) 1,5. **24.68.** 1) (2; -3);
2) $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$; 3) (4; 2); 4) (8; -9). **24.70.** 2) (-2; 1); 3) (1; 1), (3,6; 11,4).
24.77. 4) $(-\infty; 18]$. **24.80.** 1) $a < -\frac{1}{4}$; 2) $a \leq 6,4$. **24.81.** 3) $\left(-\frac{4}{11}; 5\right)$; 4) \emptyset .
24.84. 1) 11; 2) 4. **24.87.** 5) $-\frac{1}{36}$; 6) $\frac{4}{9}$. **24.101.** 1) 1 rădăcină; 2) 2 rădăcini.
24.102. 2) -4; 4) -1; 5) 4; 6) 5. **24.103.** 1) 1; 16; 2) $\frac{1}{64}$; 4) 4. **24.104.** 3) [-6; 4];
4) [7; 8) \cup (8; $+\infty$); 5) {5}; 6) $(-\infty; -7) \cup [3; 7) \cup (7; +\infty)$. **24.116.** $p = 4$, $q = 7$.
24.119. a) $k > 0$, $b < 0$; b) $k < 0$, $b > 0$. **24.125.** Pentru $m = 0$ avem: -1, 1, 3;
pentru $m = 2$ avem: 5, 5, 5. **24.129.** 1377. **24.130.** 616. **24.136.** $1 \leq a \leq 3$.
24.137. 1) 5; -3; 2) 7; 6. **24.144.** 1) $\frac{1}{4} \sin \alpha$; 2) $4 \cos 4\alpha$. **24.147.** $-\frac{3\pi}{2}$. **24.148.** 3
rădăcini. **24.149.** 4) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $-\arctg \frac{8}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
24.155. 2) (-1; 4]; 3) [0; 4]; 4) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **24.156.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8.
24.157. 1) (2; $+\infty$); 2) $(-\infty; 3)$; 3) (0; $+\infty$); 4) (2; $+\infty$). **24.158.** 1) 4; 2) $\log_3 2$;
3) $\log_7 5$; 4) 0; 3) 5) -1; 2) 6) 1; $\log_3 \frac{5}{4}$. **24.159.** 1) (1; $+\infty$); 2) [-2; 1];
3) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$; 4) [-2; $+\infty$). **24.162.** 1) (1; $+\infty$); 2) (2; 3) \cup (3; $+\infty$).
24.168. 2) 50; 3) 27; 6) nu are rădăcini. **24.169.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) -1.
24.170. 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) e^7 ; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 81; 3. **24.171.** 4) [-5; -4) \cup (0; 1];

- 7) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 8) (1; 3). **24.172.** 1) (0; 1]; 2) (1; 3]. **24.173.** 1) $(0; 1] \cup [10; +\infty)$;
 2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right] \cup [8; +\infty)$. **24.177.** 1) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; 2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.
24.178. (2; 3). **24.179.** (1; 0). **24.180.** $y = 5x$ și $y = 5x - 27$. **24.182.** 1) Crește pe
 intervalul $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, descrește pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ și $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{4}$,
 $x_{\min} = -\frac{1}{3}$; 2) зростає на \mathbb{R} ; 3) crește pe intervalul $(-\infty; -4]$ și $[4; +\infty)$,
 descrește pe intervalul $[-4; 0]$ și $(0; 4]$, $x_{\max} = -4$, $x_{\min} = 4$; 4) crește pe intervalul
 $(-\infty; -2)$, $(-2; 1]$ și $[4; +\infty)$, descrește pe intervalul $[1; 2]$ și $(2; 4]$, $x_{\max} = 1$,
 $x_{\min} = 4$; 5) crește pe intervalul $(-\infty; -1]$, спадає на проміжку $[-1; +\infty)$,
 $x_{\max} = -1$; 6) crește pe intervalul $[2; +\infty)$, descrește pe intervalul $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$.
24.183. 1) 1; -6; 2) $\frac{3}{5}$; -1; 3) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{4}{5}$; -1. **24.184.** 1) Privește desenul;
 2) privește desenul.



Pentru sarcina 24.184 (1)



Pentru sarcina 24.184 (2)

- 24.185.** 2) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + C$. **24.186.** 1) $F(x) = x^2 + 4x - 11$; 2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$.
24.187. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 18; 3) $4 \ln 3 - 4$; 4) -6. **24.188.** 1) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 2) $\ln 3$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 4,5.
24.189. 72. **24.190.** 8!. **24.191.** C_{32}^9 . **24.192.** $12C_{16}^9$. **24.193.** 4!. **24.204.** 13.
24.206. 2 ore 15 min, 2 ore 24 min.
25.1. 84 cm. **25.2.** 60 cm^2 . **25.3.** $\sqrt{26}$ cm. **25.4.** 10 cm. **25.5.** 12 cm.
25.6. $(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$. **25.7.** $4\sqrt{13}$ cm. **25.8.** $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$. **25.9.** 48 cm. **25.10.** 8 cm.
25.11. 20 cm. **25.12.** 192 cm. **25.13.** 8 cm. **25.14.** 24 cm. **25.15.** 28 cm.
25.16. 30 cm. **25.17.** 36 cm^2 . **25.18.** 36 cm^2 . **25.19.** 18 cm^2 . **25.20.** 98 cm^2 .
25.21. 6 cm. **25.22.** 4,5 cm. **25.23.** 128 cm. **25.24.** $\frac{4000}{3} \text{ cm}^2$. **25.25.** 15 cm,
 24 cm. **25.26.** 6 cm. **25.27.** 60° . **25.28.** $\frac{441\pi}{20} \text{ cm}^2$. **25.29.** 2 cm. **25.30.** 12 cm.

- 25.31. $60\sqrt{2}$ cm². 25.32. 22 cm. 25.33. 96 cm². 25.34. $\frac{2c}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 25.35. 15 cm.
- 25.36. 230 cm². 25.37. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 25.38. 96 cm². 25.39. 135 cm². 25.40. 288 cm².
- 25.41. 624 cm². 25.42. 196 cm. 25.43. 100°. 25.44. 58°. 25.45. 1 : 2. 25.46. $\sqrt{3} : 2$.
- 25.47. $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$. 25.48. 15°. 25.49. 6 cm. 25.50. 20 cm. 25.51. 29π cm. 25.52. 8 cm, 12 cm. 25.53. 18 cm. 25.55. $\sqrt{5}$. 25.56. A (3; -2). 25.57. (0; -1,5). 25.59. $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$. 25.60. $y = 3x + 7$. 25.61. $y = x\sqrt{3} + 2$. 25.62. $y = -0,5x - 4$.
- 25.67. 10. 25.70. $\overline{m}(7; 1)$. 25.71. $\sqrt{65}$. 25.72. 1. 25.73. 18. 25.74. 6.
- 25.75. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. 25.76. 135°. 25.77. $\overline{AM} = \frac{3}{5}\overline{a} + \overline{b}$. 25.78. $\overline{EF} = \frac{4}{7}\overline{b} - \frac{1}{4}\overline{a}$.
- 25.82. 120°. 25.87. (6; -9). 25.88. (3; 4). 25.99. $10\sqrt{3}$ cm. 25.100. 300 cm².
- 25.101. 360 cm². 25.102. $5\sqrt{7}$ cm. 25.103. 30 cm, 20 cm, 18 cm. 25.104. $12\sqrt{17}$ cm².
- 25.105. $12a^2 \operatorname{tg} \alpha$. 25.106. $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$. 25.107. $2a^2 \left(4\sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha \right)$.
- 25.108. 3 cm. 25.110. $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}$. 25.111. 1250 cm². 25.112. 600 cm². 25.116. 5 cm.
- 25.117. $4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$. 25.118. 50 cm². 25.121. 350π cm². 25.124. 8 cm².
- 25.125. R^2 . 25.126. $\frac{\alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. 25.127. 30 cm. 25.128. 6 cm. 25.129. $64\sqrt{2}$ cm³.
- 25.130. $\frac{3d^3 \sqrt{15}}{50}$. 25.132. $25\sqrt{119}$ cm³. 25.133. 48 cm³. 25.135. $36\sqrt{6}$ cm³.
- 25.138. $3\sqrt{3}$ cm³. 25.139. 32π cm³. 25.140. $\frac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. 25.141. 60π cm².
- 25.142. 3π cm³. 25.144. 832π cm².

Răspunsuri la însărcinările „Controlează-te” în formă test

Numărul	Numărul problemei																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	D	B	B	D	B	A	C	B	D	B	C	C	A	C	C	A	C	B
2	B	D	B	D	D	B	A	B	B	A	A	C	B	B	D	C	C	A
3	D	C	A	B	C	C	D	D	B	D	D	B	B	B	D	C	A	
4	A	C	B	C	B	D	C	D	A	D	A	B	A	C	A	B	A	B
5	B	C	A	A	D	D	A	B	B	D	C	C	A	C	D	A	B	A
6	D	B	D	A	A	B	C	D	C	C	B	B	C	B	D	A	D	C

Indice de materie

- A**mplitudine (Розмах) 86
 Apotema piramidei regulate
 (Апофема правильної піраміди)
 111.
 Aranjamente (Розміщення) 75
 Aria suprafeței laterale a conului
 (Площа бічної поверхні конуса)
 129
 — — — piramidei (піраміди) 111
 — — — prismei (призми) 101
 — — — cilindrului (циліндра) 124
 — suprafeței poliedrului (suprafeței
 poliedrului) 99
 — suprafeței totale a conului (повної
 поверхні конуса) 129
 — — — piramidei (піраміди) 111
 — — — prismei (призми) 101
 — — — cilindrului (циліндра) 124
 Aspectul general al primitivelor
 (Загальний вигляд первісних)
 50
- B**aza conului (Основа конуса) 128
 — cilindrului (циліндра) 122
 Bilă (Кўля) 133
- C**entrul bilei (Центр кўлі) 133
 — sferei (сфєри) 133
- Cercul mare a bilei (Великий крўг
 кўлі) 134
 Cilindru (Ци́лндр) 122
 Combinație (Комбіна́ція) 76
 Combinatorică (Комбінато́рика) 70
 Con (Конус) 128
 Corp (Тіло) 98
 — de rotație (обертання) 122
 Corp geometric (Геометри́чне тіло)
 98
 Cub (Кўб) 106
- D**esfășurata suprafeței laterale a
 conului
 (Розго́ртка бічної поверхні конуса)
 129
 — — — cilindrului (цилі́ндра) 123
 — cilindrului 123
 — conului (конуса) 128
 Determinarea clasică a probabilității
 (Класичне визначення
 ймовірності) 78
 Diagonala poliedrului (Диагона́ль
 многогра́нника) 99
 Diametrul bilei (Ди́аметр кўлі) 133
 — sferei (сфєри) 133
 Dimensiunile paralelipipedului
 dreptunghic (Виміри
 прямоку́тного паралелепіпеда)
 106
- E**veniment verosimil (Подія
 вірогідна) 79
 — adevărat (достовірна) 79
 — imposibil (неможлива) 79
 Exponentă (Експонента) 40
- F**ețele megieșe ale poliedrului (Гра́ні
 многогра́нника сусідні) 98
 — oruse ale paralelipipedului
 (паралелепіпеда протилежні)
 105
 Formula lui Newton-Leibnitz 59
 Funcția logaritmică (Фу́нкція
 логарифмічна) 27
 — primitivei (первісна) 49
 — exponențială (показнико́ва) 7
- G**eneratoarea conului (Твірна́
 конуса) 128
 — cilindrului (цилі́ндра) 122

- I**dentitatea logaritmică fundamentală (Основная логарифмична тождество) 21
- Indice de materie (Предметный показчик) 205
- Integrala determinată (Интеграл определенный) 59
- nedeterminată (неопределенный) 50
- Î**nălțimea conului (Высота конуса) 128
- piramidei (пирамиды) 110
- prismei (призмы) 100
- cilindrului (цилиндра) 122
- L**ogarithmul (Логарифм) 21
- zecimal (десятичный) 22
- natural (натуральный) 40
- puterii (степени) 22
- câtului (части) 22
- M**ediana (Медиана) 87
- Moda (Мода) 87
- P**aralelipipedul (Параллелепипед) 105
- drept (прямой) 106
- dreptunghic (прямоугольный) 106
- Permutație (Перестановка) 74
- Piramidă regulată (Пирамида правильная) 110
- cu n laturi (n -кутна) 109
- Planul tangent la sferă (Дотична площина до сфери) 134
- Poliedru (Многогранник) 98
- convex (опуклый) 99
- Primitiva (Первская) 49
- Prismă regulată (Призма правильная) 100
- cu n laturi (n -кутна) 99
- dreaptă (прямая) 100
- R**egula produsului (Правило добутку) 70
- sumei (суми) 70
- Rezultat favorabil (Результат благоприятный) 89
- Rezultate egal posibile (Результаты равновозможны) 78
- S**ecțiunea axială a conului (Осьевой перерез конуса) 128
- — cilindrului (цилиндра) 123
- Secțiunea diagonală a piramidei (Диагональный перерез пирамиды) 110
- — prismei (призмы) 100
- cilindrului (цилиндра) 122
- Selecție (Выборка) 83
- reprezentativă (репрезентативна) 83
- Sensul geometric al integralei determinate (Геометричний зміст визначеного інтеграла) 60
- Sferă (Сфера) 133
- Statistică (Статистика) 82
- Suprafața laterală a conului (Бічна поверхня конуса) 128.
- cilindrului (цилиндра) 122
- T**etraedru regulat (Тетраедр правильный) 111
- Totalitatea generală (Генеральная совокупность) 86
- Trapez curbiliniu (Криволинейная трапеция) 57
- U**nghi diedru de la muchia poliedrului (Угол многогранника двугранный при ребре) 99
- — plan de la vârful (плоский при вершине) 98
- V**aloarea medie (Среднее значение) 86
- Vârful conului (Вершина конуса) 128
- Volumul corpului (Объем тела) 141

CUPRINS

<i>De la autori</i>	3
<i>Însemnări convenționale</i>	4

Capitolul 1. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ

§ 1. Funcțiile exponențială și logaritmică	6
1. Funcția exponențială și proprietățile ei	6
• Este oare nevoie de a studia funcția exponențială?.....	12
2. Ecuatii exponențiale	13
3. Inecuații exponențiale	17
4. Logaritmul și proprietățile lui.....	20
5. Funcția logaritmică și proprietățile ei	27
6. Ecuatii logaritmice.....	32
7. Inecuații logaritmice	36
8. Derivatele funcțiilor exponențială și logaritmică.....	40
• Iubirea mea este Ucraina și matematica	44
• Însărcinările primei olimpiade matematice din Kiev (a. 1935).....	44
<i>Însărcinarea nr. 1 „Controlează-te” în formă test</i>	45
<i>Principalul în Paragraful 1</i>	47
§ 2. Integrala și aplicarea ei	49
9. Primitiva.....	49
10. Regulile de aflare ale primitivei	54
11. Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată	57
• « Cu intelectul el a depășit specia umană »	65
<i>Însărcinarea nr. 2 „Controlează-te” în formă test</i>	67
<i>Principalul în paragraful 2</i>	69
§ 3. Elemente de combinatorică, a teoriei probabilității și de statistică matematică	70
12. Regulile combinatorice pentru sumă și produs	70
13. Permutări. Aranjamente. Combinări	74
14. Determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu	78
15. Elemente de statistică matematică.....	82
<i>Însărcinarea nr. 3 „Controlează-te” în formă test</i>	93
<i>Principalul în paragraful 3</i>	96

Capitolul 2. GOMETRIE

§ 4. Poliedre	98
16. Prisma.....	98
17. Paralelipipedul.....	105
18. Piramida	109
• Frumusețea și intelectul Ucrainei.....	117
Însărcinarea nr. 4 „Controlează-te” în formă test.....	118
Principalul în paragraful 4	120
§ 5. Corpuri de rotație	122
19. Cilindrul	122
20. Conul.....	128
21. Bila și sfera.....	133
Însărcinarea nr. 5 „Controlează-te” în formă test.....	137
Principalul în paragraful 5	140
§ 6. Volumele corpurilor. Aria sferei	141
22. Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prisme și a piramidei	141
23. Volumele corpurilor de rotație. Aria sferei.....	148
Însărcinarea nr. 6 „Controlează-te” în formă test.....	155
Principalul în paragraful 6	157
§ 7. Repetarea cursului de matematică	158
24. Probleme pentru repetarea cursului de algebră	158
25. Probleme pentru repetarea cursului de geometrie	179
<i>Prietenim cu calculatorul</i>	192
<i>Răspunsuri și indicații la exerciții</i>	195
<i>Răspunsuri la însărcinări „Controlează-te” în formă test</i>	203
<i>Indice de materie</i>	204

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович,
НОМРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович,
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

**Підручник для 11 класу з навчанням румунською/
молдовською мовами закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Румунською/молдовською мовами

Редактор *І. М. Грінчешин*

Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*

Коректор *М. В. Товарницький*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 12,28.

Тираж 1138 пр. Зам. № 1928

Державне підприємство «Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua; e-mail: office@svit.gov.ua; svit_vydav@ukr.net

Друк ТОВ «РІК-У»

88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 36

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5040 від 21.01.2016

Forzațul 1

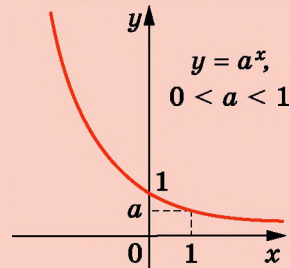
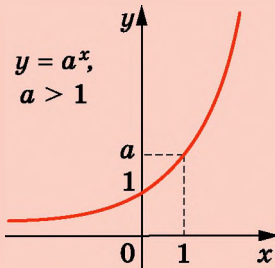


"Dragostea mea este Ucraina și matematica". Aceste cuvinte ale lui Mihail Pilipovici Kravciuk (1892–1942) sunt incrustate pe postamentul monumentului de granit al savantului.

Noi sperăm că această, teză patriotică a eminentului matematician ucrainean va deveni și pentru voi un indicator sigur pe drumul spre profesionalism.

Forzațul 2

Graficul funcției exponențiale



Proprietățile logaritmilor

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1,$$

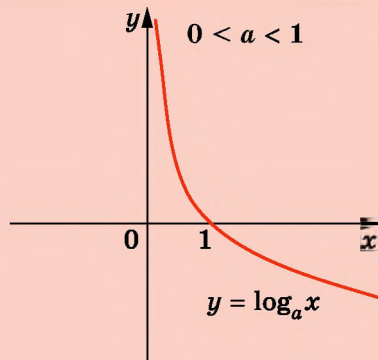
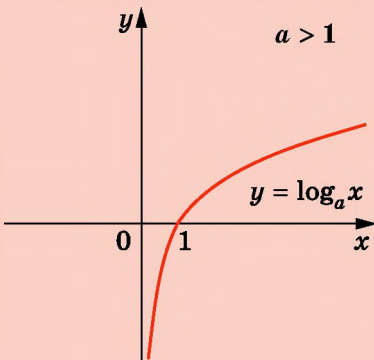
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x, \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Graficul funcției logaritmice



Forzați 3

Tabelul derivatelor unor funcții

Funcția f	Primitiva funcției f
k (constanță)	kx
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

Funcția f	Primitiva funcției f
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x

Regulile de integrare

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

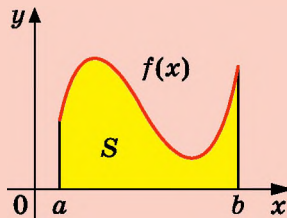
$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

Formula lui Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Aria trapezului curbiliniu



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Permutări	Aranjamente	Combinări
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

Forzații 4

Formulele pentru calculul ariilor suprafețelor și volumelor corpurilor geometrice

Aria suprafeței laterale a cilindrului

$S_l = 2\pi rh$, unde S_l — aria suprafeței laterale a cilindrului,
 r — raza bazei cilindrului, h — lungimea înălțimii cilindrului

Aria suprafeței totale a cilindrului

$S_t = S_l + 2S_{bază}$, unde S_t — aria suprafeței totale a cilindrului,
 $S_{bază}$ — aria suprafeței laterale a cilindrului
 $S_l = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Aria suprafeței laterale a conului

$S_l = \pi rl$, unde r — raza bazei conului, l — lungimea înălțimii conului

Aria suprafeței totale a conului

$S_t = S_l + S_{bază}$, unde S_t — aria suprafeței totale a conului,
 $S_{bază}$ — aria suprafeței laterale a conului
 $S_t = \pi rl + \pi r^2$

Volumul prisme

$V = Sh$, unde V — volumul prisme, S — aria bazei prisme,
 h — lungimea înălțimii piramidei

Volumul piramidei

$V = \frac{1}{3}Sh$, unde V — volumul piramidei, S — aria bazei piramidei,
 h — lungimea înălțimii piramidei

Volumul cilindrului

$V = \pi r^2 h$, unde V — volumul cilindrului, r — aria bazei cilindrului,
 h — lungimea înălțimii cilindrului

Volumul conului

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, unde V — volumul conului, r — aria bazei conului,
 h — lungimea înălțimii conului

Volumul bilei

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, unde V — volumul bilei, R — raza bilei

Aria sferei

$S = 4\pi R^2$, unde S — aria sferei, R — raza sferei