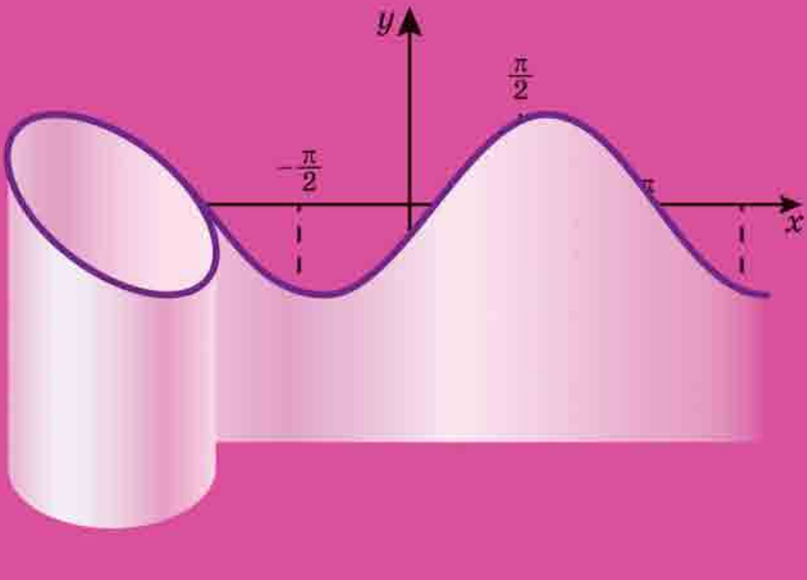
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

10

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИЯ

УРОВЕНЬ СТАНДАРТА



ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(приказ Министерства образования и науки Украины
от 31.05.2018 № 551)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Переведено по изданию: Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.

Перевод с украинского *В. Б. Полонского*

Мерзляк А. Г.
М52 Математика : алгебра и начала анализа и геометрия, уровень стандарта : учеб. для 10 кл. заведений общего среднего образования с обучением на рус. яз. : [пер. с укр.] / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2018. — 256 с. : ил.
ISBN 978-966-474-316-4.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-474-316-4 (рус.)
ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

ОТ АВТОРОВ

Дорогие десятиклассники и десятиклассницы!

Сегодня нет такой области науки, где не применялись бы достижения математики. В физике и химии, астрономии и биологии, географии и экономике, даже в лингвистике и истории применяют «математический инструмент».

Надеемся, что получить глубокие математические знания вам поможет учебник, который вы держите в руках. Он состоит из двух разделов: первый посвящен алгебре и началам анализа (пункты 1–26), второй — геометрии (пункты 27–43).

Алгебра и начала анализа — полезный и очень интересный учебный предмет. Он развивает аналитическое и логическое мышление, исследовательские навыки, математическую культуру, сообразительность. В этом году вы начинаете знакомство с элементами математического анализа; вам предстоит рассматривать новые классы функций, изучать их свойства, осваивать методы исследования функций.

Раздел геометрии, в котором изучают фигуры в пространстве и их свойства, называют **стереометрией**. Именно этот раздел геометрии вы будете изучать в 10 и 11 классах. Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — «объемный», «пространственный» и «метрео» — «измерять». Знать стереометрию чрезвычайно важно. Без пространственного воображения и глубоких геометрических знаний невозможно освоить инженерные профессии, строительное или архитектурное дело, работать в области компьютерной графики, дизайна, моделирования одежды и обуви и т. д. И это понятно, ведь большинство окружающих нас объектов, созданных как человеком, так и природой, не являются плоскими (рис. 1).

Колокольня Киево-Печерской лавры

Украинский самолет «Мрія» — самый большой самолет в мире

Вид Земли из космоса

Рис. 1

Учебник разделен на пункты. Изучая теоретический материал пункта, особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения. Обычно изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

В этой книге вы ознакомитесь с рядом важных теорем. Некоторые из них приведены с доказательствами. В тех случаях, когда доказательства выходят за пределы рассматриваемого курса, в учебнике приведены только формулировки теорем.

К каждому пункту подобраны задания для самостоятельного решения, приступать к которым мы советуем только после изучения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности, так и трудные, особенно отмеченные звездочкой (*).

Желаем успеха!

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n°	задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;
$n^{\bullet}$	задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;
$n^{\bullet\bullet}$	задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;
n^{*}	задачи для математических кружков и факультативов;
◀	окончание доказательства теоремы, решения задачи;
	ключевые задачи, результат которых может быть использован при решении других задач.

Зеленым цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, рекомендуемых для решения устно.

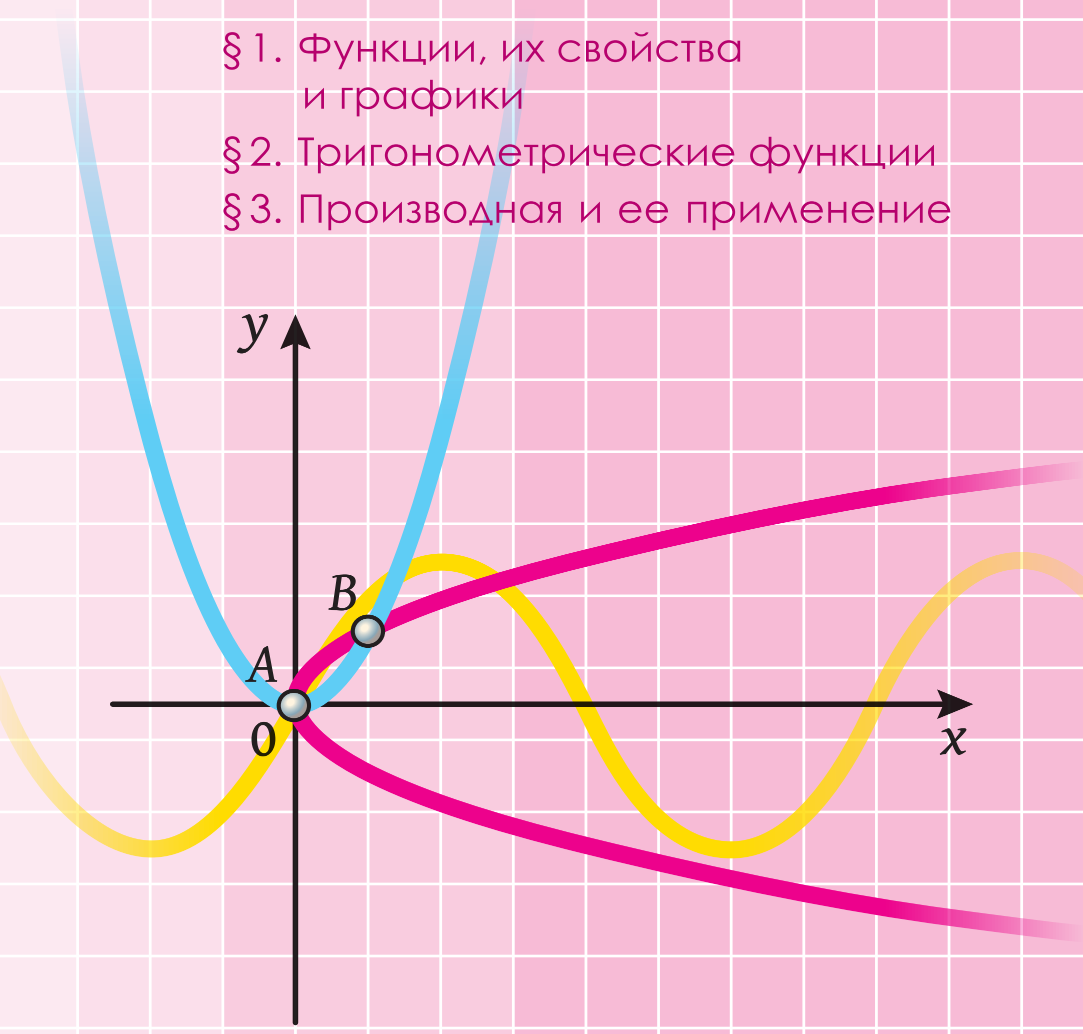
Раздел 1

Алгебра и начала анализа

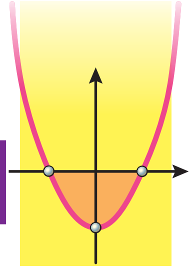
§ 1. Функции, их свойства и графики

§ 2. Тригонометрические функции

§ 3. Производная и ее применение



ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ §1



В этом параграфе вы повторите основные сведения о функции; узнаете, что называют наибольшим и наименьшим значениями функции на множестве, какие функции называют четными, а какие — нечетными; ознакомитесь со свойствами графиков четных и нечетных функций.

Вы узнаете, какую функцию называют степенной функцией с целым показателем, какими свойствами обладает эта функция; что называют корнем n-й степени, какими свойствами обладает корень n-й степени; что называют степенью с рациональным показателем и каковы ее свойства; какие уравнения называют иррациональными.

Вы научитесь извлекать корни n-й степени; выполнять возведение в степень с рациональным показателем; преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными показателями и корни n-й степени; решать иррациональные уравнения.

1. Наибольшее и наименьшее значения функции. Четные и нечетные функции

Перед изучением этого пункта рекомендуем выполнить упражнения 1.24–1.28.

В 7 классе вы ознакомились с понятием функции и при изучении многих разделов курса алгебры неоднократно обращались к этому понятию. Такую важную роль функция играет не случайно: ведь математическими моделями многих реальных процессов служат именно функции.

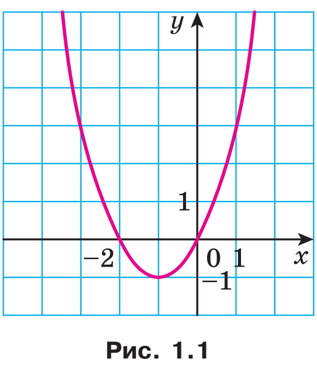


Рис. 1.1

Вам знакомы такие понятия, как *область определения*, *область значений*, *нули*, *промежутки знакопостоянства*, *промежутки возрастания и убывания функции*.

Например, для функции $y = x^2 + 2x$, график которой изображен на рисунке 1.1, имеем:

- область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- область значений: $E(y) = [-1; +\infty)$;
- нули: числа -2 и 0;

- промежутки знакопостоянства: функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $(-\infty;\ -2)$ и $(0;\ +\infty)$, а отрицательные значения — на промежутке $(-2;\ 0)$;
- промежутки возрастания и убывания: функция убывает на промежутке $(-\infty;\ -1]$ и возрастает на промежутке $[-1;\ +\infty)$.

Приведенный выше перечень далеко не исчерпывает те свойства, которые целесообразно изучать при исследовании функции. Рассмотрим новые понятия, помогающие более полно охарактеризовать функцию.

Определение. **Число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Обозначают: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Определение. **Число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Обозначают: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ и множества $M = [0;\ 4]$ имеем (рис. 1.2): $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(4) = 2$.

Для функции $f(x) = |x|$ и множества $M = [-1;\ 2]$ имеем (рис. 1.3): $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(2) = 2$.

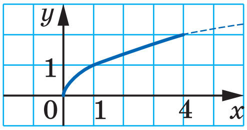


Рис. 1.2

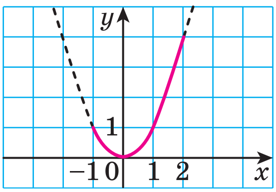


Рис. 1.3

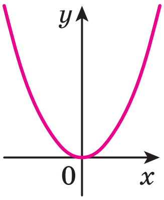


Рис. 1.4

Не каждая функция на заданном множестве имеет наименьшее или наибольшее значение. Так, для функции $f(x) = x^2$ имеем: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Наибольшего значения на множестве действительных чисел эта функция не имеет (рис. 1.4).

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множестве $(0; +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений (рис. 1.5).

Определение. **Функцию f называют четной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.**

Определение. **Функцию f называют нечетной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.**

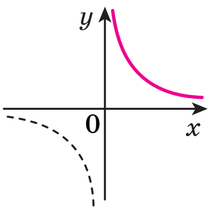


Рис. 1.5

Например, функция $f(x) = x^2$ — четная, а функция $g(x) = x^3$ — нечетная. Действительно, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ и $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Выполнение равенства $f(-x) = f(x)$ или равенства $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что область определения функции f симметрична относительно начала координат, то есть обладает следующим свойством: если $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$.

Из приведенных определений следует, что если область определения функции не симметрична относительно начала координат, то эта функция не может быть ни четной, ни нечетной.

Например, областью определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, которое не симметрично относительно начала координат. Поэтому данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Задача. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - x$ является нечетной.

Решение. Поскольку $D(f) = \mathbb{R}$, то область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Следовательно, функция f нечетная. ◀

Теорема 1.1. ***Ось ординат является осью симметрии графика четной функции.***

Теорема 1.2. ***Начало координат является центром симметрии графика нечетной функции.***

Утверждения теорем 1.1 и 1.2 проиллюстрированы на рисунках 1.6 и 1.7.

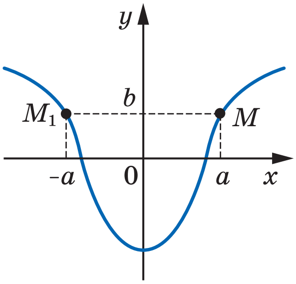


Рис. 1.6

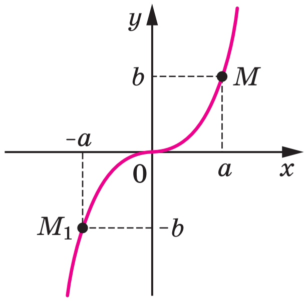


Рис. 1.7

1. Какое число называют наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве?
2. Как обозначают наибольшее (наименьшее) значение функции f на множестве M?
3. Какую функцию называют четной (нечетной)?
4. Каким свойством обладает график четной (нечетной) функции?

УПРАЖНЕНИЯ

1.1.° На рисунке 1.8 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-4; 5]$. Пользуясь графиком, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:
1) $[1; 2]$; 2) $[-2,5; 1]$; 3) $[-2,5; 3,5]$.

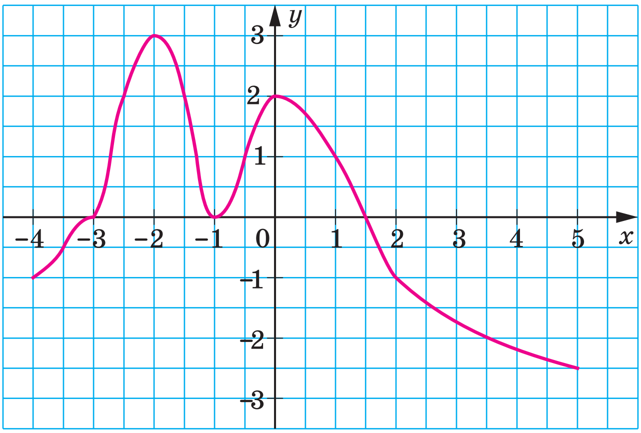


Рис. 1.8

1.2.° На рисунке 1.9 изображен график функции $y = g(x)$, определенной на промежутке $[-4; 4]$. Пользуясь графиком, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:
1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$.

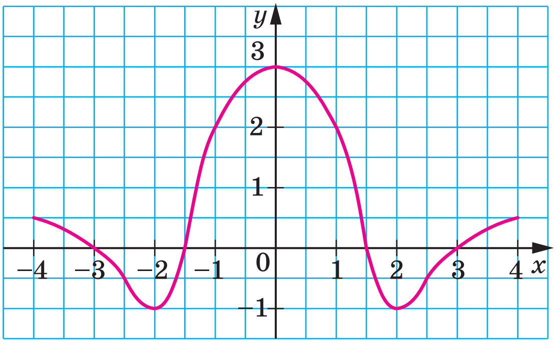


Рис. 1.9

1.3.° Известно, что $f(7) = -16$. Найдите $f(-7)$, если функция f является: 1) четной; 2) нечетной.

1.4.° Известно, что $f(-3) = 8$. Найдите $f(3)$, если функция f является: 1) четной; 2) нечетной.

1.5.° Функция f четная. Может ли выполняться равенство:
1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\ f(-5) = -2$?

1.6.° Функция f нечетная. Может ли выполняться равенство:
1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\ f(-2) = 3$?

1.7.° Является ли четной функция, заданная формулой $y = x^2$, если ее область определения — множество:
1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

1.8.° Четной или нечетной является функция, график которой изображен на рисунке 1.10?

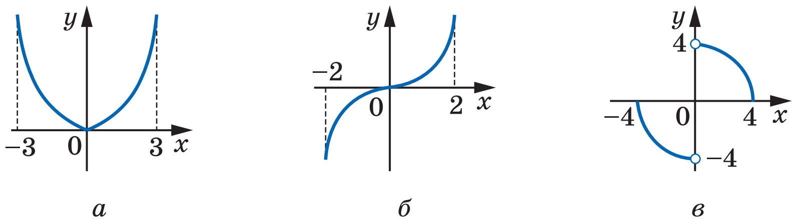


Рис. 1.10

1.9.$^{\bullet}$ На промежутке [2; 5] найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=-\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{20}{x}$.

1.10.$^{\bullet}$ Найдите:

1) $\max\limits_{[1;\,2]}(-x^2+6x)$; 3) $\max\limits_{[4;\,5]}(-x^2+6x)$.

2) $\min\limits_{[1;\,4]}(-x^2+6x)$;

1.11.$^{\bullet}$ Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2+2x-8$ на промежутке:

1) [−5; −2]; 2) [−5; 1]; 3) [0; 3].

1.12.$^{\bullet}$ Докажите, что является четной функция:

1) $f(x)=-5x^4$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

1.13.$^{\bullet}$ Докажите, что является четной функция:

1) $f(x)=x^6$; 2) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$.

1.14.$^{\bullet}$ Докажите, что является нечетной функция:

1) $f(x)=4x^7$; 2) $f(x)=2x-3x^5$.

1.15.$^{\bullet}$ Докажите, что является нечетной функция:

1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=(x^3+x)(x^4-x^2)$.

1.16.$^{\bullet\bullet}$ Сумма двух чисел равна 8. Найдите:

1) наибольшее значение, которое может принимать произведение этих чисел;
2) наименьшее значение, которое может принимать сумма квадратов этих чисел.

1.17.$^{\bullet\bullet}$ Участок земли прямоугольной формы огородили забором длиной 200 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

1.18.$^{\bullet\bullet}$ Исследуйте на четность функцию:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^3-x}$.

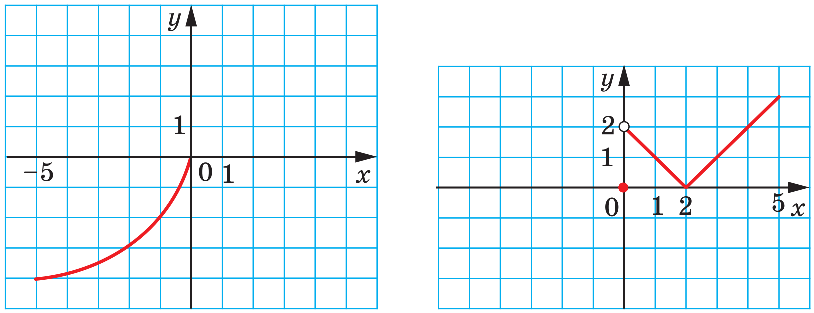
2) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;

1.19.$^{\bullet\bullet}$ Исследуйте на четность функцию:

1) $f(x)=x^2+2x-4$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$.

2) $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2-9}$;

1.20.•• На рисунке 1.11 изображена часть графика функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-5;\ 5]$. Достройте график этой функции, если она является: 1) четной; 2) нечетной.



а *б*

Рис. 1.11

1.21.•• Ломаная $ABCD$, где $A(0;\ 0)$, $B(2;\ -2)$, $C(3;\ 4)$, $D(6;\ 1)$, является частью графика функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-6;\ 6]$. Постройте график этой функции, если она является: 1) четной; 2) нечетной.

1.22.•• Функция f является четной и $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Найдите $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

1.23.•• Функция f является нечетной и $\min\limits_{[2;\,5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;\,5]} f(x) = 3$. Найдите $\min\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1.24. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Найдите: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.
2) Найдите значение аргумента, при котором значение функции f равно: 0; −1; −56.

1.25. Укажите на рисунке 1.12 фигуру, которая не может служить графиком функции.

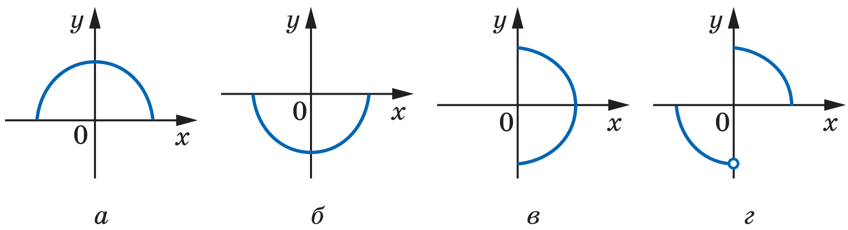


Рис. 1.12

1.26. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\dfrac{9}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{x-6}{4}$;
3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;
5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;
7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

1.27. Найдите нули функции:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$.

1.28. Найдите область значений функции:

1) $f(x)=\sqrt{x}+2$;
2) $f(x)=7-x^2$;
3) $f(x)=-6$.

2. Степенная функция с натуральным показателем

Свойства и графики функций $y=x$ и $y=x^2$ хорошо знакомы вам из курсов математики предыдущих классов. Эти функции являются частными случаями функции $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, которую называют **степенной функцией с натуральным показателем**.

Поскольку выражение x^n, $n\in\mathbb{N}$, имеет смысл при любом x, то *областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество* $\mathbb{R}$.

Очевидно, что рассматриваемая *функция имеет единственный нуль* $x=0$.

Дальнейшее исследование свойств функции $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, проведем для двух случаев: n — четное натуральное число и n — нечетное натуральное число.

• **Первый случай: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Отметим, что при $k = 1$ получаем функцию $y = x^2$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 8 класса.

Поскольку при любом x выражение x^{2k} принимает только неотрицательные значения, то область значений рассматриваемой функции не содержит ни одного отрицательного числа.

Можно показать, что для любого $a \geqslant 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{2k} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^n$, где n — четное натуральное число, является множество* $[0; +\infty)$. Если $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции $y = x^n$, где n — четное натуральное число.*

Функция $y = x^n$, где n — четное натуральное число, является четной. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Отсюда $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Следовательно, *функция $y = x^n$, где n — четное натуральное число, убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. Аналогично можно показать, что эта функция *возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — четное натуральное число (рис. 2.1). В частности, график функции $y = x^4$ изображен на рисунке 2.2.

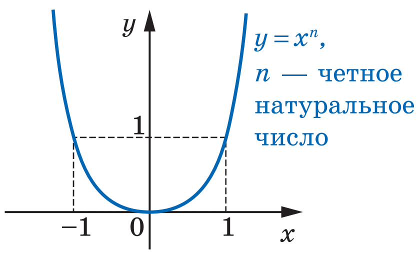


Рис. 2.1

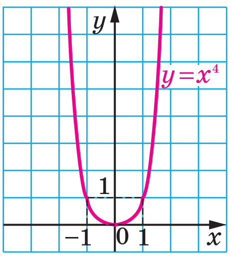


Рис. 2.2

• Второй случай: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ или $k = 0$

Отметим, что при $k = 0$ получаем функцию $y = x$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 7 класса.

Теперь пусть $k \in \mathbb{N}$.

Можно показать, что для любого a существует такое значение аргумента x, что $x^{2k+1} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число, является множество $\mathbb{R}$.*

Если $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; если $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число.*

Функция $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число, является нечетной. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем:

$$x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}.$$

Следовательно, *функция $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число, является возрастающей*.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число, $n > 1$ (рис. 2.3). В частности, график функции $y = x^3$ изображен на рисунке 2.4.

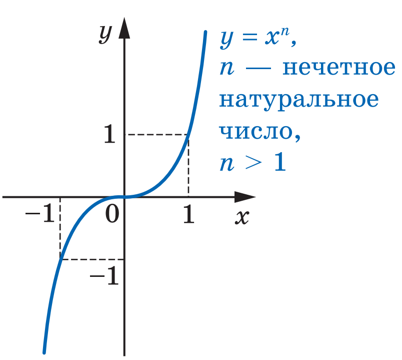


Рис. 2.3

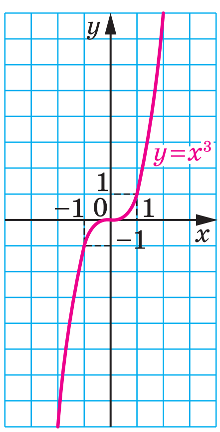


Рис. 2.4

В таблице приведены свойства функции $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установленные в этом пункте.

Свойство	n — четное натуральное число	n — нечетное натуральное число
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значений	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Четность	Четная	Нечетная
Возрастание / убывание	Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$	Возрастающая

1. Какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^n$.
3. Изобразите схематически график функции $y = x^n$.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1.° Через какие из данных точек проходит график функции $y = x^5$:
1) $A\ (-1;\ 1)$; 2) $B\ (2;\ 32)$; 3) $C\ (-3;\ -243)$?

2.2.° Через какие из данных точек проходит график функции $y = x^4$:
1) $A\ (2;\ 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{81}\right)$; 3) $C\ (0{,}5;\ -0{,}0625)$?

2.3.° Функция задана формулой $f(x) = x^{19}$. Сравните:
1) $f(1{,}4)$ и $f(1{,}8)$;
2) $f(-7{,}6)$ и $f(-8{,}5)$;
3) $f(-6{,}9)$ и $f(6{,}9)$;
4) $f(0{,}2)$ и $f(-12)$.

2.4.° Функция задана формулой $f(x) = x^{50}$. Сравните:
1) $f(9{,}2)$ и $f(8{,}5)$;
2) $f(-1{,}1)$ и $f(-1{,}2)$;
3) $f(19)$ и $f(-19)$;
4) $f(-7)$ и $f(9)$.

2.5.$^{\bullet}$ Расположите выражения в порядке убывания их значений:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5,\ \left(-2\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5,\ \left(-2\frac{2}{5}\right)^5.$$

2.6.$^{\bullet}$ Расположите выражения в порядке возрастания их значений:

$$(1{,}06)^4,\ (-0{,}48)^4,\ (-2{,}12)^4,\ (-3{,}25)^4.$$

2.7.$^{\bullet}$ Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке:

1) $[0;\ 2]$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -2]$.

2.8.$^{\bullet}$ Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^5$ на промежутке:

1) $[-3;\ 3]$; 2) $[-2;\ 0]$; 3) $[1;\ +\infty)$.

2.9.$^{\bullet\bullet}$ Определите графически количество корней уравнения:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$.

2.10.$^{\bullet\bullet}$ Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$

2.11.* Сколько корней в зависимости от значения a имеет уравнение:

1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

2.12. Вычислите значение выражения:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

2.13. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2} + a^{-3}$; 2) $mn^{-4} + m^{-4}n$; 3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$.

3. Степенная функция с целым показателем

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^n$, где $n \in \mathbb{Z}$, называют **степенной функцией с целым показателем.**

Свойства этой функции для натурального показателя были рассмотрены в предыдущем пункте. Здесь мы рассмотрим случаи, когда показатель n является целым отрицательным числом или нулем.

Областью определения функции $y = x^0$ является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областью значений — одноэлементное множество $\{1\}$. График этой функции изображен на рисунке 3.1.

Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

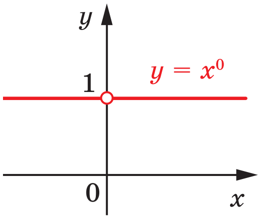


Рис. 3.1

С частным случаем этой функции, когда $n = 1$, то есть с функцией $y = \frac{1}{x}$, вы знакомы из курса алгебры 8 класса.

Запишем функцию $y = x^{-n}$ в виде $y = \frac{1}{x^n}$. Тогда становится понятно, что *областью определения функции* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *является множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, что эта функция нулей не имеет.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^{-n}$, где $n \in \mathbb{N}$, проведем для двух случаев: n — четное натуральное число и n — нечетное натуральное число.

• **Первый случай: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Имеем: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Так как выражение $\frac{1}{x^{2k}}$ принимает только положительные значения, то в область значений рассматриваемой функции не входят отрицательные числа, а также число 0.

Можно показать, что для любого $a > 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-2k} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *четное натуральное число, является множество* $(0; +\infty)$.

Поскольку для любого $x \neq 0$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^{2k}} > 0$, то *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *четное натуральное число*.

Функция $y = x^{-n}$, *где* n — *четное натуральное число, является четной*. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ и $x_1 < x_2$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$. Отсюда $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

Следовательно, *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *четное натуральное число, убывает на промежутке* $(0; +\infty)$.

Можно также показать, что *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *четное натуральное число, возрастает на промежутке* $(-\infty; 0)$.

Заметим, что с увеличением модуля x значения выражения $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, становятся все меньшими и меньшими. Поэтому расстояние от точки графика функции $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до оси абсцисс уменьшается с увеличением модуля абсциссы точки и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Также можно установить, что с увеличением модуля ординаты расстояние от точки графика функции $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — четное натуральное число (рис. 3.2). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^2}$ изображен на рисунке 3.3.

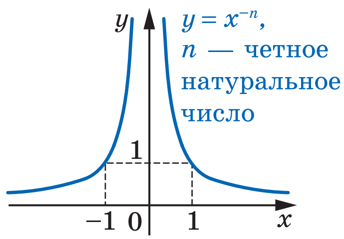


Рис. 3.2

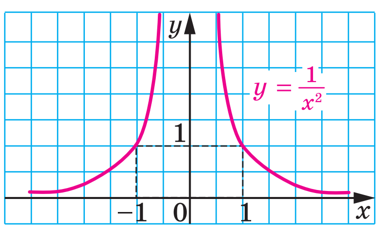


Рис. 3.3

• **Второй случай: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можно показать, что для любого $a \neq 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечетное натуральное число, является множество* $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$.

Если $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; если $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечетное натуральное число*.

Функция $y = x^{-n}$, *где* n — *нечетное натуральное число, является нечетной*. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство

$$(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

Можно показать, что *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечетное натуральное число, убывает на каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — нечетное натуральное число (рис. 3.4). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ изображен на рисунке 3.5.

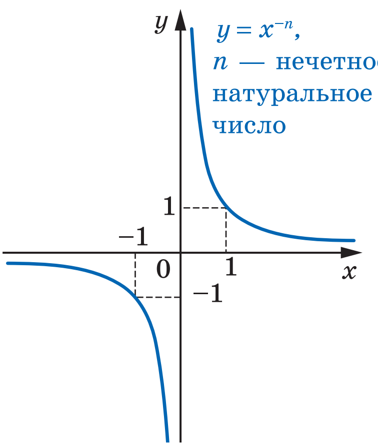


Рис. 3.4

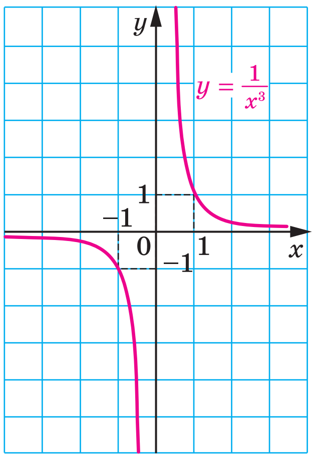


Рис. 3.5

В таблице приведены свойства функции $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, изученные в этом пункте.

Свойство	n — четное натуральное число	n — нечетное натуральное число
Область определения	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нули функции	—	—

Свойство	n — четное натуральное число	n — нечетное натуральное число
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Четность	Четная	Нечетная
Возрастание / убывание	Возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на промежутке $(0; +\infty)$	Убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

1. Какую функцию называют степенной функцией с целым показателем?
2. Какая фигура является графиком функции $y = x^0$?
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Изобразите схематически график функции $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1.° Проходит ли график функции $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

3.2.° Проходит ли график функции $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

3.3.• Дана функция $f(x) = x^{-19}$. Сравните:

1) $f(1,6)$ и $f(2)$;
2) $f(-5,6)$ и $f(-6,5)$;
3) $f(-9,6)$ и $f(9,6)$;
4) $f(0,1)$ и $f(-10)$.

3.4.• Функция задана формулой $f(x) = x^{-40}$. Сравните:

1) $f(6,2)$ и $f(5,5)$;
2) $f(-1,6)$ и $f(-1,7)$;
3) $f(24)$ и $f(-24)$;
4) $f(-8)$ и $f(6)$.

3.5.• Найдите область определения функции:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

3.6.• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^{-6}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1;\ +\infty)$.

3.7.$^{\bullet}$ Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^{-3}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$.

3.8.$^{\bullet\bullet}$ Постройте график функции:

1) $y=(x-2)^0$; 2) $y=(x^2-4x+3)^0$.

3.9.$^{\bullet\bullet}$ Постройте график уравнения:

1) $(y+2)^0=x-2$; 2) $(y-2)^0=(x+1)^0$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

3.10. Найдите значение выражения:

1) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$; 3) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$.

3.11. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 2) $\sqrt{33}$ и 6; 3) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$.

4. Определение корня n-й степени

Вы знаете, что корнем второй степени (квадратным корнем) из числа a называют такое число, вторая степень которого равна a. Аналогично дают определение корня n-й степени из числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

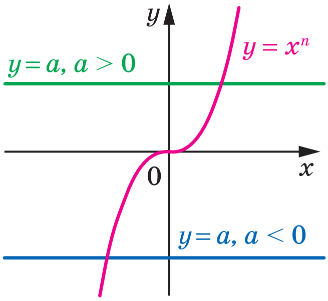
Определение. Корнем n-й степени из числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем пятой степени из числа 32 является число 2, так как $2^5=32$; корнем третьей степени из числа -64 является число -4, так как $(-4)^3=-64$; корнями четвертой степени из числа 81 являются числа 3 и -3, так как $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

Если n — нечетное натуральное число, то графики функций $y=x^n$ и $y=a$ при любом a пересекаются в одной точке (рис. 4.1). Это означает, что уравнение $x^n=a$ имеет единственный корень при любом a. Тогда можно сделать следующий вывод:

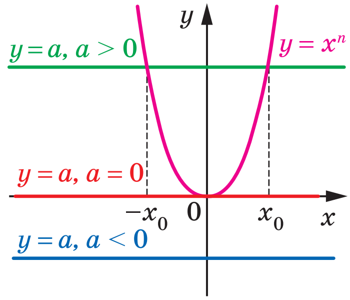
если n — нечетное натуральное число, большее 1, то из любого числа существует корень n-й степени, причем только один.

Корень нечетной степени n, $n>1$, из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$ (читают: «корень n-й степени из a»). Например, $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[3]{-64}=-4$, $\sqrt[7]{0}=0$.



n — нечетное натуральное число, $n > 1$

Рис. 4.1



n — четное натуральное число

Рис. 4.2

Знак $\sqrt[n]{}$ называют **знаком корня n-й степени** или **радикалом**. Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**.

Корень третьей степени принято называть также **кубическим корнем**. Например, запись $\sqrt[3]{2}$ читают: «кубический корень из числа 2».

Подчеркнем, что выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, определено при любом a.

Из определения корня n-й степени следует, что ***при любом a выполняется равенство***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Например, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Рассмотрим уравнение $x^n = a$, где n — четное натуральное число.

Из рисунка 4.2 видно: если $a < 0$, то графики функций $y = x^n$ и $y = a$ не имеют общих точек; если $a = 0$, то рассматриваемые графики имеют одну общую точку; если $a > 0$, то общих точек две, причем их абсциссы — противоположные числа. Тогда можно сделать следующий вывод:

если n — четное натуральное число, то при $a < 0$ корень n-й степени из числа a не существует; при $a = 0$ корень n-й степени из числа a равен 0; при $a > 0$ существуют два противоположных числа, каждое из которых является корнем n-й степени из числа a.

Вы знаете, что арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, вторая степень которого равна a. Аналогично дают определение арифметического корня n-й степени.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3 \geqslant 0$ и $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, поскольку $2 \geqslant 0$ и $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, поскольку $0 \geqslant 0$ и $0^{10} = 0$.

Вообще, **если $b \geqslant 0$ и $b^n = a$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

С помощью знака корня n-й степени можно записывать корни уравнения $x^n = a$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Например, корнем уравнения $x^3 = 7$ является единственное число $\sqrt[3]{7}$; корнями уравнения $x^4 = 5$ являются два числа: $-\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Из определения арифметического корня n-й степени следует, что:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **где** $a \geqslant 0$ (например, $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **где** $a \geqslant 0$ (например, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$);

3) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ (например, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Выше было установлено, что корень нечетной степени из любого числа существует и принимает единственное значение. Поэтому каждому действительному числу x можно поставить в соответствие единственное число y такое, что $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Указанное правило задает функцию $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in \mathbb{N}$, с областью определения $\mathbb{R}$. График этой функции изображен на рисунке 4.3. На рисунке 4.4 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Аналогично определяют функцию $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Областью определения этой функции является промежуток $[0; +\infty)$.

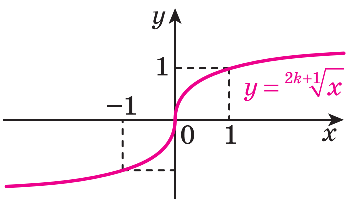


Рис. 4.3

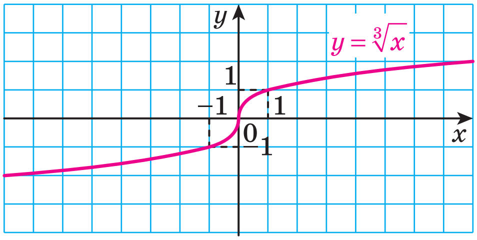


Рис. 4.4

На рисунке 4.5 изображен график функции $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, а на рисунке 4.6 — график функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

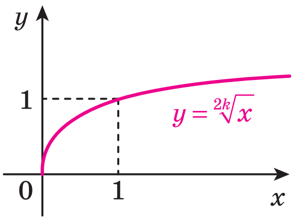


Рис. 4.5

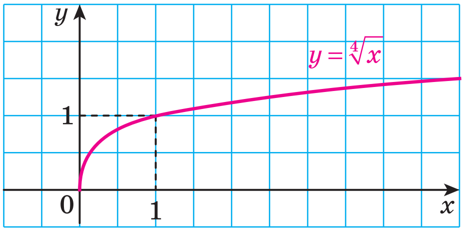


Рис. 4.6

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$.

Свойство	n — нечетное натуральное число, $n > 1$	n — четное натуральное число
Область определения	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Область значений	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$	$y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Четность	Нечетная	Не является ни четной, ни нечетной
Возрастание / убывание	Возрастающая	Возрастающая

Задача. Решите неравенство: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$.

Решение. 1) Данное неравенство перепишем следующим образом: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Поскольку функция $y = \sqrt[3]{x}$ является возрастающей, то можно сделать вывод, что $x < 8$.

Ответ: $(-\infty; 8)$.

2) Имеем: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Поскольку функция $y = \sqrt[4]{t}$ является возрастающей и определена на множестве $[0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $2 \leqslant x < 3$.

Ответ: $[2; 3)$. ◄

1. Что называют корнем n-й степени из числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
3. Что называют арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
4. При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
5. Сформулируйте свойства функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, и изобразите схематически ее график.
6. Сформулируйте свойства функции $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, и изобразите схематически ее график.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1.° Имеет ли смысл запись:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

4.2.° Верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

4.3.° Докажите, что:

1) число 2 является арифметическим кубическим корнем из числа 8;
2) число 3 является арифметическим корнем четвертой степени из числа 81;
3) число -3 не является арифметическим корнем четвертой степени из числа 81.

4.4.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{216}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 3) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$.

4.5.° Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 3) $-\sqrt[5]{-1024}$?

4.6.° Вычислите:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 4) $\left(-2\sqrt[7]{-5}\right)^7$.

4.7.° Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$.

4.8.° Решите уравнение:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;
2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x - 2)^3 = 125$;
3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x + 5)^4 = 10\,000$.

4.9.° Решите уравнение:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;
2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x - 3)^6 = 729$.

4.10.° Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x + 7} = 0$.

4.11.° Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x - 2} = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x - 2} = 2$.

4.12.• Вычислите: $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$.

4.13.• Вычислите: $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$.

4.14.• Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt[3]{x - 1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x + 1}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$.

4.15.• Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt[4]{2 - x}$; 2) $y = \sqrt[9]{\frac{x + 1}{x - 3}}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$.

4.16.• Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

4.17.• Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.18.• Решите неравенство:

1) $\sqrt[5]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x - 3} < 2$; 3) $\sqrt[4]{x + 1} > 1$.

4.19.•• Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

4.20.•• Решите уравнение:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

4.21.•• Решите уравнение $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

4.22.•• Постройте график функции $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$.

4.23.•• Постройте график функции $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

4.24. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{0{,}64\cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2\cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$.

4.25. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^3}$; 3) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

5. Свойства корня n-й степени

Рассмотрим теоремы, выражающие свойства корня n-й степени.

Теорема 5.1 (первая теорема о корне из степени). ***Для любого $a\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства:***

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

Доказательство. Чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x}=y$, достаточно показать, что $y^{2k+1}=x$. Для первого доказываемого равенства $x=a^{2k+1}$ и $y=a$. Отсюда равенство $y^{2k+1}=x$ очевидно.

Чтобы доказать равенство $\sqrt[2k]{x}=y$, достаточно показать, что $y\geqslant 0$ и $y^{2k}=x$. Для второго доказываемого равенства имеем: $|a|\geqslant 0$ и $(|a|)^{2k}=a^{2k}$.

Теорема 5.2 (корень из произведения). ***Если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, то***

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[n]{x}=y$, где $x\geqslant 0$, достаточно показать, что $y\geqslant 0$ и $y^n=x$.

Имеем: $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b}\geqslant 0$. Тогда $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geqslant 0$.

Кроме того, $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$. ◄

Теорема 5.3 (корень из частного). ***Если*** $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Теорема 5.4 (степень корня). ***Если*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доказательство. Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}. \blacktriangleleft$$

Теорема 5.5 (корень из корня). ***Если*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, ***то***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Доказательство. Имеем: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Кроме того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a.$ ◀

Теорема 5.6 (вторая теорема о корне из степени). ***Если*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Доказательство. Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}.$ ◀

Задача 1. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Решение. 1) Воспользовавшись теоремой 5.1, можно записать: $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4} = |-7{,}3| = 7{,}3$.

2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}} = 1{,}2^2 = 1{,}44$.

3) Заменив произведение корней корнем из произведения, получим:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

4) Заменив частное корней корнем из частного, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, если $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$.

Решение. 1) Применив теорему 5.1, получим:

$$\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7|.$$

2) Имеем: $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. Поскольку по условию $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тогда $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$. $\blacktriangleleft$

Задача 3. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$.

Решение. 1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является кубом рационального числа, и вынесем множитель из-под знака корня:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

2) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5\sqrt[8]{b^3}. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Внесите множитель под знак корня:

1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $c\sqrt[10]{c^7}$.

Решение. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Из условия следует, что $c \geqslant 0$.

Тогда $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$. $\blacktriangleleft$

Задача 5. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}$.

Решение. Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}. \blacktriangleleft$$

1. Сформулируйте первую теорему о корне из степени.
2. Сформулируйте теорему о корне из произведения.
3. Сформулируйте теорему о корне из частного.
4. Сформулируйте теорему о степени корня.
5. Сформулируйте теорему о корне из корня.
6. Сформулируйте вторую теорему о корне из степени.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$.

5.2.° Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 3) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

5.3.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054} \cdot \sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30} \cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6 \cdot 7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{-9}$.

5.4.° Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[7]{2^{15} \cdot 5^3} \cdot \sqrt[7]{2^6 \cdot 5^4}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10} \cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8 \cdot 3^4}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$.

5.5.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8 b^{24}}$.

5.6.° Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14} b^7}$.

5.7.• Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[4]{162}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 4) $\sqrt[3]{40a^5}$; 5) $\sqrt[3]{-a^7}$.

5.8.• Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$.

5.9.$^{\bullet}$ Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $5\sqrt[3]{0,04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$; 5) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

5.10.$^{\bullet}$ Внесите множитель под знак корня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

5.11.$^{\bullet}$ Замените выражение $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$ на тождественно равное ему.

5.12.$^{\bullet}$ Упростите выражение $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$.

5.13.$^{\bullet}$ Упростите выражение:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

5.14.$^{\bullet}$ Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

5.15.$^{\bullet}$ Упростите выражение:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

5.16.$^{\bullet}$ Упростите выражение $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

5.17.$^{\bullet}$ При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$;

2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

5.18.$^{\bullet\bullet}$ При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$;

2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

5.19.$^{\bullet\bullet}$ При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

5.20.$^{\bullet\bullet}$ При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

5.21.$^{\bullet\bullet}$ Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m\geqslant 0$; 4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;

2) $\sqrt[4]{n^4}$, если $n\leqslant 0$; 5) $\sqrt{0,25b^{14}}$, если $b\leqslant 0$;

3) $\sqrt[8]{256k^8}$, если $k\leqslant 0$; 6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, если $y\geqslant 0$.

5.22.•• Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$; 3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, если $p \geqslant 0$.

2) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \leqslant 0$;

5.23.•• Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

5.24.•• Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

5.25.•• Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$; 2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$.

5.26.•• Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; 3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$.

5.27.•• Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; 2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$; 3) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

5.28.•• Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, если $a > 0$.

5.29.•• Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, если $a \leqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{-625a^5}$.

5.30.•• Внесите множитель под знак корня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, если $c \leqslant 0$; 2) $b\sqrt[6]{6}$; 3) $a\sqrt[6]{-a}$.

5.31.•• Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[6]{a}$; 2) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

5.32.* Решите уравнение $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

5.33. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

1) $\dfrac{(a^3)^6\cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$; 5) $a^{12}\cdot a^{-20}:a^{-9}$;

2) $a^5\cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3}:a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$.

5.34. Найдите значение выражения:

1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} \cdot 2^{-22}$;

2) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

3) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$;

4) $9^{-4} \cdot 27^{2}$;

5) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{5}$;

6) $\frac{22^{6} \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^{9}}$.

6. Определение и свойства степени с рациональным показателем

В 7 классе вы узнали, что степень с натуральным показателем обладает следующими свойствами:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Позже вы ознакомились с определениями степени с нулевым показателем и степени с отрицательным целым показателем:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Эти определения весьма удачны: при таком подходе все пять свойств степени с натуральным показателем остаются справедливыми и для степени с целым показателем.

Введем понятие степени с дробным показателем, то есть степени a^r, показатель которой является рациональным числом вида $r = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Желательно сделать это так, чтобы степень с дробным показателем обладала всеми свойствами степени с целым показателем. Подсказкой для такого определения может служить следующий пример.

Обозначим через x искомое значение степени $2^{\frac{2}{3}}$, то есть $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая свойство $(a^m)^n = a^{mn}$, можем записать: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Следовательно, x — это кубический корень из числа 2^2, то есть $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким образом, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Эти соображения подсказывают, что целесообразно принять следующее определение.

Определение. Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Например, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Заметим, что значение степени a^r, где r — рациональное число, не зависит от того, в виде какой дроби представлено число r. Это можно показать, используя равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяют только для положительного рационального показателя.

Определение. $\mathbf{0^{\frac{m}{n}} = 0}$**, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Обратим внимание, что, например, запись $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Подчеркнем, что в данных определениях не идет речь о степени $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, например, выражение $(-2)^{\frac{1}{3}}$ остается неопределенным. Вместе с тем выражение $\sqrt[3]{-2}$ имеет смысл. Возникает естественный вопрос: почему бы не считать, что $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажем, что такая договоренность привела бы к противоречию:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Получили, что отрицательное число $\sqrt[3]{-2}$ «равно» положительному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, называют **степенной функцией с рациональным показателем.**

Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, является числом положительным, то областью определения функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ является промежуток $[0; +\infty)$; а если эта дробь — отрицательное число, то промежуток $(0; +\infty)$.

На рисунке 6.1 изображены графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

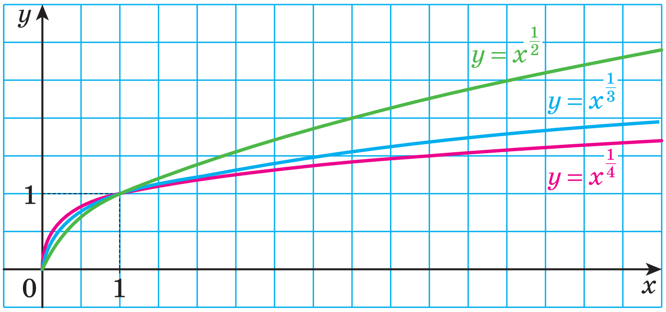


Рис. 6.1

Покажем, что свойства степени с целым показателем остаются справедливыми и для степени с произвольным рациональным показателем.

Теорема 6.1 (произведение степеней). ***Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доказательство. Запишем рациональные числа p и q в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Имеем:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

Следствие. ***Для любого $a > 0$ и любого рационального числа p выполняется равенство***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доказательство. Применяя теорему 6.1, запишем: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Отсюда $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◀

Теорема 6.2 (частное степеней). ***Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доказательство. Применяя теорему 6.1, запишем: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Отсюда $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◀

Теорема 6.3 (степень степени). ***Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доказательство. Пусть $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Имеем:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}. ◀$$

Теорема 6.4 (степень произведения и степень частного). ***Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Задача 1. Упростите выражение

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

Решение. Раскроем скобки, используя правило умножения многочленов и формулу разности квадратов, а затем приведем подобные слагаемые:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$
$$= \underline{3a^{0,6}} - \underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}} + \underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}} - 4b^{0,4} - \underline{a^{0,6}} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. ◀$$

Задача 2. Упростите выражение $\frac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2} - \frac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2} - \frac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Решение. Выполним замену $x^{\frac{1}{3}} = y$. Тогда данное выражение принимает вид $\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}$.

Это выражение легко упростить. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◀

1. Что называют степенью положительного числа a с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Что называют степенью числа 0 с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?
3. Какую функцию называют степенной функцией с рациональным показателем?
4. Сформулируйте свойства степени с рациональным показателем.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1.° Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$.

6.2.° Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$.

6.3.° Представьте выражение в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$.

6.4.° Представьте выражение в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$.

6.5.° Найдите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $32^{-0,2}$.

6.6.° Чему равно значение выражения:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

6.7.° Найдите значение выражения:

1) $3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}$; 3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1{,}2^{4,5}$;

2) $(5^{-0,8})^6 \cdot 5^{4,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 6) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$.

6.8.° Чему равно значение выражения:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 4) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

6.9.° Раскройте скобки:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

4) $(b^{0,4}+3)^2-6b^{0,4}$;

5) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$.

6.10.° Раскройте скобки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

4) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

5) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;

6) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$.

6.11.• Вычислите значение выражения:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot(0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$.

6.12.• Найдите значение выражения:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1,25}\cdot 25^{1,5}\cdot 125^{\frac{2}{3}}$.

6.13.• Сократите дробь:

1) $\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$;

2) $\frac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$;

3) $\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\frac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

5) $\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

6) $\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$.

6.14.• Сократите дробь:

1) $\frac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$;

2) $\frac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$;

3) $\frac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

5) $\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

6) $\frac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$.

6.15.•• Упростите выражение $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$.

6.16.•• Упростите выражение $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$.

6.17.•• Докажите тождество $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$.

6.18.•• Докажите тождество $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

6.19. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x-7}=0$;
2) $\sqrt{4x-1}=6$;
3) $\sqrt{x^2-64}=6$;
4) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$;
5) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;
6) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$.

7. Иррациональные уравнения

При решении уравнений иногда возникает необходимость возвести обе части уравнения в одну и ту же степень. Выясним, как это преобразование влияет на множество корней данного уравнения.

Теорема 7.1. ***Если обе части уравнения возвести в нечетную степень, то получим уравнение, равносильное данному.***

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Решение. Возведем обе части данного уравнения в седьмую степень. Получим равносильное уравнение

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Отсюда $x^2-2=x$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$.

Ответ: -1; 2. ◄

Уравнение, рассмотренное в задаче 1, содержит переменную под знаком корня. Такие уравнения называют **иррациональными**.

Вот еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{x-3}=2;$$

$$\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0;$$
$$\sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

При решении задачи 1 нам пришлось преобразовывать уравнение, содержащее корни нечетной степени. Рассмотрим уравнения, содержащие корни четной степени.

Задача 2. Решите уравнение $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Решение. Применяя формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, заменим данное уравнение таким:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (2)$$

Отсюда $x = -3$.

Однако проверка показывает, что число -3 не является корнем исходного уравнения. Говорят, что число -3 является **посторонним корнем** уравнения (1).

Следовательно, уравнение (1) не имеет корней.

Ответ: корней нет. ◄

Причина появления постороннего корня при решении задачи 2 заключается в том, что, применив формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, мы не учли ограничение $a \geqslant 0$. Поэтому уравнение (2) оказалось не равносильным уравнению (1).

Определение. Если множество корней уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ содержит множество корней уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называют следствием уравнения $f_1(x) = g_1(x)$.

Например, уравнение $x^2 = 25$ является следствием уравнения $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Также говорят, что из уравнения $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **следует** уравнение $x^2 = 25$.

На рисунке 7.1 определение уравнения-следствия проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера.

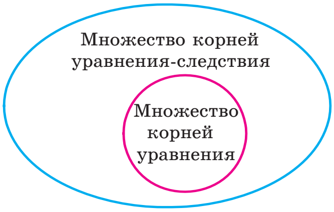


Рис. 7.1

Еще одной причиной появления посторонних корней является то, что из равенства $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обязательно следует равенство $x_1 = x_2$. Например, $(-2)^4 = 2^4$, но $-2 \neq 2$. В то же время из равенства $x_1 = x_2$ следует равенство $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2. ***При возведении обеих частей уравнения в четную степень полученное уравнение является следствием данного.***

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{4+3x}=x.$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение, которое является следствием данного:

$$4+3x=x^2.$$

Отсюда $x^2-3x-4=0$; $x_1=-1$, $x_2=4$.

Проверка показывает, что число -1 — посторонний корень, а число 4 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 4. ◀

Задача 4. Решите уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$

Решение. Возведем обе части данного уравнения в квадрат:

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{4x+1}+4x+1=16.$$

Отсюда $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{4x+1}=9-3x.$

Переходя к уравнению-следствию, получаем:

$$8x^2-10x-3=81-54x+9x^2;$$

$$x^2-44x+84=0;\quad x_1=42,\ x_2=2.$$

Проверка показывает, что число 42 является посторонним корнем, а число 2 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 2. ◀

Задача 5. Решите уравнение $\sqrt{x^3+1}+2\sqrt[4]{x^3+1}-3=0.$

Решение. Пусть $\sqrt[4]{x^3+1}=t$. Тогда $\sqrt{x^3+1}=t^2$. Теперь исходное уравнение принимает вид

$$t^2+2t-3=0.$$

Отсюда $t=-3$ или $t=1$.

В случае, когда $t=-3$, получаем уравнение $\sqrt[4]{x^3+1}=-3$, не имеющее решений.

В случае, когда $t=1$, получаем уравнение $\sqrt[4]{x^3+1}=1$.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: 0. ◀

Напомним, что с методом, использованным при решении последнего уравнения, вы знакомы еще из курса алгебры 8–9 классов. Этот метод называют *методом замены переменной*.

1. Какое уравнение называют иррациональным?
2. Обе части уравнения возвели в нечетную степень. Обязательно ли исходное и полученное уравнения будут равносильными?
3. Обе части уравнения возвели в четную степень. Обязательно ли исходное и полученное уравнения будут равносильными?
4. Как можно выявить посторонние корни уравнения?

УПРАЖНЕНИЯ

7.1.° Объясните, почему не имеет корней уравнение:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$.

7.2.° Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$.

7.3.° Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x-3}=4$;
2) $\sqrt[3]{8x^3-x-15}=2x$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

7.4.• Решите уравнение:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

7.5.• Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$.

7.6.• Решите уравнение:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$.

7.7.• Решите уравнение:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
4) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

7.8.• Решите уравнение:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$.

7.9.• Решите уравнение $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$.

7.10.$^{\bullet}$ Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;
3) $2x-7\sqrt{x}-15=0$;
4) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;
6) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8$.

7.11.$^{\bullet}$ Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;
2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;
3) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;
4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

7.12.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

7.13.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$;
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$.

7.14.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;
2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$.

7.15.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;
3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$;
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$.

7.16.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;
2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3$.

7.17.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;
3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;
4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$.

7.18.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;
2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2$;
3) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123$.

7.19.* Решите уравнение $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6.$

7.20.* Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6.$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

7.21. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, \text{ если } x<1,\\ x-1, \quad \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$ Пользуясь построенным графиком, определите промежутки возрастания и убывания данной функции.

7.22. Задайте формулой линейную функцию f, если $f(-2)=5$, $f(2)=-3$.

ЛЬВОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Вы изучаете раздел «Алгебра и начала анализа». В названии появилось новое словосочетание — «начала анализа». Что же скрывается за этим названием? Ответ очень прост — математический анализ изучает функции. С этого года вы начинаете знакомство с элементами анализа: вам придется рассматривать все новые и новые классы функций, изучать их свойства, овладевать методами исследования функций.

В первой половине XX века изучение некоторых классов функций привело к появлению новой математической дисциплины — функционального анализа. Важную, фактически главную, роль в создании этой дисциплины сыграли ученые Львовской математической школы.

В 20–30 гг. XX века город Львов был настоящей математической столицей мира. В то время в его учреждениях работали такие легендарные математики, как Казимир Куратовский, Станислав Мазур, Владислав Орлич, Вацлав Серпинский, Станислав Улам, Юлий Шаудер, Гуго Штейнгауз и многие другие. Квалификация ученых Львова была столь высока, что всемирно известный математик, автор важнейших теорем математической логики и теории множеств Альфред Тарский не прошел по конкурсу на вакантную должность профессора Львовского университета.

Математики Львова создали сильный научный коллектив, известный как Львовская математическая школа. Ее руководителем считают гениального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Учебник Банаха «Курс функционального анализа»

Вручение гуся

Сегодня С. Банаха во всем мире по праву считают основателем функционального анализа. Один из первых в мире учебников по этой дисциплине написал именно С. Банах. Многие результаты Банаха и введенные им понятия стали классическими. Например, исследованные им множества получили название «банаховы пространства» и сейчас включены в необходимый минимум знаний всех, кто обучается в высшем учебном заведении по специальности математика, физика, кибернетика и т. п.

Рассказывают, что многие теоремы львовские математики доказали... в кофейне. С. Банах с учениками облюбовали «Шотландскую кофейню», где на столиках было мраморное покрытие — очень удобное для записи математических формул и теорем. Хозяин кофейни был недоволен таким своеволием ученых, но ситуацию спасла жена Банаха, купив большую тетрадь для записей. Так появилась знаменитая «Шотландская книга» — сборник математических проблем, над которыми работала группа С. Банаха. В качестве награды за решение сложных задач авторы с юмором предлагали то кружки пива, то ужин в ресторане. Например, одна из проблем, за которую автор пообещал живого гуся (1936 г.), была решена лишь в 1972 году, тогда же и была вручена награда.

Проблемы, поставленные в «Шотландской книге», настолько важны и сложны, что каждый, кому удается решить хотя бы одну из них, сразу получает мировое признание. Сама же «Шотландская книга» является одной из известнейших и ценнейших реликвий мировой науки.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

Наименьшее и наибольшее значения функции

Если для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$, где $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве M и записывают: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Если для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$, где $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве M и записывают: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Четная и нечетная функции

Функцию f называют четной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функцию f называют нечетной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Ось ординат является осью симметрии графика четной функции.

Начало координат является центром симметрии графика нечетной функции.

Корень n-й степени

Корнем n-й степени из числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для любого a и $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Для любого $a \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Если $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Если $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Степень с рациональным показателем

Степенью положительного числа a с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, называют степенной функцией с рациональным показателем.

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняются равенства: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

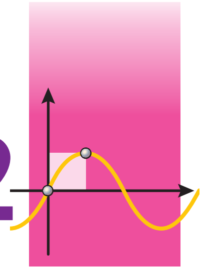
Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называют иррациональными.

Если обе части уравнения возвести в нечетную степень, то получим уравнение, равносильное данному.

При возведении обеих частей уравнения в четную степень полученное уравнение является следствием данного.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ §2



Изучая материал этого параграфа, вы расширите свои знания о тригонометрических функциях и их свойствах, узнаете, что такое радианная мера угла, какие функции называют периодическими.

Ознакомитесь с формулами, связывающими различные тригонометрические функции, научитесь применять их для выполнения вычислений, упрощения выражений, доказательства тождеств.

Узнаете, какие уравнения называют простейшими тригонометрическими уравнениями; ознакомитесь с формулами корней простейших тригонометрических уравнений.

8. Радианная мера углов

До сих пор для измерения углов вы использовали градусы или части градуса — минуты и секунды.

Во многих случаях удобно пользоваться другой единицей измерения углов. Ее называют **радианом**.

Определение. Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 8.1 изображен центральный угол AOB, опирающийся на дугу AB, длина которой равна радиусу окружности. Величина угла AOB равна одному радиану. Записывают: $\angle AOB = 1$ рад. Также говорят, что радианная мера дуги AB равна одному радиану. Записывают: $\cup AB = 1$ рад.

Радианная мера угла (дуги) не зависит от радиуса окружности. Это утверждение проиллюстрировано на рисунке 8.2.

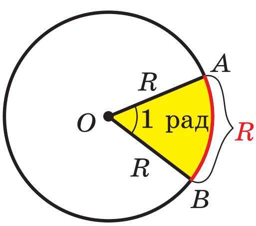


Рис. 8.1

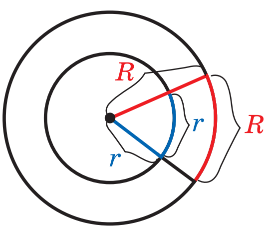


Рис. 8.2

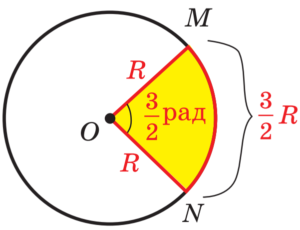


Рис. 8.3

На рисунке 8.3 изображены окружность радиуса R и дуга MN, длина которой равна $\frac{3}{2}R$. Тогда радианная мера угла MON (дуги MN) равна $\frac{3}{2}$ рад. Вообще, если центральный угол окружности радиуса R опирается на дугу, длина которой равна αR, то говорят, что **радианная мера** этого центрального угла равна α рад.

Длина полуокружности равна πR. Следовательно, радианная мера полуокружности равна π рад. Градусная мера полуокружности составляет $180°$. Сказанное позволяет установить связь между радианной и градусной мерами, а именно:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \tag{1}$$

Отсюда

$$\boxed{\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Разделив 180 на 3,14 (напомним, что $\pi \approx 3{,}14$), можно установить: 1 рад $\approx 57°$.

Если обе части равенства (1) разделить на 180, то получим:

$$\boxed{\mathbf{1°} = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\ \mathbf{рад}} \tag{2}$$

Из этого равенства легко установить, что, например,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Обычно при записи радианной меры угла обозначение «рад» опускают. Например, записывают: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

В таблице приведены градусные и радианные меры часто встречающихся углов:

Градусная мера угла	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Используя радианную меру угла, можно получить удобную формулу для вычисления длины дуги окружности.

Поскольку центральный угол в 1 рад опирается на дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад опирается на дугу, длина которой равна αR. Если длину дуги, содержащей α рад, обозначить через l, то можно записать:

$$\boxed{\boldsymbol{l = \alpha R}}$$

На координатной плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность называют **единичной.**

Пусть точка P, начиная движение от точки $P_0\,(1;\ 0)$, перемещается по единичной окружности против часовой стрелки. В некоторый момент времени она займет положение, при котором $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.4). Будем говорить, что **точка *P* получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат** на угол $\frac{2\pi}{3}$ (на угол 120°).

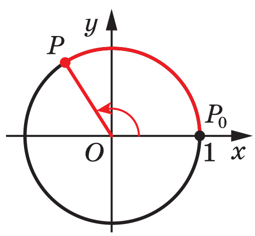


Рис. 8.4

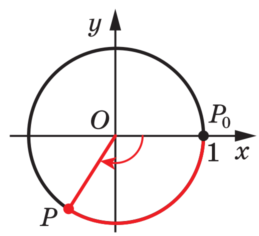


Рис. 8.5

Пусть теперь точка P переместилась по единичной окружности по часовой стрелке и заняла положение, при котором $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.5). Будем говорить, что точка P получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $-\frac{2\pi}{3}$ (на угол −120°).

Вообще, когда рассматривают движение точки по окружности против часовой стрелки (рис. 8.4), то угол поворота считают положительным, а когда по часовой стрелке (рис. 8.5) — то отрицательным.

Рассмотрим еще несколько примеров. Обратимся к рисунку 8.6. Можно сказать, что точка A получена в результате поворота точки P_0

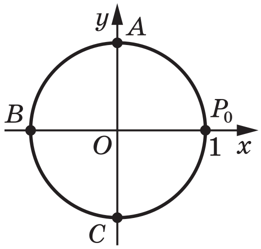


Рис. 8.6

вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ (на угол 90°) или на угол $-\frac{3\pi}{2}$ (на угол −270°). Точка B получена в результате поворота точки P_0 на угол π (на угол 180°) или на угол $-\pi$ (на угол −180°). Точка C получена в результате поворота точки P_0 на угол $\frac{3\pi}{2}$ (на угол 270°) или на угол $-\frac{\pi}{2}$ (на угол −90°).

Если точка P, двигаясь по единичной окружности, сделает один полный оборот, то можно сказать, что угол поворота равен 2π (то есть 360°) или -2π (то есть −360°).

Если точка P сделает полтора оборота против часовой стрелки, то естественно считать, что угол поворота равен 3π (то есть 540°), если по часовой стрелке — то -3π (то есть −540°).

Величина угла поворота как в радианах, так и в градусах может выражаться любым действительным числом.

Угол поворота однозначно определяет положение точки P на единичной окружности. Однако любому положению точки P на окружности соответствует бесконечно много углов поворота. Например, точке P (рис. 8.7) соответствуют такие углы поворота: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ и т. д., а также $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ и т. д. Заметим, что все эти углы можно получить с помощью формулы

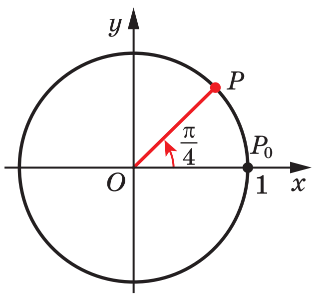


Рис. 8.7

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

?

1. Что называют углом в один радиан?
2. Какова радианная мера угла, равного 1°?
3. Чему равна длина дуги окружности радиуса R, содержащей α рад?

УПРАЖНЕНИЯ

8.1.° Найдите радианную меру угла, равного:

1) $25°$; 2) $40°$; 3) $100°$; 4) $160°$; 5) $210°$; 6) $300°$.

8.2.° Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

8.3.° Заполните таблицу:

Градусная мера угла		$12°$	$36°$			$105°$	$225°$			$240°$
Радианная мера угла	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

8.4.° Чему равна длина дуги окружности, радиус которой равен 12 см, если радианная мера дуги составляет:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

8.5.° Вычислите длину дуги окружности, если известны ее радианная мера α и радиус R окружности:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

8.6.° Отметьте на единичной окружности точку, которая получается в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $150°$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) $-45°$; 5) $-120°$; 6) $-450°$.

8.7.° Отметьте на единичной окружности точку, которая получается в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $-60°$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $320°$; 4) $420°$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$.

8.8.° В какой координатной четверти находится точка единичной окружности, полученная в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $127°$; 4) $400°$; 7) $-470°$; 10) $2{,}4\pi$;

2) $89°$; 5) $600°$; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;

3) $276°$; 6) $-400°$; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) -2?

8.9.° В какой координатной четверти находится точка единичной окружности, полученная в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $94°$; 4) $-100°$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$;

2) $176°$; 5) $-380°$; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 11) 1;

3) $200°$; 6) $700°$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 12) -3?

8.10.° Найдите координаты точки единичной окружности, полученной в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) $-90°$; 4) $-180°$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π.

8.11.° Какие координаты имеет точка единичной окружности, полученная в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$?

8.12.• Укажите наименьший положительный и наибольший отрицательный углы, на которые надо повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $(0;\ 1)$; 2) $(-1;\ 0)$.

8.13.• Укажите наименьший положительный и наибольший отрицательный углы, на которые надо повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $(0;\ -1)$; 2) $(1;\ 0)$.

8.14.•• Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

1) $P_1(0;\ 1)$; 2) $P_2(-1;\ 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

8.15.•• Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

1) $P_1(0;\ -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.16.•• Найдите координаты точек единичной окружности, полученных в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на углы:

1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) $\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

8.17.•• Найдите координаты точек единичной окружности, полученных в результате поворота точки P_0 (1; 0) на углы:

1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

8.18.•• Докажите, что площадь сектора, содержащего дугу в α рад, можно вычислить по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, где R — радиус окружности.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

8.19. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}$; 2) $\frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$.

8.20. В некотором городе 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

9. Тригонометрические функции числового аргумента

В 9 классе, вводя определения тригонометрических функций углов от 0° до 180°, мы пользовались единичной полуокружностью. Обобщим эти определения для произвольного угла поворота α.

Рассмотрим единичную окружность (рис. 9.1).

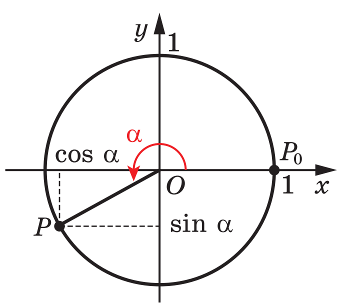


Рис. 9.1

Определение. Косинусом и синусом угла поворота α называют соответственно абсциссу x и ординату y точки P (x; y) единичной окружности, полученной в результате поворота точки P_0 (1; 0) вокруг начала координат на угол α (рис. 9.1).

Записывают: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

Точки P_0, A, B и C (рис. 9.2) имеют соответственно координаты (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Эти точки получены в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ соответственно на углы 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Теперь, пользуясь данным определением, можно составить следующую таблицу[1]:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

Задача 1. Найдите все углы поворота α, при которых: 1) $\sin \alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = 0$.

Решение. 1) Ординату, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: P_0 и B (рис. 9.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots \text{ и}$$
$$-\pi,\ -2\pi, -3\pi,\ -4\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно записать с помощью формулы $\alpha = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\sin \alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсциссу, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: A и C (рис. 9.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \ldots \text{ и}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \frac{\pi}{2}-4\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно записать с помощью формулы $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\cos \alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. ◄

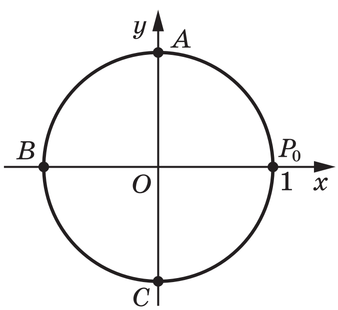


Рис. 9.2

[1] На форзаце 3 приведена таблица значений тригонометрических функций некоторых углов.

Определение. **Тангенсом угла поворота α называют отношение синуса этого угла к его косинусу:**

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Например, $\operatorname{tg}\pi = \dfrac{\sin\pi}{\cos\pi} = \dfrac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

Из определения тангенса следует, что тангенс определен для тех углов поворота α, для которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Вы знаете, что каждому углу поворота α соответствует *единственная* точка единичной окружности. Следовательно, каждому значению угла α соответствует единственное число, являющееся значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$) угла α. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса) от величины угла поворота является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ и $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла поворота α.

Каждому действительному числу α поставим в соответствие угол α рад. Это позволяет рассматривать тригонометрические функции числового аргумента.

Например, запись «$\sin 2$» означает «синус угла в 2 радиана».

Из определений синуса и косинуса следует, что областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\mathbb{R}$.

Поскольку абсциссы и ординаты точек единичной окружности принимают все значения от -1 до 1 включительно, то областью значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является промежуток $[-1; 1]$.

Углам поворота α и $\alpha + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, соответствует одна и та же точка единичной окружности, поэтому

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos\alpha &= \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\mathbb{R}$.

Можно доказать, что справедлива следующая формула:

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}}$$

Задача 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1 - 4\cos\alpha$.

Решение. Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения равно -3; выражение принимает его при $\cos\alpha = 1$. Наибольшее значение данного выражения равно 5; выражение принимает его при $\cos\alpha = -1$. ◄

?

1. Что называют косинусом угла поворота? синусом угла поворота? тангенсом угла поворота?
2. Какова область определения функции $y = \sin x$? $y = \cos x$?
3. Какова область значений функции $y = \sin x$? $y = \cos x$?
4. Чему равен $\sin(\alpha + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$?
5. Какова область определения функции $y = \mathrm{tg}\, x$?
6. Какова область значений функции $y = \mathrm{tg}\, x$?
7. Чему равен $\mathrm{tg}(\alpha + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$?

УПРАЖНЕНИЯ

9.1.° Вычислите значение выражения:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0 + \mathrm{tg}\,\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

9.2.° Чему равно значение выражения:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\,\mathrm{tg}^2\, 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

9.3.° Возможно ли равенство:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
2) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$?

9.4.° Может ли быть равным числу $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ значение:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$?

9.5.• Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3 \sin \alpha$; 2) $4 + 2 \cos \alpha$; 3) $2 - \sin \alpha$; 4) $\sin^2 \alpha$.

9.6.• Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $-5 \cos \alpha$; 2) $3 \cos \alpha - 2$; 3) $5 + \sin^2 \alpha$.

9.7.• Укажите какие-нибудь три значения x, при которых выполняется равенство:

1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

9.8.• Укажите какие-нибудь три значения x, при которых выполняется равенство:

1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

9.9.•• Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:

1) $\sin x = 1$;
2) $\sin x = -1$.

9.10.•• Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.11.•• Пользуясь рисунком 9.3, докажите, что $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9.12.•• Докажите, что

$$\sin \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

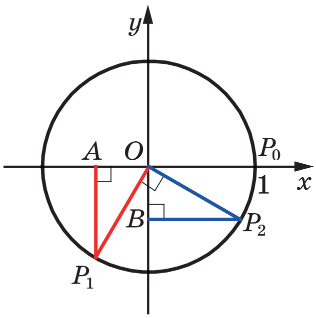


Рис. 9.3

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

9.13. Сравните с нулем координаты точки $A\ (x;\ y)$, если эта точка лежит:

1) в I координатной четверти;
2) во II координатной четверти;
3) в III координатной четверти;
4) в IV координатной четверти.

9.14. Четной или нечетной является функция:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

10. Знаки значений тригонометрических функций. Четность и нечетность тригонометрических функций

Пусть точка P получена в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол α. Если точка P принадлежит I координатной четверти, то говорят, что α **является углом I четверти**. Аналогично можно говорить об углах II, III и IV четвертей.

Например, $\frac{\pi}{7}$ и $-300°$ — углы I четверти, $\frac{2\pi}{3}$ и $-185°$ — углы II четверти, $\frac{5\pi}{4}$ и $-96°$ — углы III четверти, $355°$ и $-\frac{\pi}{8}$ — углы IV четверти.

Углы вида $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не относят ни к какой четверти.

Точки, расположенные в I четверти, имеют положительные абсциссу и ординату. Следовательно, если α — угол I четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

Если α — угол II четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α — угол III четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α — угол IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

Знаки значений синуса и косинуса схематически показаны на рисунке 10.1.

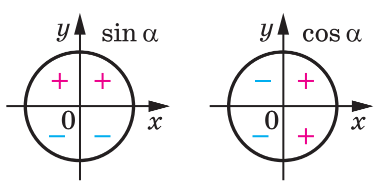


Рис. 10.1

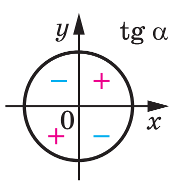


Рис. 10.2

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то тангенсы углов I и III четвертей являются положительными, а углов II и IV четвертей — отрицательными (рис. 10.2).

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 10.3).

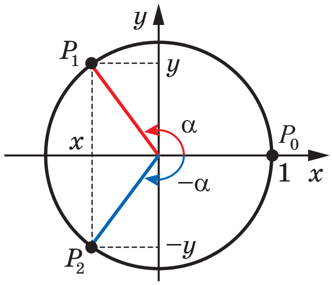


Рис. 10.3

Для любого угла α точки P_1 и P_2 имеют равные абсциссы и противоположные ординаты. Тогда из определений синуса и косинуса следует, что для любого действительного числа α

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{gathered}}$$

Это означает, что ***функция косинус является четной, а функция синус — нечетной.***

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ симметрична относительно начала координат (проверьте это самостоятельно). Кроме того:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, ***функция тангенс является нечетной.***

Задача 1. Какой знак имеет: 1) $\sin 280°$; 2) $\operatorname{tg}(-140°)$?

Решение. 1) Поскольку угол 280° является углом IV четверти, то $\sin 280° < 0$.

2) Поскольку угол −140° является углом III четверти, то $\operatorname{tg}(-140°) > 0$. ◄

Задача 2. Сравните $\sin 200°$ и $\sin(-200°)$.

Решение. Поскольку угол 200° — угол III четверти, угол −200° — угол II четверти, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Следовательно, $\sin 200° < \sin(-200°)$. ◄

Задача 3. Исследуйте на четность функцию: 1) $f(x) = \frac{1+\cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$.

Решение. 1) Область определения данной функции, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симметрична относительно начала координат.

Имеем:

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 + \cos x}{x^2} = f(x).$$

Следовательно, рассматриваемая функция является четной.

2) Область определения данной функции, $D(f) = (-\infty; +\infty)$, симметрична относительно начала координат. Запишем:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Поскольку ни одно из равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не выполняется для всех x из области определения, то рассматриваемая функция не является ни четной, ни нечетной. ◄

1. Когда говорят, что угол α является углом I четверти? II четверти? III четверти? IV четверти?
2. Какие знаки имеют синус, косинус и тангенс в каждой из координатных четвертей?
3. Какие из тригонометрических функций являются четными, а какие — нечетными? Запишите соответствующие равенства.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1.° Углом какой координатной четверти является угол:

1) $38°$; 2) $196°$; 3) $-74°$; 4) $\frac{3\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{2\pi}{3}$?

10.2.° Положительным или отрицательным числом является значение тригонометрической функции:

1) $\sin 110°$; 2) $\cos 200°$; 3) $\sin(-280°)$; 4) $\operatorname{tg}(-75°)$; 5) $\cos 2$; 6) $\operatorname{tg} 1$?

10.3.° Сравните с нулем:

1) $\operatorname{tg} 104°$; 3) $\sin(-36°)$; 5) $\operatorname{tg}(-291°)$;

2) $\cos 220°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$.

10.4.° Найдите значение выражения:

1) $\sin(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-60°)$; 3) $\cos(-45°)$.

10.5.° Чему равно значение выражения $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$?

10.6.° Найдите значение выражения $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$.

10.7.° Найдите значение выражения $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$.

10.8.• Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$?

10.9.• Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

10.10.• Известно, что $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$.

10.11.• Сравните:

1) $\operatorname{tg} 130°$ и $\operatorname{tg}(-130°)$; 2) $\cos 80°$ и $\sin 330°$; 3) $\operatorname{tg} 6$ и $\operatorname{tg} 6°$.

10.12.•• Известно, что α — угол III четверти. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

10.13.•• Известно, что β — угол IV четверти. Упростите выражение:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{tg}\beta| + \operatorname{tg}\beta$.

10.14.•• Исследуйте на четность функцию:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$.

10.15.•• Исследуйте на четность функцию:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; 2) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$; 3) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

10.16. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}$; 2) $\sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x$.

11. Свойства и графики тригонометрических функций

Вы знаете, что для любого числа x выполняются равенства

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Это указывает на то, что значения функций синус и косинус периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются примерами **периодических функций**.

Определение. **Функцию f называют *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f выполняются равенства**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называют *периодом* функции f.

Вы знаете, что для любого x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ выполняются равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Тогда из определения периодической функции следует, что тангенс является периодической функцией с периодом π.

Можно показать, что *если функция f имеет период T, то любое из чисел $2T$, $3T$, ..., а также любое из чисел $-T$, $-2T$, $-3T$, ... также является ее периодом.*

Из этого свойства следует, что каждая периодическая функция имеет бесконечно много периодов.

Например, любое число вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, является периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$; а любое число вида πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, является периодом функции $y = \operatorname{tg} x$.

Если среди всех периодов функции f существует наименьший положительный период, то его называют **главным периодом** функции f.

Теорема 11.1. ***Главным периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является число 2π; главным периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ — число π.***

Задача 1. Найдите значение выражения:

1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Решение

1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360 \cdot 2) =$

$$= \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1$. ◄

На рисунке 11.1 изображен график некоторой периодической функции f с периодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

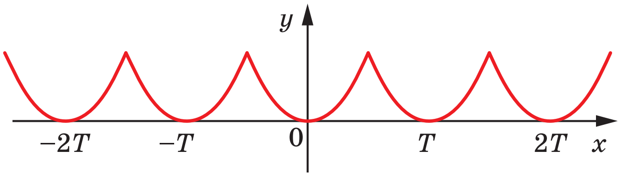


Рис. 11.1

Фрагменты графика этой функции на промежутках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ и т. д., а также на промежутках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ и т. д. являются равными фигурами, причем любую из этих фигур можно получить из любой другой параллельным переносом на вектор с координатами $(nT; 0)$, где n — некоторое целое число.

Задача 2. На рисунке 11.2 изображен фрагмент графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

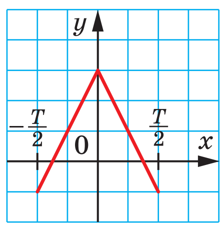


Рис. 11.2

Решение. Построим образы изображенной фигуры, полученные в результате параллельного переноса на векторы с координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ и $(-T; 0)$. Объединение данной фигуры и полученных образов — искомый график (рис. 11.3). ◄

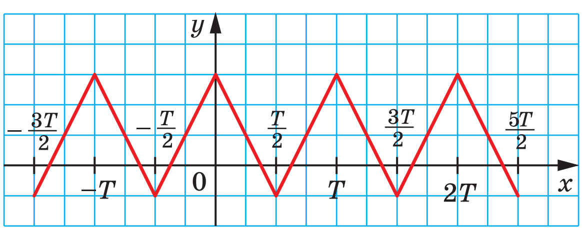


Рис. 11.3

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$, то есть на промежутке длиной в период этой функции.

При повороте точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на углы от 0 до $\frac{\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (рис. 11.4). Это означает, что функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

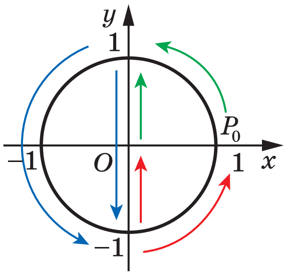


Рис. 11.4

При повороте точки $P_0(1; 0)$ на углы от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с меньшей ординатой (рис. 11.4). Следовательно, функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороте точки $P_0(1; 0)$ на углы от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (рис. 11.4). Следовательно, функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ имеет три нуля: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Если $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; если $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ достигает наибольшего значения, равного 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ и наименьшего значения, равного -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$.

Полученные свойства функции $y = \sin x$ позволяют построить ее график на промежутке $[0; 2\pi]$ (рис. 11.5). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, приведенной на форзаце 3.

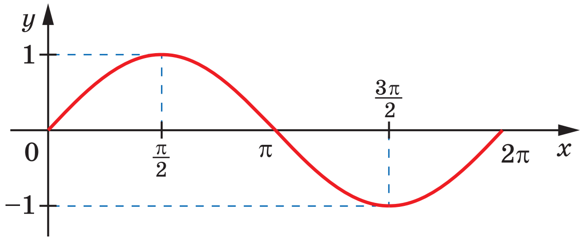


Рис. 11.5

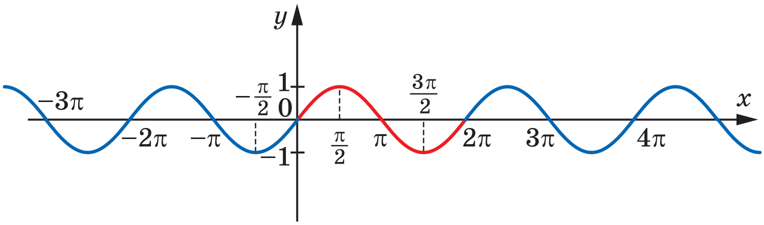


Рис. 11.6

На всей области определения график функции $y = \sin x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 11.6).

График функции $y = \sin x$ называют **синусоидой**.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Если воспользоваться формулой $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (см. упражнение 9.11), то становится понятно, что график функции $y = \cos x$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = \sin x$ на вектор с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 11.7). Это означает, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — равные фигуры.

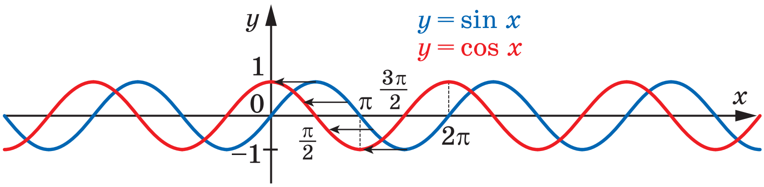


Рис. 11.7

График функции $y = \cos x$ называют **косинусоидой** (рис. 11.8).

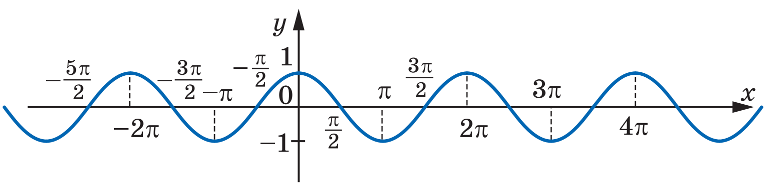


Рис. 11.8

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть на промежутке длиной в период этой функции (напомним, что функция $y = \operatorname{tg} x$ в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не определена).

Можно показать, что при изменении угла поворота от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значения тангенса увеличиваются. Это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет один нуль: $x = 0$.

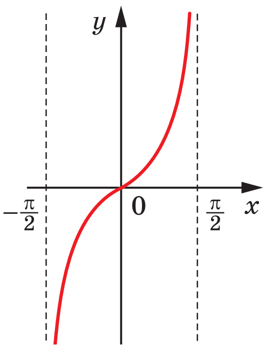


Рис. 11.9

Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

Полученные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ позволяют построить ее график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 11.9). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых аргументов, приведенной на форзаце 3.

На всей области определения график функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 11.10).

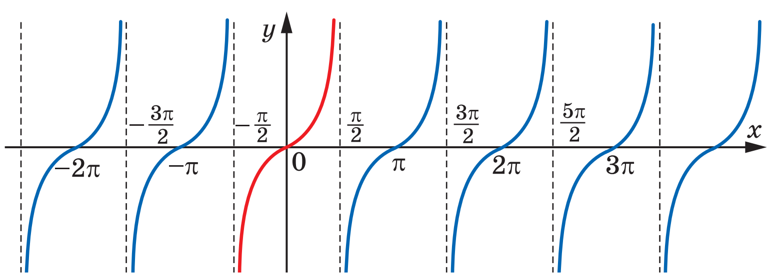


Рис. 11.10

В таблице приведены основные свойства тригонометрических функций.

Свойство	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
Область значений	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$\mathbb{R}$
Главный период	2π	2π	π
Нули функции	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn
Функция принимает положительные значения на промежутках	$(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Функция принимает отрицательные значения на промежутках	$(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$
Четность	Нечетная	Четная	Нечетная
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$	—
Наибольшее значение	1	1	—
Наименьшее значение	−1	−1	—

Задача 3. Сравните: 1) $\sin 0{,}7\pi$ и $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324^\circ$ и $\cos 340^\circ$.

Решение. 1) Поскольку числа $0{,}7\pi$ и $0{,}71\pi$ принадлежат промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \sin x$ убывает, и $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Поскольку углы 324° и 340° принадлежат промежутку $[180^\circ; 360^\circ]$, на котором функция $y = \cos x$ возрастает, и $324^\circ < 340^\circ$, то $\cos 324^\circ < \cos 340^\circ$. ◄

1. Какую функцию называют периодической?
2. Какое число называют главным периодом функции?
3. Изобразите схематически график и сформулируйте основные свойства функции $y = \sin x$.
4. Изобразите схематически график и сформулируйте основные свойства функции $y = \cos x$.
5. Изобразите схематически график и сформулируйте основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1.° Найдите значение выражения:

1) $\sin 390^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 780^\circ$;
3) $\sin(-390^\circ)$;
4) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$;
5) $\cos 300^\circ$;
6) $\sin \frac{5\pi}{3}$.

11.2.° Найдите значение выражения:

1) $\sin 420^\circ$;
2) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$;
3) $\sin 1110^\circ$;
4) $\cos \frac{7\pi}{3}$.

11.3.° Принадлежит ли графику функции $y = \cos x$ точка:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C(-4\pi; -1)$?

11.4.° Проходит ли график функции $y = \operatorname{tg} x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C(\pi; 0)$?

11.5.° Проходит ли график функции $y = \sin x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\ (\pi; -1)$; 3) $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

11.6.° Среди чисел -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 6π, 7π укажите:

1) нули функции $y = \sin x$;
2) значения аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает наибольшее значение;
3) значения аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает наименьшее значение.

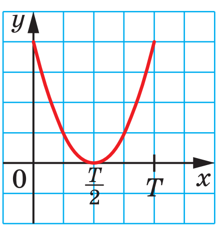
11.7.° Среди чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π укажите:

1) нули функции $y = \cos x$;
2) значения аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает наибольшее значение;
3) значения аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает наименьшее значение.

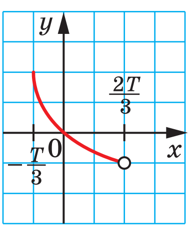
11.8.° Какие из чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) являются нулями функции $y = \operatorname{tg} x$;
2) не принадлежат области определения функции $y = \operatorname{tg} x$?

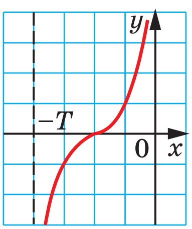
11.9.• На рисунке 11.11 изображена часть графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $[-2T; 3T]$.



а



б



в

Рис. 11.11

11.10.° На рисунке 11.12 изображена часть графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $[-2T;\ 2T]$.

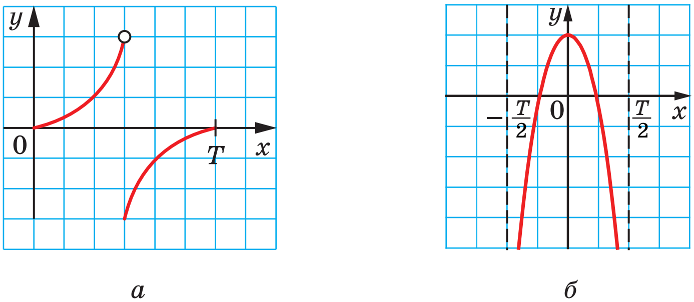


Рис. 11.12

11.11.° На каких из указанных промежутков функция $y = \sin x$ возрастает:

1) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2}\right]$?

11.12.° На каких из указанных промежутков функция $y = \sin x$ убывает:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi;\ 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$?

11.13.° Какие из данных промежутков являются промежутками убывания функции $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi;\ 7\pi]$?

11.14.° Какие из данных промежутков являются промежутками возрастания функции $y = \cos x$:

1) $[-3\pi;\ -2\pi]$; 2) $[0;\ \pi]$; 3) $[-\pi;\ \pi]$; 4) $[3\pi;\ 4\pi]$?

11.15.° Сравните:

1) $\sin 20°$ и $\sin 21°$;
2) $\cos 20°$ и $\cos 21°$;
3) $\sin\frac{10\pi}{9}$ и $\sin\frac{25\pi}{18}$;
4) $\operatorname{tg}(-38°)$ и $\operatorname{tg}(-42°)$.

11.16.° Сравните:

1) $\cos\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{5\pi}{9}$ и $\sin\frac{17\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg} 100°$ и $\operatorname{tg} 92°$.

11.17.•• Докажите, что число T является периодом функции f:

1) $f(x)=\cos\dfrac{x}{4},\ T=8\pi$; 2) $f(x)=\operatorname{tg} 3x,\ T=-\dfrac{2\pi}{3}$.

11.18.•• Докажите, что числа $\dfrac{2\pi}{3}$ и -4π являются периодами функции $f(x)=\cos 3x$.

11.19.* Сравните:

1) $\sin 58°$ и $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ и $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ и $\sin 70°$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

11.20. Найдите нули функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$; 3) $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

11.21. Найдите область значений функции:

1) $f(x)=x^2+2$; 2) $f(x)=2\sqrt{x}+3$.

12. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В этом пункте установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки $P(x;\ y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$. Поскольку $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, где α — угол поворота, в результате которого из точки $P_0(1;\ 0)$ была получена точка P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка P на единичной окружности выбрана произвольно, поэтому тождество (1) справедливо для любого α. Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Используя основное тригонометрическое тождество, найдем зависимость между тангенсом и косинусом.

Пусть $\cos\alpha\neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{\mathbf{1+tg^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}}$$

Задача 1. Упростите выражение:

1) $\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{tg}^2 x$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-\operatorname{tg}^2\varphi-\sin^2\varphi$.

Решение. 1) $\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{tg}^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-\operatorname{tg}^2\varphi-\sin^2\varphi=1+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi-\sin^2\varphi=1-\sin^2\varphi=$

$=\cos^2\varphi$. ◄

Задача 2. Известно, что $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. Вычислите $\sin\alpha$.

Решение. Имеем:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.$$

Отсюда $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{3}$ или $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt5}{3}$.

Рисунок 12.1 иллюстрирует эту задачу. ◄

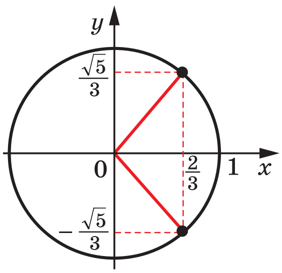


Рис. 12.1

Задача 3. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}.$$

Поскольку $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$; следовательно,

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{576}{625}}=-\frac{24}{25}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{7}{25}:\left(-\frac{24}{25}\right)=\frac{7}{24}.$$ ◄

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же аргумента?

УПРАЖНЕНИЯ

12.1.° Упростите выражение:

1) $1-\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\beta-1$;

3) $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1$;

4) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$;

5) $1-\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

12.2.° Упростите выражение:

1) $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$;

2) $\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha-1}$.

12.3.• Могут ли одновременно выполняться равенства $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ и $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{13}}{4}$?

12.4.• Могут ли одновременно выполняться равенства $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$ и $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$?

12.5.• Упростите выражение:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

4) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$.

12.6.• Упростите выражение:

1) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

4) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

12.7.• Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

12.8.• Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

12.9.•• Докажите тождество:

1) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

12.10.•• Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

12.11.•• Найдите значение выражения $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

12.12.•• Найдите значение выражения $\frac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

12.13.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

12.14.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

12.15. Найдите значение выражения:

1) $\left(\frac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ при $a = 0{,}008$; 2) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ при $a = 0{,}0625$.

13. Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометрические функции углов α и β.

Докажем, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ на углы α и β соответственно.

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ равен $\alpha - \beta$ (рис. 13.1). Координаты точек P_1

и P_2 соответственно равны $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тогда вектор $\overrightarrow{OP_1}$ имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta; \sin\beta)$.

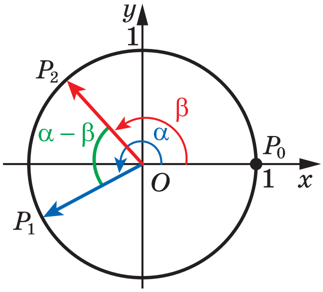


Рис. 13.1

Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ через их координаты:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

В то же время по определению скалярного произведения векторов можно записать:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta).$$

Отсюда получаем формулу, которую называют **косинусом разности:**

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Формула (1) справедлива и в томслучае, когда $(\alpha-\beta) \notin [0; \pi]$.

Докажем формулу **косинуса суммы:**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Имеем: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Формулы **синуса суммы и синуса разности** имеют вид:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Формулы **тангенса суммы и тангенса разности** имеют вид:

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}} \qquad (3)$$

Тождество (2) справедливо для всех α и β, при которых $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тождество (3) справедливо для всех α и β, при которых $\cos(\alpha-\beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α, называют **формулами двойного аргумента**.

В формулах сложения

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

положим $\beta=\alpha$. Получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Эти формулы соответственно называют **формулами косинуса, синуса и тангенса двойного аргумента.**

Поскольку $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ и $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, то из формулы $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ получаем еще две формулы:

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$$

Иногда эти формулы удобно использовать в таком виде:

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,$$
$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$$

или в таком виде:

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Две последние формулы называют **формулами понижения степени.**

Задача 1. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha+45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)-\cos(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)$.

Решение. 1) Применяя формулы синуса суммы и синуса разности, получаем: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2) Заменим данное выражение на синус разности аргументов $\alpha+45°$ и $\alpha-45°$. Получаем:

$$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=$$

$$=\sin((\alpha+45°)-(\alpha-45°))=\sin(\alpha+45°-\alpha+45°)=\sin 90°=1. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Докажите тождество $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\frac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \blacktriangleleft$$

Задача 3. Найдите значение выражения $\frac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}$.

Решение. Используя формулу тангенса суммы углов $20°$ и $25°$, получаем: $\frac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}=\frac{1}{\mathrm{tg}(20°+25°)}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,45°}=1.$ ◀

Задача 4. Упростите выражение:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$; 2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$.

Решение. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta$. ◀

1. Запишите формулу:

1) косинуса разности;
2) косинуса суммы;
3) синуса суммы;
4) синуса разности;
5) тангенса суммы;
6) тангенса разности.

2. Запишите формулы косинуса, синуса и тангенса двойного аргумента.

3. Запишите формулы понижения степени.

УПРАЖНЕНИЯ

13.1.° Упростите выражение:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

13.2.° Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

13.3.° Упростите выражение:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\sin 4\alpha$;
2) $\cos 17^\circ\cos 43^\circ-\sin 17^\circ\sin 43^\circ$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ-\cos 53^\circ\sin(-7^\circ)$;
5) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
6) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 5^\circ-\cos 20^\circ\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cos 5^\circ-\sin 10^\circ\sin 5^\circ}$.

13.4.° Упростите выражение:

1) $\cos 6\alpha\cos 2\alpha-\sin 6\alpha\sin 2\alpha$;
2) $\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cos 12^\circ$;
3) $\sin(-15^\circ)\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\sin 75^\circ$;
4) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

13.5.° Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

13.6.° Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

13.7.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}47^\circ}{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}47^\circ}$;
2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}33^\circ}$.

13.8.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}36^\circ}{1-\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}36^\circ}$;
2) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}5\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$.

13.9.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;
2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;
3) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$; 6) $1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$; 8) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; 7) $\left(\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{4}-\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)$;

13.10.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}$; 5) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

2) $\cos 4\beta+\sin^2 2\beta$; 6) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

3) $\cos 6\alpha+2\sin^2 3\alpha$; 7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; 8) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,1{,}5\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,1{,}5\alpha}$.

13.11.° Вычислите значение выражения:

1) $2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$; 3) $1-2\sin^2\dfrac{\pi}{12}$;

2) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$; 4) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,165^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,165^\circ}$.

13.12.° Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ}$; 2) $2\sin\dfrac{3\pi}{8}\cos\dfrac{3\pi}{8}$; 3) $1-2\cos^2\dfrac{\pi}{12}$.

13.13.• Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$.

13.14.• Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

13.15.• Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.16.• Найдите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ и $\cos\beta=\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

13.17.• Дано: $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Найдите $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$.

13.18.• Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Найдите $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$.

13.19.• Найдите sin 2α, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

13.20.• Найдите tg 2α, если $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

13.21.• Найдите cos 2α, если $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

13.22.• Найдите sin 15°.

13.23.• Найдите cos 75°.

13.24.• Докажите тождество $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

13.25.• Упростите выражение $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

13.26.•• Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}$.

13.27.•• Упростите выражение:

1) $\frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

13.28.•• Найдите наибольшее значение выражения $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$.

13.29.•• Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$.

13.30.* Найдите sin 2α, если $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3}$.

13.31.* Найдите sin α, если $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

13.32. При каких значениях x значения выражений $4x + 5$, $7x - 1$ и $x^2 + 2$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

13.33. При каких значениях x значения выражений $x - 1$, $1 - 2x$ и $x + 7$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

14. Формулы приведения

Периодичность тригонометрических функций дает возможность сводить вычисление значений синуса и косинуса к случаю, когда значение аргумента принадлежит промежутку $[0;\ 2\pi]$. В этом пункте мы рассмотрим формулы, позволяющие в таких вычислениях ограничиться лишь углами из промежутка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Каждый угол из промежутка $[0;\ 2\pi]$ можно представить в виде $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, или $\pi \pm \alpha$, или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Например, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Вычисление синусов и косинусов углов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можно свести к вычислению синуса или косинуса угла α. Например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Применяя формулы сложения, аналогично можно получить:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}}$$

Эти формулы называют **формулами приведения для синуса.**

Следующие формулы называют **формулами приведения для косинуса:**

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha & \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha & \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha \end{array}}$$

Проанализировав записанные формулы приведения, можно заметить закономерности, благодаря которым не обязательно заучивать эти формулы.

Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами.

1. ***В правой части равенства ставят тот знак, который имеет левая часть при условии, что*** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. ***Если в левой части формулы аргумент имеет вид*** $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ***или*** $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, ***то синус заменяют на косинус и наоборот. Если аргумент имеет вид*** $\pi \pm \alpha$, ***то замена функции не происходит.***

Покажем, как действуют эти правила для выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Предположив, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, приходим к выводу: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ является углом III координатной четверти. Тогда $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. По первому правилу в правой части равенства должен стоять знак «−».

Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то по второму правилу следует заменить синус на косинус.

Следовательно, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

Задача 1. Упростите выражение $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Решение. Имеем:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 = (-\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha. ◄$$

Задача 2. Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$.

Решение. 1) $\cos\frac{9\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$. ◄

Сформулируйте правила, которыми можно руководствоваться при применении формул приведения.

УПРАЖНЕНИЯ

14.1.° Упростите выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 3) $\cos(-\alpha+270°)$; 5) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;

2) $\sin(\pi-\alpha)$; 4) $\cos(\alpha-180°)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

14.2.° Упростите выражение:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\cos(\pi-\alpha)$; 3) $\sin(180°+\alpha)$; 4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

14.3.° Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

14.4.° Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла:

1) $\sin(-305°)$; 2) $\sin\frac{14\pi}{15}$; 3) $\cos(-0,7\pi)$; 4) $\cos\frac{6\pi}{5}$.

14.5.° Вычислите значение тригонометрической функции:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

14.6.° Вычислите значение тригонометрической функции:

1) $\cos(-150°)$; 2) $\cos 210°$; 3) $\sin 315°$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

14.7.• Вычислите значение выражения:

1) $\frac{\sin^2 315°\cos 300°+\operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$;

2) $\frac{\cos 66°\cos 6°+\cos 84°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}$.

14.8.• Найдите значение выражения $\frac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}$.

14.9.•• Упростите выражение:

1) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$;

2) $\sin(\pi-\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\pi-\beta)$.

14.10.•• Докажите тождество $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\cos\alpha.$

14.11.* Вычислите: $\sin 0°+\sin 1°+\sin 2°+\ldots+\sin 359°+\sin 360°.$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

14.12. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}};$ 2) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

14.13. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x+4}{x^2-4};$

2) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4};$

3) $\dfrac{9}{\sqrt{3x+6}};$

4) $\sqrt{7x-42}+\dfrac{1}{x^2-8x};$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}};$

6) $\dfrac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{8-4x}}?$

15. Уравнение $\cos x = b$

Поскольку областью значений функции $y=\cos x$ является промежуток $[-1;\ 1]$, то при $|b|>1$ уравнение $\cos x=b$ не имеет решений. Вместе с тем при любом b таком, что $|b|\leqslant 1$, это уравнение имеет корни, причем их бесконечно много.

Сказанное легко понять, обратившись к графической интерпретации: графики функций $y=\cos x$ и $y=b$, где $|b|\leqslant 1$, имеют бесконечно много общих точек (рис. 15.1).

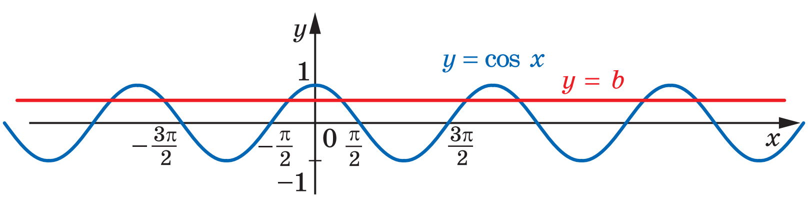


Рис. 15.1

Понять, как решать уравнение cos $x = b$ в общем случае, поможет рассмотрение частного случая. Например, решим уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунке 15.2 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{2}$.

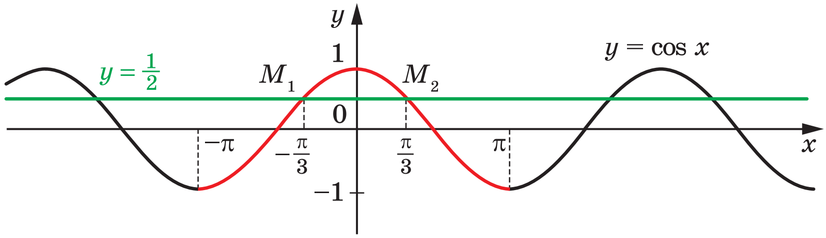


Рис. 15.2

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ (красная часть кривой на рисунке 15.2), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ в двух точках M_1 и M_2, абсциссы которых являются противоположными числами. Следовательно, уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет два корня. Поскольку $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то этими корнями являются числа $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Функция $y = \cos x$ — периодическая с периодом 2π. Поэтому каждый из остальных корней уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ отличается от одного из найденных корней $-\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3}$ на число вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, корни рассматриваемого уравнения можно задать формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Как правило, эти две формулы заменяют одной записью:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к уравнению $\cos x = b$, где $|b| \leqslant 1$. На рисунке 15.3 показано, что на промежутке $[-\pi; \pi]$ это уравнение имеет два корня α и $-\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ эти корни совпадают и равны нулю).

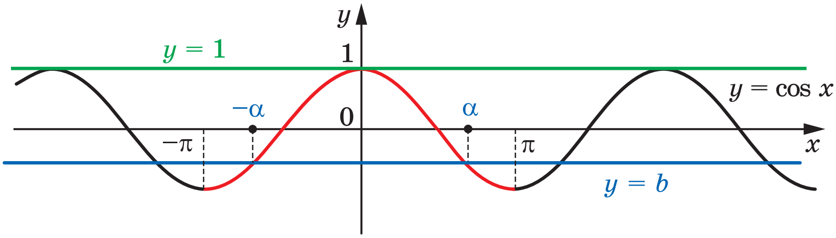


Рис. 15.3

Тогда все корни уравнения $\cos x = b$ имеют вид

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Эта формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\cos x = b$. Корень α имеет специальное название — арккосинус.

Определение. Арккосинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b.

Для арккосинуса числа b используют обозначение $\arccos b$.

Например,

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$ и $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вообще, ***$\arccos b = \alpha$, если $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = b$.***

Теперь формулу корней уравнения $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можно записать в следующем виде:

$$\boxed{x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Заметим, что частные случаи уравнения $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) были рассмотрены ранее (см. п. 9).

Напомним полученные результаты:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Такие же ответы можно получить, используя формулу (1). Имеет место равенство

$$\mathbf{arccos}\,(-b) = \pi - \mathbf{arccos}\, b.$$

Задача. Решите уравнение:

1) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$.

Решение. 1) Используя формулу (1), запишем:

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далее получаем:

$$4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

2) Имеем:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

Ответ: $\pm\pi - \frac{3\pi}{16} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3) Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.$$

Отсюда

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n; \quad 7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$. ◄

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\cos x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Что называют арккосинусом числа b?
4. Какой вид имеет формула корней уравнения $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
5. Какой вид имеет формула корней уравнения $\cos x = 1$? $\cos x = 0$? $\cos x = -1$?

УПРАЖНЕНИЯ

15.1.° Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$.

15.2.° Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

15.3.° Решите уравнение:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;

2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.4.° Решите уравнение:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

15.5.° Решите уравнение:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

15.6.° Решите уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$. 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

15.7.• Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

15.8.$^{\bullet}$ Найдите какой-нибудь отрицательный корень уравнения $\cos\frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.9.$^{\bullet\bullet}$ Сколько корней уравнения $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

15.10.$^{\bullet\bullet}$ Найдите все корни уравнения $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие неравенству $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

15.11. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$.

15.12. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}$; 2) $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}$.

16. Уравнения $\sin x = b$ и $\operatorname{tg} x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ уравнение $\sin x = b$ не имеет решений. Вместе с тем при любом b таком, что $|b| \leqslant 1$, это уравнение имеет корни, причем их бесконечно много.

Отметим, что частные случаи уравнения $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) были рассмотрены ранее (см. п. 9). Напомним полученные результаты:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того чтобы получить общую формулу корней уравнения $\sin x = b$, где $|b| \leqslant 1$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 16.1 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

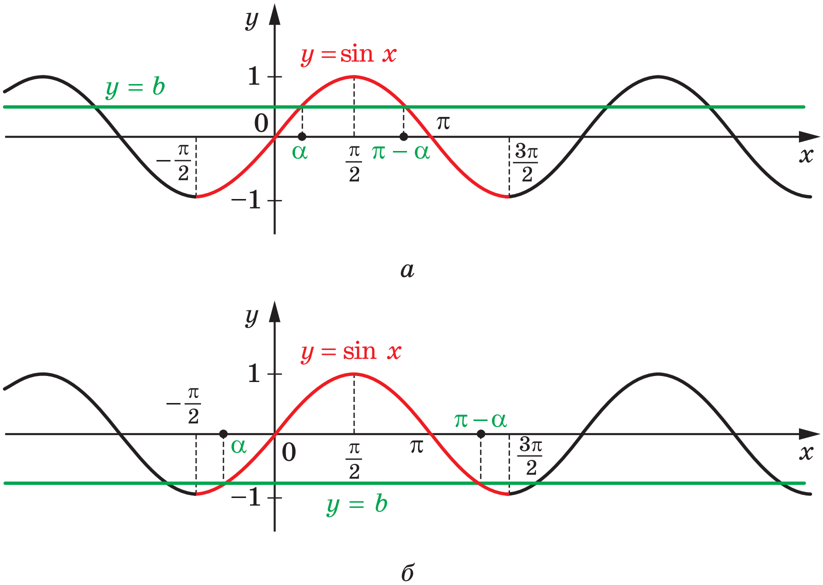


Рис. 16.1

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (красная часть кривой на рисунке 16.1), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\sin x = b$ имеет два корня α и $\pi - \alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (при $b = 1$ эти корни совпадают и равны $\frac{\pi}{2}$).

Поскольку функция $y = \sin x$ — периодическая с периодом 2π, то каждый из остальных корней уравнения $\sin x = b$ отличается от одного из найденных корней на число вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда корни уравнения $\sin x = b$ можно задать формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ и } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Эти две формулы можно заменить одной записью:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Действительно, если k — четное число, то есть $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то получаем $x = \alpha + 2\pi n$; если k — нечетное число, то есть $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то получаем $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\sin x = b$. Корень α имеет специальное название — арксинус.

Определение. Арксинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

Для арксинуса числа b используют обозначение $\arcsin b$.
Например,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ поскольку } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ поскольку } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вообще, **$\arcsin b = \alpha$, *если* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *и* $\sin \alpha = b$.**

Теперь формулу корней уравнения $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можно записать в следующем виде:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Имеет место равенство

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

Задача 1. Решите уравнение: 1) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1) Используя формулу (2), запишем:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Далее получаем:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2) Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$; $3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n$; $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\mathbb{R}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = b$ имеет решения при любом значении b.

Для того чтобы получить формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 16.2 изображены графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = b$.

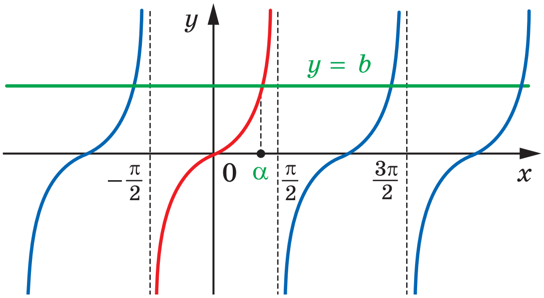


Рис. 16.2

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (красная кривая на рисунке 16.2), то есть на промежутке, длина которого равна периоду данной функции. На этом промежутке уравнение $\operatorname{tg} x = b$ при любом b имеет единственный корень α.

Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая с периодом π, то каждый из остальных корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ отличается от найденного корня на число вида πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда корни уравнения $\operatorname{tg} x = b$ можно задать формулой

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Полученная формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\operatorname{tg} x = b$. Корень α имеет специальное название — арктангенс.

Определение. Арктангенсом числа b называют такое число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

Для арктангенса числа b используют обозначение $\operatorname{arctg} b$.
Например,

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ поскольку } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ поскольку } -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Вообще, $\boldsymbol{\operatorname{arctg} b = \alpha}$, ***если*** $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ***и*** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = b}$.

Теперь формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ можно записать в следующем виде:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Имеет место равенство

$$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b.$$

Задача 2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$.

Решение. Имеем: $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ◄

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\sin x = b$?
2. Что называют арксинусом числа b?
3. Запишите формулу корней уравнения $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$.
4. Запишите формулу корней уравнения $\sin x = 1$; $\sin x = 0$; $\sin x = -1$.
5. При каких значениях b имеет корни уравнение $\operatorname{tg} x = b$?
6. Что называют арктангенсом числа b?
7. Запишите формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$.

УПРАЖНЕНИЯ

16.1.° Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$.

16.2.° Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

16.3.° Решите уравнение:

1) $\sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x = 1$; 3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

16.4.° Решите уравнение:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.5.° Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = 5$.

16.6.° Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$.

16.7.° Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

16.8.° Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$.

16.9.° Решите уравнение:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

16.10.° Решите уравнение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

16.11.° Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$.

16.12.° Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

16.13.• Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.14.$^{\bullet}$ Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(3x-\frac{\pi}{15}\right)=-1$.

16.15.$^{\bullet\bullet}$ Найдите все корни уравнения $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

16.16.$^{\bullet\bullet}$ Сколько корней уравнения $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

16.17.$^{\bullet\bullet}$ Сколько корней уравнения $\operatorname{tg} 4x=1$ принадлежат промежутку $[0; \pi]$?

16.18.$^{\bullet\bullet}$ Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$, принадлежащих промежутку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

16.19. Решите уравнение:

1) $x-\sqrt{x-1}=3$;

2) $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$;

3) $\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x-5}=2x+1$;

4) $\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$.

17. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

В пунктах 15, 16 мы получили формулы для решения уравнений вида $\cos x=a$, $\sin x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. Эти уравнения называют **простейшими тригонометрическими уравнениями.** С помощью различных приемов и методов многие тригонометрические уравнения можно свести к простейшим.

Задача 1. Решите уравнение $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$.

Решение. Выполним замену $\cos x=t$. Тогда данное уравнение принимает вид $2t^2-5t+2=0$. Отсюда $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Поскольку

$|\cos x| \leqslant 1$, то уравнение $\cos x = 2$ не имеет корней. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$. Окончательно получаем: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

Задача 2. Решите уравнение $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Решение. Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, преобразуем данное уравнение:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Пусть $\sin x = t$. Получаем квадратное уравнение $6t^2 + t - 5 = 0$. Отсюда $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Итак, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

Задача 3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то данное уравнение можно записать следующим образом:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Отсюда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Имеем: $t^2 + t - 2 = 0$. Тогда $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Получаем, что данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\quad -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ ◄

УПРАЖНЕНИЯ

17.1.° Решите уравнение:
1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2\sin 3x - 3 = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

17.2.° Решите уравнение:
1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3\cos^2 \dfrac{x}{4} + 5\cos \dfrac{x}{4} - 2 = 0$.

17.3.• Решите уравнение:
1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
3) $4\cos 2x - \sin 2x = 0$.

17.4.• Решите уравнение:
1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
3) $\cos 4x - 3\sin 4x = 0$.

17.5.• Решите уравнение:
1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos \dfrac{2x}{3} - 5\cos \dfrac{x}{3} - 2 = 0$;
7) $\cos \dfrac{x}{2} + \cos x = 0$;
8) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$.

17.6.• Решите уравнение:
1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5\sin \dfrac{x}{6} - \cos \dfrac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin \dfrac{x}{2} = 0$.

17.7.•• Решите уравнение:
1) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
2) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

17.8.•• Решите уравнение:

1) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 3 = \dfrac{3}{\cos^2 x}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

17.9. Сравните числа:

1) $\sqrt[5]{7}$ и $\sqrt[10]{47}$; 2) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 3) $\sqrt[3]{15}$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{25}$ и $\sqrt[3]{5}$.

17.10. Решите уравнение:

1) $6x^3 - 24x = 0$;
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0$;
3) $x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0$;
4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

СТАНОВИСЬ ОСТРОГРАДСКИМ!

Выдающийся украинский математик Михаил Васильевич Остроградский родился в селе Пашеновка на Полтавщине. В 1816–1820 гг. он учился в Харьковском университете, а затем совершенствовал математическое образование, обучаясь во Франции у таких великих ученых, как Пьер Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дени Пуассон (1781–1840), Огюстен Луи Коши (1789–1857), Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830).

Среди огромного научного наследия, которое оставил нам Михаил Остроградский, значительную роль играют работы, связанные с исследованием тригонометрических рядов и колебаний. Многие математические теоремы сегодня носят имя Остроградского.

Михаил Васильевич Остроградский
(1801–1862)

Кроме научных работ, Остроградский написал ряд прекрасных учебников для молодежи, в частности «Программу и конспект тригонометрии». Сам Остроградский придавал вопросу преподавания тригонометрии такое большое значение, что это стало предметом доклада в Академии наук.

Научный авторитет Остроградского был столь высок, что в те времена, отправляя молодежь на обучение, напутствовали: «Становись Остроградским!» Это пожелание актуально и сегодня, поэтому

«Становись Остроградским!»

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

Радианная мера угла

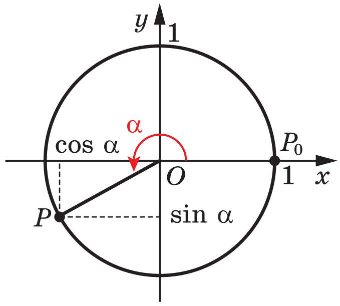
Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры угла связаны формулами

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \quad 1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{рад}.$$

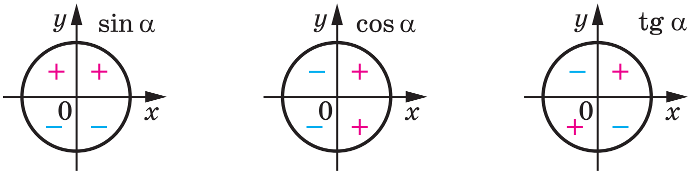
Косинус, синус и тангенс угла поворота

Косинусом и синусом угла поворота α называют соответственно абсциссу x и ординату y точки $P(x; y)$ единичной окружности, полученной в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α.



Тангенсом угла поворота α называют отношение синуса этого угла к его косинусу: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Знаки значений тригонометрических функций



Периодические функции

Функцию f называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f выполняются равенства $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Число T называют периодом функции f.

Если среди всех периодов функции f существует наименьший положительный период, то его называют главным периодом функции f.

Связь тригонометрических функций одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Формулы сложения

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Формулы приведения

Для того чтобы записать любую из формул приведения, можно руководствоваться следующими правилами:

1) в правой части равенства ставят тот знак, который имеет левая часть при условии, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) если в левой части формулы аргумент имеет вид $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус меняют на косинус и наоборот. Если аргумент имеет вид $\pi\pm\alpha$, то замена функции не происходит.

Формулы двойного аргумента

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Арккосинус, арксинус и арктангенс

Арккосинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b.

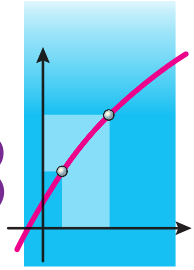
Арксинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

Арктангенсом числа b называют такое число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Формула корней уравнения
$\cos x = b,\ |b| \leqslant 1$	$x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b,\ |b| \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ §3



В этом параграфе вы ознакомитесь с понятием производной функции в точке, научитесь применять производную для исследования свойств функций и построения графиков функций.

18. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Если функция является математической моделью реального процесса, то часто возникает необходимость находить разность значений этой функции в двух точках. Например, обозначим через $f(t)$ и $f(t_0)$ суммы средств, которые накопились на депозитном[1] счете вкладчика к моментам времени t и t_0. Тогда разность $f(t) - f(t_0)$, где $t > t_0$, показывает прибыль, которую получит вкладчик за время $t - t_0$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения функции f.

Если x — произвольная точка области определения функции f такая, что $x \neq x_0$, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента функции f в точке x_0** и обозначают Δx (читают: «дельта икс»)[2]. Имеем:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Отсюда

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорят, что аргумент **получил приращение Δx в точке x_0**.

Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным: если $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; если $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Если аргумент в точке x_0 получил приращение Δx, то значение функции f изменилось на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эту разность называют **приращением функции f в точке x_0** и обозначают Δf (читают: «дельта эф»).

---

[1] Депозитный — от *депозит* (банковский вклад) — деньги, которые вкладчик передает банку на некоторый срок, за что банк выплачивает вкладчику проценты.

[2] Говоря о приращении аргумента функции f в точке x_0, здесь и далее будем предполагать, что в любом промежутке вида $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ есть точки области определения функции f, отличные от x_0.

Имеем:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ или } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приращения функции $y = f(x)$ принято также обозначение Δy, то есть

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращение Δx аргумента в точке x_0 и соответствующее приращение Δf функции показаны на рисунке 18.1.

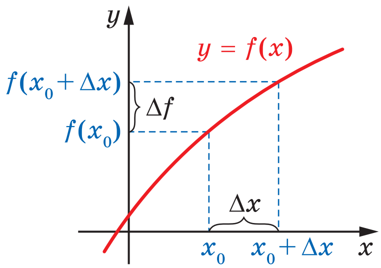


Рис. 18.1

Отметим, что для фиксированной точки x_0 приращение функции f в точке x_0 является функцией с аргументом Δx.

Задача. Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке x_0, которое соответствует приращению Δx аргумента.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Ответ: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◄

Задача о мгновенной скорости

Пусть автомобиль, двигаясь по прямолинейному участку дороги в одном направлении, за 2 ч преодолел путь 120 км. Тогда его средняя скорость движения равна: $v_{\text{ср}} = \dfrac{120}{2} = 60$ (км/ч).

Найденное значение скорости дает неполное представление о характере движения автомобиля: на одних участках пути автомобиль мог двигаться быстрее, на других — медленнее, иногда мог останавливаться.

Вместе с тем в любой момент времени спидометр автомобиля показывал некоторую величину — скорость в данный момент времени. Значения скорости в разные моменты более полно характеризуют движение автомобиля.

Рассмотрим задачу о поиске скорости в данный момент времени на примере равноускоренного движения.

Пусть материальная точка движется по координатной прямой и через время t после начала движения имеет координату $s(t)$. Тем самым задана функция $y = s(t)$, позволяющая определить положение точки в любой момент времени. Поэтому эту функцию называют **законом движения** точки.

Из курса физики известно, что закон равноускоренного движения задается формулой $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s_0 — координата точки в начале движения (при $t = 0$), v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

Пусть, например, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тогда $s(t) = t^2 + t$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t_0 и придадим аргументу в точке t_0 приращение Δt, то есть рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени материальная точка осуществит перемещение Δs. Имеем:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{\left(t_0^2 + t_0\right)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Средняя скорость $v_{ср}(\Delta t)$ движения точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Получаем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ то есть } v_{ср}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Обозначение для средней скорости $v_{ср}(\Delta t)$ подчеркивает, что при заданном законе движения $y = s(t)$ и фиксированном моменте времени t_0 значение средней скорости зависит только от Δt.

Если рассматривать достаточно малые промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, то из практических соображений понятно, что средние скорости $v_{ср}(\Delta t)$ за такие промежутки времени мало отличаются друг от друга, то есть величина $v_{ср}(\Delta t)$ почти не изменяется. Чем меньше Δt, тем ближе значение средней скорости к некоторому числу, определяющему скорость в момент времени t_0. Иными словами, если значения Δt стремятся к нулю (обозначают $\Delta t \to 0$), то значения $v_{ср}(\Delta t)$ стремятся к числу $v(t_0)$. Число $v(t_0)$ называют **мгновенной скоростью** в момент времени t_0. Это записывают так: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}(\Delta t)$. Говорят, что число $v(t_0)$ является **пределом** функции $v_{ср}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Если в приведенном примере $\Delta t \to 0$, то значения выражения $2t_0 + 1 + \Delta t$ стремятся к числу $2t_0 + 1$, которое является значением мгновенной скорости $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Этот пример показывает, что если материальная точка движется по закону $y = s(t)$, то ее мгновенную скорость в момент времени t_0 определяют с помощью формулы

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t), \text{ то есть}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Задача о касательной к графику функции

Известное определение касательной к окружности как прямой, которая имеет с окружностью только одну общую точку, неприменимо в случае произвольной кривой.

Например, ось ординат имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку (рис. 18.2). Однако интуиция подсказывает, что неестественно считать эту прямую касательной к данной параболе. Вместе с тем в курсе алгебры мы нередко говорили, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

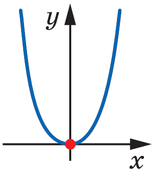


Рис. 18.2

Уточним наглядное представление о касательной к графику функции.

Пусть M — некоторая точка, лежащая на параболе $y = x^2$. Проведем прямую OM, которую назовем секущей (рис. 18.3). Представим, что точка M, двигаясь по параболе, приближается к точке O. При этом секущая OM будет поворачиваться вокруг точки O. Тогда угол между прямой OM и осью абсцисс будет все меньше и меньше, а секущая OM будет стремиться занять положение оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс считают касательной к параболе $y = x^2$ в точке O.

Рассмотрим график некоторой функции f и точку $M_0(x_0; f(x_0))$. В точке x_0 придадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 18.4).

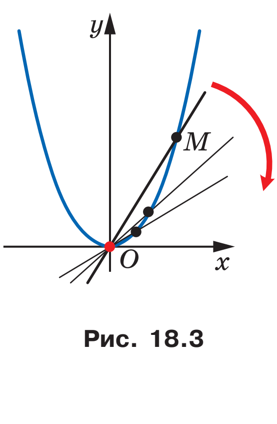


Рис. 18.3

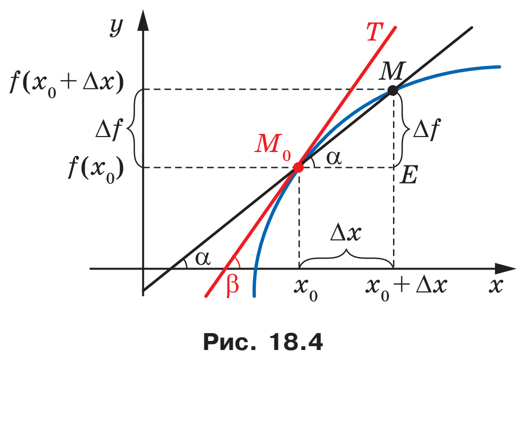


Рис. 18.4

Из рисунка видно, что если Δx становится все меньше и меньше, то точка M, двигаясь по графику, приближается к точке M_0. Если при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M стремится занять положение некоторой прямой (на рисунке 18.4 это прямая M_0T), то такую прямую называют **касательной к графику функции f в точке M_0**.

Пусть секущая M_0M имеет уравнение $y = kx + b$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Как известно, угловой коэффициент k прямой M_0M равен $\operatorname{tg} \alpha$, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, что $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 18.4). Тогда из треугольника MM_0E получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введем обозначение $k_{\text{сек}}(\Delta x)$ для углового коэффициента секущей M_0M, тем самым подчеркивая, что для данной функции f и фиксированной точки x_0 угловой коэффициент секущей M_0M зависит только от приращения Δx аргумента.

Имеем: $k_{\text{сек}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть касательная M_0T образует с положительным направлением оси абсцисс угол β $(\beta \neq 90^\circ)$. Тогда ее угловой коэффициент $k(x_0)$ равен $\operatorname{tg} \beta$.

Естественно считать, что чем меньше Δx, то тем меньше значение углового коэффициента секущей отличается от значения углового коэффициента касательной. Иными словами, если $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{сек}}(\Delta x) \to k(x_0)$. Вообще, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 определяют с помощью формулы

$$k(x_0) = \lim_{\Delta t \to 0} k_{\text{сек}}(\Delta x), \text{ то есть}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

1. Что называют приращением функции в точке?
2. По какой формуле определяют мгновенную скорость?
3. По какой формуле определяют угловой коэффициент касательной к графику функции в точке?

УПРАЖНЕНИЯ

18.1.° Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

18.2.° Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

18.3.° Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если:
1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

18.4.° Для функции $f(x) = x^3$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

18.5.• Для функции $f(x) = x^2 - x$ и точки x_0 найдите $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.6.• Для функции $f(x) = 5x + 1$ и точки x_0 найдите $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.7.• Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 + 3$ (перемещение измеряют в метрах, время — в секундах). Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент $t_0 = 2$ с.

18.8.• Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 5t^2$ (перемещение измеряют в метрах, время — в секундах). Найдите:
1) среднюю скорость тела при изменении времени от $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;
2) мгновенную скорость тела в момент $t_0 = 1$ с.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

18.9. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите угол α.

18.10. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -1$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдите угол α.

19. Понятие производной

В предыдущем пункте, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели —

пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad (2)$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач физики, химии, биологии, экономики и других наук. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить ее свойства и научиться их применять.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от икс нулевого») или $y'(x_0)$. Можно записать:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

или

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Исходя из определения мгновенной скорости (1), можно сделать следующий вывод: *если $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой, то ее мгновенная скорость в момент времени t_0 равна значению производной функции $y = s(t)$ в точке t_0*, то есть

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Это равенство выражает **механический смысл производной.**

Исходя из формулы для углового коэффициента касательной (2), можно сделать следующий вывод: *угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен значению производной функции f в точке x_0*, то есть

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной.**

Если функция f имеет производную в точке x_0, то эту функцию называют **дифференцируемой в точке** x_0.

Если функция f дифференцируема в каждой точке области определения, то ее называют **дифференцируемой.**

Операцию нахождения производной функции f называют **дифференцированием** функции f.

Задача 1. Продифференцируйте функцию $f(x) = kx + b$.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Следовательно, $f'(x_0) = k$.

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции f, то последнее равенство означает, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f'(x) = k$. ◄

Вывод о том, что производная линейной функции $f(x) = kx + b$ равна k, записывают также в виде

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (3)$$

Если в формулу (3) подставить $k = 1$ и $b = 0$, то получим:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Если же в формуле (3) положить $k = 0$, то получим:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Последнее равенство означает, что *производная функции, являющейся константой, в каждой точке равна нулю.*

Задача 2. Найдите производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) если $\Delta x \to 0$, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ значения выражения $2x_0 + \Delta x$ стремятся к числу $2x_0$. Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x.$$

Последнее равенство записывают также в виде

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \tag{4}$$

Формула (4) — частный случай более общей формулы

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \tag{5}$$

Например, $\left(x^5\right)' = 5x^4$, $\left(x^7\right)' = 7x^6$.

Формула (5) остается справедливой для любого $n \in \mathbb{Z}$ и $x \neq 0$, то есть

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \tag{6}$$

Например, воспользуемся формулой (6) для нахождения производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ или

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Формулу (6) также можно обобщить для любого $r \in \mathbb{Q}$ и $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \tag{7}$$

Например, найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, воспользовавшись формулой (7). Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Следовательно, для $x > 0$ можно записать: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ или

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Вообще, производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можно находить по формуле

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (8)$$

Если n — нечетное натуральное число, то формула (8) позволяет находить производную функции f во всех точках x таких, что $x \neq 0$.

Если n — четное натуральное число, то формула (8) позволяет находить производную функции f для всех положительных значений x.

Обратимся к тригонометрическим функциям $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Эти функции являются дифференцируемыми, и их производные находят по следующим формулам:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных, приведенной на форзаце 2.

УПРАЖНЕНИЯ

19.1.° Найдите производную функции:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = 9$; 3) $y = 8 - 3x$.

19.2.° Найдите производную функции:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

19.3.° Найдите производную функции:

1) $y = x^{10}$; 2) $y = \frac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$.

19.4.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -2$.

19.5.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

19.6.• Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

19.7.° Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

19.8.° Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

19.9.° Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

19.10.° Найдите с помощью графика функции f (рис. 19.1) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

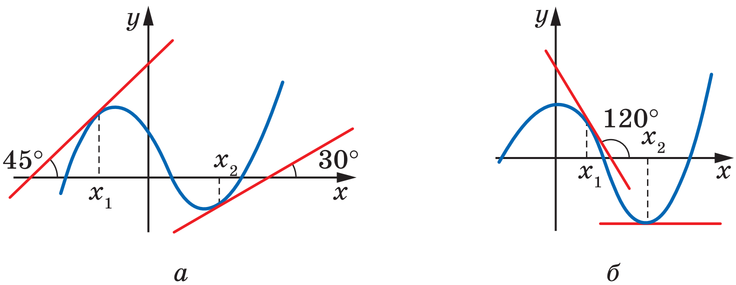


Рис. 19.1

19.11.° Найдите с помощью графика функции f (рис. 19.2) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

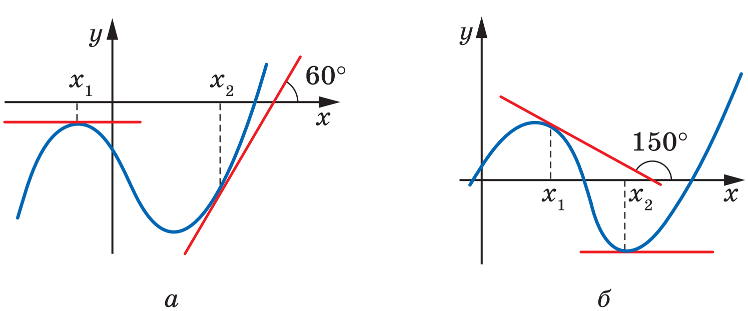


Рис. 19.2

19.12.•• Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$;
2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

19.13.•• Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$;
2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

19.14. Упростите выражение $\left(\dfrac{a+5}{a^2-81} + \dfrac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\dfrac{a-9}{a+3}\right)^2 + \dfrac{7+a}{9+a}$.

19.15. Решите уравнение $\dfrac{5}{x^2-4x+4} - \dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x+2} = 0$.

20. Правила вычисления производных

При вычислении производных удобно пользоваться следующими теоремами[1].

Теорема 20.1 (производная суммы). ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) + g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Кратко говорят: *производная суммы равна сумме производных*. Также принята следующая упрощенная запись:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Теорему 20.1 можно обобщить для любого конечного количества слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

---

[1] Условия теорем 20.1–20.3 предусматривают следующее: если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то соответственно функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ определены на некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Теорема 20.2 (производная произведения). ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x)\,g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Также принята следующая упрощенная запись:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Следствие 1. ***В тех точках, в которых дифференцируема функция $y = f(x)$, также является дифференцируемой функция $y = kf(x)$, где k — некоторое число, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Кратко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной*.

Также принята следующая упрощенная запись:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доказательство. Поскольку функция $y = k$ дифференцируема в любой точке, то, применяя теорему о производной произведения, можно записать:

$$(kf(x))' = (k)'\,f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Следствие 2. ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) - g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доказательство. Имеем:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 20.3 (производная частного). ***В тех точках, в которых функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы и значение функции g не равно нулю, функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ также является дифференцируемой, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

Также принята следующая упрощенная запись:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

Задача. Найдите производную функции: 1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Решение. 1) Пользуясь теоремой о производной суммы и следствиями из теоремы о производной произведения, получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) По теореме о производной произведения получаем:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x - 3) + (5x - 3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x - 3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3 - 5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3 - 5x + 10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3 + 5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Имеем: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$
$$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

4) По теореме о производной частного получаем:

$$y' = \left(\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}\right)' = \frac{(2x^2 + 1)'(3x - 2) - (3x - 2)'(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} =$$
$$= \frac{4x(3x - 2) - 3(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}. \blacktriangleleft$$

Используя теорему о производной частного, легко доказать, что

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Действительно, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Сформулируйте теорему о производной: 1) суммы; 2) произведения; 3) частного.

УПРАЖНЕНИЯ

20.1.° Найдите производную функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;
3) $y = x^8 + 7x^6 + \dfrac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

20.2.° Найдите производную функции:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = -3\sin x + 2\cos x$;
4) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

20.3.• Найдите производную функции:

1) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
2) $y = x^2 \sin x$;
3) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt{x}\cos x$.

20.4.• Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

20.5.• Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$;
2) $y = \dfrac{5}{3x - 2}$;
3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;
4) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$;
5) $y = \dfrac{3 - x^2}{4 + 2x}$;
6) $y = \dfrac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

20.6.• Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{3x + 5}{x - 8}$;
2) $y = \dfrac{7}{10x - 3}$;
3) $y = \dfrac{2x^2}{1 - 6x}$;
4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
5) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
6) $y = \dfrac{x^2 + 6x}{x + 2}$.

20.7.• Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = \dfrac{8}{x} + 5x - 2,\ x_0 = 2$;
2) $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x + 2},\ x_0 = -3$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 2} - 2\sin x,\ x_0 = 0$;
4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x},\ x_0 = 9$;
5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x},\ x_0 = 1$;
6) $f(x) = x\sin x,\ x_0 = 0$?

20.8.$^{\bullet}$ Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x,\ \ x_0 = \dfrac{1}{4}$;
2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - x},\ \ x_0 = 0$;
3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3},\ \ x_0 = 2$;
4) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1},\ \ x_0 = 1$.

20.9.$^{\bullet\bullet}$ Материальная точка массой 4 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 4$ (перемещение измеряют в метрах, время — в секундах). Найдите импульс $P(t) = mv(t)$ материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

20.10.$^{\bullet\bullet}$ Тело массой 2 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (перемещение измеряют в метрах, время — в секундах). Найдите кинетическую энергию $E(t) = \dfrac{mv^2(t)}{2}$ тела в момент времени $t_0 = 4$ с.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

20.11. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\ -3)$ и параллельной оси абсцисс.

20.12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ -4)$, если угловой коэффициент этой прямой равен: 1) 4; 2) 0; 3) -1.

21. Уравнение касательной

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную (рис. 21.1).

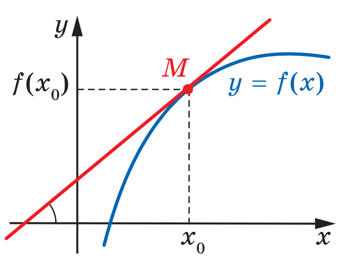


Рис. 21.1

Из курса геометрии 9 класса вы знаете, что уравнение невертикальной прямой имеет вид $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент этой прямой.

Исходя из геометрического смысла производной, получаем:

$$k = f'(x_0).$$

Тогда уравнение касательной можно записать в следующем виде:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Эта прямая проходит через точку $M(x_0;\ f(x_0))$. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1).

Имеем: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$.

Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тогда уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Следовательно, если функция f дифференцируема в точке x_0, то **уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0**, имеет вид

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Задача. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. Имеем: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$;

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Подставив найденные числовые значения в уравнение касательной, получаем: $y = 8(x + 2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Ответ: $y = 8x + 14$. ◄

Запишите уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

УПРАЖНЕНИЯ

21.1.° Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
6) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$.

21.2.° Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

21.3.• Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x - 3$ в точке его пересечения с осью ординат.

21.4.• Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ в точке его пересечения с осью ординат.

21.5.• Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;   2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

21.6.• Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$;   2) $f(x) = 3x - x^2$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

21.7. Решите неравенство:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;   3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;   4) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$.

22. Признаки возрастания и убывания функции

Вы знаете, что если функция является константой, то ее производная равна нулю. Возникает вопрос: если функция f такова, что для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то является ли функция f константой на промежутке I?

Теорема 22.1 (признак постоянства функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.***

На рисунке 22.1 изображен график функции $f(x) = x^2$. Эта функция обладает следующими свойствами: на промежутке $(-\infty; 0)$ она убывает, а на промежутке $(0; +\infty)$ возрастает. При этом на промежутке $(-\infty; 0)$ производная $f'(x) = 2x$ принимает отрицательные значения, а на промежутке $(0; +\infty)$ — положительные значения.

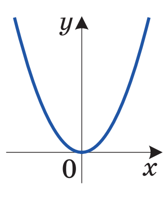


Рис. 22.1

Этот пример показывает, что знак производной функции на некотором промежутке I связан с тем, является ли эта функция возрастающей (убывающей) на промежутке I.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 22.2 (признак возрастания функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.***

Теорема 22.3 (признак убывания функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.***

Задача 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^2 - 2x$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 2x - 2$. Решив неравенства $2x - 2 > 0$ и $2x - 2 < 0$, приходим к выводу: $f'(x) > 0$ на промежутке $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 1)$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1)$.

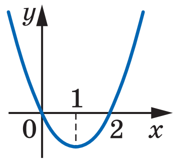


Рис. 22.2

На рисунке 22.2 изображен график функции $f(x) = x^2 - 2x$. Из рисунка видно, что на самом деле функция f возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$, включая точку $x = 1$.

При записи ответа будем руководствоваться следующим правилом: если функция дифференцируема в каком-то из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку. В приведенном примере функция $f(x) = x^2 - 2x$ дифференцируема в точке $x = 1$, потому эту точку присоединили к промежуткам $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 1)$.

Ответ: возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. ◄

Задача 2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Исследуем знак производной (рис. 22.3) и учтем дифференцируемость функции f в точках $x = -3$ и $x = 1$. Получаем, что функция f возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-3; 1]$. ◄

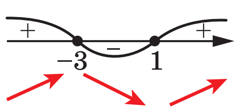


Рис. 22.3

1. Сформулируйте признак постоянства функции.
2. Сформулируйте признак возрастания функции.
3. Сформулируйте признак убывания функции.

УПРАЖНЕНИЯ

22.1.° Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

22.2.° Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = x^4 + 4x - 20$;
4) $f(x) = 8 - 4x - x^3$.

22.3.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$.

22.4.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
2) $f(x) = \frac{2x-9}{x-5}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$.

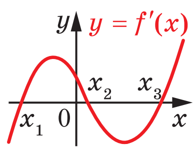


Рис. 22.4

22.5.• На рисунке 22.4 изображен график производной функции f, дифференцируемой на множестве действительных чисел. Укажите промежутки убывания функции f.

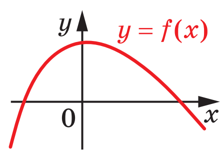
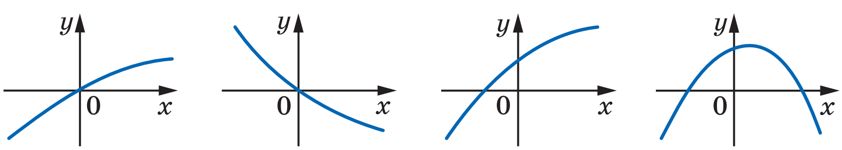


Рис. 22.5

22.6.•• На рисунке 22.5 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Среди приведенных на рисунке 22.6 графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f'(x)$.



а *б* *в* *г*

Рис. 22.6

22.7.•• Докажите, что функция $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ является убывающей.

22.8.•• Докажите, что функция $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$ является возрастающей.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

22.9. Решите уравнение $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$.

22.10. Решите неравенство $x\sqrt{7-x} > 0$.

23. Точки экстремума функции

Знакомясь с понятием дифференцируемости функции в точке, мы исследовали поведение функции вблизи этой точки или, как принято говорить, в ее **окрестности**.

Определение. **Промежуток $(a;\ b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.**

Например, промежуток $(-1;\ 3)$ — одна из окрестностей точки 2,5. Вместе с тем этот промежуток не является окрестностью точки 3.

На рисунке 23.1 изображены графики двух функций. Эти функции имеют общую особенность: существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Определение. **Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Например, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $y = \sin x$ (рис. 23.2). Записывают: $x_{max} = \frac{\pi}{2}$.

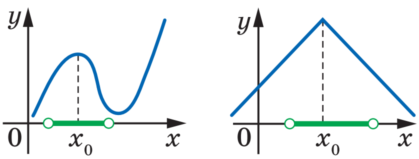


Рис. 23.1

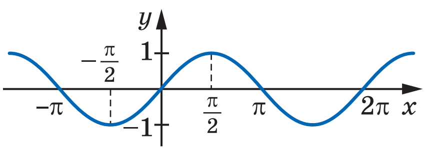


Рис. 23.2

На рисунке 23.1 $x_{max} = x_0$.

Определение. **Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Например, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ является точкой минимума функции $y = \sin x$ (рис. 23.2). Записывают: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 23.3 изображены графики функций, для которых x_0 является точкой минимума, то есть $x_{\min} = x_0$.

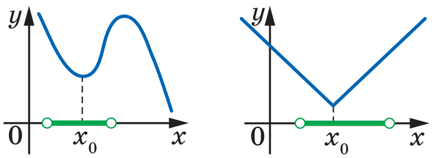


Рис. 23.3

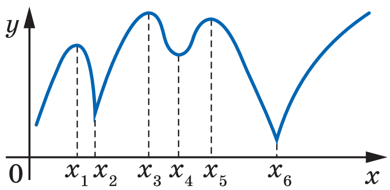


Рис. 23.4

Точки максимума и минимума имеют общее название: их называют **точками экстремума** функции (от латинского *extremum* — край, конец).

На рисунке 23.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 являются точками экстремума.

На рисунке 23.5 изображен график функции f, которая на промежутке $[x_1; x_2]$ является константой. Точка x_1 является точкой максимума, точка x_2 — минимума, а любая точка промежутка $(x_1; x_2)$ является одновременно как точкой максимума, так и точкой минимума функции f.

Наличие экстремума функции в точке x_0 связано с поведением функции в окрестности этой точки. Так, для функций, графики которых изображены на рисунке 23.6, имеем: на рисунке 23.6, *а*

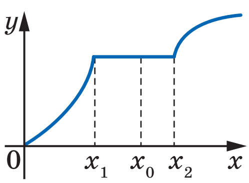


Рис. 23.5

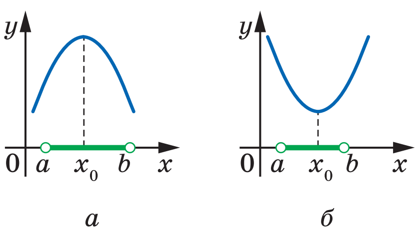


Рис. 23.6

функция возрастает на промежутке $(a; x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0; b)$; на рисунке 23.6, *б* функция убывает на промежутке $(a; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; b)$.

Вы знаете, что с помощью производной можно находить промежутки возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Две теоремы, приведенные ниже, показывают, как с помощью производной можно находить точки экстремума дифференцируемой функции.

Теорема 23.1 (признак точки максимума функции). ***Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f*** (рис. 23.6, *а*).

Теорема 23.2 (признак точки минимума функции). ***Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкою минимума функции f*** (рис. 23.6, *б*).

Иногда удобно пользоваться упрощенными формулировками этих двух теорем: *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*; *если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*.

Итак, для функции f точки экстремума можно искать по следующей схеме.

1) Найти $f'(x)$.

2) Исследовать знак производной.

3) Пользуясь соответствующими теоремами, найти точки экстремума.

Задача. Найдите точки экстремума функции:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

Решение. 1) Имеем:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2).$$

Исследуем знак производной в окрестностях точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 23.7). Получаем: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

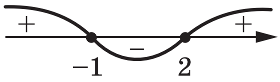


Рис. 23.7

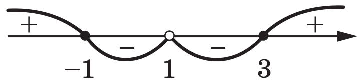


Рис. 23.8

2) Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$

Решая неравенство $x^2 - 2x - 3 > 0$ и учитывая, что $(x-1)^2 > 0$ при $x \neq 1$, получаем, что $f'(x) > 0$ на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$. Рассуждая аналогично, можно установить, что $f'(x) < 0$ на промежутках $(-1; 1)$ и $(1; 3)$. Рисунок 23.8 иллюстрирует полученные результаты.

Теперь можно сделать следующие выводы: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$. ◄

1. Какой промежуток называют окрестностью точки x_0?
2. Какую точку называют точкой максимума функции? точкой минимума функции?
3. Сформулируйте признак точки максимума; точки минимума.

УПРАЖНЕНИЯ

23.1.° На рисунке 23.9 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-10; 9]$. Укажите:

1) точки минимума; 2) точки максимума.

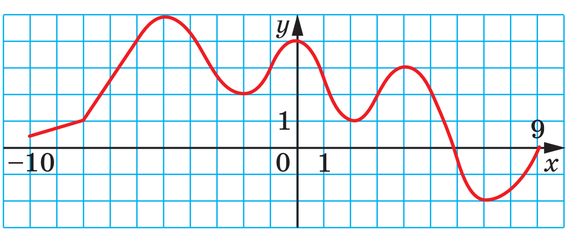


Рис. 23.9

23.2.° На рисунке 23.10 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-7; 7]$. Укажите:

1) точки минимума; 2) точки максимума.

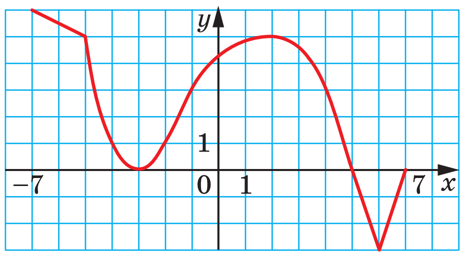


Рис. 23.10

23.3.° Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

23.4.° Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
4) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$.

23.5.• Функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве действительных чисел. На рисунке 23.11 изображен график ее производной. Укажите точки максимума и минимума функции $y = f(x)$.

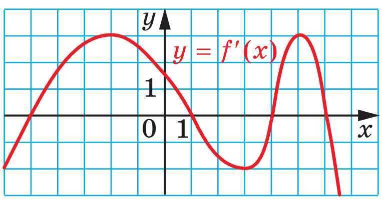


Рис. 23.11

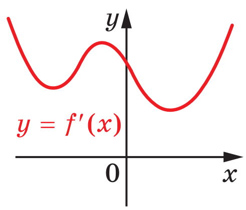


Рис. 23.12

23.6.• Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 23.12 изображен график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?

23.7.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$.

23.8.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

23.9. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на промежутке:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

23.10. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на промежутке:

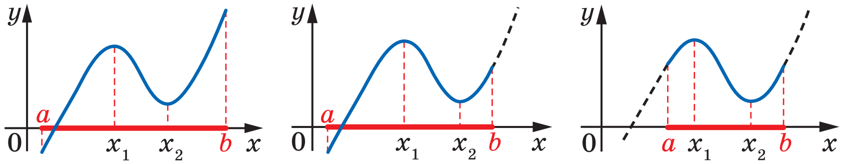
1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

24. Наибольшее и наименьшее значения функции

Какое количество продукции должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль? Как, имея ограниченные ресурсы, выполнить производственное задание в кратчайший срок? Как организовать доставку товара на автомобиле в торговые точки так, чтобы расход топлива был наименьшим? Такие и подобные задачи на поиск оптимального решения занимают значительное место в практической деятельности человека.

В этом пункте мы выясним, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a; b]$. Ограничимся рассмотрением только дифференцируемых функций.

Можно показать, что дифференцируемая на промежутке $[a; b]$ функция принимает на этом промежутке наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка, или в точках экстремума (рис. 24.1).



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ — *а*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ — *б*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ — *в*

Рис. 24.1

Исходя из этого, поиск наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на промежутке $[a; b]$ можно проводить, пользуясь следующей схемой.

1. Найти точки функции f, в которых ее производная равна нулю.
2. Вычислить значения функции в тех найденных точках, которые принадлежат рассматриваемому промежутку, и на концах этого промежутка.
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на промежутке $[-2; 0]$.

Решение. Найдем производную данной функции. Имеем:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Теперь решим уравнение $12x^2 - 18x - 12 = 0$. Отсюда

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

Промежутку $[-2; 0]$ принадлежит только точка $x = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Ответ: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

Задача 2. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго числа была наименьшей.

Решение. Пусть первое число равно x, тогда второе число равно $8 - x$. Из условия следует, что $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$, определенную на промежутке $[0; 8]$, и найдем, при каком значении x она принимает наименьшее значение.

Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$. Решим уравнение $3x^2 + 2x - 16 = 0$.

Получаем: $x = 2$ или $x = -\frac{8}{3}$.

Среди найденных корней промежутку $[0; 8]$ принадлежит только число 2. Имеем:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Следовательно, функция f принимает наименьшее значение при $x = 2$.

Ответ: $8 = 2 + 6$. ◄

Опишите, как найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции на промежутке $[a; b]$.

УПРАЖНЕНИЯ

24.1.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3; 0]$.

24.2.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$.

24.3.•• Представьте число 8 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы произведение одного из этих чисел и куба второго числа было наибольшим.

24.4.•• Представьте число 12 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы произведение квадрата одного из этих чисел и удвоенного второго числа было наибольшим.

24.5.•• Представьте число 180 в виде суммы трех неотрицательных слагаемых таких, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

24.6.•• Представьте число 18 в виде суммы трех неотрицательных чисел таких, чтобы два из них относились как 8 : 3, а сумма кубов этих трех чисел была наименьшей.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

24.7. Начертите график какой-нибудь функции, обладающей следующими свойствами: областью определения является промежуток $[-3; 4]$; областью значений — промежуток $[-2; 3]$; нули функции равны -1 и 2; $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-3; 0)$ и $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(0; 2)$.

25. Построение графиков функций

Когда в предыдущих классах вам приходилось строить графики, вы, как правило, поступали следующим образом: отмечали на координатной плоскости некоторое количество точек, принадлежащих графику, а затем соединяли их. Точность построения зависела от количества отмеченных точек.

На рисунке 25.1 изображены несколько точек, принадлежащих графику некоторой функции $y = f(x)$. Эти точки можно соединить по-разному, например так, как показано на рисунках 25.2 и 25.3.

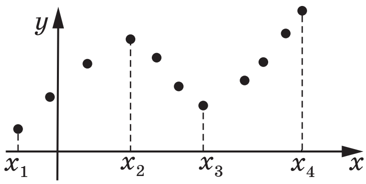


Рис. 25.1

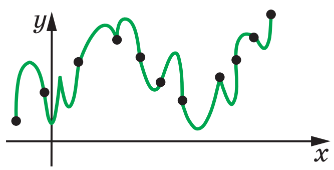


Рис. 25.2

Однако если знать, что функция f возрастает на каждом из промежутков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$, убывает на промежутке $[x_2; x_3]$ и является дифференцируемой, то, скорее всего, будет построен график, приведенный на рисунке 25.4.

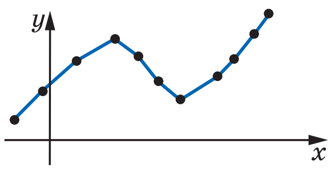


Рис. 25.3

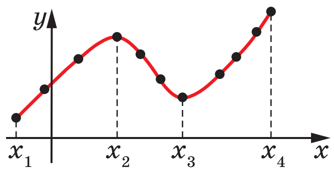


Рис. 25.4

Вы знаете, какими особенностями обладают графики четной, нечетной, периодической функций и т. д. Вообще, чем больше свойств функции удается определить, тем точнее можно построить ее график.

Исследование свойств функции будем проводить по следующему плану.

1. *Найти область определения функции.*
2. *Исследовать функцию на четность.*
3. *Найти нули функции.*
4. *Найти промежутки возрастания и убывания функции.*
5. *Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.*

6. *Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).*

Заметим, что приведенный план исследования носит рекомендательный характер и не является постоянным и исчерпывающим. При исследовании функции важно обнаружить такие ее свойства, которые позволят корректно построить график.

Задача. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ и постройте ее график.

Решение. 1. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Имеем: $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Отсюда $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то есть функция $y=f(-x)$ не совпадает ни с функцией $y=f(x)$, ни с функцией $y=-f(x)$. Таким образом, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Имеем: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 и 6 являются нулями функции f.

4–5. Имеем: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Исследовав знак производной (рис. 25.5), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутке $[0;\ 4]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty;0]$ и $[4;+\infty)$. Следовательно, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Имеем: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

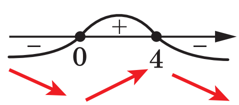


Рис. 25.5

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 25.6). ◄

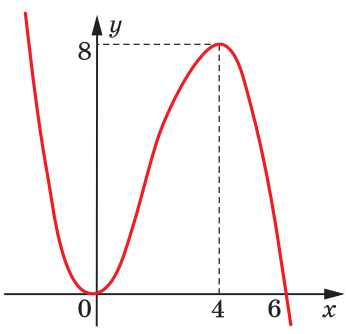


Рис. 25.6

● Опишите план исследования свойств функции.

УПРАЖНЕНИЯ

25.1.•• Исследуйте данную функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x^3$.

25.2.•• Исследуйте данную функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

Приращение аргумента x в точке x_0

$\Delta x = x - x_0$

Приращение функции f в точке x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ или $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Производная функции

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен значению производной функции f в точке x_0.

Механический смысл производной

Если $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой, то ее мгновенная скорость в момент времени t_0 равна значению производной функции $y = s(t)$ в точке t_0.

Дифференцируемость функции

Если функция имеет производную в некоторой точке, то ее называют дифференцируемой в этой точке.

Если функция f дифференцируема в каждой точке области определения, то ее называют дифференцируемой.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Правила вычисления производных

Производная суммы	$(f+g)'=f'+g'$
Производная произведения	$(fg)'=f'g+g'f$
Производная частного	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

Признак постоянства функции

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x)=0,$ то функция f является константой на этом промежутке.

Признак возрастания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x)>0,$ то функция f возрастает на этом промежутке.

Признак убывания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x)<0,$ то функция f убывает на этом промежутке.

Окрестность точки

Промежуток $(a;\ b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Точки экстремума функции

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)\geqslant f(x)$.

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)\leqslant f(x)$.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.

Признаки точек максимума и минимума

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка.

Если для всех $x \in (a;\ x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Если для всех $x \in (a;\ x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

План исследования свойств функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность.
3. Найти нули функции.
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
5. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
6. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

26. Упражнения для повторения курса алгебры и начал анализа 10 класса

1. Функции, их свойства и графики

26.1. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;
3) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-5}$;
4) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+4}$;
5) $f(x)=\dfrac{7x+13}{x^2-7x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$.

26.2. Найдите область значений функции:

1) $f(x)=\sqrt{x}+1$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-2$;
3) $g(x)=3-x^2$;
4) $f(x)=x^2+2$.

26.3. Найдите область определения и постройте график функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$.

26.4. Найдите нули функции:

1) $f(x)=\sqrt{x+7}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-4}$.

26.5. Исследуйте на четность функцию:

1) $f(x)=7x^6$;
2) $f(x)=3x^5-2x^7$;
3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;
4) $f(x)=x^2-x+1$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$.

26.6. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}+\left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3$;
2) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$.

26.7. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[4]{3x-5}$;
2) $y=\sqrt[6]{-x}$;
3) $y=\sqrt[5]{x-4}$;
4) $y=\sqrt[8]{6x-x^2}$.

26.8. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, если $a\geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{b^4}$, если $b\leqslant 0$;
3) $\sqrt[7]{c^7}$.

26.9. Постройте график функции:

1) $y=\left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7$;
3) $y=\left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8$;
2) $y=\sqrt[7]{(x-2)^7}$;
4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$.

26.10. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}-\sqrt{7}$;
2) $\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{35}\right)^5}-\sqrt[6]{\left(\sqrt{35}-6\right)^6}$.

26.11. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$;
2) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$;
3) $\sqrt[4]{-243y^5}$.

26.12. Сравните числа:

1) $\sqrt[6]{80}$ и $\sqrt[3]{9}$;
3) $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt{3}$;
2) $\sqrt[3]{6}$ и $\sqrt{5}$;
4) $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{9}$.

26.13. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;
2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$;
3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$.

26.14. Вычислите значение выражения:

1) $3^{1,2}\cdot3^{-0,7}\cdot3^{1,5}$;
4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;
2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot11^{-\frac{3}{4}}\cdot11^{\frac{1}{12}}$;
5) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}$.
3) $36^{0,7}\cdot6^{-0,4}$;

26.15. Докажите тождество:

1) $$\left(\frac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}};$$

2) $$\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.$$

26.16. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$;
5) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;
2) $\sqrt{6-x}=3x-4$;
6) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$;
3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;
7) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-5=0$;
4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$;
8) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$.

2. Тригонометрические функции

26.17. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin 168^\circ \cos 126^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 206^\circ \cos(-223^\circ)$.

26.18. Найдите значение выражения:

1) $\sin 780^\circ$; 2) $\cos 1200^\circ$; 3) $\cos \frac{11\pi}{6}$;

26.19. Вычислите $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha$.

26.21. Упростите выражение

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi - \alpha).$$

26.22. Дано: $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$.

26.23. Докажите тождество:

1) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

26.24. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

2) $\sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2\cos^2 3\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$.

26.25. Решите уравнение:

1) $2\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0$;

2) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$;

3) $3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1$.

26.26. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

26.27. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

26.28. Сколько корней уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$ принадлежат промежутку $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$?

26.29. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 x=3\sin x+2$;
2) $\cos 2x+\sin x=0$;
3) $2\cos 2x-3\cos x+2=0$;
4) $3\operatorname{tg}^2 x-8\cos^2 x+1=0$;
5) $\sin x+2\cos x=0$;
6) $\sin x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

3. Производная и ее применение

26.30. Найдите производную функции:

1) $y=3x^4-2x^2+5$;
2) $y=4x^3-\frac{2}{x}$;
3) $y=\frac{3}{x}-2\sqrt{x}+7$;
4) $y=5\sin x-7\cos x$.

26.31. Найдите производную функции:

1) $y=(x^2-1)(x^5+2)$;
2) $y=x^3\sin x$;
3) $y=\sqrt[3]{x}\cos x$;
4) $y=\frac{2x+3}{3x-2}$;
5) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$;
6) $y=\frac{x^2-3x}{\cos x}$.

26.32. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=x^2-5x$, в которой касательная к этому графику образует с положительным направлением оси абсцисс угол $45°$.

26.33. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$ в точке его пересечения с осью ординат.

26.34. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x)=x^3+x,\ x_0=-1$;
2) $f(x)=x^2-\sqrt{x},\ x_0=4$;
3) $f(x)=\frac{x+2}{x-4},\ x_0=3$;
4) $f(x)=\sin x,\ x_0=-\frac{\pi}{3}$.

26.35. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x)=x^2-4x$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

26.36. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t)=$ $=t^2+3t-2$ (перемещение измеряют в метрах, время — в секундах). В какой момент времени t скорость движения тела составляет 10 м/с?

26.37. Докажите, что функция $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-5$ является возрастающей.

26.38. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $y=3x-x^3$;
2) $y=\frac{x^5}{5}-x^4-3$;
3) $y=x+\frac{16}{x}$;
4) $y=x+\frac{4}{x^2}$;
5) $y=x^2(x-3)$;
6) $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

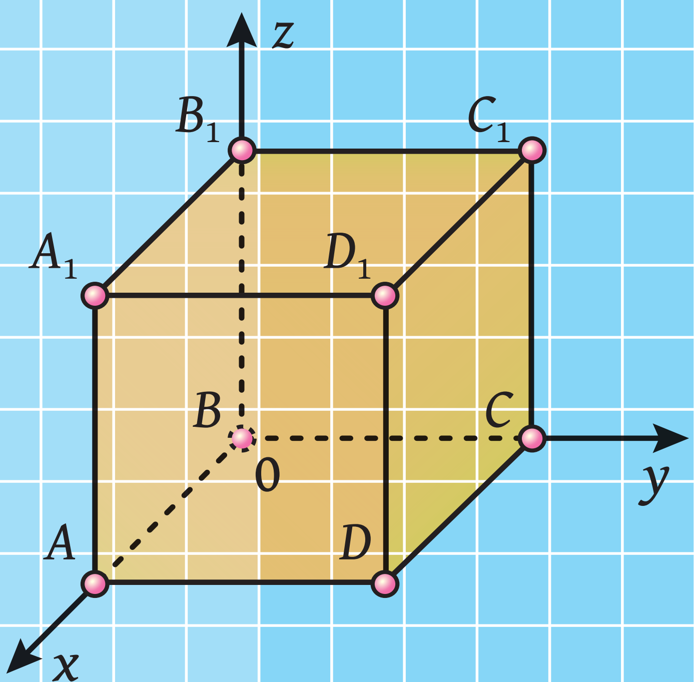
26.39. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x)=x^3-3x$, $[-2; 0]$;
2) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $[-2; 4]$.

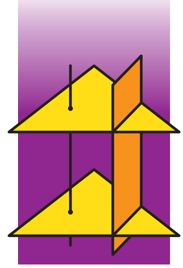
26.40. Представьте число 64 в виде суммы двух положительных слагаемых таких, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

26.41. Найдите положительное число, для которого разность его утроенного квадрата и его куба является наибольшей.

Раздел 2
Стереометрия



ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ §4



В этом параграфе вы ознакомитесь с основными понятиями стереометрии, аксиомами стереометрии и следствиями из них. Расширите свои представления о многогранниках. Вы узнаете о взаимном расположении двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве. Ознакомитесь с правилами, по которым изображают пространственные фигуры на плоскости.

27. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии

Изучая математику, вы со многими понятиями ознакомились с помощью определений. Так, из курса планиметрии вам хорошо знакомы определения четырехугольника, трапеции, окружности и др.

Определение любого понятия основано на других понятиях, содержание которых вам уже известно. Например, рассмотрим определение трапеции: «Трапецией называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны». Видим, что определение трапеции основано на таких уже введенных понятиях, как четырехугольник, сторона четырехугольника, параллельные и непараллельные стороны и др. Итак, определения вводятся по принципу «новое основано на старом». Тогда ясно, что должны существовать первоначальные понятия, которым определений не дают. Их называют **основными понятиями** (рис. 27.1).

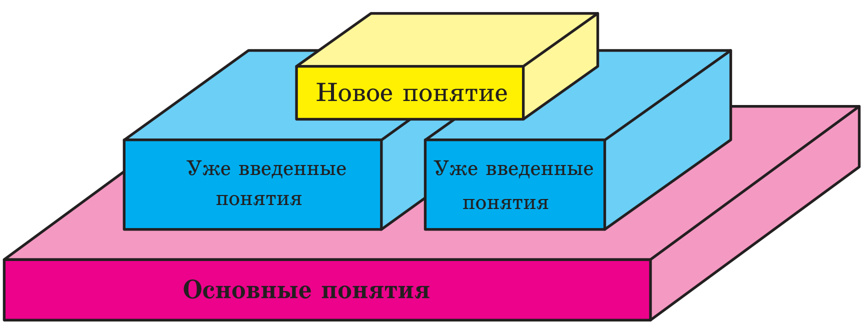


Рис. 27.1

В изученном вами курсе планиметрии определения не давали таким фигурам, как точка и прямая. В стереометрии, кроме них, к основным понятиям отнесем еще одну фигуру — **плоскость.**

Наглядное представление о плоскости дают поверхность водоема в безветренную погоду, поверхность зеркала, поверхность полированного стола, мысленно продолженные во всех направлениях.

Используя понятие плоскости, можно считать, что в планиметрии мы рассматривали только одну плоскость, и все изучаемые фигуры принадлежали этой плоскости. В стереометрии же рассматривают бесконечно много плоскостей, расположенных в **пространстве.**

Как правило, плоскости обозначают строчными греческими буквами α, β, γ, ... На рисунках плоскости изображают в виде параллелограмма (рис. 27.2) или других ограниченных частей плоскости (рис. 27.3).

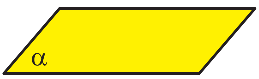


Рис. 27.2

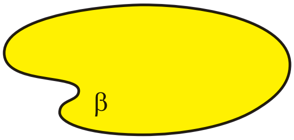


Рис. 27.3

Плоскость, так же как и прямая, состоит из точек, то есть плоскость — это множество точек.

Существует несколько случаев взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве. Приведем примеры.

На рисунке 27.4 изображена точка A, принадлежащая плоскости α. Также говорят, что *точка* A *лежит в плоскости* α или *плоскость* α *проходит через точку* A. Кратко это можно записать так: $A \in \alpha$.

На рисунке 27.5 изображена точка B, не принадлежащая плоскости β. Кратко это можно записать так: $B \notin \beta$.

На рисунке 27.6 изображена прямая a, принадлежащая плоскости α. Также говорят, что *прямая* a *лежит в плоскости* α или *плоскость* α *проходит через прямую* a. Кратко это можно записать так: $a \subset \alpha$.

Рис. 27.4

Рис. 27.5

Рис. 27.6

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что **прямая пересекает плоскость.** На рисунке 27.7 изображена прямая a, пересекающая плоскость α в точке A. Записывают: $a \cap \alpha = A$.

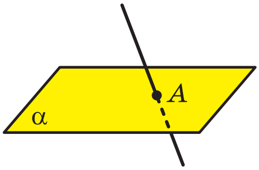


Рис. 27.7

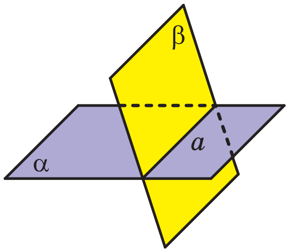


Рис. 27.8

В дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две плоскости» и т. п., будем иметь в виду, что это разные точки, разные прямые и разные плоскости.

Если две плоскости имеют общую точку, то говорят, что эти плоскости **пересекаются**.

На рисунке 27.8 изображены плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a. Записывают: $\alpha \cap \beta = a$.

На начальном этапе изучения стереометрии невозможно доказывать теоремы, опираясь на другие утверждения, поскольку этих утверждений еще нет. Поэтому первые свойства, касающиеся точек, прямых и плоскостей в пространстве, принимают без доказательства и называют **аксиомами.**

Отметим, что ряд аксиом стереометрии по формулировкам дословно совпадают со знакомыми вам аксиомами планиметрии. Например:

- *какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей;*
- *через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.*

Мы не будем знакомиться со строгим аксиоматическим построением стереометрии. Рассмотрим лишь некоторые утверждения, выражающие основные свойства плоскостей пространства, основываясь на которых обычно строят курс стереометрии в школе.

Аксиома А1. В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

Если в любой плоскости пространства выполняются аксиомы планиметрии, то выполняются и следствия из этих аксиом, то есть теоремы планиметрии. Следовательно, в стереометрии можно пользоваться всеми известными нам свойствами плоских фигур.

Аксиома А2. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Рисунки 27.9–27.11 иллюстрируют эту аксиому.

Рис. 27.9

Рис. 27.10

Рис. 27.11

Из этой аксиомы следует, что три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость, проходящую через эти точки. Поэтому для обозначения плоскости можно указать любые три ее точки, не лежащие на одной прямой. Например, на рисунке 27.12 изображена плоскость ABC.

Запись $M \in ABC$ означает, что точка M принадлежит плоскости ABC. Запись $MN \subset ABC$ означает, что прямая MN принадлежит плоскости ABC (рис. 27.12).

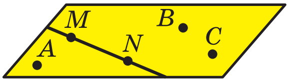


Рис. 27.12

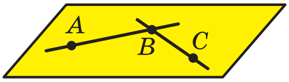


Рис. 27.13

Аксиома А3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Например, на рисунке 27.13 точки A, B и C принадлежат плоскости ABC. Тогда можно записать: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Из этой аксиомы следует, что если прямая не принадлежит плоскости, то она имеет с данной плоскостью не более одной общей точки.

Утверждение, сформулированное в аксиоме **А3**, часто используют на практике, когда хотят проверить, является ли данная поверхность ровной (плоской). Для этого к поверхности в разных местах прикладывают ровную рейку и проверяют, есть ли зазор между рейкой и поверхностью (рис. 27.14).

Аксиома А4. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Эту аксиому можно проиллюстрировать с помощью согнутого листа бумаги или с помощью вашего учебника (рис. 27.15).

Рис. 27.14

Рис. 27.15

Задача. Докажите, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Решение. Пусть точка A является общей для двух плоскостей α и β, то есть $A \in \alpha$ и $A \in \beta$ (рис. 27.16). По аксиоме **А4** плоскости α и β пересекаются по прямой. Пусть $\alpha \cap \beta = a$. Тогда все общие точки плоскостей α и β принадлежат прямой a. Точка A является общей для плоскостей α и β. Следовательно, $A \in a$. ◄

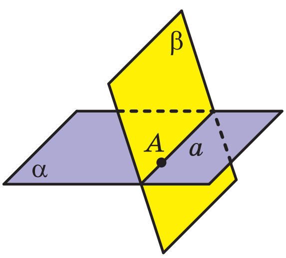


Рис. 27.16

Кроме аксиом, есть и другие свойства, описывающие взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве. Опираясь на аксиомы, можно доказать, например, следующие утверждения (следствия из аксиом стереометрии).

Теорема 27.1. ***Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит плоскость, и притом только одна*** (рис. 27.17).

Теорема 27.2. ***Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна*** (рис. 27.18).

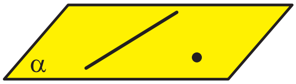


Рис. 27.17

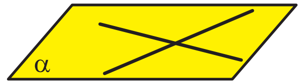


Рис. 27.18

Из аксиомы **A2** и теорем 27.1 и 27.2 следует, что *плоскость однозначно определяется*:

1) *тремя точками, не лежащими на одной прямой*;
2) *прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой*;
3) *двумя пересекающимися прямыми*.

Таким образом, мы указали три способа задания плоскости.

1. Как в математике называют первоначальные понятия, которым не дают определения?
2. Какие фигуры входят в список основных понятий стереометрии?
3. В каком случае говорят, что прямая пересекает плоскость?
4. В каком случае говорят, что плоскости пересекаются?
5. Сформулируйте аксиомы **A1**, **A2**, **A3**, **A4**.
6. Какие следствия из аксиом стереометрии вы знаете?
7. Укажите способы однозначного задания плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

27.1.° Изобразите плоскость α, принадлежащую ей точку M и не принадлежащую ей точку K. Запишите это с помощью соответствующих символов.

27.2.° Изобразите плоскость γ, проходящую через прямую a. Запишите это с помощью соответствующих символов.

27.3.° Изобразите плоскость α и прямую b, пересекающую данную плоскость в точке A. Запишите это с помощью соответствующих символов. Сколько точек прямой b принадлежит плоскости α?

27.4.° Изобразите плоскости β и γ, пересекающиеся по прямой c. Запишите это с помощью соответствующих символов.

27.5.° Запишите с помощью символов взаимное расположение точек, прямых и плоскости, изображенных на рисунке 27.19.

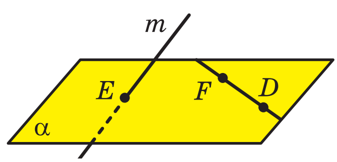


Рис. 27.19

27.6.° Сколько плоскостей можно провести через данные прямую и точку?

27.7.° Даны точки A, B и C такие, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки A, B и C?

27.8.° Даны точки D, E и F такие, что $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки D, E и F?

27.9.•• Прямые AB и AC пересекают плоскость α в точках B и C, точки D и E принадлежат этой плоскости (рис. 27.20). Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC.

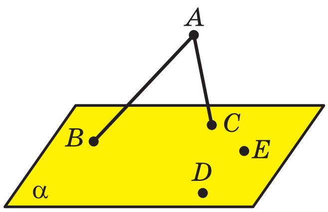


Рис. 27.20

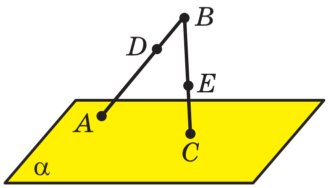


Рис. 27.21

27.10.•• Прямая BA пересекает плоскость α в точке A, прямая BC — в точке C (рис. 27.21). На отрезке AB отметили точку D, на отрезке BC — точку E. Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью α.

27.11.•• Прямая m — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 27.22). Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C — плоскости β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и с плоскостью β.

27.12.•• Квадраты $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости (рис. 27.23). На отрезке AD отметили точку E, а на отрезке BC_1 — точку F. Постройте точку пересечения:

1) прямой CE с плоскостью ABC_1;

2) прямой FD_1 с плоскостью ABC.

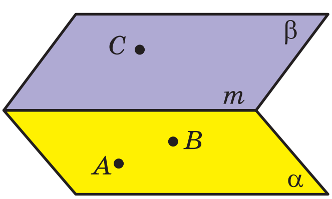


Рис. 27.22

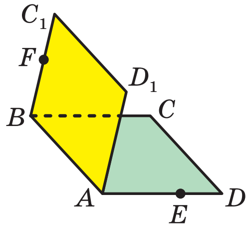


Рис. 27.23

27.13.•• Как с помощью двух ниток столяр может проверить, лежат ли концы четырех ножек стула в одной плоскости?

27.14.•• Точка M — общая точка двух плоскостей ABC и BCD. Найдите отрезок BC, если $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

27.15.•• Точка K — общая точка двух плоскостей MNF и MNE. Найдите отрезок MN, если $MK = KN = 5$ см.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

27.16. На высоте BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили точку M. Найдите отношение площади треугольника AMC к площади треугольника ABC, если $BD = 12$ см, $BM = 8$ см.

28. Пространственные фигуры. Начальные сведения о многогранниках

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают пространственные фигуры, то есть фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Некоторые из пространственных фигур вам уже знакомы. Так, на рисунке 28.1 изображены цилиндр, конус и шар. Подробно эти фигуры вы будете изучать в 11 классе.

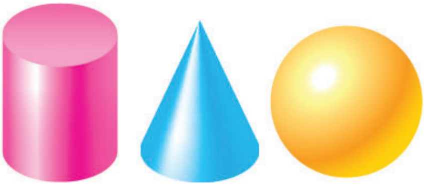


Рис. 28.1

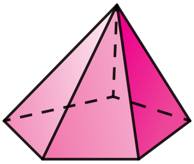


Рис. 28.2

На рисунке 28.2 изображена еще одна знакомая вам пространственная фигура — пирамида. Эта фигура является частным видом **многогранника.**

Примеры многогранников показаны на рисунке 28.3.

Рис. 28.3

Поверхность многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника.** Стороны многоугольников называют **ребрами многогранника,** а вершины — **вершинами многогранника** (рис. 28.4).

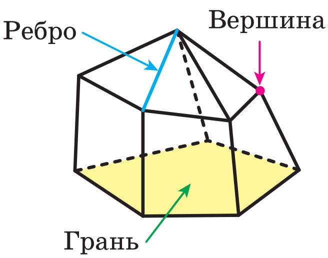


Рис. 28.4

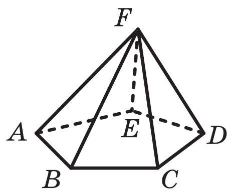


Рис. 28.5

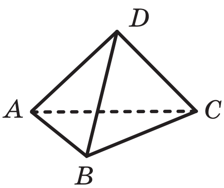


Рис. 28.6

На рисунке 28.5 изображена пятиугольная пирамида $FABCDE$. Поверхность этого многогранника состоит из пяти треугольников, которые называют **боковыми гранями пирамиды,** и одного пятиугольника, который называют **основанием пирамиды.** Вершину F, общую для всех боковых граней, называют **вершиной пирамиды.** Ребра FA, FB, FC, FD и FE называют **боковыми ребрами пирамиды,** а ребра AB, BC, CD, DE и EA — **ребрами основания пирамиды.**

На рисунке 28.6 изображена треугольная пирамида $DABC$. Треугольную пирамиду называют также **тетраэдром.**

Еще одним частным видом многогранника является **призма.** На рисунке 28.7 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Этот многогранник имеет пять граней, две из которых — равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Их называют **основаниями призмы.** Остальные грани призмы — параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы.** Ребра AA_1, BB_1 и CC_1 называют **боковыми ребрами призмы.**

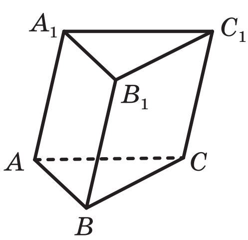


Рис. 28.7

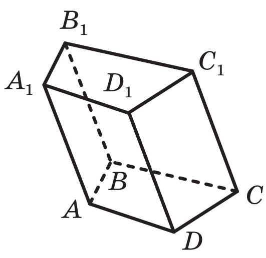


Рис. 28.8

На рисунке 28.8 изображена четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ее поверхность состоит из двух равных четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (основания призмы) и четырех параллелограммов (боковые грани призмы).

Вы знакомы также с частным видом четырехугольной призмы — **прямоугольным параллелепипедом.** На рисунке 28.9 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

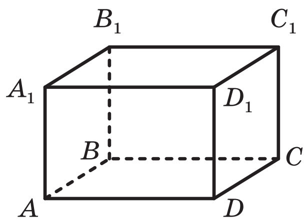


Рис. 28.9

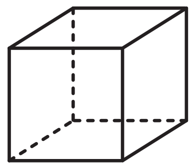


Рис. 28.10

В свою очередь, частным видом прямоугольного параллелепипеда является **куб.** Все грани куба — равные квадраты (рис. 28.10).

Четырехугольную призму, основанием которой является параллелограмм, называют **параллелепипедом.**

В курсе геометрии 11 класса вы более подробно ознакомитесь с многогранниками и их частными видами.

Задача. На ребрах AA_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM \neq DN$ (рис. 28.11). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

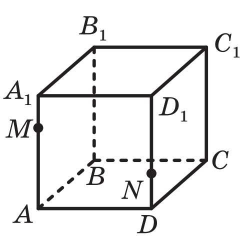


Рис. 28.11

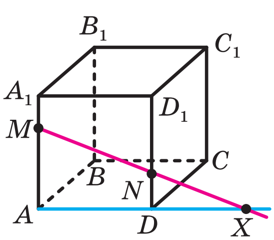


Рис. 28.12

Решение. Точки M и N принадлежат плоскости AA_1D_1. Тогда по аксиоме **А3** прямая MN принадлежит этой плоскости. Аналогично прямая AD также принадлежит плоскости AA_1D_1. Из планиметрии известно, что прямые, лежащие в одной плоскости, или параллельны, или пересекаются. Поскольку $AM \neq DN$, то прямые AD и MN пересекаются. Пусть X — точка их пересечения (рис. 28.12).

Точки A и D принадлежат плоскости ABC. Тогда по аксиоме **А3** прямая AD принадлежит этой же плоскости. Точка X принадлежит прямой AD. Следовательно, точка X принадлежит плоскости ABC. Поскольку точка X также принадлежит прямой MN, то прямая MN пересекает плоскость ABC в точке X. ◄

?

1. Назовите известные вам пространственные фигуры.
2. Из каких фигур состоит поверхность многогранника? Как их называют?
3. Что называют ребрами многогранника? вершинами многогранника?
4. Какие виды многогранников вы знаете? Опишите эти многогранники.

УПРАЖНЕНИЯ

28.1.° На рисунке 28.13 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:
1) основания параллелепипеда;
2) боковые грани параллелепипеда;
3) боковые ребра параллелепипеда;
4) ребра нижнего основания параллелепипеда.

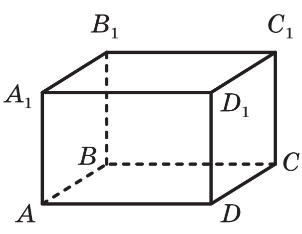


Рис. 28.13

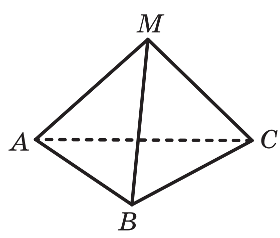


Рис. 28.14

28.2.° На рисунке 28.14 изображена пирамида $MABC$. Укажите:
1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые ребра пирамиды;
5) ребра основания пирамиды.

28.3.• На ребре BC тетраэдра $SABC$ отметили точку D. Какая прямая является линией пересечения плоскостей: 1) ASD и ABC; 2) ASD и BSC; 3) ASD и ASC?

28.4.• Точка M принадлежит грани ASC тетраэдра $SABC$, точка D — ребру BC (рис. 28.15). Постройте линию пересечения плоскости ABC и плоскости, проходящей через прямую SD и точку M.

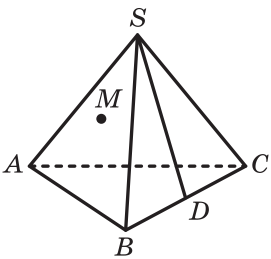


Рис. 28.15

28.5.• На боковых ребрах SA и SB пирамиды $SABCD$ отметили соответственно точки M и K. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC, если прямые MK и AB не параллельны.

28.6.• На боковых ребрах SA и SC пирамиды $SABCD$ отметили соответственно точки M и K. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC, если прямые MK и AC не параллельны.

28.7.• Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямые, по которым плоскость, проходящая через точки A, C и B_1, пересекает грани куба.

28.8.• Даны призма $ABCA_1B_1C_1$ и плоскость, проходящая через прямые AC_1 и AB. Постройте прямые, по которым эта плоскость пересекает грани призмы.

28.9.•• Точка M принадлежит грани ASB тетраэдра $SABC$, точка K — грани BSC (рис. 28.16). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

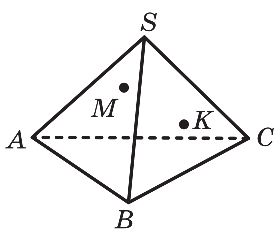


Рис. 28.16

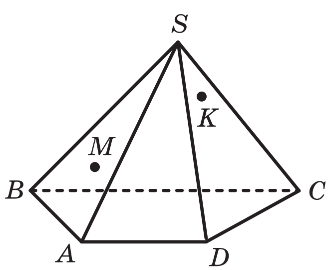


Рис. 28.17

28.10.•• Точка M принадлежит грани ASB пирамиды $SABCD$, точка K — грани CSD (рис. 28.17). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

28.11.•• Дана пирамида *SABCD* (рис. 28.18). Постройте линию пересечения плоскостей *ASB* и *CSD*.

28.12.•• Дана пирамида *SABCDE* (рис. 28.19). Постройте линию пересечения плоскостей *ASE* и *BSC*.

28.13.•• На ребрах *AB* и *CD* тетраэдра *DABC* отметили соответственно точки *E* и *F*. Постройте линию пересечения плоскостей *AFB* и *CED*.

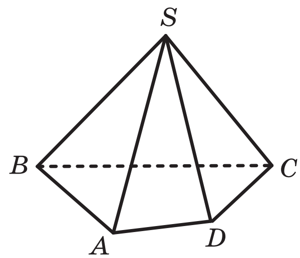


Рис. 28.18

28.14.•• Дана пирамида *MABCD*, точка *K* принадлежит отрезку *BD* (рис. 28.20). Постройте линию пересечения плоскостей *MCK* и *MAB*.

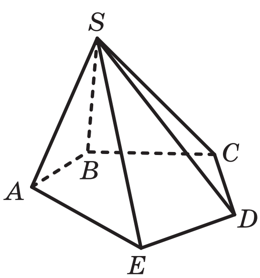


Рис. 28.19

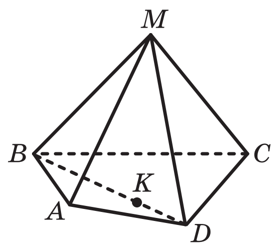


Рис. 28.20

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

28.15. Диагональ равнобокой трапеции разбивает ее на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

29. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Из курса планиметрии вы знаете, что две прямые называют пересекающимися, если они имеют только одну общую точку. Такое же определение пересекающихся прямых дают и в стереометрии.

Вам также известно, что две прямые называют параллельными, если они не пересекаются. Можно ли это определение перенести в стереометрию?

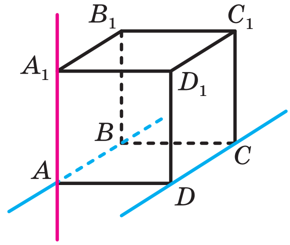


Рис. 29.1

Обратимся к рисунку 29.1, на котором изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каждая из прямых AB и AA_1 не имеет с прямой DC общих точек. При этом прямые AB и DC лежат в одной плоскости — в плоскости ABC, а прямые AA_1 и DC не лежат в одной плоскости, то есть не существует плоскости, которая проходила бы через эти прямые.

Этот пример показывает, что в стереометрии для двух прямых, не имеющих общих точек, возможны два случая взаимного расположения: прямые лежат в одной плоскости и прямые не лежат в одной плоскости. Для каждого из этих случаев дадим соответствующее определение.

Определение. Две прямые в пространстве называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если прямые a и b параллельны, то записывают: $a \parallel b$.

Определение. Две прямые в пространстве называют скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Например, на рисунке 29.1 прямые AB и DC — параллельные, а прямые AA_1 и DC — скрещивающиеся.

Международный центр культуры и искусств, г. Киев

Корабельный лес

Сруб

Рис. 29.2

Наглядное представление о параллельных прямых дают колонны здания, корабельный лес, бревна сруба (рис. 29.2).

Рис. 29.3

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают провода линий электропередачи, различные элементы строительных конструкций (рис. 29.3).

Итак, существуют три возможных случая взаимного расположения двух прямых в пространстве (рис. 29.4):

1) прямые пересекаются;
2) прямые параллельны;
3) прямые скрещиваются.

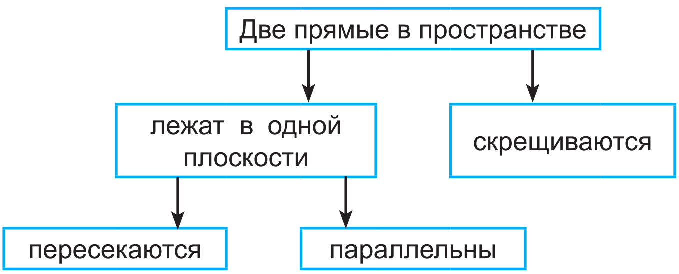


Рис. 29.4

Два отрезка называют **параллельными (скрещивающимися)**, если они лежат на параллельных (скрещивающихся) прямых.

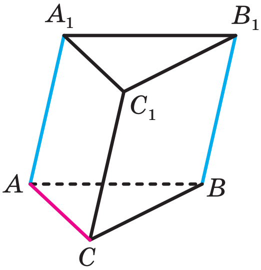


Рис. 29.5

Например, ребра AA_1 и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 29.5) являются параллельными, а ребра AC и BB_1 — скрещивающимися.

Теорема 29.1. ***Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.***

Доказательство. Пусть даны параллельные прямые a и b. Докажем, что существует единственная плоскость α такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$.

Существование плоскости α, проходящей через прямые a и b, следует из определения параллельных прямых.

Если предположить, что существует еще одна плоскость, проходящая через прямые a и b, то через прямую a и некоторую точку прямой b будут проходить две различные плоскости, что противоречит теореме 27.1. ◄

В п. 27 были указаны три способа задания плоскости. Теорему 29.1 можно рассматривать как еще один способ задания плоскости — с помощью двух параллельных прямых.

Установить параллельность двух прямых, лежащих в одной плоскости, можно с помощью известных вам из курса планиметрии признаков параллельности двух прямых. А как установить, являются ли две прямые скрещивающимися? Ответить на этот вопрос позволяет следующая теорема.

Теорема 29.2 (признак скрещивающихся прямых). ***Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые — скрещивающиеся*** (рис. 29.6).

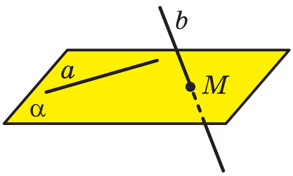


Рис. 29.6

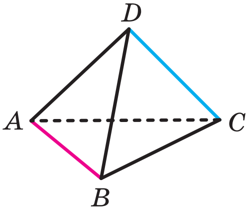


Рис. 29.7

На рисунке 29.7 ребра AB и DC тетраэдра $DABC$ являются скрещивающимися. Действительно, прямая DC пересекает плоскость ABC в точке C, не принадлежащей прямой AB. Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых прямые AB и DC являются скрещивающимися.

1. Какие две прямые в пространстве называют параллельными? скрещивающимися?
2. Какие существуют случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве?
3. Какие два отрезка называют параллельными? скрещивающимися?

4. Сформулируйте теорему о плоскости, которую задают две параллельные прямые.

5. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.

УПРАЖНЕНИЯ

29.1.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.8). Назовите его ребра: 1) параллельные ребру CD; 2) скрещивающиеся с ребром CD.

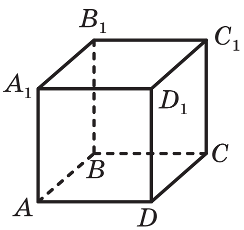


Рис. 29.8

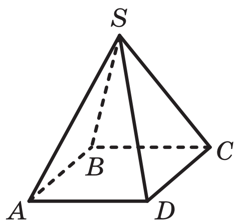


Рис. 29.9

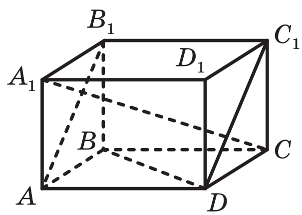


Рис. 29.10

29.2.° Укажите модели скрещивающихся прямых, используя предметы классной комнаты.

29.3.° Дана пирамида $SABCD$ (рис. 29.9). Назовите ребра пирамиды, скрещивающиеся с ребром SA.

29.4.° Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.10). Укажите взаимное расположение прямых:

1) BC и A_1C;	3) BD и CC_1;	5) DC_1 и BB_1;
2) AB и C_1D_1;	4) AB_1 и DC_1;	6) AA_1 и CC_1.

29.5.° Верно ли утверждение:

1) две прямые, не являющиеся параллельными, имеют общую точку;
2) две прямые, не являющиеся скрещивающимися, лежат в одной плоскости;
3) две прямые являются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны?

29.6.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.8). Докажите, что прямые AA_1 и BC — скрещивающиеся.

29.7.° Треугольники ABC и ADB лежат в различных плоскостях (рис. 29.11). Каково взаимное расположение прямых AD и BC? Ответ обоснуйте.

29.8.• Каким может быть взаимное расположение прямых b и c, если:

1) прямые a и b пересекаются, а прямые a и c параллельны;
2) прямые a и b параллельные, а прямые a и c скрещивающиеся?

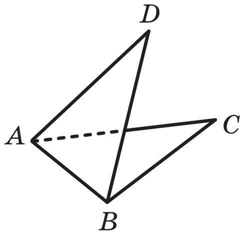


Рис. 29.11

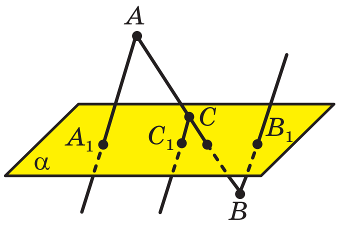


Рис. 29.12

29.9.[•] Сколько плоскостей могут задавать три попарно параллельные прямые? Сделайте рисунок.

29.10.[•] Конец A отрезка AB принадлежит плоскости α. Через точку B и точку C, принадлежащую отрезку AB, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно.

1) Найдите отрезок BB_1, если точка C — середина отрезка AB и $CC_1 = 5$ см.

2) Найдите отрезок CC_1, если $AC : BC = 3 : 4$ и $BB_1 = 28$ см.

29.11.[•] Конец C отрезка CD принадлежит плоскости β. На отрезке CD отметили точку E так, что $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D и E провели параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках D_1 и E_1 соответственно. Найдите отрезок DD_1, если $EE_1 = 12$ см.

29.12.[••] На отрезке AB, не пересекающем плоскость α, отметили точку C так, что $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B и C провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок A_1C_1, если $B_1C_1 = 10$ см.

29.13.[••] Точка C — середина отрезка AB, не пересекающего плоскость β. Через точки A, B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок AA_1, если $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

29.14.[*] Через концы отрезка AB, пересекающего плоскость α, и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно (рис. 29.12). Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

29.15.[*] Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α. Отрезок BM — медиана треугольника ABC, точка O — середина отрезка BM. Через точки A, B, C, M и O проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 и O_1 соответственно. Найдите отрезок BB_1, если $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

29.16. Точка E — середина медианы BM треугольника ABC. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение, в котором точка K делит отрезок BC, считая от вершины B.

30. Параллельность прямой и плоскости

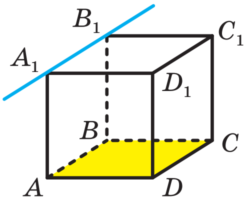


Рис. 30.1

Вам уже известны два возможных случая взаимного расположения прямой и плоскости:

1) прямая принадлежит плоскости, то есть все точки прямой принадлежат плоскости;

2) прямая пересекает плоскость, то есть прямая имеет с плоскостью только одну общую точку.

Понятно, что возможен и третий случай, когда прямая и плоскость не имеют общих точек. Например, прямая, содержащая ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не имеет общих точек с плоскостью ABC (рис. 30.1).

Определение. **Прямую и плоскость называют *параллельными*, если они не имеют общих точек.**

Если прямая a и плоскость α параллельны, то записывают: $a \parallel \alpha$. Также принято говорить, что прямая a параллельна плоскости α, а плоскость α параллельна прямой a.

Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают некоторые спортивные снаряды. Например, брусья параллельны плоскости пола (рис. 30.2). Другой пример — водосточная труба: она параллельна плоскости стены (рис. 30.3).

Рис. 30.2

Рис. 30.3

Выяснять, параллельны ли данные прямая и плоскость, с помощью определения затруднительно. Гораздо эффективнее пользоваться следующей теоремой.

Теорема 30.1 (признак параллельности прямой и плоскости). ***Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.***

Например, на рисунке 30.1 прямые A_1B_1 и AB содержат противолежащие стороны квадрата ABB_1A_1. Эти прямые параллельны. Поскольку $AB \subset ABC$, то по признаку параллельности прямой и плоскости $A_1B_1 \parallel ABC$.

Отрезок называют **параллельным плоскости**, если он принадлежит прямой, параллельной этой плоскости. Например, ребро AB куба параллельно плоскости CDD_1 (рис. 30.1).

Вы умеете устанавливать параллельность двух прямых с помощью теорем-признаков, известных из планиметрии. Рассмотрим теоремы, описывающие достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

Теорема 30.2. ***Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.***

На рисунке 30.4 прямая a параллельна плоскости α. Плоскость β проходит через прямую a и пересекает плоскость α по прямой b. Тогда $b \parallel a$.

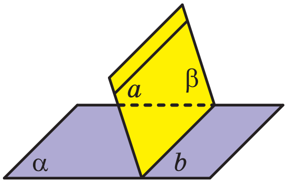


Рис. 30.4

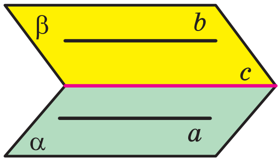


Рис. 30.5

Теорема 30.3. ***Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются по прямой, отличной от двух данных, то эта прямая параллельна каждой из двух данных прямых.***

На рисунке 30.5 прямые a и b параллельны, плоскость α проходит через прямую a, а плоскость β — через прямую b, $\alpha \cap \beta = c$. Тогда $c \parallel a$ и $c \parallel b$.

Теорема 30.4. ***Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.***

Задача. Докажите, что если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.

Решение. Пусть даны прямая a и плоскости α и β такие, что $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 30.6). Докажем, что $a \parallel b$.

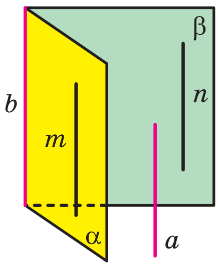


Рис. 30.6

В плоскостях α и β найдутся соответственно такие прямые m и n, что $m \parallel a$ и $n \parallel a$. Если хотя бы одна из прямых m и n совпадает с прямой b, то утверждение задачи доказано. Если же каждая из прямых m и n отлична от прямой b, то по теореме 30.4 $m \parallel n$.

Воспользовавшись теоремой 30.3, приходим к выводу, что $b \parallel n$. Но $n \parallel a$, следовательно, $a \parallel b$. ◄

1. В каком случае прямую и плоскость называют параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какой отрезок называют параллельным плоскости?
4. Сформулируйте теоремы, описывающие достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

УПРАЖНЕНИЯ

30.1.° Укажите среди окружающих предметов модели плоскости и параллельной ей прямой.

30.2.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 30.7). Плоскостям каких граней куба параллельно ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

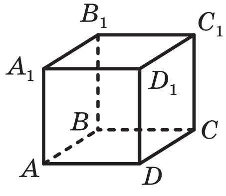


Рис. 30.7

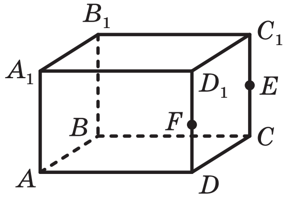


Рис. 30.8

30.3.° Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 30.8), точки E и F — середины ребер CC_1 и DD_1 соответственно. Запишите грани параллелепипеда, которым параллельна прямая: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

30.4.° Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли утверждение, что прямая a параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α?

30.5.° Даны прямые a и b и плоскость α. Верно ли утверждение:
1) если $a \parallel \alpha$ и $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;
2) если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

30.6.° Прямая a и плоскость α параллельны прямой b. Каким может быть взаимное расположение прямой a и плоскости α?

30.7.° Прямые a и b пересекаются, а плоскость α параллельна прямой a. Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α?

30.8.• Точки M и K — середины соответственно сторон AB и BC треугольника ABC. Точка D не принадлежит плоскости ABC. Докажите, что $MK \parallel ADC$.

30.9.• Точки E и F — середины соответственно боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Прямая EF лежит в плоскости α, отличной от плоскости трапеции. Докажите, что прямые AD и BC параллельны плоскости α.

30.10.• Отрезки BC и AD — основания трапеции $ABCD$. Треугольник BMC и трапеция $ABCD$ не лежат в одной плоскости (рис. 30.9). Точка E — середина отрезка BM, точка F — середина отрезка CM. Докажите, что $EF \parallel AD$.

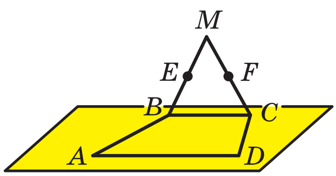


Рис. 30.9

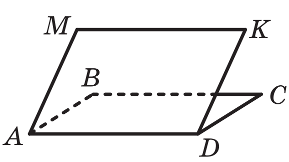


Рис. 30.10

30.11.• Параллелограммы $ABCD$ и $AMKD$ не лежат в одной плоскости (рис. 30.10). Докажите, что четырехугольник $BMKC$ — параллелограмм.

30.12.$^{\bullet}$ Плоскость α, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис. 30.11). Найдите отрезок A_1C_1, если $AC = 18$ см и $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

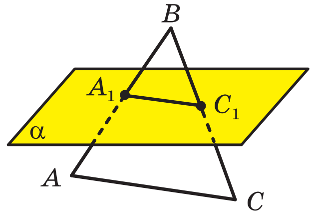


Рис. 30.11

30.13.$^{\bullet}$ Плоскость α, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : EC$, если $CF : CB = 3 : 11$.

30.14.$^{\bullet\bullet}$ Вершины A и C треугольника ABC принадлежат плоскости α, а вершина B не принадлежит этой плоскости. На сторонах AB и BC отметили соответственно точки E и F так, что $BA : BE = BC : BF$. Докажите, что прямая EF параллельна плоскости α.

30.15.$^{\bullet\bullet}$ Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямой AC и пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точка K — середина стороны BC. Найдите площадь четырехугольника $AMKC$, если площадь треугольника ABC равна 28 см^2.

30.16.$^{\bullet\bullet}$ На ребре CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку M (рис. 30.12). Постройте линию пересечения плоскостей: 1) ADM и BB_1C_1; 2) AA_1M и DCC_1.

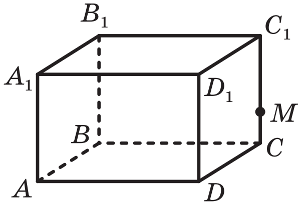


Рис. 30.12

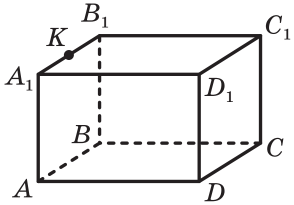


Рис. 30.13

30.17.$^{\bullet\bullet}$ На ребре A_1B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили точку K (рис. 30.13). Постройте линию пересечения плоскостей: 1) CC_1K и ABB_1; 2) CDK и ABB_1.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

30.18. Боковые стороны прямоугольной трапеции относятся как $3 : 5$, а разность оснований равна 16 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшая диагональ равна 13 см.

31. Параллельность плоскостей

Рассмотрим варианты возможного взаимного расположения двух плоскостей.

Вы знаете, что две плоскости могут иметь общие точки, то есть пересекаться. Понятно, что две плоскости могут и не иметь общих точек. Например, плоскости ABC и $A_1B_1C_1$, содержащие основания призмы, не имеют общих точек (рис. 31.1).

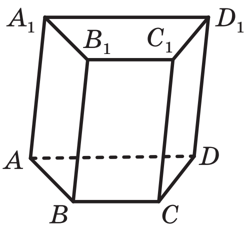


Рис. 31.1

Определение. **Две плоскости называют *параллельными*, если они не имеют общих точек.**

Если плоскости α и β параллельны, то записывают: $\alpha \parallel \beta$. Также принято говорить, что плоскость α параллельна плоскости β или плоскость β параллельна плоскости α.

Наглядное представление о параллельных плоскостях дают потолок и пол комнаты; поверхность воды, налитой в аквариум, и его дно (рис. 31.2).

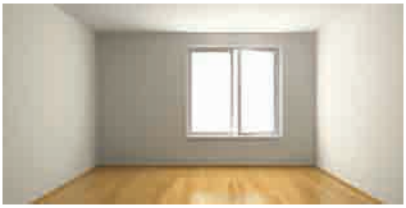


Рис. 31.2

Из определения параллельных плоскостей следует, что *любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости.*

В тех случаях, когда надо выяснить, являются ли две плоскости параллельными, удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 31.1 (признак параллельности двух плоскостей). ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

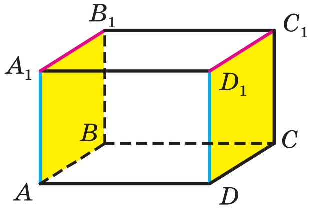


Рис. 31.3

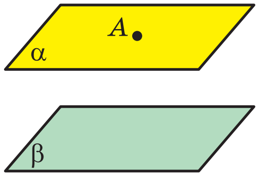


Рис. 31.4

Например, на рисунке 31.3 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имеем: $AA_1 \parallel DD_1$ и $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тогда по признаку параллельности двух плоскостей $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Будем говорить, что **два многоугольника параллельны**, если они лежат в параллельных плоскостях. Например, грани AA_1B_1B и DD_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны (рис. 31.3).

Рассмотрим некоторые свойства параллельных плоскостей.

Теорема 31.2. ***Через точку в пространстве, не принадлежащую данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна*** (рис. 31.4).

Теорема 31.3. ***Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны*** (рис. 31.5).

Задача. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Решение. Пусть даны параллельные плоскости α и β и параллельные прямые AB и A_1B_1 такие, что $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (рис. 31.6). Докажем, что $AB = A_1B_1$.

Параллельные прямые AB и A_1B_1 задают некоторую плоскость γ, причем $\alpha \cap \gamma = AA_1$ и $\beta \cap \gamma = BB_1$.

По теореме 31.3 получаем: $AA_1 \parallel BB_1$. Следовательно, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм. Отсюда $AB = A_1B_1$. ◄

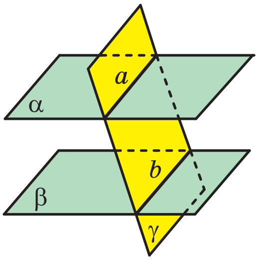


Рис. 31.5

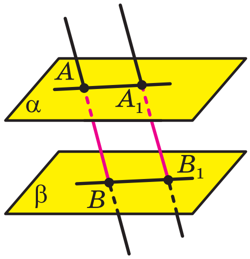


Рис. 31.6

1. Какие плоскости называют параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
3. В каких случаях говорят, что два многоугольника параллельны?
4. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей.

УПРАЖНЕНИЯ

31.1.° Верно ли утверждение:

1) если две плоскости параллельны, то любая прямая одной плоскости параллельна любой прямой другой плоскости;
2) если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то данные плоскости параллельны?

31.2.° Параллелограммы $ABCD$ и $AEFD$ не лежат в одной плоскости (рис. 31.7). Докажите, что плоскости ABE и DCF параллельны.

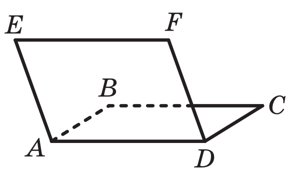


Рис. 31.7

31.3.° Можно ли утверждать, что плоскость α параллельна плоскости трапеции, если плоскость α параллельна:

1) основаниям трапеции;
2) боковым сторонам трапеции?

31.4.° Верно ли утверждение: если прямые пересечения двух плоскостей третьей плоскостью параллельны, то данные плоскости параллельны?

31.5.° Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки C и D, а в плоскости β — точки C_1 и D_1 такие, что прямые CC_1 и DD_1 параллельны. Найдите отрезки DD_1 и C_1D_1, если $CD = 12$ см, $CC_1 = 4$ см.

31.6.° Треугольник ABC лежит в плоскости α. Через его вершины проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β, параллельную плоскости α, в точках A_1, B_1 и C_1. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если периметр треугольника ABC равен 20 см.

31.7.• Точки M, N и K — середины ребер AB, AC и AD тетраэдра $DABC$. Докажите, что плоскости MNK и BCD параллельны.

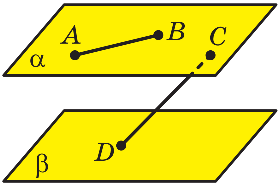


Рис. 31.8

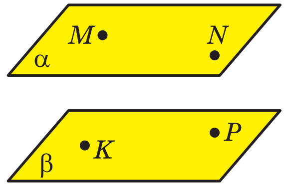


Рис. 31.9

31.8.• На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F и K так, что $\frac{DE}{DA}=\frac{DF}{DB}=\frac{DK}{DC}$. Докажите, что плоскости EFK и ABC параллельны.

31.9.• Даны параллельные плоскости α и β. Отрезок AB и точка C лежат в плоскости α, точка D — в плоскости β (рис. 31.8). Постройте линию пересечения: 1) плоскости β и плоскости ABD; 2) плоскости β и плоскости BCD.

31.10.• Даны параллельные плоскости α и β. Точки M и N лежат в плоскости α, точки K и P — в плоскости β (рис. 31.9). Постройте линию пересечения: 1) плоскости α и плоскости MKP; 2) плоскости β и плоскости MNK.

31.11.•• Параллельные плоскости α и β пересекают сторону BA угла ABC в точках A_1 и A_2 соответственно, а сторону BC — в точках C_1 и C_2 соответственно. Найдите:

1) отрезок A_1C_1, если $A_2C_2 = 36$ см, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) отрезок C_1C_2, если $A_1C_1 = 14$ см, $A_2C_2 = 21$ см, $BC_1 = 12$ см.

31.12.•• Плоскости α и β параллельны. Точки A и B лежат в плоскости α, точки C и D — в плоскости β. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O.

1) Докажите, что $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$.
2) Найдите отрезок AB, если $CD = 32$ см, $AC : AO = 7 : 3$.

31.13.•• Точка M принадлежит ребру A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте линию пересечения плоскостей BDD_1 и CC_1M.

31.14.•• Точка E принадлежит ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте линию пересечения плоскостей ACC_1 и BED.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

31.15. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезке OC отметили точку M так, что $CM : MO = 1 : 2$. Найдите $\operatorname{tg} \angle BMO$.

32. Параллельное проектирование

Многие явления и процессы, наблюдаемые нами в повседневной жизни, служат примерами преобразований, при которых образом пространственной фигуры является плоская фигура. Увидеть одно из таких явлений можно в солнечную погоду, когда предмет отбрасывает тень на плоскую поверхность (рис. 32.1). Этот пример иллюстрирует **преобразование фигуры**, которое называют **параллельным проектированием**. С помощью этого преобразования на плоскости создают изображения пространственных фигур.

Рис. 32.1

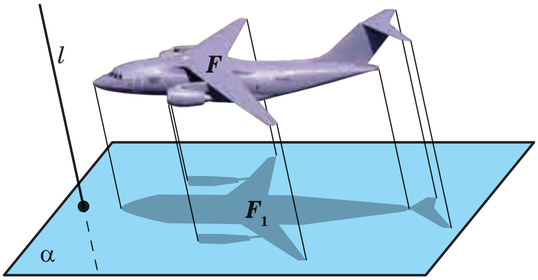


Рис. 32.2

Многие рисунки настоящего учебника, на которых изображены пространственные фигуры, можно рассматривать как тени, отбрасываемые на плоскость страницы предметами, освещенными параллельными лучами.

Ознакомимся подробнее с параллельным проектированием.

Пусть даны плоскость α, прямая l, пересекающая эту плоскость, и фигура F (рис. 32.2). Через каждую точку фигуры F проведем прямую, параллельную прямой l (если точка фигуры F принадлежит прямой l, то будем рассматривать саму прямую l). Точки пересечения всех проведенных прямых с плоскостью α образуют некоторую фигуру F_1. Описанное преобразование фигуры F называют **параллельным проектированием**. Фигуру F_1 называют **параллельной проекцией фигуры F на плоскость α в направлении прямой l.** Также фигуру F_1 называют **изображением фигуры F на плоскости α в направлении прямой l.**

Выбирая выгодные положения плоскости α и прямой l, можно получить наглядное изображение данной фигуры F. Это связано с тем, что параллельное проектирование обладает рядом замечательных свойств (см. теоремы 32.1–32.3). Благодаря этим свойствам изображение фигуры похоже на саму фигуру.

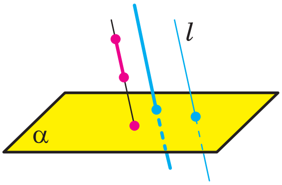


Рис. 32.3

Пусть даны плоскость α и прямая l, пересекающая эту плоскость.

Если прямая параллельна прямой l, то ее проекцией на плоскость α является точка (рис. 32.3). Проекцией прямой l также является точка.

Если отрезок параллелен прямой l или лежит на прямой l, то его проекцией на плоскость α является точка (рис. 32.3).

В следующих теоремах будем рассматривать прямые и отрезки, не параллельные прямой l и не лежащие на ней.

Теорема 32.1. ***Параллельной проекцией прямой является прямая; параллельной проекцией отрезка является отрезок*** (рис. 32.4).

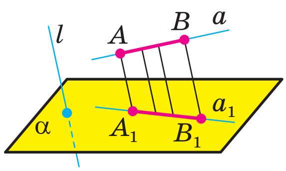


Рис. 32.4

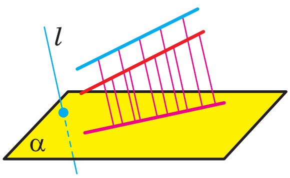


Рис. 32.5

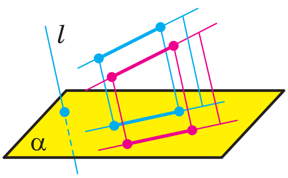


Рис. 32.6

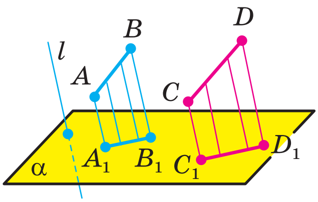
Теорема 32.2. ***Параллельной проекцией двух параллельных прямых являются или прямая*** (рис. 32.5), ***или две параллельные прямые*** (рис. 32.6). ***Параллельные проекции двух параллельных отрезков лежат на одной прямой или на параллельных прямых*** (рис. 32.6).

Теорема 32.3. ***Отношение параллельных проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению самих отрезков*** (рис. 32.7).

Рассмотрим изображения некоторых многоугольников на плоскости α в направлении прямой l.

Если прямая l параллельна плоскости многоугольника или принадлежит этой плоскости, то изображением многоугольника является отрезок.

Теперь рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость многоугольника.



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Рис. 32.7

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией треугольника является треугольник (рис. 32.8).

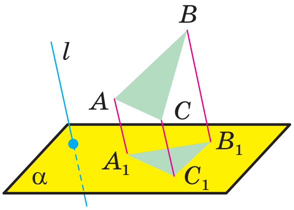


Рис. 32.8

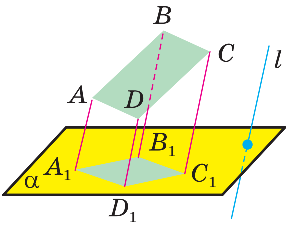


Рис. 32.9

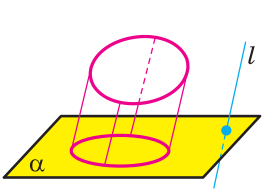


Рис. 32.10

Поскольку при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков, то изображением параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) является параллелограмм (рис. 32.9).

Также из свойств параллельного проектирования следует, что изображением трапеции является трапеция.

Параллельной проекцией окружности является фигура, которую называют **эллипсом** (рис. 32.10).

Изображения объектов с помощью параллельного проектирования широко используют в самых разных областях промышленности, например в автомобилестроении (рис. 32.11).

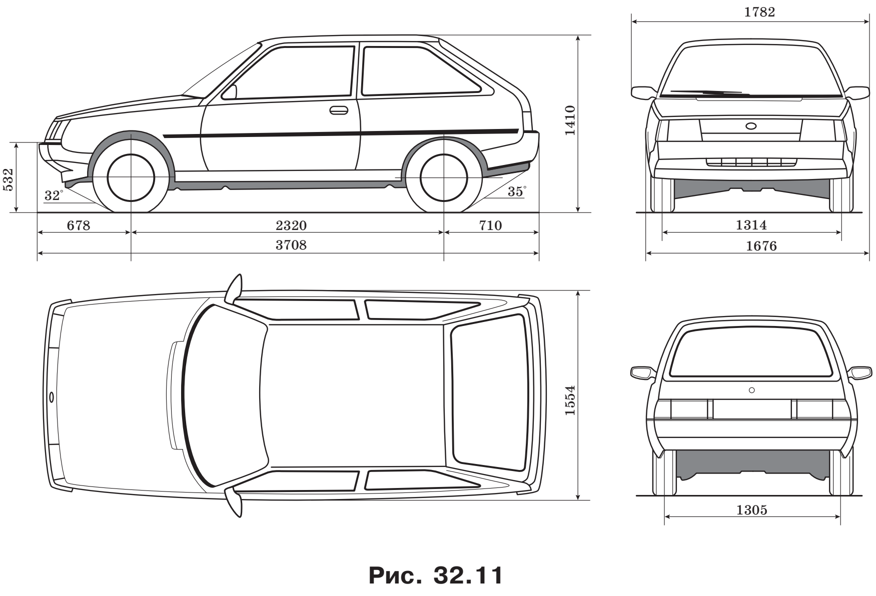


Рис. 32.11

1. Опишите преобразование фигуры, которое называют параллельным проектированием.
2. Сформулируйте свойства параллельного проектирования.

УПРАЖНЕНИЯ

32.1.° Фигура состоит из трех точек. Из какого количества точек может состоять параллельная проекция этой фигуры?

32.2.° Может ли параллельной проекцией двух пересекающихся прямых быть:
1) две пересекающиеся прямые;
2) две параллельные прямые;
3) прямая;
4) прямая и точка вне ее?

32.3.° Какая геометрическая фигура не может быть параллельной проекцией двух скрещивающихся прямых:
1) две параллельные прямые;
2) две пересекающиеся прямые;
3) прямая;
4) прямая и точка вне ее?

32.4.° 1) Могут ли равные отрезки быть параллельными проекциями неравных отрезков?
2) Могут ли неравные отрезки быть параллельными проекциями равных отрезков?
3) Может ли параллельная проекция отрезка быть больше данного отрезка?
4) Может ли параллельная проекция прямой быть параллельной данной прямой?

32.5.° Может ли фигура, изображенная на рисунке 32.12, быть параллельной проекцией треугольника?

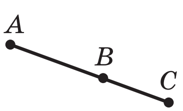


Рис. 32.12

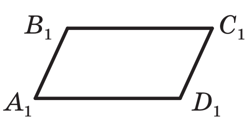


Рис. 32.13

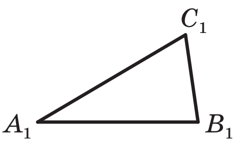


Рис. 32.14

32.6.° Может ли параллельной проекцией трапеции быть четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, углы которого A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно равны:
1) $10°$, $40°$, $140°$, $170°$; 2) $50°$, $130°$, $50°$, $130°$?

32.7.° Может ли параллельной проекцией параллелограмма быть четырехугольник со сторонами 6 см, 8 см, 6 см, 9 см?

32.8.• Точки A_1, B_1 и C_1 являются параллельными проекциями соответственно точек A, B и C, лежащих на одной прямой (точка B лежит между точками A и C). Найдите отрезок B_1C_1, если $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см.

32.9.• Точки A_1, B_1 и C_1 являются параллельными проекциями соответственно точек A, B и C, лежащих на одной прямой (точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1). Найдите отрезок A_1C_1, если $AB = 10$ см, $AC = 16$ см, $B_1C_1 = 3$ см.

32.10.•• Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является изображением прямоугольника $ABCD$ (рис. 32.13). Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей прямоугольника на сторону BC.

32.11.•• Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB (рис. 32.14). Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из середины гипотенузы на катет AC.

32.12.•• Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение треугольника ABC. Постройте изображение биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины B, если $AB : BC = 1 : 2$.

32.13.•• Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AB : AC = 5 : 4$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

32.14. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $AD = 2\sqrt{3}$ см. Найдите угол между прямыми AC и BD.

В УКРАИНЕ ЕСТЬ ТАЛАНТЫ!

Как сложить апельсины в большую коробку, чтобы поместилось максимально возможное количество? У этого вопроса, на первый взгляд простого и несерьезного, давняя история. В 1611 г. немецкий астроном, математик и философ Иоганн Кеплер, известный открытием законов движения планет Солнечной системы, сформулировал задачу об оптимальной упаковке шаров в пространстве. Кеплер выдвинул гипотезу, согласно которой оптимальным будет уложить шары так, как иногда выкладывают апельсины в магазинах или на рынках (рис. 32.15).

В течение 400 лет ведущие математики мира пробовали обосновать это предположение. Окончательная точка в этом вопросе была поставлена только в 2017 году. Доказательство гипотезы Кеплера, которое содержало компьютерный перебор огромного количества вариантов и которое тщательно проверяли 19 лет, было наконец признано корректным.

Важную роль в этой многовековой истории сыграли молодые украинские математики А. Бондаренко, М. Вязовская и Д. Радченко, воспитанники Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. В 2016 г. вышли статьи с решением задачи Кеплера для случаев 8- и 24-мерного пространства. Марина Вязовская, автор этих статей, была награждена премией Салема. Эта премия чрезвычайно престижна. Выше нее лишь премия Филдса — аналог Нобелевской премии в области математики.

Это блестящее достижение украинских ученых!

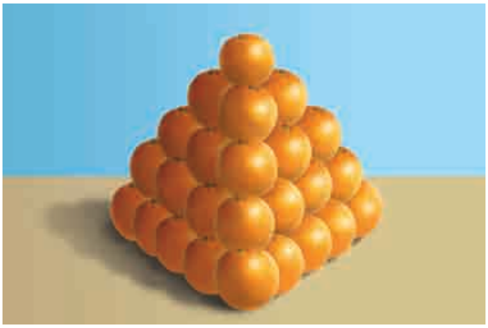


Рис. 32.15

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 4

Основные аксиомы стереометрии

А1. В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

А2. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

А3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

А4. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Плоскость однозначно определяется:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой;
3) двумя пересекающимися прямыми;
4) двумя параллельными прямыми.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые называют пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.

Две прямые в пространстве называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые в пространстве называют скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Свойство параллельных прямых

Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые — скрещивающиеся.

Параллельность в пространстве

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Условия параллельности двух прямых в пространстве

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются по прямой, отличной от двух данных, то эта прямая параллельна каждой из двух данных прямых.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Признак параллельности двух плоскостей

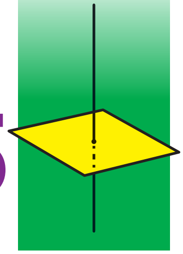
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных плоскостей

Через точку в пространстве, не принадлежащую данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.

Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ §5

В этом параграфе вы ознакомитесь с понятиями угла между прямыми в пространстве, угла между прямой и плоскостью, угла между двумя плоскостями; узнаете, что такое ортогональная проекция, изучите свойство ортогональной проекции многоугольника.

33. Угол между прямыми в пространстве

Поскольку две любые пересекающиеся прямые пространства лежат в одной плоскости, то угол между ними определим так же, как в планиметрии.

Определение. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину того из углов, образовавшихся при их пересечении, который не превышает $90°$ (рис. 33.1).

Угол между двумя параллельными прямыми считают равным $0°$. Следовательно, если φ — угол между двумя прямыми, лежащими в одной плоскости, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Введем понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Определение. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

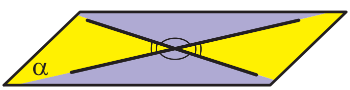


Рис. 33.1

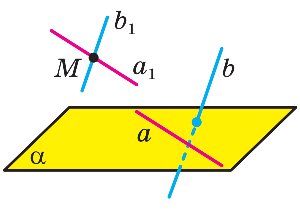


Рис. 33.2

Пусть прямые a и b скрещивающиеся. Через точку M пространства проведем прямые a_1 и b_1 так, что $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 33.2). По определению угол между скрещивающимися прямыми a и b равен углу между пересекающимися прямыми a_1 и b_1.

Возникает естественный вопрос: зависит ли угол между данными скрещивающимися прямыми a и b от выбора точки M? Ответить на этот вопрос помогает следующая теорема.

Теорема 33.1. ***Угол между двумя пересекающимися прямыми равен углу между двумя другими пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.***

Воспользовавшись теоремой 33.1, можно показать, что *угол между скрещивающимися прямыми a и b равен углу между пересекающимися прямыми a и b_1, где $b_1 \parallel b$.*

Например, на рисунке 33.3 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Угол между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC равен углу между пересекающимися прямыми BB_1 и BC.

Определение. **Две прямые в пространстве называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.**

Заметим, что перпендикулярные прямые могут как пересекаться, так и быть скрещивающимися.

Если прямые a и b перпендикулярны, то записывают: $a \perp b$.

Два отрезка в пространстве называют **перпендикулярными**, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Например, ребра AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны (рис. 33.4). Действительно, поскольку $DD_1 \parallel CC_1$, то угол между прямыми AD и CC_1 равен углу между прямыми AD и DD_1. Но $\angle ADD_1 = 90°$, поэтому $AD \perp CC_1$.

Задача. На рисунке 33.5 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1D и D_1C.

Решение. Соединим точки A_1 и B. Поскольку $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C и B лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости AA_1B и DD_1C по параллельным прямым A_1B и D_1C. Следовательно, угол между прямыми A_1D и D_1C равен углу DA_1B.

Соединим точки B и D. Отрезки A_1D, A_1B и BD равны как диагонали равных квадратов. Следовательно, треугольник A_1BD равносторонний. Тогда $\angle DA_1B = 60°$.

Ответ: 60°. ◄

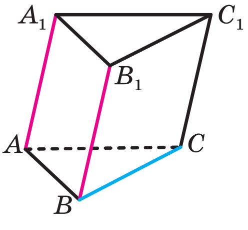


Рис. 33.3

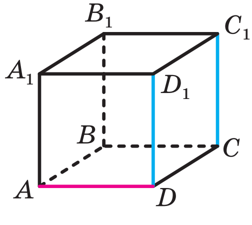


Рис. 33.4

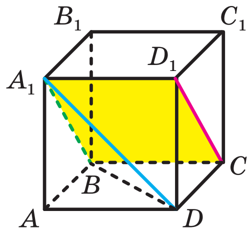


Рис. 33.5

1. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?
2. Чему равен угол между двумя параллельными прямыми?
3. Что называют углом между двумя скрещивающимися прямыми?
4. Какие две прямые в пространстве называют перпендикулярными?
5. Какие два отрезка в пространстве называют перпендикулярными?

УПРАЖНЕНИЯ

33.1.° Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести в пространстве через точку: 1) принадлежащую данной прямой; 2) не принадлежащую данной прямой?

33.2.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 33.6). Найдите угол между прямыми: 1) CD и BC; 2) AA_1 и C_1D_1; 3) AA_1 и D_1C; 4) AC и B_1D_1; 5) A_1C_1 и AC.

33.3.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 33.6). Найдите угол между прямыми: 1) AB и BB_1; 2) AB и B_1D_1; 3) A_1D и B_1C; 4) B_1D_1 и C_1C.

33.4.° Точка M, не принадлежащая плоскости прямоугольника $ABCD$, такова, что треугольник CMD равносторонний (рис. 33.7). Найдите угол между прямыми AB и MC.

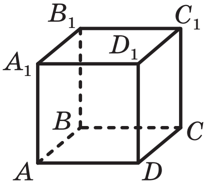


Рис. 33.6

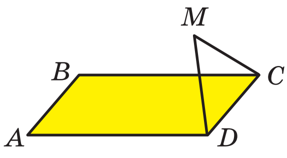


Рис. 33.7

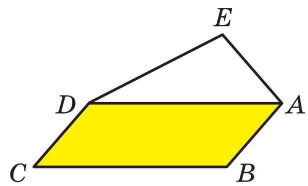


Рис. 33.8

33.5.° Точка M не принадлежит плоскости квадрата $ABCD$, $\angle MBA = 40°$, $\angle MBC = 90°$. Найдите угол между прямыми: 1) MB и AD; 2) MB и CD.

33.6.• Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и треугольник MEF не лежат в одной плоскости, точка E — середина отрезка AB, точка F — середина отрезка CD, $ME = FE$, $\angle MEF = 110°$. Найдите угол между прямыми: 1) AD и EF; 2) AD и ME; 3) BC и MF.

33.7.• Параллелограмм $ABCD$ и треугольник AED не лежат в одной плоскости (рис. 33.8). Найдите угол между прямыми BC и AE, если $\angle AED = 70°$, $\angle ADE = 30°$.

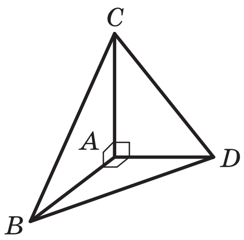


Рис. 33.9

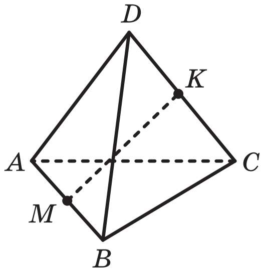


Рис. 33.10

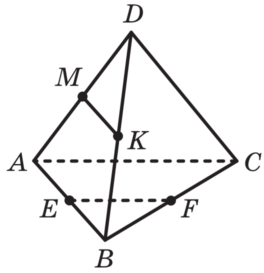


Рис. 33.11

33.8.• Известно, что $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 33.9). Найдите отрезок CD, если $BC = 17$ см, $AB = 15$ см, $BD = 3\sqrt{29}$ см.

33.9.• Известно, что $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 33.9). Найдите отрезок BC, если $CD = 2\sqrt{43}$ см, $BD = 12$ см, $\angle ABD = 60°$.

33.10.•• Каждое ребро тетраэдра $DABC$ равно a, точки M и K — середины ребер AB и CD соответственно (рис. 33.10). Найдите отрезок MK.

33.11.•• Точки E, F, M и K — середины соответственно ребер AB, BC, AD и BD тетраэдра $DABC$ (рис. 33.11). Найдите угол между прямыми EF и MK, если $\angle BAC = \alpha$.

33.12.•• Диагонали грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми OB_1 и A_1C_1.

33.13.•• Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат, сторона которого равна a. Найдите угол между прямыми AD_1 и B_1C, если боковое ребро параллелепипеда равно $a\sqrt{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

33.14. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 24 см и 10 см, $AD = 13$ см. Найдите периметр параллелограмма.

34. Перпендикулярность прямой и плоскости

В повседневной жизни мы говорим: флагшток перпендикулярен поверхности земли (рис. 34.1), мачты парусника перпендикулярны поверхности палубы (рис. 34.2), шуруп вкручивают в доску перпендикулярно ее поверхности (рис. 34.3) и т. п.

Рис. 34.1

Рис. 34.2

Рис. 34.3

Эти примеры дают представление о прямой, перпендикулярной плоскости.

Определение. Прямую называют перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 34.4).

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то записывают: $a \perp \alpha$. Также принято говорить, что плоскость α перпендикулярна прямой a или прямая a и плоскость α перпендикулярны.

Из определения следует, что если прямая a перпендикулярна плоскости α, то она пересекает эту плоскость.

Отрезок называют **перпендикулярным плоскости**, если он принадлежит прямой, перпендикулярной этой плоскости.

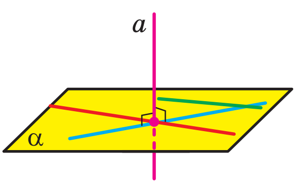


Рис. 34.4

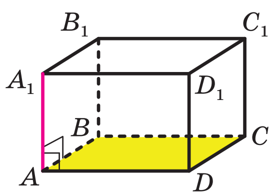


Рис. 34.5

Например, интуитивно понятно, что ребро AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 34.5). Доказать этот факт нетрудно, воспользовавшись следующей теоремой.

Теорема 34.1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.***

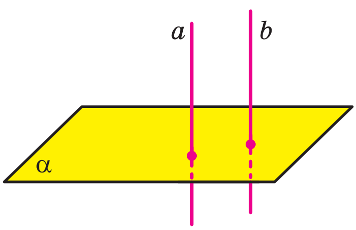
На рисунке 34.5 прямая AA_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AD плоскости ABC. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AA_1 \perp ABC$, а значит, и ребро AA_1 также перпендикулярно плоскости ABC.

Теорему 34.1 часто используют на практике. Например, подставка для новогодней елки имеет форму крестовины. Если елку установить так, чтобы ее ствол был перпендикулярен направлениям крестовины, то елка будет стоять перпендикулярно плоскости пола (рис. 34.6).

Рис. 34.6

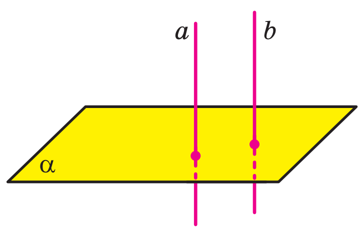
Приведем теорему, которую можно рассматривать как еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 34.2. ***Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости*** (рис. 34.7).



Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

Рис. 34.7



Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

Рис. 34.8

Например, на рисунке 34.5 прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, а прямая CC_1 параллельна прямой AA_1. Следовательно, по теореме 34.2 прямая CC_1 также перпендикулярна плоскости ABC.

Сформулируем теорему, являющуюся признаком параллельности двух прямых.

Теорема 34.3. ***Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны*** (рис. 34.8).

Справедлива и такая теорема.

Теорема 34.4. ***Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.***

Задача. Плоскость α, перпендикулярная катету AC прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке E, а гипотенузу AB — в точке F (рис. 34.9). Найдите отрезок EF, если $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ см.

Решение. Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости α, то прямая AC перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в частности прямой EF. Прямые EF и BC лежат в одной плоскости и перпендикулярны прямой AC, поэтому $EF \parallel BC$. Из этого следует, что треугольники AEF и ACB подобны. Следовательно, можно записать: $EF : CB = AE : AC$. Отсюда $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ см.

Ответ: 9 см. ◀

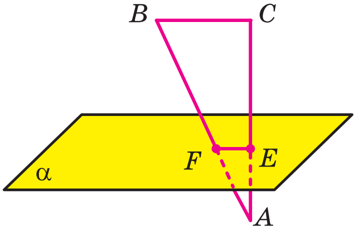


Рис. 34.9

1. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
2. Какой отрезок называют перпендикулярным плоскости?
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Сформулируйте теорему о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.
5. Сформулируйте теорему о двух прямых, перпендикулярных одной и той же плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

34.1.° Прямая a перпендикулярна плоскости α. Существуют ли в плоскости α прямые, не перпендикулярные прямой a?

34.2.° Прямая m перпендикулярна прямым a и b плоскости α. Следует ли из этого, что прямая m перпендикулярна плоскости α?

34.3.° Верно ли утверждение, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

34.4.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.10). Назовите грани куба, которым перпендикулярна прямая: 1) AA_1; 2) AD.

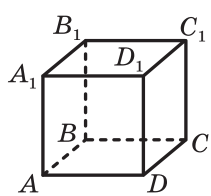


Рис. 34.10

34.5.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.10). Укажите ребра куба, перпендикулярные плоскости грани: 1) AA_1B_1B; 2) $A_1B_1C_1D_1$.

34.6.° Верно ли утверждение, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна:

1) стороне и медиане треугольника, лежащего в этой плоскости;
2) стороне и средней линии треугольника, лежащего в этой плоскости;
3) двум сторонам трапеции, лежащей в этой плоскости;
4) двум диаметрам окружности, лежащей в этой плоскости?

34.7.° Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая DO, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 34.11). Найдите отрезок DO, если $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.

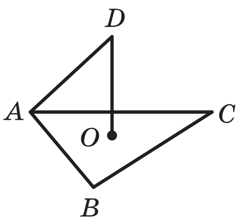


Рис. 34.11

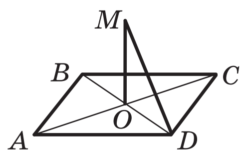


Рис. 34.12

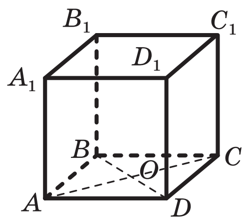


Рис. 34.13

34.8.° Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая MO, перпендикулярная плоскости квадрата (рис. 34.12). Найдите расстояние от точки M до вершины D, если $AD = 4\sqrt{2}$ см, $MO = 2$ см.

34.9.• Точка O — центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a (рис. 34.13). Найдите:

1) расстояние от точки O до вершины B_1 куба;
2) тангенс угла между прямыми B_1O и DD_1.

34.10.• Диагональ B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 17 см, а диагональ AB_1 боковой грани AA_1B_1B равна 15 см (рис. 34.14). Найдите ребро AD параллелепипеда.

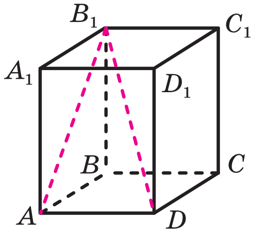


Рис. 34.14

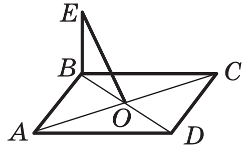


Рис. 34.15

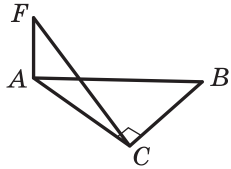


Рис. 34.16

34.11.• Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BE, перпендикулярная плоскости ромба (рис. 34.15). Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BEO.

34.12.• Через вершину A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена прямая AF, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 34.16). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости AFC.

34.13.•• Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите отрезок CD, если $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

34.14.•• Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок AB, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB_1 = 10$ см.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

34.15. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой, если одна из наклонных на 2 см больше другой.

35. Перпендикуляр и наклонная

Пусть фигура F_1 — параллельная проекция фигуры F на плоскость α в направлении прямой l. Если $l \perp \alpha$, то фигуру F_1 называют **ортогональной проекцией** фигуры F на плоскость α.

Например, основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ортогональной проекцией основания $A_1B_1C_1D_1$ на плоскость ABC в направлении прямой AA_1 (рис. 35.1).

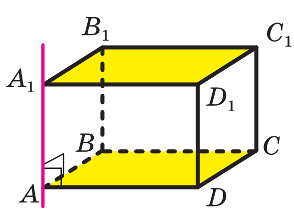


Рис. 35.1

В дальнейшем, говоря о проекции фигуры, если не оговорено противное, будем иметь в виду ортогональную проекцию.

Пусть даны плоскость α и не принадлежащая ей точка A. Через точку A проведем прямую a, перпендикулярную плоскости α. Пусть $a \cap \alpha = B$ (рис. 35.2).

Отрезок AB называют **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость α, точку B — **основанием перпендикуляра**. Основание B перпендикуляра AB — это проекция точки A на плоскость α.

Отметим на плоскости α какую-нибудь точку C, отличную от точки B. Проведем отрезок AC (рис. 35.2). Отрезок AC называют **наклонной**, проведенной из точки A к плоскости α, точку C — **основанием наклонной**. Отрезок BC является **проекцией наклонной** AC.

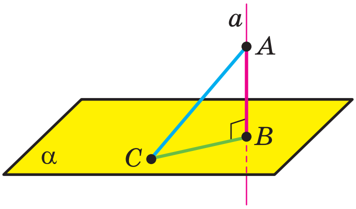


Рис. 35.2

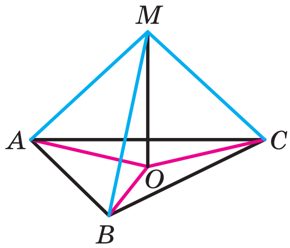


Рис. 35.3

Теорема 35.1. ***Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра.***

Задача 1. Докажите, что если точка, не принадлежащая плоскости многоугольника, равноудалена от его вершин, то проекцией этой точки на плоскость многоугольника является центр его описанной окружности.

Решение. Проведем доказательство для треугольника. Для других многоугольников доказательство будет аналогичным.

Пусть точка M не принадлежит плоскости ABC, причем $MA =$ $= MB = MC$. Опустим из точки M перпендикуляр MO на плоскость ABC (рис. 35.3). Докажем, что точка O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Поскольку $MO \perp ABC$, то $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$. В прямоугольных треугольниках MOA, MOB, MOC катет MO — общий, гипотенузы равны, следовательно, эти треугольники равны по гипотенузе и катету. Из равенства данных треугольников следует, что $OA = OB = OC$, то есть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. ◄

Заметим, что когда надо определить расстояние между двумя геометрическими фигурами, то стремятся найти расстояние между их ближайшими точками. Например, из курса планиметрии вы знаете, что расстоянием от точки, не принадлежащей прямой, до этой прямой называют расстояние от данной точки до ближайшей точки на прямой, то есть длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Теорема 35.1 показывает, что целесообразно принять следующее определение.

Определение. Если точка не принадлежит плоскости, то расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то считают, что расстояние от точки до плоскости равно нулю.

Задача 2. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости.

Решение. Пусть A и B — две произвольные точки прямой a, параллельной плоскости α. Точки A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A и B на плоскость α (рис. 35.4). Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

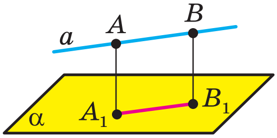


Рис. 35.4

По теореме 34.3 $AA_1 \parallel BB_1$. Следовательно, точки A, A_1, B_1, B лежат в одной плоскости. Плоскость ABB_1 проходит через прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает плоскость α по прямой A_1B_1. Тогда по теореме 30.2 получаем: $AB \parallel A_1B_1$. Таким образом, в четырехугольнике AA_1B_1B каждые две противолежащие стороны параллельны. Следовательно, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм. Отсюда $AA_1 = BB_1$.

Так как точки A и B выбраны на прямой a произвольно, то утверждение задачи доказано. ◄

Доказанное свойство позволяет принять следующее определение.

Определение. Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Используя результат, полученный в ключевой задаче 2, можно решить следующую задачу.

Задача 3. Докажите, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

Определение. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называют расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Результаты, полученные в ключевых задачах 2 и 3, часто используют в практической деятельности, например в строительстве (рис. 35.5).

Рис. 35.5

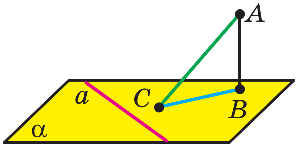


Рис. 35.6

Теорема 35.2 (теорема о трех перпендикулярах). ***Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.***

Доказательство. Докажем первую часть теоремы.

Пусть прямая a, принадлежащая плоскости α, перпендикулярна проекции BC наклонной AC (рис. 35.6). Докажем, что $a \perp AC$.

Имеем: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, следовательно, $AB \perp a$. Получили, что прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и BC плоскости ABC; следовательно, $a \perp ABC$. Поскольку $AC \subset ABC$, то $a \perp AC$.

Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству первой части. ◄

Задача 4. Точка M не принадлежит плоскости выпуклого многоугольника и равноудалена от всех прямых, содержащих его стороны. Проекцией точки M на плоскость многоугольника является точка O, принадлежащая многоугольнику. Докажите, что точка O — центр вписанной окружности многоугольника.

Решение. Проведем доказательство для треугольника. Для других многоугольников доказательство будет аналогичным.

Опустим из точки O перпендикуляры ON, OK и OE соответственно на прямые AB, BC и CA (рис. 35.7). Соединим точку M с точками E, K и N.

Отрезок ON является проекцией наклонной MN на плоскость ABC. По построению $ON \perp AB$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах получаем: $MN \perp AB$.

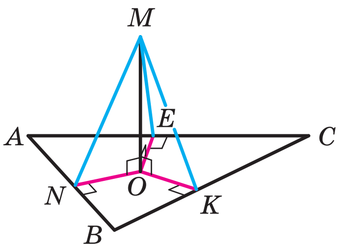


Рис. 35.7

Аналогично можно доказать, что $MK \perp BC$ и $ME \perp CA$. Следовательно, длины отрезков MN, MK и ME — расстояния от точки M до прямых AB, BC и CA соответственно. По условию $MN = MK = ME$.

В прямоугольных треугольниках MON, MOK, MOE катет MO общий, гипотенузы равны; следовательно, данные треугольники равны по катету и гипотенузе. Из равенства этих треугольников следует, что $ON = OK = OE$.

Длины отрезков ON, OK и OE являются расстояниями от точки O до прямых, содержащих стороны треугольника ABC. Мы показали, что эти расстояния равны. Так как точка O принадлежит треугольнику ABC, то точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. ◄

1. В каком случае говорят, что фигура F_1 является ортогональной проекцией фигуры F?
2. Опишите, какой отрезок называют: 1) перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость; 2) наклонной, проведенной из точки к плоскости.
3. Сформулируйте теорему о перпендикуляре и наклонной, проведенных к плоскости из одной точки.
4. Что называют расстоянием от точки до плоскости? расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости? расстоянием между двумя параллельными плоскостями?
5. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

УПРАЖНЕНИЯ

35.1.° На рисунке 35.8 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите проекцию отрезка C_1D на плоскость:

1) ABC;
2) BB_1C;
3) AA_1B_1.

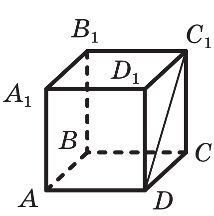


Рис. 35.8

35.2.° На рисунке 35.9 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите проекцию отрезка DB_1 на плоскость:
1) $A_1B_1C_1$; 2) CDD_1; 3) AA_1D_1.

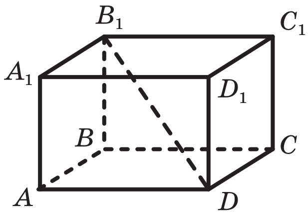


Рис. 35.9

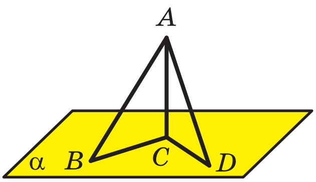


Рис. 35.10

35.3.° Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 12 см и наклонная длиной 13 см. Найдите проекцию этой наклонной на данную плоскость.

35.4.° Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр и наклонная длиной $\sqrt{7}$ см. Проекция данной наклонной на плоскость равна $\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

35.5.° Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AC и наклонные AB и AD (рис. 35.10). Найдите проекцию наклонной AD на плоскость α, если $\angle BAC = 45°$, $AB = 8$ см, $AD = 9$ см.

35.6.° Из точки M проведены к плоскости α перпендикуляр MH и наклонные MA и MB (рис. 35.11). Найдите наклонную MA, если $BH = 6\sqrt{6}$ см, $MB = 18$ см, $\angle MAH = 60°$.

35.7.• Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют равные проекции.

35.8.• Докажите, что если проекции двух наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, равны, то равны и наклонные.

35.9.• Расстояние между параллельными прямыми, принадлежащими соответственно параллельным плоскостям α и β, равно 7 см. Верно ли утверждение, что расстояние между плоскостями α и β равно 7 см?

35.10.• Из точки M провели к плоскости α равные наклонные MA, MB, MC и MD. Могут ли точки A, B, C и D быть вершинами:
1) прямоугольника;
2) ромба;
3) прямоугольной трапеции;
4) равнобокой трапеции?

35.11.° На рисунке 35.12 изображен квадрат $ABCD$, прямая NC перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые BD и NO перпендикулярны.

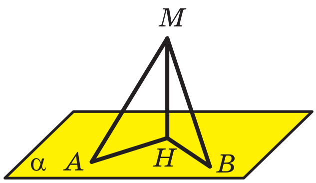


Рис. 35.11

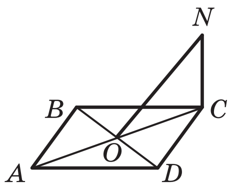


Рис. 35.12

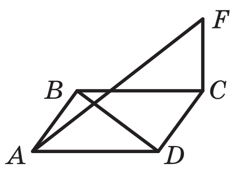


Рис. 35.13

35.12.° На рисунке 35.13 изображен ромб $ABCD$. Прямая FC перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые AF и BD перпендикулярны.

35.13.° На рисунке 35.14 изображен равносторонний треугольник ABC, точка D — середина стороны BC. Прямая AM перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что $MD \perp BC$.

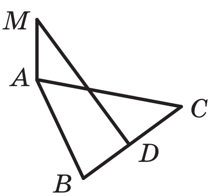


Рис. 35.14

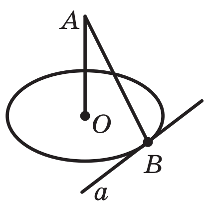


Рис. 35.15

35.14.° Прямая AO перпендикулярна плоскости окружности с центром O (рис. 35.15). Прямая a принадлежит плоскости окружности и касается данной окружности в точке B. Докажите, что $AB \perp a$.

35.15.° Докажите, что если точка принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости многоугольника и проходящей через центр окружности, описанной около многоугольника, то эта точка равноудалена от вершин многоугольника.

35.16.° Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC длиной 25 см и 17 см соответственно. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции данных наклонных на эту плоскость относятся как 5 : 2.

35.17.° Из точки D к плоскости α проведены наклонные DA и DB, сумма которых равна 28 см. Найдите эти наклонные, если их проекции на плоскость α равны соответственно 9 см и 5 см.

35.18.° Точка M расположена на расстоянии 6 см от каждой вершины правильного треугольника ABC, сторона которого равна 9 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

35.19.° Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) равны 6 см и 8 см. Точка D удалена от каждой вершины данного треугольника на 13 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

35.20.° Отрезок BD — перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием AC (рис. 35.16). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AC.

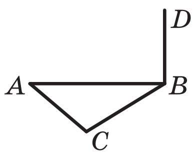


Рис. 35.16

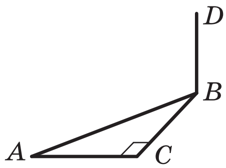


Рис. 35.17

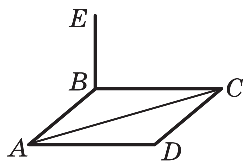


Рис. 35.18

35.21.° Отрезок BD — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C (рис. 35.17). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AC.

35.22.° Отрезок BE — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$ (рис. 35.18). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки E на прямую AC.

35.23.° Точка M равноудалена от всех прямых, содержащих стороны правильного треугольника ABC. Проекцией точки M на плоскость ABC является точка O, принадлежащая треугольнику. Найдите расстояние от точки M до стороны AB, если расстояние от этой точки до плоскости ABC равно $3\sqrt{2}$ см, $AB = 18$ см.

35.24.° Сторона ромба равна 10 см, а одна из диагоналей — 16 см. Точка M находится на расстоянии 5,2 см от каждой прямой, содержащей сторону ромба. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба.

35.25.°° Из точки M к плоскости α проведены наклонные MN и MK, образующие со своими проекциями на данную плоскость углы, равные 60°. Найдите расстояние между основаниями данных наклонных, если угол между наклонными составляет 90°, а расстояние от точки M до плоскости α равно $\sqrt{3}$ см.

35.26.•• Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие со своими проекциями на данную плоскость углы равные 30°. Найдите данные наклонные и расстояние от точки A до плоскости α, если угол между проекциями наклонных составляет 90°, а расстояние между основаниями наклонных равно 6 см.

35.27.•• Отрезок DA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если расстояние от точки D до плоскости ABC равно 15 см.

35.28.•• Отрезок AB — диаметр окружности с центром O, отрезок BC — ее хорда, $AB = 12$ см, $\angle ABC = 30^\circ$. Отрезок AE — перпендикуляр к плоскости данной окружности. Найдите расстояние от точки E до плоскости окружности, если расстояние от точки E до прямой BC равно 10 см.

35.29.•• Отрезок MA — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$. Найдите расстояние от точки M до прямой CD, если $\angle BAD = 30^\circ$, $AD = 10$ см, $MA = 5\sqrt{3}$ см.

35.30.•• Отрезок DA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 14$ см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, если эта точка удалена от прямой BC на $2\sqrt{43}$ см.

35.31.•• Точка M не принадлежит плоскости треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) и расположена на расстоянии $2\sqrt{5}$ см от каждой из прямых, содержащих его стороны. Проекцией точки M на плоскость ABC является точка O, принадлежащая данному треугольнику. Точка касания гипотенузы AB с окружностью, вписанной в треугольник ABC, делит ее на отрезки длиной 3 см и 10 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

35.32.•• Точка M не принадлежит плоскости многоугольника, а ее проекцией на плоскость многоугольника является центр окружности, вписанной в многоугольник. Докажите, что точка M равноудалена от сторон данного многоугольника.

35.33.•• Основания равнобокой трапеции равны 16 см и 36 см. Через центр O окружности, вписанной в эту трапецию, к ее плоскости проведен перпендикуляр MO. Точка M расположена на расстоянии 16 см от плоскости трапеции. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

35.34.•• Точка O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ см, $\angle ADC = 45°$. Отрезок MO — перпендикуляр к плоскости трапеции. Точка M удалена от плоскости трапеции на $6\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

35.35.* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $CD_1 \perp AB_1C_1$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

35.36. Сторона правильного треугольника, описанного около окружности, равна 12 см. Найдите сторону квадрата, описанного около данной окружности.

36. Угол между прямой и плоскостью

Вы знаете, что в давние времена путешественники ориентировались по звездам. Они измеряли угол, который образовывал с плоскостью горизонта луч, идущий от данной точки к небесному телу.

Сегодня человеку в своей деятельности также важно определять углы, под которыми наклонены к данной плоскости некоторые объекты (рис. 36.1).

Эти примеры показывают, что целесообразно ввести понятие угла между прямой и плоскостью.

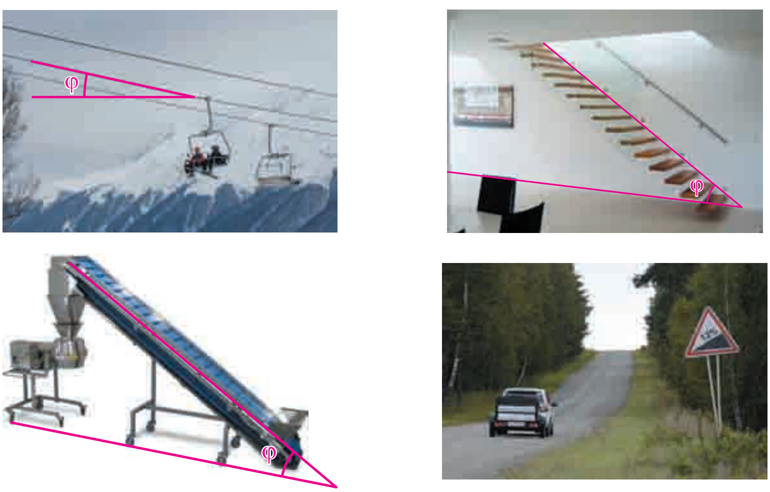


Рис. 36.1

Определение. Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то считают, что угол между такой прямой и плоскостью равен 0°.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то считают, что угол между такой прямой и плоскостью равен 90°.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то углом между такой прямой и плоскостью называют угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 36.2).

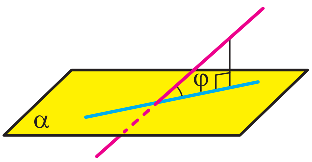


Рис. 36.2

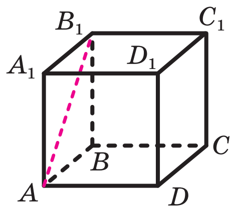


Рис. 36.3

Из определения следует, что если φ — угол между прямой и плоскостью, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Также принято говорить, что прямая образует угол φ с плоскостью.

Углом между отрезком и плоскостью называют угол между прямой, содержащей этот отрезок, и плоскостью.

Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 36.3). Угол между диагональю AB_1 грани AA_1B_1B и плоскостью ABC равен 45°. Действительно, прямая AB — проекция прямой AB_1 на плоскость ABC. Тогда угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC равен величине угла B_1AB. Поскольку четырехугольник AA_1B_1B — квадрат, то $\angle B_1AB = 45°$.

Задача. Докажите, что если из одной точки к плоскости проведены наклонные, образующие равные углы с плоскостью, то проекция данной точки на плоскость равноудалена от оснований наклонных.

Решение. Пусть MA и MB — наклонные, образующие с плоскостью α равные углы, отрезки OA и OB — проекции этих наклонных (рис. 36.4). Докажем, что $OA = OB$.

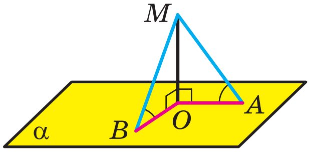


Рис. 36.4

Прямая OA является проекцией прямой MA на плоскость α. Так как угол MAO острый, то он равен углу между прямыми OA и MA. Следовательно, величина угла MAO равна углу между наклонной MA и плоскостью α. Аналогично можно доказать, что величина угла MBO равна углу между наклонной MB и плоскостью α. По условию $\angle MAO = \angle MBO$.

Поскольку $MO \perp \alpha$, то $\angle MOA = \angle MOB = 90°$. Получаем, что прямоугольные треугольники MOA и MOB равны по катету и противолежащему острому углу. Отсюда $OA = OB$. ◄

?

1. Чему равен угол между прямой и плоскостью, если прямая параллельна плоскости? прямая принадлежит плоскости? прямая перпендикулярна плоскости?
2. Что называют углом между прямой и плоскостью, если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей?

УПРАЖНЕНИЯ

36.1.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грани $ABCD$ (рис. 36.5). Укажите угол между:
1) прямой AB_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$;
2) прямой AC_1 и плоскостью ABC;
3) прямой AC_1 и плоскостью CDD_1;
4) прямой OA_1 и плоскостью ABC;
5) прямой AC и плоскостью ADD_1.

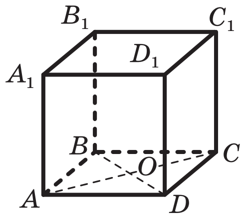


Рис. 36.5

36.2.° Из точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, образующая с данной плоскостью угол 50°. Чему равен угол между данной наклонной и перпендикуляром?

36.3.° Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MA и наклонная MB, образующая с плоскостью α угол φ. Найдите: 1) проекцию наклонной MB на плоскость α, если расстояние от точки M до этой плоскости равно d; 2) наклонную MB, если ее проекция на плоскость α равна a.

36.4.° Из точки A к плоскости α проведена наклонная. Чему равен угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α: 1) равно проекции наклонной на плоскость α; 2) в два раза меньше самой наклонной?

36.5.° Сколько наклонных, образующих с плоскостью α угол 40°, можно провести из точки A, не принадлежащей этой плоскости?

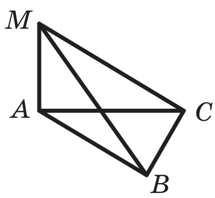


Рис. 36.6

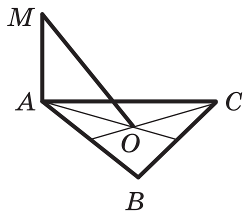


Рис. 36.7

36.6.° Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC (рис. 36.6), $AB = AM = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см. Найдите угол, который образует с плоскостью ABC прямая: 1) MB; 2) MC.

36.7.° Точка O — центр правильного треугольника ABC (рис. 36.7), сторона которого равна 6 см. Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC. Найдите угол между прямой MO и плоскостью ABC, если $MA = 2$ см.

36.8.• Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, образуют с этой плоскостью равные углы.

36.9.• Докажите, что если углы, образованные с плоскостью наклонными, проведенными к ней из одной точки, равны, то равны и сами наклонные.

36.10.• Из точки M к плоскости α провели перпендикуляр MB и наклонные MA и MC. Найдите угол между прямой MC и плоскостью α, если $MA = 5\sqrt{2}$ см, $MC = 10$ см, а угол между прямой MA и плоскостью α равен $45°$.

36.11.• Из точки A к плоскости α провели перпендикуляр AH и наклонные AB и AC, образующие с плоскостью соответственно углы $45°$ и $60°$. Найдите отрезок AB, если $AC = 4\sqrt{3}$ см.

36.12.• Из точки D к плоскости α проведены наклонные DA и DB, образующие с данной плоскостью углы, равные $30°$. Угол между проекциями данных наклонных на плоскость α равен $120°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $DA = 2$ см.

36.13.• Из точки B к плоскости α проведены наклонные BA и BC, образующие с данной плоскостью углы, равные $45°$. Расстояние между основаниями наклонных равно 16 см. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если угол между наклонными составляет $60°$.

36.14.•• Точка A находится на расстоянии $3\sqrt{3}$ см от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью углы $60°$ и $45°$

соответственно, а угол между наклонными равен $90°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

36.15.•• Из точки M к плоскости α проведены наклонные MA и MB. Наклонная MA образует с плоскостью α угол $45°$, а наклонная MB — угол $30°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $MA = 6$ см, а угол между наклонными равен $45°$.

36.16.•• Точка M находится на расстоянии 12 см от каждой вершины квадрата $ABCD$, угол между прямой MA и плоскостью квадрата равен $60°$. Найдите расстояние от точки M до стороны квадрата.

36.17.•• Точка M равноудалена от сторон квадрата $ABCD$, сторона которого равна $9\sqrt{6}$ см, и находится на расстоянии 9 см от плоскости квадрата. Найдите угол между прямой MA и плоскостью квадрата.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

36.18. Стороны треугольника равны 2 см, $2\sqrt{7}$ см и $4\sqrt{3}$ см. Найдите угол треугольника, противолежащий его средней стороне.

37. Двугранный угол. Угол между плоскостями

На рисунке 37.1 изображена фигура, состоящая из двух полуплоскостей, имеющих общую границу. Эта фигура делит пространство на две части, выделенные на рисунке 37.2 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом**. Полуплоскости называют **гранями двугранного угла**, а их общую границу — **ребром двугранного угла**.

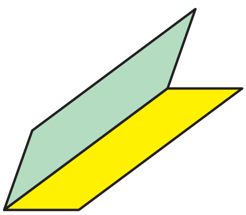


Рис. 37.1

Как видим, «желтый» и «синий» двугранные углы, изображенные на рисунке 37.2, существенно различаются. Это различие выражается следующим свойством. На гранях двугранного угла выберем произвольные точки M и N (рис. 37.3). Отрезок MN принадлежит «желтому» двугранному углу, а «синему» двугранному углу принадлежат лишь концы отрезка.

В дальнейшем, говоря «двугранный угол», будем подразумевать такой двугранный угол, который содержит любой отрезок с концами на его гранях («желтый» двугранный угол).

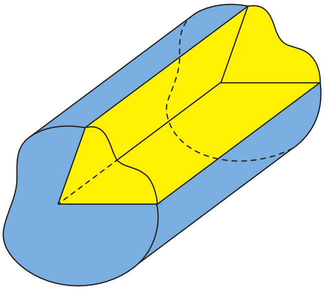


Рис. 37.2

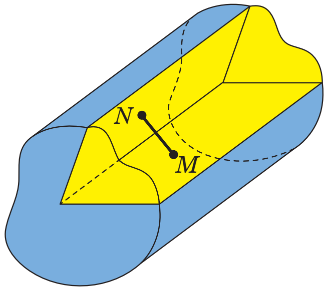


Рис. 37.3

Наглядное представление о двугранном угле дают полуоткрытая классная доска, двускатная крыша, открытый ноутбук (рис. 37.4).

Рис. 37.4

Двугранный угол считают пространственным аналогом угла на плоскости.

Вы знаете, как определяют величину угла на плоскости. Научимся определять величину двугранного угла.

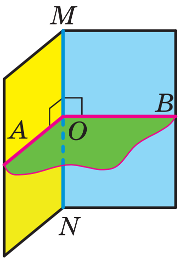


Рис. 37.5

Отметим на ребре MN двугранного угла произвольную точку O. Через точку O в гранях двугранного угла проведем лучи OA и OB перпендикулярно ребру MN (рис. 37.5). Угол AOB, образованный этими лучами, называют **линейным углом двугранного угла**. Поскольку $MN \perp OA$ и $MN \perp OB$, то $MN \perp AOB$. Таким образом, *если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость перпендикулярно ребру, то эта плоскость пересечет двугранный угол по его линейному углу*.

Определение. Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

Двугранный угол называют острым, прямым, тупым или развернутым, если его линейный угол соответственно острый, прямой, тупой или развернутый.

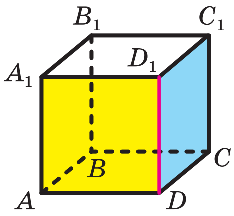


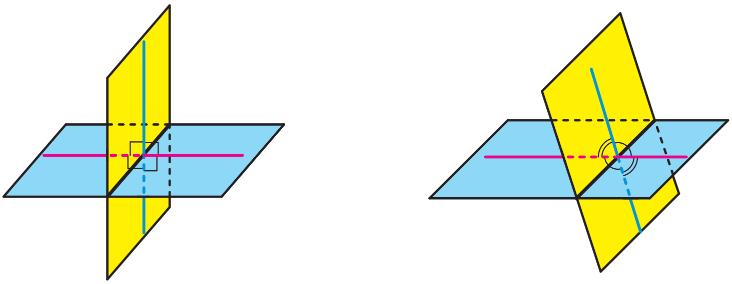
Рис. 37.6

Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.6). Двугранный угол с ребром DD_1, грани которого принадлежат плоскостям ADD_1 и CDD_1, является прямым. Действительно, поскольку $AD \perp DD_1$ и $CD \perp DD_1$, то угол ADC — линейный угол двугранного угла с ребром DD_1. Угол ADC прямой.

При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла, отличных от развернутого (рис. 37.7). Здесь возможны два случая:

1) все четыре двугранных угла прямые (рис. 37.7, *а*);

2) из четырех двугранных углов два равных угла острые и два равных угла тупые (рис. 37.7, *б*).



а *б*

Рис. 37.7

В обоих случаях из четырех двугранных углов найдется такой, величина которого не превышает 90°.

Определение. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называют величину того из образовавшихся двугранных углов, который не превышает 90°. Угол между двумя параллельными плоскостями равен 0°.

Углом между многоугольником и плоскостью, которой многоугольник не принадлежит, называют угол между плоскостью, содержащей многоугольник, и данной плоскостью.

Углом между двумя многоугольниками, лежащими в разных плоскостях, называют угол между плоскостями, в которых лежат эти многоугольники.

Задача. Прямоугольные треугольники ABC ($\angle A = 90°$) и ABM ($\angle B = 90°$) имеют общий катет AB (рис. 37.8). Отрезок MB перпендикулярен плоскости ABC. Известно, что $MB = 4$ см, $AC = 6$ см, $MC = 10$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и AMC.

Решение. Отрезок BA является проекцией наклонной MA на плоскость ABC. Так как $BA \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах $MA \perp AC$. Следовательно, угол MAB — линейный угол двугранного угла с ребром AC, грани которого принадлежат плоскостям ABC и AMC. Поскольку угол MAB острый, то угол между плоскостями ABC и AMC равен величине угла MAB.

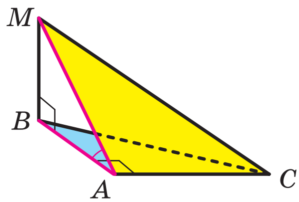


Рис. 37.8

Для стороны AM прямоугольного треугольника AMC можно записать: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Отсюда $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Для угла MAB прямоугольного треугольника MAB запишем: $\sin \angle MAB = \frac{MB}{MA}$. Отсюда $\sin \angle MAB = \frac{1}{2}$ и $\angle MAB = 30°$.

Ответ: 30°. ◄

Имеет место теорема, устанавливающая связь между площадью данного многоугольника и площадью его проекции.

Теорема 37.1 (площадь ортогональной проекции многоугольника). ***Площадь проекции выпуклого многоугольника равна произведению его площади и косинуса угла α между многоугольником и его проекцией, где $0° \leqslant \alpha < 90°$.***

Определение. Две плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Если плоскости α и β перпендикулярны, то записывают: $\alpha \perp \beta$. Также принято говорить, что плоскость α перпендикулярна плоскости β или плоскость β перпендикулярна плоскости α.

Наглядное представление о перпендикулярных плоскостях дают плоскости стены и потолка комнаты, плоскости двери и пола, плоскости сетки и теннисного корта (рис. 37.9).

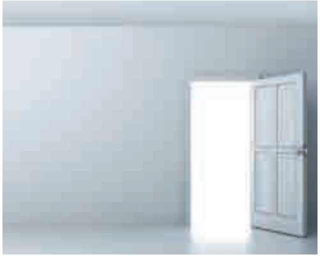


Рис. 37.9

Очевидно, что перпендикулярные плоскости при пересечении образуют четыре прямых двугранных угла (рис. 37.10).

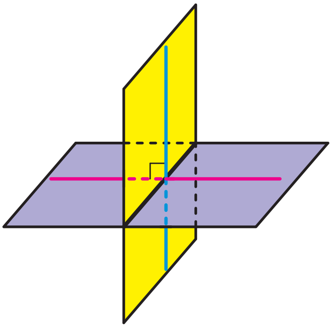


Рис. 37.10

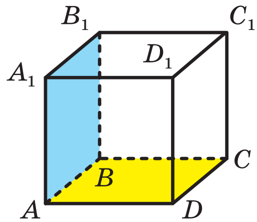


Рис. 37.11

Теорема 37.2 (признак перпендикулярности плоскостей). ***Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Например, плоскость грани AA_1B_1B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.11) перпендикулярна плоскости грани $ABCD$. Действительно, плоскость AA_1B_1 проходит через прямую AA_1, перпендикулярную плоскости ABC.

1. Какую фигуру называют линейным углом двугранного угла?
2. Что называют величиной двугранного угла?
3. Что называют углом между двумя пересекающимися плоскостями?
4. Чему равен угол между двумя параллельными плоскостями?
5. Сформулируйте теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.
6. Какие плоскости называют перпендикулярными?
7. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.

УПРАЖНЕНИЯ

37.1.° Покажите на окружающих вас предметах модели двугранных углов.

37.2.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.12).

1) Среди данных углов укажите линейный угол двугранного угла, грани которого принадлежат плоскостям ABC и AB_1C_1:
а) $\angle A_1AB$; б) $\angle A_1AB_1$; в) $\angle B_1DA$; г) $\angle B_1AB$; д) $\angle B_1DB$.

2) Найдите величину указанного двугранного угла.

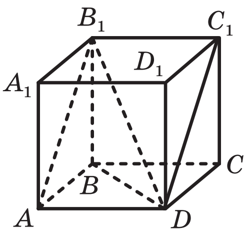


Рис. 37.12

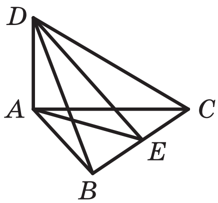


Рис. 37.13

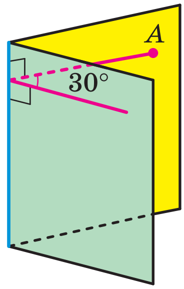


Рис. 37.14

37.3.° Отрезок AD — перпендикуляр к плоскости правильного треугольника ABC (рис. 37.13), точка E — середина стороны BC. Среди данных углов укажите линейный угол двугранного угла, грани которого принадлежат плоскостям ABC и BCD:

1) $\angle ABD$; 2) $\angle AED$; 3) $\angle BAD$; 4) $\angle ACD$.

37.4.° На одной из граней двугранного угла, величина которого равна 30°, отметили точку A (рис. 37.14). Расстояние от точки A до ребра двугранного угла равно 18 см. Чему равно расстояние от точки A до другой грани двугранного угла?

37.5.° На одной из граней острого двугранного угла отметили точку, расстояние от которой до другой грани равно $4\sqrt{3}$ см, а до ребра двугранного угла — 8 см. Какова величина данного двугранного угла?

37.6.° Прямоугольники $ABCD$ и $BCEF$ лежат в разных плоскостях (рис. 37.15), причем прямая AF перпендикулярна плоскости ABC. Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные прямоугольники, если $AF = \sqrt{15}$ см, $CD = \sqrt{5}$ см.

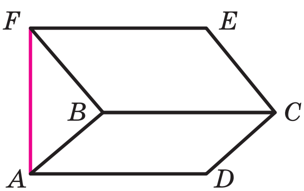


Рис. 37.15

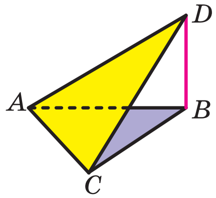


Рис. 37.16

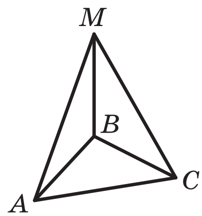


Рис. 37.17

37.7.° Треугольники ABC и ACD лежат в разных плоскостях (рис. 37.16), причем прямая BD перпендикулярна плоскости ABC. Найдите двугранный угол, грани которого содержат данные треугольники, если $\angle ACD = 90°$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см.

37.8.° Даны плоскость α и параллельная ей прямая a. Сколько плоскостей можно провести через прямую a так, чтобы угол φ между плоскостью α и проведенной плоскостью удовлетворял условию:
1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

37.9.° Отрезок MB — перпендикуляр к плоскости равностороннего треугольника ABC (рис. 37.17). Найдите угол между плоскостями ABM и CBM.

37.10.° Отрезок CE — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 37.18). Найдите угол между плоскостями BCE и DCE.

37.11.° Отрезок BK — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$ (рис. 37.19), $\angle ABC = 100°$. Найдите угол между плоскостями ABK и CBK.

37.12.° Найдите площадь проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна $18\sqrt{2}$ см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции составляет 45°.

37.13.° Найдите площадь многоугольника, если площадь его проекции на некоторую плоскость равна 24 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции составляет 30°.

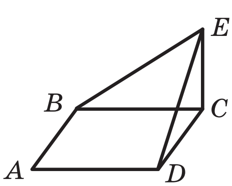


Рис. 37.18

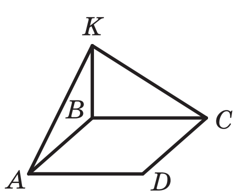


Рис. 37.19

37.14.° Покажите на окружающих вас предметах модели перпендикулярных плоскостей.

37.15.° На рисунке 37.20 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите, перпендикулярны ли плоскости:

1) $A_1B_1C_1$ и CDD_1;
2) ABC и $A_1B_1C_1$;
3) AA_1C_1 и ABC;
4) ACC_1 и BDD_1.

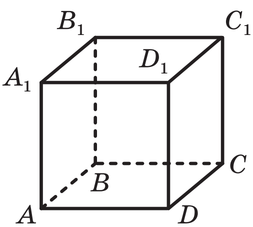


Рис. 37.20

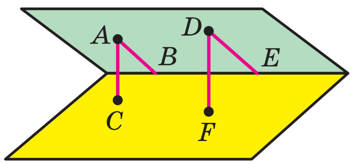


Рис. 37.21

37.16.• На одной грани острого двугранного угла отметили точки A и D (рис. 37.21). Из точки A опустили перпендикуляры AB и AC соответственно на ребро и другую грань двугранного угла. Из точки D опустили перпендикуляры DE и DF соответственно на ребро и другую грань двугранного угла. Найдите отрезок DE, если $AB = 21$ см, $AC = 12$ см, $DF = 20$ см.

37.17.• На одной грани острого двугранного угла отметили точки A и B, удаленные от другой его грани на 14 см и 8 см соответственно. Расстояние от точки A до ребра двугранного угла равно 42 см. Найдите расстояние от точки B до ребра двугранного угла.

37.18.• Основания равнобокой трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона — 8 см. Найдите площадь проекции данной трапеции на плоскость α, если угол между плоскостью трапеции и плоскостью α равен 30°.

37.19.• Через одну из сторон ромба, диагонали которого равны 6 см и 12 см, проведена плоскость α, образующая с плоскостью ромба угол 30°. Найдите площадь проекции данного ромба на плоскость α.

37.20.•• Точка B лежит внутри двугранного угла и удалена от его граней на $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{3}$ см, а от ребра — на 2 см. Найдите данный двугранный угол.

37.21.•• Точка C лежит внутри двугранного угла. Угол между перпендикулярами, опущенными из точки C на грани двугранного угла, равен 110°. Найдите данный двугранный угол.

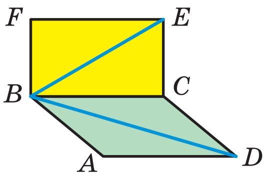


Рис. 37.22

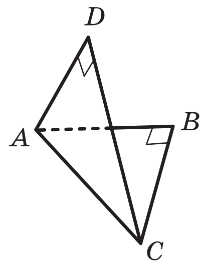


Рис. 37.23

37.22.•• В гранях двугранного угла, равного $45°$, проведены прямые, параллельные его ребру и удаленные от ребра на $2\sqrt{2}$ см и 3 см соответственно. Найдите расстояние между данными параллельными прямыми.

37.23.•• Плоскость α пересекает грани двугранного угла по параллельным прямым m и n. Расстояние от ребра двугранного угла до прямой m равно 3 см, до прямой n — 5 см, а расстояние между прямыми m и n — 7 см. Найдите данный двугранный угол.

37.24.•• Плоскости прямоугольников $ABCD$ и $CBFE$ перпендикулярны (рис. 37.22). Найдите расстояние от точки E до прямой AD и расстояние от точки D до прямой BF, если $AB = BF = 5$ см, $BC = 12$ см.

37.25.•• Плоскости правильных треугольников ABC и ADC перпендикулярны. Найдите угол между прямой BD и плоскостью ABC.

37.26.•• Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общую гипотенузу AC длиной 6 см, а их плоскости перпендикулярны (рис. 37.23). Найдите расстояние между точками B и D.

37.27.•• Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 15 см и 16 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения этих плоскостей, равно 12 см. Найдите данный отрезок.

37.28.•• Точки A и B лежат в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Из точек A и B опустили перпендикуляры AC и BD на линию пересечения плоскостей α и β. Найдите расстояние от точки B до линии пересечения плоскостей α и β, если расстояние от точки A до этой линии равно 9 см, $AB = 17$ см, $CD = 12$ см.

37.29.•• Плоскости α и β перпендикулярны. Точка A лежит в плоскости α, точка B — в плоскости β. Точка A удалена от линии пересечения плоскостей α и β на 5 см, а точка B — на $5\sqrt{2}$ см. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, если угол между прямой AB и плоскостью β равен $30°$.

37.30.•• Концы отрезка длиной 6 см принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 3 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует этот отрезок с данными плоскостями.

37.31.•• Плоскости трапеций $ABCD$ и $AEFD$ с общим основанием AD перпендикулярны, $\angle BAD = \angle EAD = 90°$, $\angle ADC = \angle ADF = 60°$, $CD = 4$ см, $DF = 8$ см. Найдите расстояние между: 1) прямыми BC и EF; 2) точками C и F.

37.32.•• Плоскости квадрата $ABCD$ и прямоугольника $AEFD$ перпендикулярны. Найдите расстояние между прямыми BC и EF, если площадь квадрата равна 25 см^2, а площадь прямоугольника — 60 см^2.

37.33.•• Ребро DA тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 37.24), $AB = BC = AC = 8$ см, $BD = 4\sqrt{7}$ см. Найдите двугранный угол, грани которого содержат треугольники ABC и BCD.

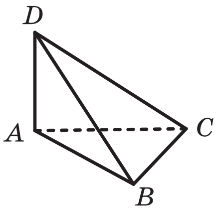


Рис. 37.24

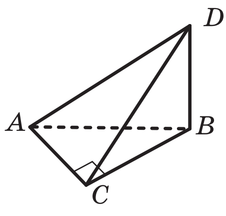


Рис. 37.25

37.34.•• Ребро DB тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC (рис. 37.25), $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 7$ см, $AD = 7\sqrt{5}$ см. Найдите двугранный угол, грани которого содержат треугольники ABC и ACD.

37.35.* Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями BMD и A_1BD.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

37.36. Две стороны треугольника равны 15 см и 25 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 16 см. Найдите третью сторону треугольника.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 5

Угол между прямыми в пространстве

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину того из углов, образовавшихся при их пересечении, который не превышает $90°$.

Считают, что угол между двумя параллельными прямыми равен $0°$.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Две прямые в пространстве называют перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямую называют перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.

Ортогональная проекция фигуры

Пусть фигура F_1 — параллельная проекция фигуры F на плоскость α в направлении прямой l. Если $l \perp \alpha$, то фигуру F_1 называют ортогональной проекцией фигуры F на плоскость α.

Расстояние от точки до плоскости

Если точка не принадлежит плоскости, то расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то считают, что расстояние от точки до плоскости равно нулю.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называют расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

Угол между прямой и плоскостью

Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то считают, что угол между такой прямой и плоскостью равен $0°$.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то считают, что угол между такой прямой и плоскостью равен $90°$.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то углом между такой прямой и плоскостью называют угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Величина двугранного угла

Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называют величину того из образовавшихся двугранных углов, который не превышает $90°$.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

Площадь проекции выпуклого многоугольника равна произведению его площади и косинуса угла α между многоугольником и его проекцией, где $0° \leqslant \alpha < 90°$.

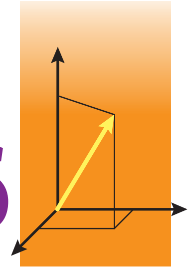
Перпендикулярные плоскости

Две плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

Признак перпендикулярности плоскостей

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ §6



В этом параграфе вы ознакомитесь с прямоугольной системой координат в пространстве, научитесь находить координаты точек в пространстве, длину отрезка и координаты его середины.

Вы обобщите и расширите свои знания о векторах.

38. Декартовы координаты точки в пространстве

В предыдущих классах вы ознакомились с прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости — это две перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета (рис. 38.1).

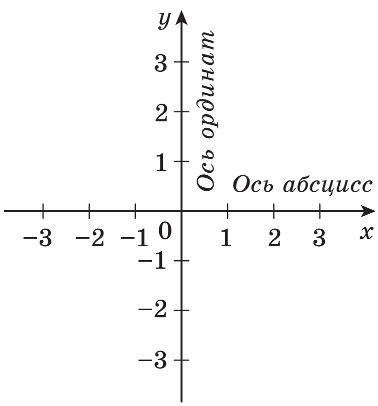


Рис. 38.1

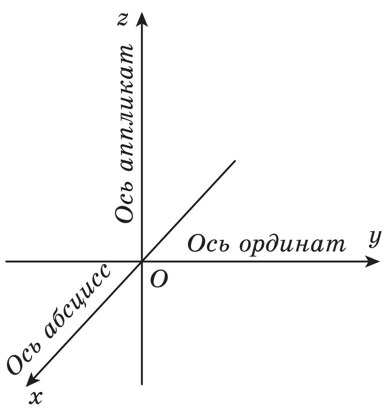


Рис. 38.2

Систему координат можно ввести и в пространстве.

Прямоугольной (декартовой) системой координат в пространстве называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета (рис. 38.2). Точку, в которой пересекаются три координатные прямые, обозначают буквой O. Ее называют **началом координат**. Координатные прямые обозначают буквами x, y и z, их соответственно называют **осью абсцисс, осью ординат** и **осью аппликат**.

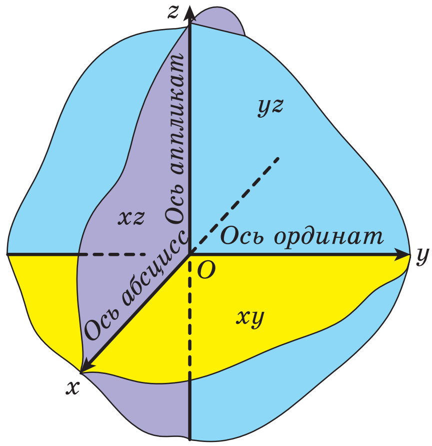


Рис. 38.3

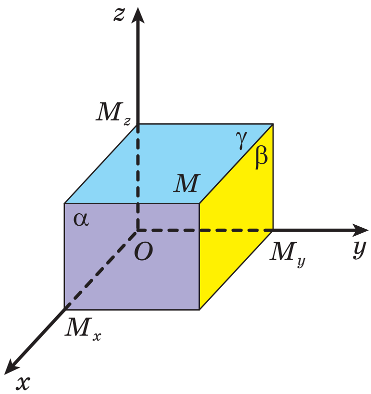


Рис. 38.4

Плоскости, проходящие через пары координатных прямых x и y, x и z, y и z, называют **координатными плоскостями**, их соответственно обозначают xy, xz, yz (рис. 38.3).

Пространство, в котором задана система координат, называют **координатным пространством**. Если оси координат обозначены буквами x, y, z, то координатное пространство обозначают xyz.

Из курса планиметрии вы знаете, что каждой точке M координатной плоскости xy ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$, которые называют координатами точки M. Записывают: $M(x; y)$.

Аналогично каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, определяемая следующим образом. Проведем через точку M три плоскости α, β и γ перпендикулярно осям x, y и z соответственно. Точки пересечения этих плоскостей с координатными осями обозначим M_x, M_y и M_z (рис. 38.4). Координату точки M_x на оси x называют **абсциссой** точки M и обозначают буквой x. Координату точки M_y на оси y называют **ординатой** точки M и обозначают буквой y. Координату точки M_z на оси z называют **аппликатой** точки M и обозначают буквой z.

Полученную упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ называют **координатами точки** M в пространстве. Записывают: $M(x; y; z)$.

Если точка M имеет координаты $M(x; y; z)$, то числа $|x|$, $|y|$, $|z|$ равны расстояниям от точки M до координатных плоскостей yz, xz, xy. Используя этот факт, можно доказать, что, например,

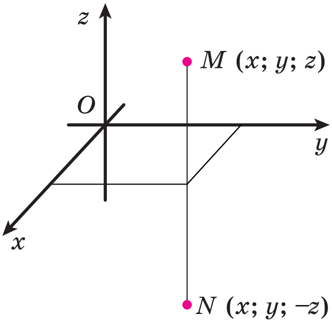


Рис. 38.5

точки с координатами $M(x;\ y;\ z)$ и $N(x;\ y;\ -z)$ лежат на прямой, перпендикулярной плоскости xy, и равноудалены от этой плоскости (рис. 38.5). В этом случае говорят, что точки M и N **симметричны относительно плоскости** xy.

Если точка принадлежит координатной плоскости или координатной оси, то некоторые ее координаты равны нулю. Например, точка $A(x;\ y;\ 0)$ принадлежит координатной плоскости xy, а точка $B(0;\ 0;\ z)$ — оси аппликат.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 38.1. ***Расстояние между двумя точками*** $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***и*** $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***можно найти по формуле***

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Теорема 38.2. ***Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов, то есть серединой отрезка с концами в точках*** $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***и*** $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***является точка***

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2};\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Доказательства теорем 38.1 и 38.2 аналогичны тому, как были доказаны соответствующие теоремы в курсе планиметрии.

Например, серединой отрезка с концами в точках $A(x;\ y;\ z)$ и $B(-x;\ -y;\ -z)$ является начало координат — точка O $(0;\ 0;\ 0)$. В таком случае говорят, что точки A и B **симметричны относительно начала координат**.

?

1. Как называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета?
2. Как называют координатную прямую, обозначенную буквой x? буквой y? буквой z?
3. Опишите, каким образом каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x;\ y;\ z)$.
4. В каком случае говорят, что две точки симметричны относительно координатной плоскости xy? плоскости xz? плоскости yz?
5. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?

6. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

7. В каком случае говорят, что две точки симметричны относительно начала координат?

УПРАЖНЕНИЯ

38.1.° Определите, лежит ли данная точка на координатной оси, и в случае утвердительного ответа укажите эту ось:
1) $A(4; -3; 0)$; 3) $C(-6; 0; 0)$; 5) $E(0; 0; -2)$;
2) $B(1; 0; -5)$; 4) $D(0; 7; 0)$; 6) $F(3; 0; 0)$.

38.2.° Определите, принадлежит ли данная точка координатной плоскости, и в случае утвердительного ответа укажите эту плоскость:
1) $A(4; -3; 5)$; 3) $C(3; 3; 0)$; 5) $E(0; 4; 0)$;
2) $B(0; -2; 6)$; 4) $D(2; 0; 8)$; 6) $F(-1; 1; 2)$.

38.3.° Каково расстояние от точки $M(4; -5; 2)$ до координатной плоскости:
1) xy; 2) xz; 3) yz?

38.4.° Какие координаты имеет проекция точки $M(-3; 2; 4)$ на координатную плоскость:
1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.5.° Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) $A(3; -4; 2)$, $B(5; -6; 1)$; 2) $A(-2; 3; 1)$, $B(-3; 2; 0)$.

38.6.° Найдите расстояние между точками $C(6; -5; -1)$ и $D(8; -7; 1)$.

38.7.° Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(-2; 6; -7)$, $D(4; -10; -3)$.

38.8.° Найдите координаты середины отрезка EF, если $E(3; -3; 10)$, $F(1; -4; -8)$.

38.9.• Какие из точек $A(-1; 6; 2)$, $B(-1; -6; 2)$, $C(1; 6; -2)$, $D(1; -6; 2)$ лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xz?

38.10.• Какие из точек $M(5; 10; -3)$, $N(5; 9; 3)$, $K(4; -9; 3)$, $P(4; -9; 2)$ лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xy?

38.11.• Какие координаты имеет точка, симметричная точке $M(1; -5; 2)$ относительно плоскости:
1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.12.• Какие координаты имеет точка, симметричная точке $N(-7; 1; 0)$ относительно начала координат?

38.13.• Какие из точек $A(5; -8; 1)$, $B(5; 8; 1)$, $C(-5; 7; 1)$, $D(5; -7; -1)$ лежат на одной прямой, параллельной оси ординат?

38.14.° Какие из точек $D(2; 3; 4)$, $E(-2; 3; 4)$, $K(2; 3; -4)$, $M(-2; -3; 4)$ лежат на одной прямой, параллельной оси аппликат?

38.15.° Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в прямоугольной системе координат так, как показано на рисунке 38.6. Точка A имеет координаты $(1; -1; 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

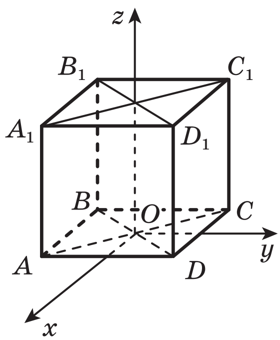


Рис. 38.6

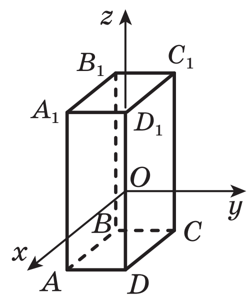


Рис. 38.7

38.16.° Боковые ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны оси аппликат (рис. 38.7), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Начало координат, точка O, является серединой ребра DD_1. Найдите координаты вершин параллелепипеда.

38.17.° Точки $A(3; -2; 6)$ и $C(-1; 2; -4)$ являются вершинами квадрата $ABCD$. Найдите площадь этого квадрата.

38.18.° Точки $A(5; -5; 4)$ и $B(8; -3; 3)$ являются вершинами равностороннего треугольника ABC. Найдите периметр этого треугольника.

38.19.° Точка S — середина отрезка AD, $A(-1; -2; -3)$, $S(5; -1; 0)$. Найдите координаты точки D.

38.20.° Расстояние между точками $A(1; y; 3)$ и $B(3; -6; 5)$ равно $2\sqrt{6}$. Найдите значение y.

38.21.° Точка A принадлежит оси абсцисс. Расстояние от точки A до точки $C(1; -1; -2)$ равно 3. Найдите координаты точки A.

38.22.°° Найдите расстояние от точки $M(-3; 4; 9)$ до оси аппликат.

38.23.°° Найдите расстояние от точки $K(12; 10; -5)$ до оси ординат.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

38.24. Основания равнобокой трапеции равны 13 см и 37 см, а ее диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

39. Векторы в пространстве

В курсе планиметрии вы изучали векторы на плоскости. Теперь вы начинаете изучать векторы в пространстве. Многие понятия и свойства, связанные с векторами на плоскости, можно почти дословно отнести к векторам в пространстве. Доказательства такого рода утверждений о векторах в пространстве аналогичны доказательствам соответствующих утверждений о векторах на плоскости.

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A до точки B. Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»). Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху.

На рисунке 39.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{p}$.

В отличие от отрезка, концы которого — различные точки, у вектора начало и конец могут совпадать.

Договорились называть вектор, начало и конец которого — одна и та же точка, **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначать $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Обозначают: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так: $\left|\vec{a}\right|$. Считают, что модуль нулевого вектора равен нулю. Записывают: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Определение. Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 39.2 изображена четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ являются коллинеарными.

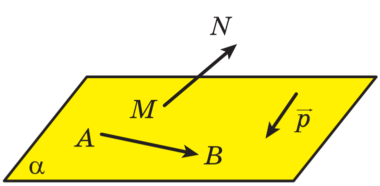


Рис. 39.1

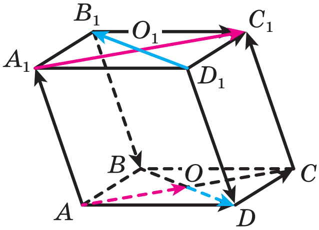


Рис. 39.2

Записывают: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Ненулевые коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** и **противоположно направленными.** Например, на рисунке 39.2 векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ сонаправлены. Записывают: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ противоположно направлены. Записывают: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Определение. Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 39.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является началом вектора. Так, на рисунке 39.3, *а* изображен вектор $\vec{a}$. На рисунке 39.3, *б* изображены векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них также принято называть вектором $\vec{a}$.

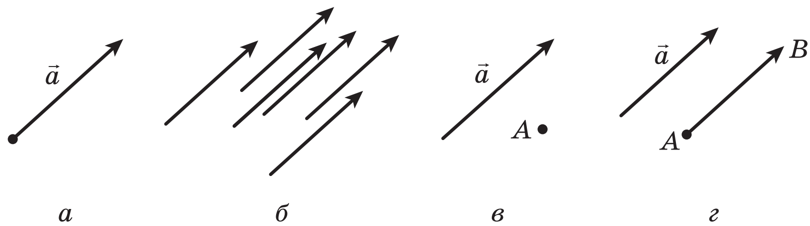


Рис. 39.3

На рисунке 39.3, *в* изображены вектор $\vec{a}$ и точка A. Построим вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. В таком случае говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 39.3, *г*).

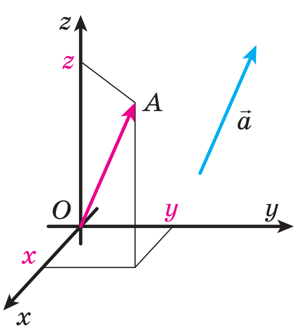


Рис. 39.4

Рассмотрим в координатном пространстве вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим вектор $\overrightarrow{OA}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 39.4). **Координатами вектора** $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}(x; y; z)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y; z)$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты, и наоборот, если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.

Теорема 39.1. ***Если точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $\vec{a}$.***

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что ***если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$, то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

1. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
2. Какой вектор называют нулевым?
3. Что называют модулем вектора?
4. Какие векторы называют коллинеарными?
5. Какие два ненулевых вектора называют равными?
6. Что можно сказать о координатах равных векторов?
7. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
8. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
9. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

УПРАЖНЕНИЯ

39.1.° На рисунке 39.5 изображена призма $ABCA_1B_1C_1$, основанием которой является правильный треугольник. Равны ли векторы: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$; 3) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$; 4) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$?

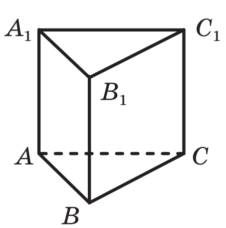


Рис. 39.5

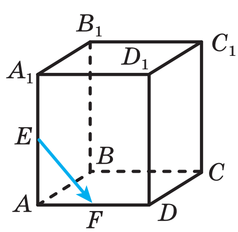


Рис. 39.6

39.2.° Точки E и F — середины соответственно ребер AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 39.6),

$AB \neq AD$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:

1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{EF}$;

2) противоположно направлены с вектором $\overrightarrow{AB_1}$;

3) имеют равные модули с вектором $\overrightarrow{BC_1}$.

39.3.° Точки M и K — середины соответственно ребер CD и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:

1) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{AD}$;

2) противоположно направлены с вектором $\overrightarrow{MK}$;

3) имеют равные модули с вектором $\overrightarrow{AC_1}$.

39.4.° Начертите тетраэдр $DABC$. Отложите:

1) от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{CA}$;

2) от точки B вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$;

3) от точки D вектор, равный вектору $\overrightarrow{BC}$.

39.5.° Начертите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отложите:

1) от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_1A}$;

2) от точки C вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_1C_1}$;

3) от точки D_1 вектор, равный вектору $\overrightarrow{B_1D}$.

39.6.° Какие координаты имеет нулевой вектор?

39.7.° Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $A(3; 4; 2)$, $B(1; -4; 5)$; 2) $A(-6; 7; -1)$, $B(2; 9; 8)$.

39.8.° Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(-1; 10; 4)$, $D(-1; 0; 2)$.

39.9.° Найдите модуль вектора $\vec{m}\left(2; -5; \sqrt{7}\right)$.

39.10.° Найдите модуль вектора $\overrightarrow{MK}$, если $M(10; -4; 20)$, $K(8; -2; 19)$.

39.11.• Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{PF}(2; -3; 6)$, если $P(3; 5; -1)$.

39.12.• Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{ST}(-3; 4; -2)$, если $T(4; 2; 0)$.

39.13.• Даны точки $A(-2; 3; 5)$, $B(1; 2; 4)$, $C(4; -3; 6)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

39.14.• Даны точки $A(5; -12; 7)$, $B(0; y; 3)$, $C(x; 17; -14)$, $D(15; 0; z)$. При каких значениях x, y и z верно равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

39.15.° Модуль вектора $\vec{a}(-4; y; 12)$ равен 13. Найдите значение y.

39.16.° При каких значениях k модули векторов $\vec{a}(4; k+3; 10)$ и $\vec{b}(k; 4; k+9)$ равны?

39.17.•• Используя векторы, докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-4;\ 2;\ 5)$, $B(-6;\ 3;\ 0)$, $C(12;\ -8;\ 1)$ и $D(14;\ -9;\ 6)$ является параллелограммом.

39.18.•• Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(10;\ -8;\ -1)$, $C(-2;\ 4;\ 4)$ и $D(11;\ -20;\ 10)$. Используя векторы, найдите координаты вершины B.

39.19.•• Модуль вектора $\vec{m}$ равен $4\sqrt{3}$, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

39.20.•• Модуль вектора $\vec{c}(x; y; z)$ равен 9, его координаты x и z равны, а координаты x и y — противоположные числа. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

39.21. По одну сторону от центра окружности проведены две параллельные хорды длиной 30 см и 48 см. Найдите расстояние между хордами, если радиус окружности равен 25 см.

40. Сложение и вычитание векторов

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от произвольной точки A пространства вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 40.1) и записывают: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника.**

Можно показать, что сумма $\vec{a}+\vec{b}$ не зависит от выбора точки A.

Заметим, что *для любых трех точек A, B и C выполняется равенство* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Оно выражает правило треугольника.

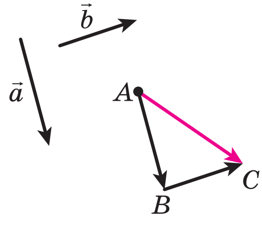


Рис. 40.1

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ***(переместительное свойство);***

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ***(сочетательное свойство).***

Сумму трех и большего количества векторов находят так: вначале складывают первый и второй векторы, потом к полученной сумме прибавляют третий вектор и т. д. Например, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Для тетраэдра $DABC$, изображенного на рисунке 40.2, можно записать: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

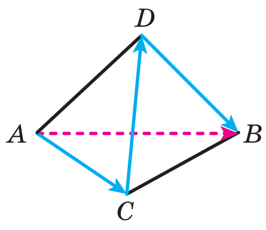


Рис. 40.2

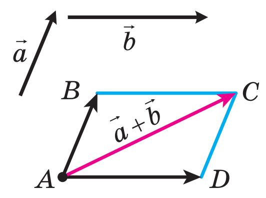


Рис. 40.3

Для сложения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удобно пользоваться **правилом параллелограмма.**

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$ (рис. 40.3). Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда искомая сумма $\vec{a} + \vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, не лежащие в одной плоскости (рис. 40.4). Найдем сумму этих векторов.

Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его ребрами (рис. 40.5). Отрезок OD является диагональю этого параллелепипеда. Докажем, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

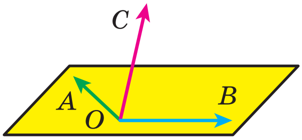


Рис. 40.4

Так как четырехугольник $OBKA$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}$.

Имеем: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}$.

Поскольку четырехугольник $OCDK$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$$

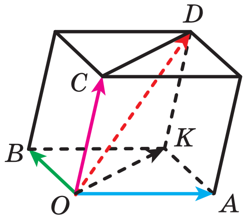


Рис. 40.5

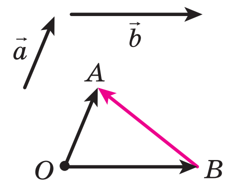


Рис. 40.6

Описанный способ сложения трех векторов, отложенных от одной точки и не лежащих в одной плоскости, называют **правилом параллелепипеда**.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Записывают: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 40.6). Тогда $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. По определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, следовательно, вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отметим, что *для любых трех точек O, A и B выполняется равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.* Оно выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки.

Теорема 40.1. ***Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, а координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.***

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
3. Опишите правило параллелепипеда для нахождения суммы трех векторов.
4. Какой вектор называют разностью двух векторов?
5. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
6. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?

УПРАЖНЕНИЯ

40.1.° Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1C_1}$.

40.2.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1D_1}$.

40.3.° Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40.8). Найдите сумму $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

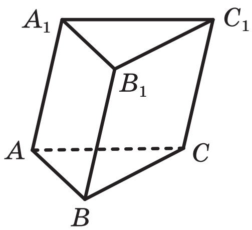


Рис. 40.7

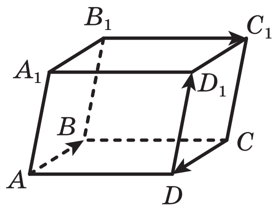


Рис. 40.8

40.4.° Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40.9). Найдите сумму $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}$.

40.5.° Даны векторы $\vec{a}(3; -6; 4)$ и $\vec{b}(-2; 4; -5)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|$.

40.6.° Даны векторы $\vec{m}(-7; -1; 8)$ и $\vec{n}(-3; 2; -4)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{m}+\vec{n}$; 2) $|\vec{m}+\vec{n}|$.

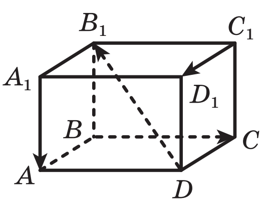


Рис. 40.9

40.7.° Даны векторы $\vec{a}(-10; 15; -20)$ и $\vec{b}(2; 6; -12)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

40.8.° Даны векторы $\vec{m}(3; -1; 2)$ и $\vec{n}(4; -2; -3)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{m}-\vec{n}$; 2) $|\vec{m}-\vec{n}|$.

40.9.° Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Найдите разность векторов:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}$.

40.10.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите разность векторов:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$.

40.11.• Упростите выражение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NK}$.

40.12.• Упростите выражение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BM}$.

40.13.•• Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{C_1D_1}$.

40.14.•• Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC}$.

40.15.•• Найдите координаты точки A такой, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, если $B(4; -2; 12)$, $C(3; -1; 4)$.

40.16.•• Найдите координаты точки M такой, что $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, если $C(1; -5; 3)$, $D(-2; 0; 6)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

40.17. Хорды AB и AC окружности перпендикулярны, $AB = 12$ см, $AC = 16$ см. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

41. Умножение вектора на число

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Записывают: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 41.1 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имеем: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = -2\overrightarrow{OA}$.

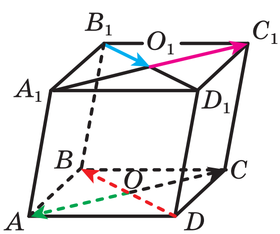


Рис. 41.1

Из определения следует, что

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Теорема 41.1. ***Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.***

Эта теорема позволяет свести вычитание векторов к сложению: чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-1) \cdot \vec{b}$.

Произведение $-1 \cdot \vec{a}$ обозначают $-\vec{a}$ и называют вектором, **противоположным** вектору $\vec{a}$. Например, записывают:

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Из определения умножения вектора на число следует, что *если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Следовательно, *из равенства $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ получаем, что точки O, A и B лежат на одной прямой.*

Теорема 41.2. ***Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Теорема 41.3. ***Если координаты вектора $\vec{a}$ равны $(a_1; a_2; a_3)$, то координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$.***

Умножение вектора на число обладает следующими свойствами.

Для любых чисел k, m и для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняются равенства:

$(km)\vec{a} = k\left(m\vec{a}\right)$ (сочетательное свойство);

$(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (первое распределительное свойство);

$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второе распределительное свойство).

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие сумму векторов, их разность и произведение вектора на число, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения. Например, $2\left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) + 3\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля?
2. Какой вектор называют противоположным данному вектору?
3. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число?
4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?

5. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?

6. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(ka_1; ka_2; ka_3)$?

7. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.

УПРАЖНЕНИЯ

41.1.° Модуль вектора $\vec{m}$ равен 4. Чему равен модуль вектора $\vec{n}$, если:

1) $\vec{n} = 3\vec{m}$; 2) $\vec{n} = -5\vec{m}$?

41.2.° Какими векторами — сонаправленными или противоположно направленными — являются ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

41.3.° Дан вектор $\vec{a}(4; -8; -20)$. Каковы координаты вектора $\vec{b}$, если:

1) $\vec{b} = 5\vec{a}$; 2) $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$?

41.4.° Даны векторы $\vec{a}(-3; 2; 5)$ и $\vec{b}(-2; -4; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если:

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

41.5.° Даны векторы $\vec{m}(1; 7; -8)$ и $\vec{n}(3; -1; 6)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если:

1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$; 2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$.

41.6.° Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 41.2). Укажите все векторы, началом и концом каждого из которых являются вершины параллелепипеда, противоположные вектору:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{B_1D}$; 3) $\overrightarrow{AC}$.

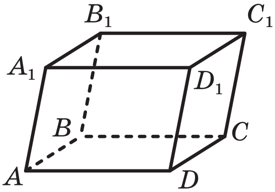


Рис. 41.2

41.7.° Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 41.2). Укажите все векторы, началом и концом каждого из которых являются вершины параллелепипеда, противоположные вектору:

1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$.

41.8.° Каковы координаты вектора, противоположного вектору $\vec{a}\,(13; -10; 9)$?

41.9.• Найдите модуль вектора $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, е сли $\vec{a}\,(-1; 1; 1)$, $\vec{b}\,(2; 2; -2)$.

41.10.• Найдите модуль вектора $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$, если $\vec{a}\,(0{,}5; -0{,}5; 1{,}5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

41.11.• Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(4;\ -1;\ -4)$, $B(0;\ 5;\ 6)$, $C(0;\ 2;\ 7)$, $D(2;\ -1;\ 2)$?

41.12.• Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{FK}$, если $D(2;\ -3;\ 4)$, $E(-1;\ 6;\ 2)$, $F(-2;\ 8;\ 6)$, $K(-3;\ 11;\ 7)$?

41.13.• Найдите значения x и y, при которых векторы $\vec{a}\,(x; y; 2)$ и $\vec{b}\,(-2; 3; 1)$ будут коллинеарными.

41.14.• Найдите значения x и z, при которых векторы $\vec{m}\,(-1; 7; z)$ и $\vec{n}\,(x; 4; 5)$ будут коллинеарными.

41.15.•• Дан вектор $\vec{a}\,(3; 2; 1)$. Найдите коллинеарный ему вектор $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;\ 1;\ 1)$, а точка B принадлежит плоскости yz.

41.16.•• Даны точки $A(-3;\ 6;\ 4)$, $B(6;\ -1;\ 2)$, $C(0;\ 3;\ -2)$. Найдите точку D, принадлежащую плоскости xz, такую, что $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

41.17.•• Дан вектор $\vec{a}\,(-2; 6; 3)$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, а модуль вектора $\vec{b}$ равен 1.

41.18.•• Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $\left|\vec{m}\right| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}\,(1; -1; 2)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

41.19.•• Лежат ли на одной прямой точки:
1) $A(5;\ 6;\ -4)$, $B(7;\ 8;\ 2)$ и $C(3;\ 4;\ 14)$;
2) $D(-1;\ -7;\ -8)$, $E(0;\ -4;\ -4)$ и $F(2;\ 2;\ 4)$?

41.20.•• Точки A, B и C таковы, что $\overrightarrow{AB}\,(10; 15; -5)$ и $\overrightarrow{AC}\,(-6; y; z)$. При каких значениях y и z точки A, B и C лежат на одной прямой?

41.21.•• Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

41.22.•• Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1, точка K — середина ребра CC_1. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

41.23.•• Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра CC_1, точка F — середина ребра AD. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

41.24. Основание равнобедренного треугольника равно 48 см, а его площадь — 432 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

42. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора. От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 42.1). Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, что если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$ (рис. 42.2).

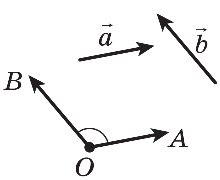


Рис. 42.1

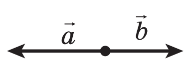


Рис. 42.2

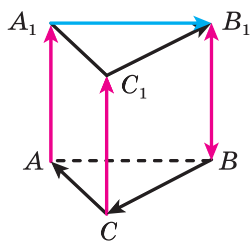


Рис. 42.3

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Записывают: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунке 42.3 изображена треугольная призма, основанием которой является правильный треугольник, а боковое ребро перпендикулярно плоскости основания.

Имеем:

$$\angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}\right) = 60°, \quad \angle\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) = 120°, \quad \angle\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}\right) = 0°,$$

$$\angle\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90°, \quad \angle\left(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}\right) = 180°.$$

Определение. Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^{\,2}$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то есть $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Теорема 42.1. ***Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.***

Например, для векторов, изображенных на рисунке 42.3, имеем: $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Теорема 42.2. ***Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 42.3. ***Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Некоторые свойства скалярного произведения векторов аналогичны соответствующим свойствам произведения чисел. Например,

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b});$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, по правилам преобразования алгебраических выражений. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$$
$$=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Задача. Основанием призмы является равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$). Боковое ребро AA_1 образует равные углы с ребрами AB и AC (рис. 42.4). Докажите, что $AA_1\perp BC$.

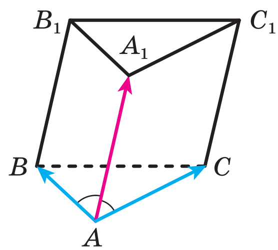


Рис. 42.4

Решение. Пусть $\angle BAA_1=\alpha$. С учетом условия можно записать: $\angle CAA_1=\alpha$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Имеем: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Запишем: $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$

$$=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha-|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

Поскольку $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$, то рассматриваемое скалярное произведение равно 0. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BC}$. ◄

?

1. Чему равен угол между двумя противоположно направленными векторами? двумя сонаправленными векторами?
2. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
3. Какие векторы называют перпендикулярными?
4. Что называют скалярным произведением двух векторов?
5. Что называют скалярным квадратом вектора? Чему он равен?
6. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
7. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
8. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

УПРАЖНЕНИЯ

42.1.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 42.5), точка O — центр грани $ABCD$. Чему равен угол между векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$?

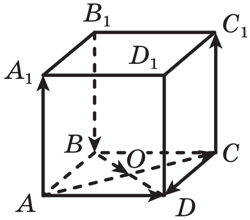


Рис. 42.5

42.2.° Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $40°$. Чему равен угол между векторами:

1) $2\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ и $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ и $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ и $10\vec{b}$?

42.3.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;
2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.4.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

42.5.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}(1; -2; 3)$, $\vec{b}(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}(-9; 4; 5)$, $\vec{b}(3; -1; 4)$.

42.6.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}(4; -1; 6)$, $\vec{b}(-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a}(1; -3; 9)$, $\vec{b}(-1; 3; 0)$.

42.7.° Даны векторы $\vec{m}(3; -2; 4)$ и $\vec{n}(2; 2; z)$. При каком значении z выполняется равенство $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$?

42.8.° Даны векторы $\vec{a}(9; c; -1)$ и $\vec{b}(-2; 3; c)$. При каком значении c выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$?

42.9.° Среди векторов $\vec{a}(1; 1; 2)$, $\vec{b}(1; 2; 1)$ и $\vec{c}(-5; 3; 1)$ укажите пару перпендикулярных векторов.

42.10.• Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $45°$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Найдите:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

42.11.• Угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $150°$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Найдите:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$.

42.12.• Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$.

42.13.• Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Вычислите скалярное произведение $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$.

42.14.• При каком значении x векторы $\vec{a}(x; -x; 1)$ и $\vec{b}(x; 2; 1)$ перпендикулярны?

42.15.• При каком значении p векторы $\vec{a}(p; -2; 1)$ и $\vec{b}(p; 1; -p)$ перпендикулярны?

42.16.• Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, если $\vec{a}(2; -1; -2)$, $\vec{b}(4; -3; 2)$.

42.17.• Найдите скалярный квадрат $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$, если $\vec{m}(2; 1; -3)$, $\vec{n}(4; -2; 0)$.

42.18.•• Каждое ребро тетраэдра $DABC$ равно a, точка M — середина ребра AB. Найдите скалярное произведение векторов:
1) $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

42.19.•• Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат, а каждое ее ребро равно a. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$.

42.20.•• Найдите угол между векторами $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.21.•• Найдите угол между векторами $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.

42.22.•• Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(3; -2; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(4; -1; 5)$, $D(1; 3; 0)$.

42.23.•• Вершинами треугольника являются точки $A(1; 0; 1)$, $B(-5; 4; 3)$ и $C(0; 3; -1)$. Найдите угол A треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

42.24. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 10 см, а радиус вписанной в нее окружности равен 4 см. Найдите площадь трапеции.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 6

Расстояние между точками

Расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ можно найти по формуле $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Взаимное расположение двух векторов

Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Равенство векторов

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

Координаты вектора

Если точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Действия над векторами

Для любых трех точек A, B и C выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Для любых трех точек O, A и B выполняется равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что: 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Произведение $-1 \cdot \vec{a}$ обозначают $-\vec{a}$ и называют вектором, противоположным вектору $\vec{a}$.

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то:

- координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$;
- скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые).

43. Упражнения для повторения курса геометрии 10 класса

Параллельность в пространстве

43.1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M не лежит в плоскости ABC. Можно ли провести плоскость через:

1) прямую AM и точки O и C;
2) прямую AC и точки B и M?

43.2. Точка M принадлежит грани BB_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — ребру AD (рис. 43.1). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABB_1.

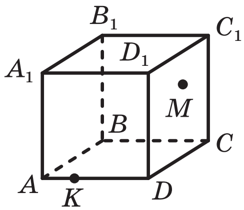


Рис. 43.1

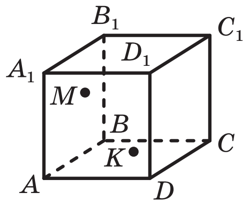


Рис. 43.2

43.3. Точка M принадлежит грани AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — грани AA_1D_1D (рис. 43.2). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью $A_1B_1C_1$.

43.4. На ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M, N и K, причем $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ и $CN \neq DK$. Постройте линию пересечения плоскостей ABC и MNK.

43.5. Точка M — середина ребра A_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра CD. Постройте линию пересечения плоскостей AMK и BB_1C_1.

43.6. На ребрах AB, AD, AC и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F, M и K. Постройте линию пересечения плоскостей EFM и DAK.

43.7. На ребрах DA и DB тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M и K. Постройте линию пересечения плоскостей ABC и MKC.

43.8. Прямая MK, не лежащая в плоскости параллелограмма $ABCD$, параллельна прямой AD. Каково взаимное расположение прямых: 1) MK и BC; 2) MK и AB?

43.9. Известно, что прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает прямую b и не пересекает прямую a. Докажите, что прямые a и c скрещивающиеся.

43.10. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Плоскость α не имеет общих точек с данной окружностью. Через точки A, B, C и D провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 9$ см, $DD_1 = 3$ см.

43.11. Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $AB \parallel CMD$.

43.12. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BC. На отрезке AD отметили точку K, а на отрезке BD — точку E так, что $KE \parallel ABC$. Докажите, что $KE \parallel MN$.

43.13. На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E, F и M так, что $\angle ABE = \angle FEB$, $\angle CBM = \angle FMB$. Докажите, что плоскости ABC и EFM параллельны.

43.14. Известно, что $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Прямая a пересекает плоскость α в точке A, плоскость β — в точке B, а прямая b пересекает плоскость β в точке C (рис. 43.3). Постройте точку пересечения прямой b и плоскости α.

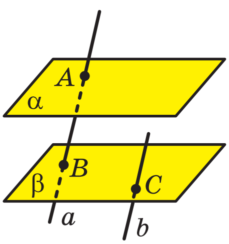


Рис. 43.3

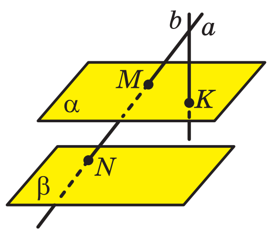


Рис. 43.4

43.15. Даны параллельные плоскости α и β и пересекающиеся прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α в точке M, плоскость β — в точке N, а прямая b пересекает плоскость α в точке K (рис. 43.4). Постройте точку пересечения прямой b и плоскости β.

43.16. Медианы грани ADB тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке E, а медианы грани BDC — в точке F. Докажите, что прямая EF параллельна плоскости ABC.

43.17. Верно ли утверждение:

1) если параллельные проекции двух прямых на плоскость параллельны, то данные прямые параллельны;
2) если плоская фигура равна своей параллельной проекции, то плоскость, в которой лежит данная фигура, и плоскость, в которой лежит ее проекция, параллельны?

43.18. Точки A_1, B_1 и C_1 являются соответственно изображениями вершин A, B и C параллелограмма $ABCD$ (рис. 43.5). Постройте изображение параллелограмма $ABCD$.

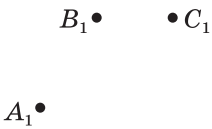


Рис. 43.5

43.19. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB, отрезок A_1B_1 — изображение гипотенузы AB. Постройте изображение квадрата, который имеет с треугольником ABC общий угол и все вершины которого лежат на сторонах этого треугольника.

Перпендикулярность в пространстве

43.20. Прямая m параллельна стороне AC треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC, $\angle ABC = \angle BAC = 30°$.

1) Докажите, что прямые m и BC скрещивающиеся.
2) Найдите угол между прямыми m и BC.

43.21. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом, а ребро AA_1 вдвое больше ребра AB. Найдите угол между прямыми: 1) AB_1 и CD; 2) AB_1 и CD_1; 3) AB_1 и A_1C_1.

43.22. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 43.6). Точка M — середина отрезка AC. Найдите отрезки DA и DM, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $DB = 24$ см.

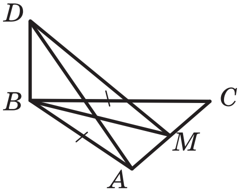


Рис. 43.6

43.23. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая MO, перпендикулярная плоскости квадрата. Точка K — середина отрезка CD, $MC = 6$ см, $\angle MCK = 60°$.

1) Докажите, что прямая CD перпендикулярна плоскости MOK.
2) Найдите отрезок MO.

43.24. Отрезок AB не пересекает плоскость α, а прямая AB пересекает плоскость α в точке C. Через точки A и B проведены прямые, которые перпендикулярны плоскости α и пересекают ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок B_1C, если $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 4$ см.

43.25. Отрезок AB пересекает плоскость α. Через точки A и B и середину C отрезка AB проведены прямые, которые перпендикулярны плоскости α и пересекают ее в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, если $AA_1 = 18$ см, $BB_1 = 9$ см.

43.26. Из точки M проведены к плоскости α перпендикуляр MH и равные наклонные MA и MB (рис. 43.7). Найдите расстояние между основаниями наклонных, если $\angle MAH = 30°$, $\angle AMB = 60°$, $MH = 5$ см.

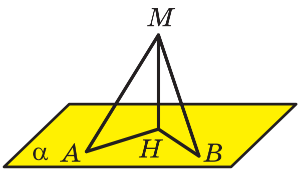


Рис. 43.7

43.27. Угол между диагональю прямоугольника $ABCD$ и одной из его сторон равен 30°. Точка M удалена от каждой вершины прямоугольника на $5\sqrt{3}$ см, а от его плоскости — на $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

43.28. Отрезок MC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Расстояние от точки M до прямой AB равно $3\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

43.29. Отрезок MB — перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$, $AB = 5$ см, $BC = 16$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой AD, если расстояние от точки M до прямой CD равно 20 см.

43.30. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами 6 см, 25 см и 29 см, проведен перпендикуляр DO к плоскости ABC. Расстояние от точки D до плоскости ABC равно $2\sqrt{15}$ см. Найдите расстояние от точки D до сторон треугольника.

43.31. Точка M, равноудаленная от вершин правильного треугольника ABC, находится на расстоянии 5 см от его плоскости. Найдите площадь треугольника ABC, если угол между прямой MA и плоскостью ABC равен 60°.

43.32. Отрезок DC — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$), $DC = 9$ см, $AC = 15$ см, $BC = 20$ см. Отрезок DE — перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AB. Найдите угол между прямой DE и плоскостью ABC.

43.33. Отрезок MK не пересекает плоскость α. Найдите угол между прямой MK и плоскостью α, если $MK = 6$ см, а концы отрезка MK удалены от плоскости α на $8\sqrt{3}$ см и на $5\sqrt{3}$ см.

43.34. Сторона BC правильного треугольника ABC лежит в плоскости α, высота AH этого треугольника образует с плоскостью α угол φ. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α.

43.35. Точка A лежит внутри двугранного угла, величина которого равна α. Расстояние от точки A до каждой грани этого угла равно h. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

43.36. Отрезок MC — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$). Найдите угол между плоскостями ABC и ABM, если $AC = 8$ см, $\angle BAC = 30°$, а расстояние от точки M до прямой AB равно 12 см.

43.37. Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость α. Угол между плоскостями ABC и α равен 60°. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $AC = 7$ см, $AB = 10$ см, $BC = 13$ см.

43.38. Угол между квадратом $ABCD$ и прямоугольником $AEFD$ составляет 60°. Площадь квадрата равна 16 см^2, а площадь прямоугольника — 32 см^2. Найдите расстояние между прямыми, содержащими параллельные стороны данных квадрата и прямоугольника.

43.39. Прямая c — линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. Точка M удалена от плоскости α на 9 см, а от плоскости β — на 12 см. Найдите расстояние между точкой M и прямой c.

43.40. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая m, перпендикулярная плоскости ABC. На прямой m отметили точку D такую, что угол между плоскостями ABC и ABD равен 30°. Найдите площадь треугольника ABD, если $AB = 16$ см, $\angle BAC = 45°$.

43.41. Проекцией трапеции, площадь которой равна $40\sqrt{2}$ см^2, является равнобокая трапеция с основаниями 7 см и 13 см и боковой стороной 5 см. Найдите угол между плоскостями данных трапеций.

Координаты и векторы в пространстве

43.42. Даны точки $A(7; 3; -1)$ и $B(x; 5; z)$. Известно, что середина C отрезка AB принадлежит оси ординат.

1) Найдите координаты точки C.
2) Найдите значения x и z.

43.43. Даны точки $A(8;\ 0;\ 4)$, $B(13;\ 4;\ 7)$, $C(11;\ -3;\ 3)$.
1) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
2) Найдите площадь круга, описанного около треугольника ABC.

43.44. Найдите площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если известно, что $A(1;\ 1;\ -2)$, $C(-3;\ 3;\ 2)$, а точка B принадлежит оси аппликат.

43.45. Даны точки $A(-2;\ 1;\ 3)$, $B(0;\ 5;\ 9)$ и $C(-3;\ y;\ 6)$. При каких значениях y отрезок AB в 2 раза длиннее отрезка AC?

43.46. От точки $C(2;\ -3;\ 1)$ отложили вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Найдите координаты точки D, если $A(-1;\ 0;\ 5)$, $B(0;\ 4;\ -1)$.

43.47. Даны точки $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ -1)$ и $C(-1;\ 2;\ 0)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

43.48. Векторы $\vec{a}(x; 3; -4)$ и $\vec{b}(20; -12; 16)$ лежат на противолежащих сторонах параллелограмма. Найдите значение x.

43.49. Даны точки $A(-4;\ 1;\ 2)$, $B(-2;\ 0;\ -1)$ и $C(1;\ 1;\ 0)$. Найдите координаты точки D, принадлежащей плоскости yz, такой, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

43.50. Медианы грани BDC тетраэдра $DABC$ пересекаются в точке O, точка M — середина ребра AD. Выразите вектор $\overrightarrow{MO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

43.51. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(2; 2; 1)$ и $\vec{b}(6; -2; -3)$.

43.52. Найдите угол между векторами $\vec{a}(3; -2; 4)$ и $\vec{b}(2; 3; 0)$.

43.53. При каких значениях x векторы $\vec{a}(x; -2; 1)$ и $\vec{b}(x; 2x; 3)$ перпендикулярны?

43.54. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n}(1; -2; 1)$, если $\vec{m}\cdot\vec{n}=-3$.

43.55. Найдите угол между вектором $\vec{a}(-1; 2; 5)$ и положительным направлением оси абсцисс.

43.56. Найдите угол между вектором $\vec{b}(6; -2; -3)$ и отрицательным направлением оси аппликат.

43.57. Известно, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=135°$. Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$.

43.58. Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямыми MB_1 и DK.

Ответы и указания к упражнениям

Раздел 1. Алгебра и начала анализа

§ 1. Функции, их свойства и графики

1.16. 1) 16; 2) 32. **1.17.** 2500 м^2. **1.22.** 2; 5. **1.23.** –3; –1. **1.28.** 3) $\{-6\}$.

2.7. 4) $\min\limits_{(-\infty;\,-2]} f(x)=256$; наибольшего значения не существует. **2.11.** 1) Если $a=6$, то один корень; если $a>6$, то 2 корня; если $a<6$, то корней нет; 2) если $a=1$ или $a=-8$, то один корень; если $a<-8$ или $a>1$, то 2 корня; если $-8<a<1$, то корней нет.

3.5. 1) $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$; 2) $(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$. **3.6.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x)=64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x)=1$; 2) $\max\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x)=64$, $\min\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x)=1$; 3) $\max\limits_{[1;\,+\infty)} f(x)=1$, наименьшего значения не существует. **3.7.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};\,2\right]} f(x)=27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};\,2\right]} f(x)=\frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2;\,-1]} f(x)=-\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2;\,-1]} f(x)=-1$; 3) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(-\infty;\,-3]} f(x)=-\frac{1}{27}$.

4.4. 5) –1. **4.8.** 6) Решений нет; 9) 5; –15. **4.9.** 5) –0,5; 6) 0; 6. **4.12.** 29. **4.13.** –11,8. **4.14.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1;\,+\infty)$; 3) $(-\infty;\,-1]\cup[2;\,+\infty)$. **4.15.** 1) $(-\infty;\,2]$; 2) $(-\infty;\,3)\cup(3;\,+\infty)$; 3) $(-\infty;\,1]\cup[3;\,+\infty)$. **4.16.** 4) –5 и –4. **4.20.** 1) –1; 2; 2) –1; 3. **4.21.** –3; 1.

5.11. 0. **5.12.** $27\sqrt[3]{2}$. **5.13.** 3) $\sqrt[12]{128}$. **5.14.** 3) $\sqrt[3]{a}$. **5.19.** 1) $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$; 2) $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$; 3) a и b — произвольные числа; 4) a и b — произвольные числа. **5.20.** 2) $\mathbb{R}$. **5.21.** 2) $-n$; 4) c^4. **5.22.** 2) $10x$. **5.25.** 1) $[-4;\,+\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. **5.26.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **5.28.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$. **5.29.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$. **5.30.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{6b^6}$, если $b\geqslant 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, если $b<0$; 3) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **5.31.** 1) $\sqrt[6]{a^7}$; 2) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **5.32.** [3; 5]. **5.34.** 6) 16.

6.5. 3) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.6.** 3) 4. **6.7.** 3) 125. **6.8.** 2) 49. **6.11.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2. **6.12.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$. **6.13.** 2) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 5) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **6.14.** 3) $1+\dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$. **6.15.** $\dfrac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$. **6.16.** $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

7.3. 3) –1; 1. **7.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) корней нет; 4) 7. **7.5.** 2) Корней нет. **7.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. **7.7.** 1) –5; 2) 4; 3) –1; 4) 5. **7.8.** 1) 4; 2) 2; 3. **7.9.** $\frac{1}{3}$. **7.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 8; 5) 0; 16; 6) $\frac{9}{8}$.

7.11. 1) 16; 2) 1; 512; 3) −4; 11; 4) 2,8; −1,1. **7.12.** 1) 0; 5; 2) 7. **7.13.** 1) 6; 2) 2; 3) −1; 3; 4) −2. **7.14.** 1) 2; 2) 8. **7.15.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) корней нет; 4) 1; −3. **7.16.** 1) −5; 4; 2) −1. **7.17.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) −1; 4; 4) −2; 5. **7.18.** 1) −1; 5; 2) 1; 2; 3) −6; 4. **7.19.** 27. **7.20.** 10. **7.22.** $f(x) = -2x + 1$.

§ 2. Тригонометрические функции

8.4. 3) 10π. **8.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **8.8.** 8) В I четверти. **8.9.** 4) В III четверти; 7) во II четверти. **8.10.** 3) (0; −1); 6) (1; 0). **8.11.** 2) (−1; 0). **8.13.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) 2π; -2π. **8.14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.15.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.16.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (0; −1); 3) (0; 1), (0; −1); 4) (1; 0), (−1; 0). **8.19.** 1) −2; 2) $-\frac{4}{3}$. **8.20.** 80 000 жителей.

9.1. 1) 5; 4) $\frac{7}{4}$. **9.2.** 1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.** 1) Нет; 2) нет. **9.4.** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **9.5.** 1) 3; −3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. **9.6.** 2) 1; −5. **9.11.** *Указание.* Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворотов точки P_0 на углы α и $\alpha+\frac{\pi}{2}$ соответственно. Опустим перпендикуляры P_1A и P_2B на оси x и y соответственно (рис. 9.3). Поскольку $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можно установить, что $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Отсюда $OA = OB$. Следовательно, абсцисса точки P_1 равна ординате точки P_2, то есть $\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Другие случаи расположения точек P_1 и P_2 рассматривают аналогично. Отдельно рассмотрите случаи, когда точки P_1 и P_2 лежат на координатных осях.

10.4. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.5.** $-\frac{1}{2}$. **10.6.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **10.7.** 1,5. **10.8.** 1) II четверти. **10.12.** 1) $2\sin\alpha$; 2) $-2\cos\alpha$; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Четная; 2) не является ни четной, ни нечетной. **10.15.** 1) Нечетная; 2) четная. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

11.1. 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **11.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **11.15.** 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 3) $\sin\frac{10\pi}{9} > \sin\frac{25\pi}{18}$. **11.16.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$. **11.19.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **11.21.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$.

12.1. 5) $2\cos^2\alpha$; 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 3) $\sin^4\alpha$; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$. **12.7.** 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.8.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$. **12.11.** $-\frac{1}{2}$. *Указание.* Разделите числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$. **12.12.** $-\frac{16}{11}$. **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; -2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

13.1. 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin 2\beta$; 6) $\operatorname{tg} 15°$. **13.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos(\alpha+\beta)$. **13.5.** $\frac{6}{7}$. **13.7.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.8.** 1) $\sqrt{3}$. **13.9.** 1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin 25°$; 5) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 6) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 7) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **13.10.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}\sin4\alpha$; 6) $2\sin 2\alpha$; 7) $\frac{1}{2}\cos2\alpha$; 8) $\sin 3\alpha$. **13.11.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.12.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.15.** $-\frac{24}{25}$. **13.16.** $-\frac{4}{5}$. **13.17.** 2. **13.18.** 5. **13.19.** $-0{,}96$. **13.20.** $-\frac{8}{15}$. **13.21.** $\frac{7}{8}$. **13.22.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.23.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.25.** 1. **13.26.** 1) 2; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **13.27.** 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$. **13.28.** 2. **13.29.** -2. **13.30.** $-\frac{8}{9}$. **13.31.** $\frac{3}{4}$. **13.32.** При $x=1$: 9, 6, 3; при $x=9$: 41, 62, 83. **13.33.** При $x=2$: 1, -3, 9; при $x=\frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$.

14.3. 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **14.4.** 2) $\sin\frac{\pi}{15}$. **14.7.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) 1. **14.8.** -1. **14.9.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1. **14.11.** 0. **14.12.** 1) 1; 2) 1.

15.3. 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.7.** $-\frac{\pi}{6}$. **15.8.** Например, -3π. **15.9.** 4 корня. **15.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **15.11.** 1. **15.12.** 1) $\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-3;-2)\cup(-2;3]$.

16.3. 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}, n\in\mathbb{Z}$. **16.4.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+$ $+\frac{5\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$. **16.7.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}$. **16.9.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **16.10.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **16.11.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$. **16.12.** 2) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **16.13.** $\frac{13\pi}{12}$. **16.14.** $-\frac{13\pi}{90}$. **16.15.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **16.16.** 6 корней. **16.17.** 4 корня. **16.18.** $-\frac{2\pi}{3}$. **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

17.1. 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **17.2.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm4\arccos\frac{1}{3}+8\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **17.3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **17.4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+$ $+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$. **17.5.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n,\ \pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm2\pi+$ $+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ 2\pi+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **17.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+$ $+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi+6\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pi+4\pi n,$ $n\in\mathbb{Z}$. **17.7.** 1) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **17.8.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **17.10.** 3) −2; 4) 1.

§ 3. Производная и ее применение

18.7. 8 м/с. **18.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с.

19.4. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.8.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **19.9.** 1) −32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **19.13.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **19.14.** 1. **19.15.** 7.

20.9. 16 кг · м/с. **20.10.** 400 Дж. **20.12.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$.

21.1. 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$; 6) $y = x + 4$. **21.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = 5x - 18$. **21.3.** $y = -3x - 3$. **21.4.** $y = -5x + 2$. **21.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **21.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **21.7.** 4) $[1; 3) \cup (3; 4]$.

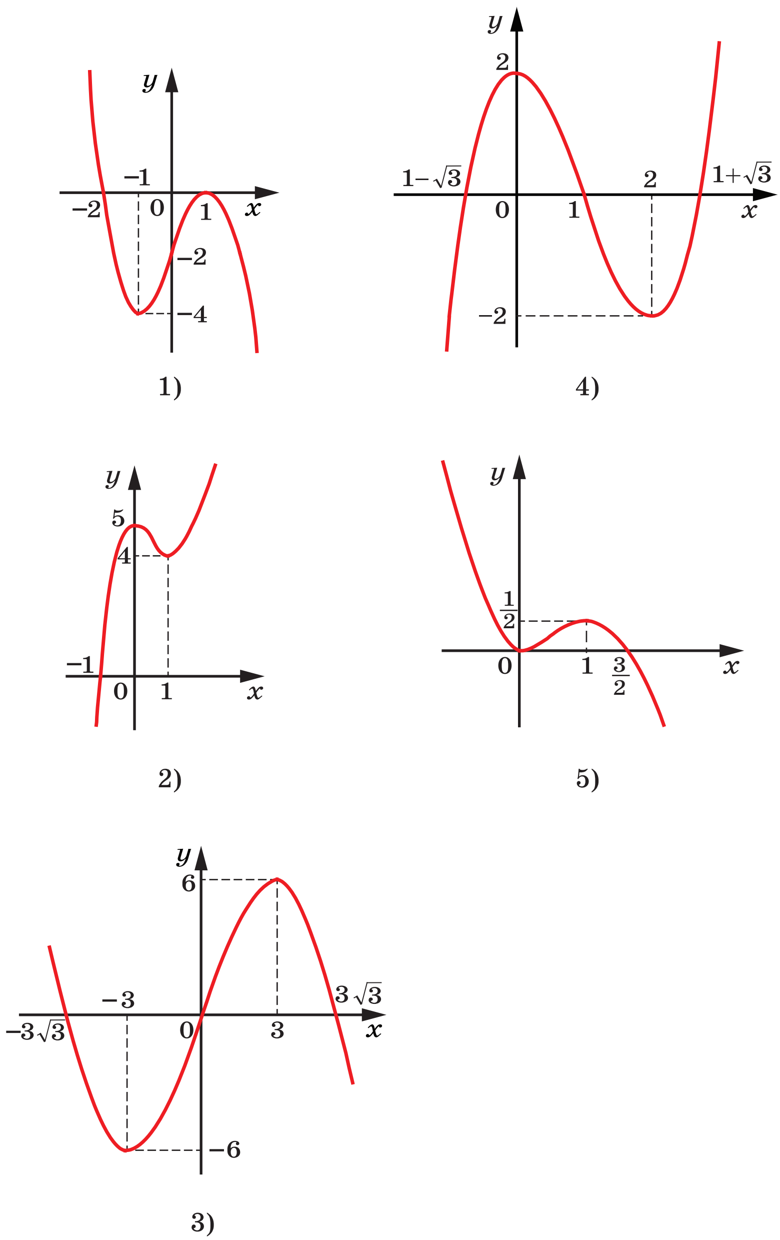
22.1. 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$; 2) возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$; 3) возрастает на $[-1; 7]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[7; +\infty)$; 4) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$. **22.2.** 1) Возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-3; 1]$; 3) возрастает на $[-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **22.3.** 1) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$; 2) возрастает на $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$; 3) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $(0; 1]$; 4) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$. **22.4.** 1) Возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$. **22.9.** $-\frac{1}{3}$.

23.3. 1) $x_{min} = 0$; 2) $x_{min} = 3$; 3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = 5$, $x_{max} = -1$. **23.4.** 1) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -1$; 2) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 3) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -7$; 4) $x_{min} = \frac{3}{2}$. **23.7.** 1) Возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $[-2; 0)$ и $(0; 2]$, $x_{max} = -2$, $x_{min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$. **23.8.** 1) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$; 2) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$. **23.9.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **23.10.** 1) 26; 2) 17; 3) -10.

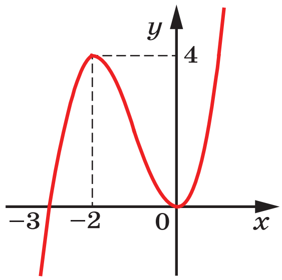
24.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) -3; -30; 4) -4; -8. **24.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; -2; 3) 48; -6; 4) 0; -28. **24.3.** $8 = 2 + 6$. **24.4.** $12 = 8 + 4$. **24.5.** $180 = 40 + 80 + 60$. **24.6.** $18 = 8 + 3 + 7$.

25.1. См. рисунок. **25.2.** См. рисунок.

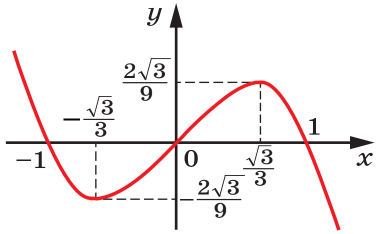
26.6. 1) -163; 2) 3. **26.14.** 5) $\frac{1}{3}$. **26.16.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) -2; 5) -2; 6) $\frac{2}{9}$; 2; 7) 625; 8) -25; 3. **26.19.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **26.20.** 2; -3. **26.21.** 1) 0; 2) 0. **26.22.** -1. **26.24.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) 2; 3) 0; 4) 1. **26.25.** 1) $-\frac{7\pi}{2} + 12\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{3} + 4\pi k$ или $-\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{2}$. **26.27.** $-\frac{\pi}{24}$. **26.28.** 2 корня. **26.29.** 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



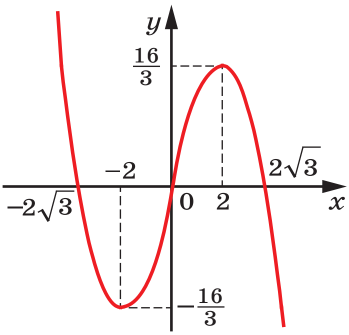
До задачі 25.1



1)



3)



2)

До задачі 25.2

26.32. 3. **26.33.** 1. **26.34.** 3) $y = -6x + 13$; 4) $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.35.** $y = -4x$ и $y = 4x - 16$. **26.36.** 3,5 с. **26.38.** 2) Возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$, убывает на промежутке $[0; 4]$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 4$; 3) возрастает на промежутках $(-\infty; -4]$ и $[4; +\infty)$, убывает на промежутках $[-4; 0)$ и $(0; 4]$, $x_{\max} = -4$, $x_{\min} = 4$; 6) возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$, убывает на промежутках $[-3; -1)$ и $(-1; 1]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 1$. **26.39.** 2) 2; −2. **26.40.** $32 + 32$. **26.41.** 2.

Раздел 2. Стереометрия

§ 4. Параллельность в пространстве

27.6. Бесконечно много или одну. **27.14.** 11 см или 3 см. **27.15.** 10 см. **27.16.** 1 : 3.

28.15. 72°, 108°, 72°, 108°.

29.9. Одну плоскость или три плоскости. **29.14.** 4 см. **29.15.** 9 см. **29.16.** 1 : 2.

30.12. 7,5 см. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Указание*. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, и воспользуйтесь равенством углов подобных треугольников. **30.18.** 156 см^2.

31.13. 2) 24 см. **31.15.** 1,5.

32.8. 9 см. **32.14.** 60°.

§ 5. Перпендикулярность в пространстве

33.4. 60°. **33.5.** 1) 90°; 2) 40°. **33.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **33.7.** 80°. **33.8.** 10 см. **33.9.** 10 см. **33.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **33.11.** α или $180° - \alpha$. **33.12.** 90°. *Указание*. Докажите, что искомый угол равен углу между прямыми OB_1 и AC и что треугольник AB_1C равнобедренный. **33.13.** 60°. **33.14.** 52 см.

34.7. 2 см. **34.8.** $2\sqrt{5}$ см. **34.9.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **34.10.** 8 см. **34.13.** 12 см. **34.14.** 14 см. **34.15.** 12 см.

35.5. 7 см. **35.6.** 12 см. **35.16.** 15 см. **35.17.** 15 см, 13 см. **35.18.** 3 см. **35.19.** 12 см. **35.23.** $3\sqrt{5}$ см. **35.24.** 2 см. **35.25.** $2\sqrt{2}$ см. **35.26.** $2\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\sqrt{6}$ см. **35.27.** 17 см. **35.28.** 8 см. **35.29.** 10 см. **35.30.** 5 см. **35.31.** 4 см. **35.33.** 20 см. **35.34.** $3\sqrt{10}$ см. **35.36.** $4\sqrt{3}$ см.

36.7. 30°. **36.10.** 30°. **36.11.** $6\sqrt{2}$ см. **36.12.** 3 см. **36.13.** $8\sqrt{2}$ см. **36.14.** $3\sqrt{10}$ см. **36.15.** 6 см. **36.16.** $3\sqrt{14}$ см. **36.17.** 30°. **36.18.** 30°.

37.6. 60°. **37.7.** 60°. **37.11.** 80°. **37.16.** 35 см. **37.18.** 84 см^2. **37.20.** 105°. **37.21.** 70°. **37.22.** $\sqrt{5}$ см. **37.23.** 120°. **37.24.** $5\sqrt{2}$ см, 13 см. **37.25.** 45°. **37.26.** $3\sqrt{2}$ см. **37.27.** 25 см. **37.28.** 8 см. **37.29.** 45°. **37.30.** 30°, 60°. **37.31.** 1) $2\sqrt{15}$ см; 2) 8 см. **37.32.** 13 см. **37.33.** 45°. **37.34.** 60°. **37.35.** 90°. **37.36.** 26 см.

§ 6. Координаты и векторы в пространстве

38.18. 66. **38.19.** $3\sqrt{14}$. **38.20.** $y = -2$ или $y = -10$. **38.21.** A (3; 0; 0) или A (−1; 0; 0). **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.** 625 см^2.

39.10. 3. **39.13.** D (7; −4; 5). **39.14.** $x = 20$, $y = -29$, $z = -18$. **39.15.** −3 или 3. **39.16.** −14 или 2. **39.18.** B (−3; 16; −7). **39.19.** $\vec{m}$ (4; 4; 4) или $\vec{m}$ (−4; −4; −4). **39.20.** $\vec{c}\left(3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$ или $\vec{c}\left(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$. **39.21.** 13 см.

40.11. $\overrightarrow{NK}$. **40.12.** $\overrightarrow{FM}$. **40.15.** A (3,5; −1,5; 8). **40.16.** M (−0,5; −2,5; 4,5). **40.17.** 9,6 см.

41.14. $x=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{35}{4}$. **41.15.** $\overrightarrow{AB}\left(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **41.16.** D (6; 0; 10). **41.17.** $\vec{b}\left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **41.18.** $\vec{m}$ (5; −5; 10). **41.19.** 1) Нет; 2) да. **41.20.** $y=-9$, $z=3$. **41.21.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.22.** $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.23.** $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.24.** 8 см.

42.7. 4. **42.8.** −3. **42.9.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$. **42.12.** −19,5. **42.13.** −12. **42.14.** 1. **42.15.** −1 или 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$; 2) 0. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DB}$. **42.19.** a^2. *Указание*. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. **42.20.** $180°-\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **42.21.** $180°-\arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **42.22.** 0,7. **42.23.** 60°. **42.24.** 80 см^2.

43.10. 11 см. **43.20.** 2) 60°. **43.21.** 1) arctg 2; 2) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **43.22.** 26 см, $8\sqrt{10}$ см. **43.23.** 2) $3\sqrt{2}$ см. **43.24.** 2,4 см. **43.25.** 4,5 см. **43.26.** 10 см. **43.27.** $25\sqrt{3}$ см^2. **43.28.** 6 см. **43.29.** 13 см. **43.30.** 8 см. **43.31.** $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см^2. **43.32.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **43.33.** 60°. **43.34.** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)$. **43.35.** $\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **43.36.** $\arccos\frac{1}{3}$. **43.37.** 6 см. **43.38.** $4\sqrt{3}$ см. **43.39.** 15 см. **43.40.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см^2. **43.41.** 45°. **43.42.** 1) C (0; 4; 0); 2) $x=-7$, $z=1$. **43.43.** 2) $\frac{69\pi}{4}$. **43.44.** 9. **43.45.** $y=3$ или $y=-1$. **43.46.** D (3; 1; −5). **43.47.** D (−2; 1; 2). **43.49.** D (0; 1,5; 1,5). **43.50.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. **43.51.** $\frac{5}{21}$. **43.52.** 90°. **43.53.** $x=1$ или $x=3$. **43.54.** $\vec{m}$ (−0,5; 1; −0,5). **43.55.** $180°-\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **43.56.** $\arccos\frac{3}{7}$. **43.57.** $2\sqrt{5}$. **43.58.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Содержание

Раздел 2. **СТЕРЕОМЕТРИЯ**

§ 4. Параллельность в пространстве

§ 5. Перпендикулярность в пространстве

§ 6. Координаты и векторы в пространстве

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти з навчанням російською мовою

(Російською мовою)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *А. Ю. Вєнза*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 15,28.
Тираж 9912 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003