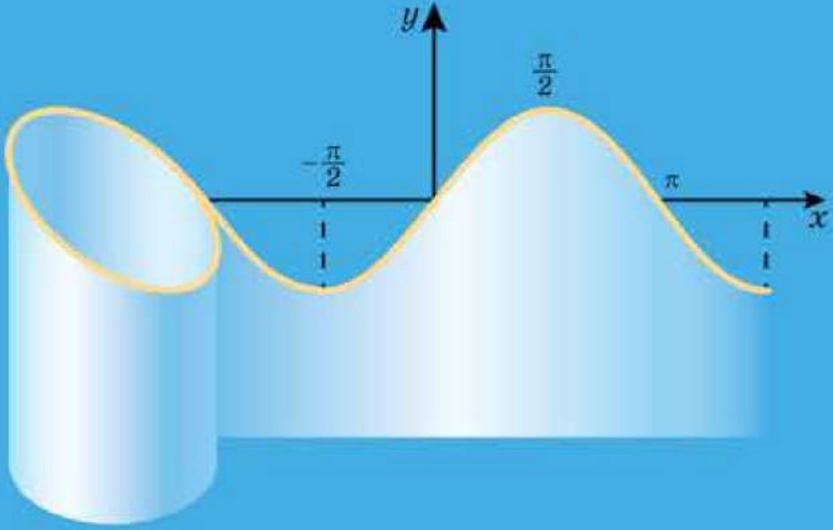
10

# MATEMATIKA

## ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI. TÉRMÉRTAN

### STANDARD SZINT



УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Переклад за виданням :
**Мерзляк А. Г.** Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

**Видано за рахунок державних коштів.**
**Продаж заборонено**

**Мерзляк А. Г.**
М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. осв. з навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів : Світ, 2018. – 256 с. : іл.

ISBN 978-966-000-000-0

**УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]**



ISBN 978-966-000-000-0 (угор.)
ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

## A SZERZŐKTŐL

**KEDVES TIZEDIKESEK!**

A mai korban nincs olyan tudományág, amelyben ne alkalmaznák a matematika eredményeit. A fizikában és a kémiában, a csillagászatban és a biológiában, a földrajzban és a közgazdaságtanban, de még a nyelvtudomány és a történelem is használ matematikai eszközöket.

Reméljük, ez a tankönyv segítségetekre lesz abban, hogy alapos matematikai ismeretekre tegyetek szert. A könyv két fejezetből áll: az első rész az algebra és az analízis elemeivel (1.–26. pont), a második pedig a mértannal (27.–43. pont) foglalkozik.

Az **algebra és az analízis elemei** nagyon érdekes és hasznos tantárgy. Fejleszti az analitikus és a logikus gondolkozást, a kutatási készségeket, a matematikai kultúrát, csiszolja az elmét. Ebben a tanévben megkezditek a matematikai analízissel való ismerkedést, megismerkedtek majd új függvényekkel, tanulmányozni fogjátok ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, elsajátítjátok a függvények vizsgálatának módszereit.

A mértannak azt a fejezetét, amelyben a térbeli alakzatokkal és ezek tulajdonságaival fogtok foglalkozni, **térmértan**nak vagy **sztereometriá**nak nevezzük. A mértannak ezt a részét fogjátok a 10. és 11. osztályokban megismerni. A sztereometria szó a görög *stereos* – térbeli és *metreos* – mérték szavakból ered. A térmértan ismerete kiemelten fontos. A térbeli látás és alapos mértani ismeretek nélkül lehetetlen elsajátítani a mérnöki szakmákat, építési vagy építészeti feladatokat, számítógépes grafikát, ruha- és lábbelitervezést stb. Ez kézenfekvő, mivel az ember, illetve a természet által létrehozott objektumok nem síkbeli alakzatok (1. ábra).

Kijevi–Pecserszki harangláb

A *Mrija* ukrán repülőgép, a világ legnagyobb repülője

A Föld képe a világűrből

**1. ábra**

A tankönyv pontokra van felosztva. Az elméleti tananyag elsajátítása során fordítsatok különös figyelmet a **félkövér**rel, a ***félkövér-dőlt***tel és a *dőlt*tel szedett szövegrészre; így jelöljük a könyvben a szabályokat és a legfontosabb matematikai állításokat. Az elméleti részt rendszerint gyakorló feladatok követik. Az itt ismertetett módszerek mintául szolgálhatnak a feladatmegoldások során.

Ebben a tankönyvben sok tantételt is találtok, melyek közül több bizonyítást is tartalmaz. Abban az esetben, ha a bizonyítás nem tartozik az iskolai tananyag keretébe, akkor a könyvben csak a tétel megfogalmazása szerepel.

Minden pontban önálló munkára kijelölt feladatok vannak, amelyek megoldásához csak az elméleti rész elsajátítása után fogjatok hozzá. A gyakorlatok között vannak könnyűek, közepesek és nehezek (különösen a *-gal jelöltek).

Sok sikert kívánunk!

## EGYEZMÉNYES JELEK

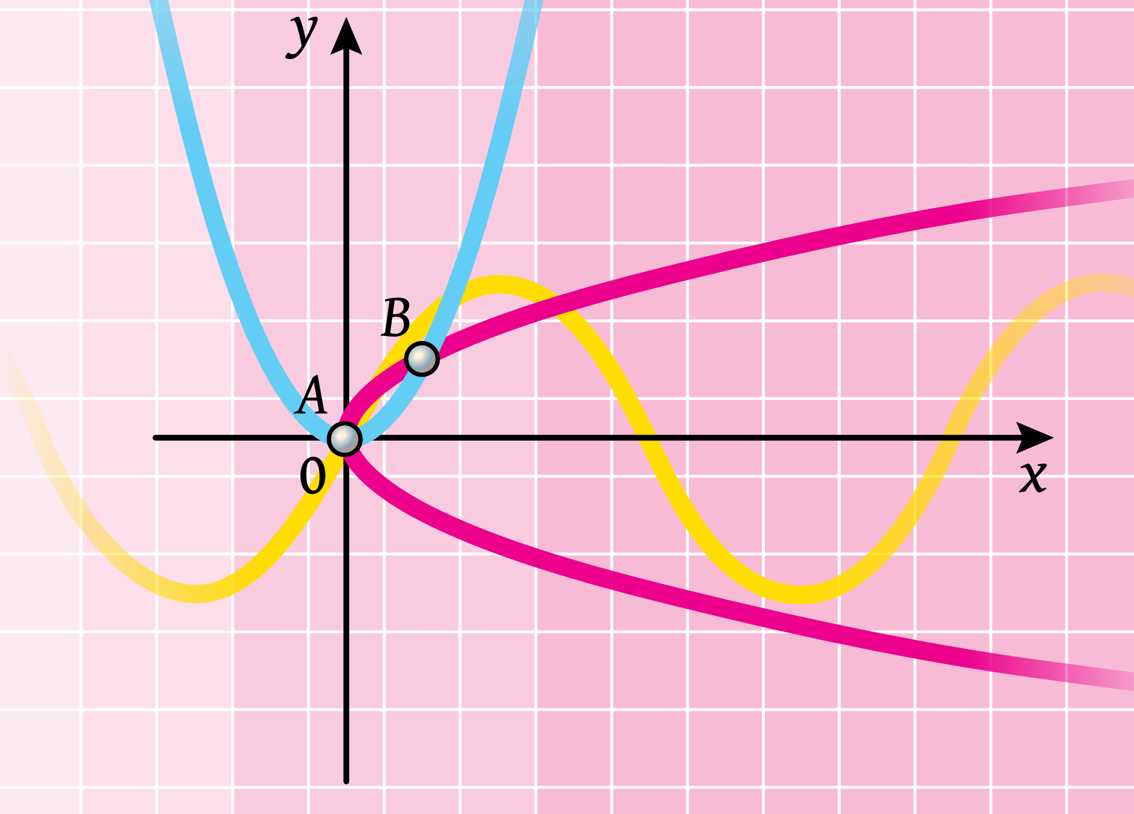
| | |
|---|---|
| $n^{\circ}$ | alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok; |
| $n^{\bullet}$ | jó tudásszintnek, illetve a tantervi követelményeknek megfelelő feladatok; |
| $n^{\bullet\bullet}$ | magas tudásszintnek megfelelő feladatok; |
| $n^{*}$ | matematikai szakkörökre és tanórán kívüli foglalkozásokra ajánlott feladatok jelölése; |
| ◄ | a tétel bizonyításának és a feladat megoldásának végét jelölő karakter; |
|  | kulcsfeladatok, melyek eredményei felhasználhatók más feladatok megoldása során. |

A **zöld** számozású példákat házi feladatra, a **kék** számozásúakat pedig szóbeli feladatként ajánljuk.

1. fejezet

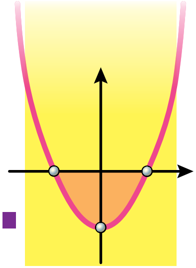
# Algebra és az analízis elemei

1. §. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik
2. §. Trigonometrikus függvények
3. §. A derivált és alkalmazása



# FÜGGVÉNYEK, EZEK TULAJDONSÁGAI ÉS GRAFIKONJAIK

# 1. §.



Ebben a fejezetben megismétlitek a függvényekről eddig tanultakat; megtanuljátok, hogy mit nevezünk a függvény legnagyobb és legkisebb értékének az intervallumon, milyen függvények lesznek párosak és melyek páratlanok; megismerkedtek a páros és páratlan függvények grafikonjainak tulajdonságaival.

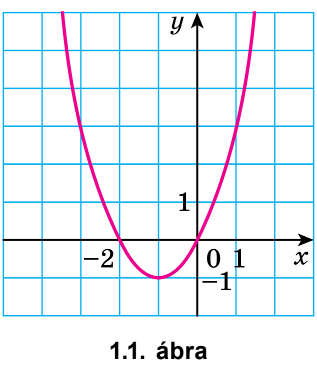
Megismerkedtek az egész kitevőjű hatványfüggvény meghatározásával, és a tulajdonságaival; mit nevezünk *n*-edik gyöknek, milyen tulajdonsággal rendelkezik az *n*-edik gyök; mit nevezünk racionális kitevőjű hatványnak és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek ezek; és milyen egyenleteket nevezünk irracionális egyenleteknek.

Megtanultok *n*-edik gyököt vonni; racionális kitevőjű számok hatványra emelését; racionális kitevőjű hatványok és *n*-edik gyököt tartalmazó kifejezések átalakítását; irracionális egyenletek megoldását.

## 1. A függvény legnagyobb és legkisebb értékei. Páros és páratlan függvények

**Mielőtt megismerkedtek ezzel a ponttal, ajánljuk, végezzétek el az 1.24.–1.28. gyakorlatokat.**

A 7. osztályban megismerkedtetek a függvény fogalmával és az algebra több fejezetének elsajátítása során többször foglalkoztatok már vele. Nem véletlenül foglal el ilyen fontos helyet ez a fogalom, mivel a függvény számos valós folyamatnak is matematikai modelljéül szolgál.




**1.1. ábra**

Már ismeritek a következő fogalmakat: *értelmezési tartomány*, *értékkészlet*, *zérushelyek*, *előjeltartási intervallumok*, *a függvény növekedési és csökkenési intervallumai*.

Például az $y = x^2 + 2x$ függvény grafikonja az 1.1. ábrán látható:

- értelmezési tartománya: $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$;
- értékkészlete: $E(y) = [-1;\ +\infty)$;
- zérushelyei: $-2$ és $0$;

- előjeltartási intervallumai: a függvény pozitív értékeket vesz fel a $(-\infty; -2)$ és $(0; +\infty)$ intervallumon, negatív értékeket pedig $(-2; 0)$ intervallumon;
- a függvény növekedési és csökkenési intervallumai: a $(-\infty; -1]$ intervallumon csökkenő, a $[-1; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő.

A fenti lista nem teljesen meríti ki azokat a tulajdonságokat, melyeket a függvény vizsgálata során tanulmányozni kell. Megvizsgáljuk azokat az új fogalmakat, melyek segítenek részletesebben jellemezni a függvényt.

**Definíció. Az $f(x_0)$ számot az $M \subset D(f)$ halmazon az $f$ függvény legnagyobb értékének nevezzük, ha létezik egy olyan $x_0 \in M$ szám, hogy minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \geqslant f(x)$ egyenlőtlenség.**

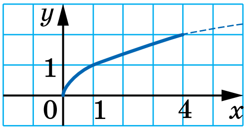
Így jelöljük: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

**Definíció. Az $f(x_0)$ számot az $M \subset D(f)$ halmazon az $f$ függvény legkisebb értékének nevezzük, ha létezik egy olyan $x_0 \in M$ szám, hogy minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \leqslant f(x)$ egyenlőtlenség.**

Így jelöljük: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

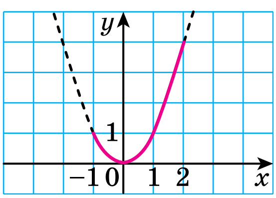
Lássunk néhány példát.

Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvénynek az $M = [0; 4]$ halmazon (1.2. ábrán): $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

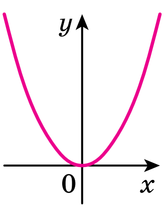


1.2. ábra

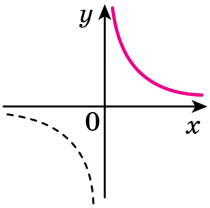
Az $f(x) = x^2$ az $M = [-1; 2]$ halmazon (1.3. ábra): $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$.



1.3. ábra



1.4. ábra



1.5. ábra

Nem minden függvénynek lesz az adott intervallumon legkisebb vagy legnagyobb értéke. Például az $f(x) = x^2$ függvénynek: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Legnagyobb értéke a valós számok halmazán viszont nem lesz (1.4. ábra).

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek a $(0; +\infty)$ halmazon nem lesz se legnagyobb, se legkisebb értéke (1.5. ábra).

**Definíció. Az $f$ függvényt párosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen $x$ értékére teljesül az $f(-x) = f(x)$ egyenlőség.**

**Definíció. Az $f$ függvényt páratlannak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen $x$ értékére teljesül az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség.**

Például az $f(x) = x^2$ páros, a $g(x) = x^3$ pedig páratlan függvény. Valóban $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Bármely $x$ racionális számra teljesülnek az $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ és $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ egyenlőségek.

Az $f(-x) = f(x)$ vagy az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség teljesülése bármilyen $x \in D(f)$ értékre azt jelenti, hogy az $f$ függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjához, vagyis a következő tulajdonsággal rendelkezik: ha $x_0 \in D(f)$, akkor $-x_0 \in D(f)$.

A fenti meghatározásból következik, hogy amikor a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára, akkor ez a függvény nem lehet sem páros, sem páratlan.

Például az $y = \frac{1}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ halmaz, amely nem szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára. Ezért ez a függvény se nem páros, se nem páratlan.

**Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 - x$ függvény páratlan!

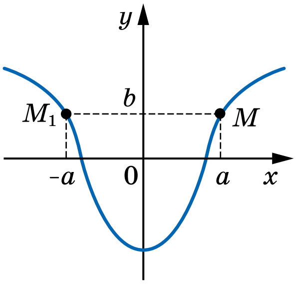
*Megoldás.* Mivel a $D(f) = \mathbb{R}$, ezért az $f$ függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.

Bármilyen $x \in D(f)$ értékre teljesül:

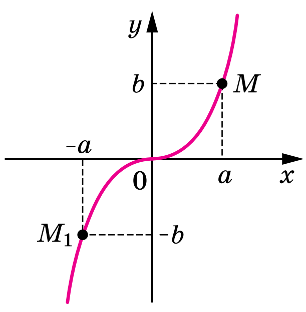
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Tehát az $f$ függvény páratlan. ◄

**1.1. tétel.** ***Az ordinátatengely a páros függvény szimmetriatengelye lesz.***




**1.6. ábra**




**1.7. ábra**

**1.2. tétel.** ***A koordináta-rendszer kezdőpontja a páratlan függvény szimmetriaközéppontja lesz.***

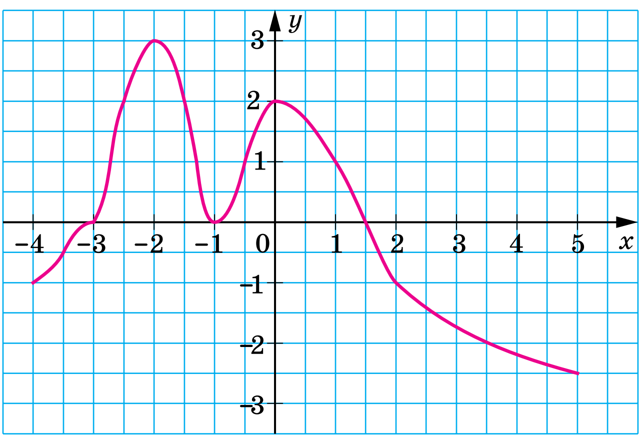
Az 1.1. és 1.2. tételek állításait az 1.6. és 1.7. ábrán mutatjuk be.

1. Melyik számot nevezzük a függvény legnagyobb (legkisebb) értékének egy adott halmazon?
2. Hogyan jelöljük az $f$ függvény legnagyobb (legkisebb) értékét az $M$ halmazon?
3. Milyen függvényt nevezünk párosnak (páratlannak)?
4. Milyen tulajdonsággal rendelkezik a páros (páratlan) függvény grafikonja?

## GYAKORLATOK

**1.1.°** Az 1.8. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a $[-4; 5]$ intervallumon van értelmezve. A grafikon alapján határozd meg a függvény legnagyobb és a legkisebb értékét az adott intervallumon:

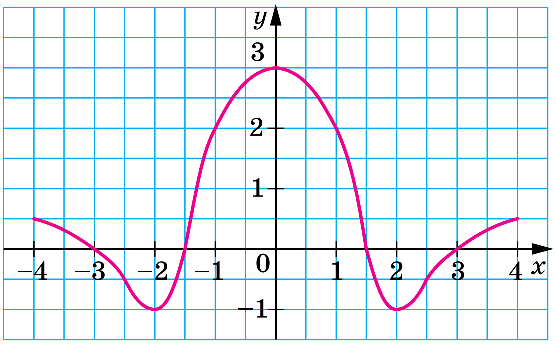
1) $[1; 2]$; 2) $[-2,5; 1]$; 3) $[-2,5; 3,5]$!




**1.8. ábra**

**1.2.°** Az 1.9. ábrán az $y = g(x)$ függvény grafikonja látható, amely a $[-4; 4]$ intervallumon van értelmezve. A grafikon alapján határozd meg a függvény legnagyobb és a legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$!




**1.9. ábra**

**1.3.**° Adott, hogy az $f(7) = -16$. Határozd meg az $f(-7)$ értékét, ha az $f$ függvény: 1) páros; 2) páratlan!

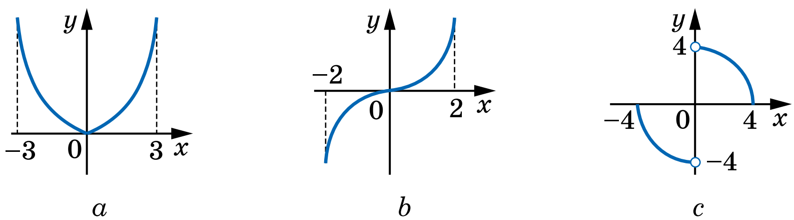
**1.4.**° Adott, hogy az $f(-3) = 8$. Határozd meg az $f(3)$ értékét, ha az $f$ függvény: 1) páros; 2) páratlan!

**1.5.**° Az $f$ függvény páros. Teljesülhet-e a következő egyenlőség:
1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\ f(-5) = -2$?

**1.6.**° Az $f$ függvény páratlan. Teljesülhet-e a következő egyenlőség:
1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\ f(-2) = 3$?

**1.7.**° Páros-e az $y = x^2$ képlettel megadott függvény, ha az értelmezési tartománya a következő halmaz:
1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

**1.8.**° Páros vagy páratlan az a függvény, amelynek a grafikonja az 1.10. ábrán látható?




**1.10. ábra**

**1.9.**• A $[2; 5]$ intervallumon határozd meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{20}{x}$!

**1.10.**• Határozd meg:

1) $\max\limits_{[1;2]}(-x^2+6x)$;
2) $\min\limits_{[1;4]}(-x^2+6x)$;
3) $\max\limits_{[4;5]}(-x^2+6x)$!

**1.11.**• Határozd meg az $y = x^2 + +2x - 8$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a következő intervallumon:

1) $[-5; -2]$;
2) $[-5; 1]$;
3) $[0; 3]$!

**1.12.**• Bizonyítsd be, hogy a függvény páros:

1) $f(x) = -5x^4$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$!

**1.13.**• Bizonyítsd be, hogy a függvény páros:

1) $f(x) = x^6$;
2) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$!

**1.14.**• Bizonyítsd be, hogy a függvény páratlan:

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$!

**1.15.**• Bizonyítsd be, hogy a függvény páratlan:

1) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;
2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$!

**1.16.**•• Két szám összege 8. Határozd meg:

1) azt a legnagyobb értéket, melyet e két szám szorzata vehet fel;
2) azt a legkisebb értéket, melyet e két szám négyzetének összege vesz fel!

**1.17.**•• A téglalap alakú földrészleget egy 200 m hossza kerítéssel kerítettek körbe. Mekkora lehet ennek a részlegnek a legnagyobb területe?

**1.18.**•• Állapítsd meg a függvény paritását:

1) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;
2) $f(x) = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^4-x^2}{x^3-x}$!

**1.19.**•• Állapítsd meg a függvény paritását:

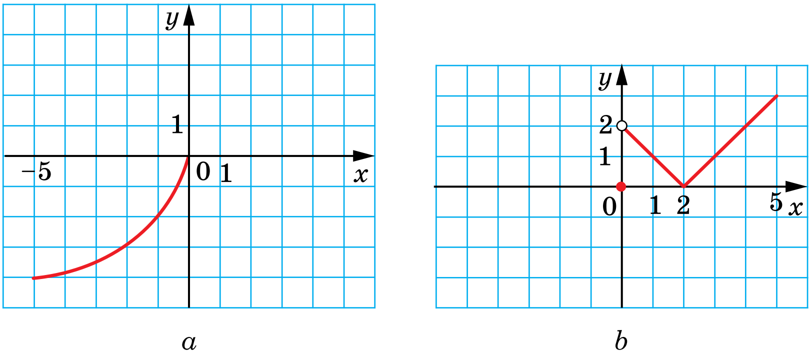
1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;
2) $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2-9}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$!

**1.20.**•• Az 1.11. ábrán a $[-5; 5]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonjának egy része látható. Szerkeszd meg a teljes függvény grafikonját úgy, hogy: 1) páros; 2) páratlan legyen!

**1.21.**•• Az $ABCD$ töröttvonal, ahol $A(0; 0)$, $B(2; -2)$, $C(3; 4)$ $D(6; 1)$, a $[-6; 6]$ intervallumon értelmezett az $y = f(x)$ függvény grafikonjának egy része lesz. Szerkeszd meg a teljes függvény grafikonját úgy, hogy:

1) páros;
2) páratlan legyen!

**1.22.**•• Az $f$ függvény páros és $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. Határozd meg a $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$ értékeket!




**1.11. ábra**

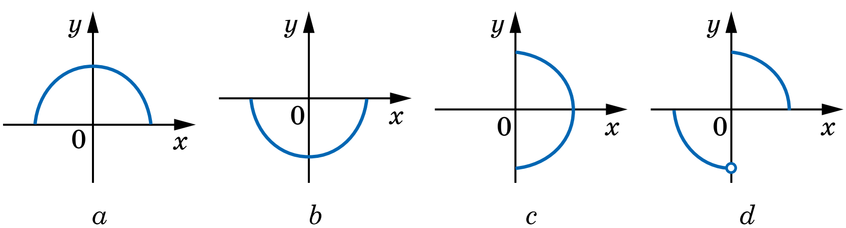
**1.23.**•• Az $f$ függvény páratlan és $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Határozd meg a $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$ értékeket!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**1.24.** A függvény az $f(x) = -3x^2 + 2x$ képlettel van megadva.

1) Határozd meg az $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$ értékeket!
2) Határozd meg az argumentum értékeit, melynél az $f$ függvény értéke egyenlő 0; –1; –56!

**1.25.** Nevezd meg azt az alakzatot az 1.12. ábrán, amely nem lehet egy függvény grafikonja!




**1.12. ábra**

**1.26.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \dfrac{9}{x+4}$;

2) $f(x) = \dfrac{x-6}{4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;

4) $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2+6x-7}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x}$;

7) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$!

**1.27.** Határozd meg a függvény zérushelyeit:

1) $f(x) = 0{,}4x - 8$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2+x-30}{x+5}$!

**1.28.** Határozd meg a függvény értékkészletét:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; 2) $f(x) = 7 - x^2$; 3) $f(x) = -6$!

## 2. A természetes kitevőjű hatványfüggvény

Az $y = x$ és az $y = x^2$ függvényeket már jól ismeritek az előző osztályok tananyagából. Ezek a függvények egyedi esetei lesznek az $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ függvényeknek, melyeket **természetes kitevőjű hatványfüggvényeknek** nevezünk.

Mivel az $x^n$, $n \in \mathbb{N}$ kifejezés értelmezhető bármilyen $x$ esetén, ezért *a természetes kitevőjű hatványfüggvény értelmezési tartománya az* $\mathbb{R}$ *halmaz lesz.*

Természetes, hogy a vizsgált függvénynek *egyetlen zérushelye lesz*: $x = 0$.

Az $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ függvény további tulajdonságait két esetben fogjuk vizsgálni: az $n$ – páros természetes szám és az $n$ – páratlan természetes szám esetében.

- **Első eset: $n = 2k$, ahol $k \in \mathbb{N}$.**

Ha $k = 1$, akkor az $y = x^2$ függvényt kapjuk, amelynek tulajdonságait és grafikonját a 8. osztályos algebraórán már megvizsgáltuk.

Mivel bármilyen $x$ esetén az $x^{2k}$ kifejezés nem negatív értékeket fog felvenni, ezért az adott függvény értékkészlete nem tartalmaz egyetlen negatív számot sem.

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen $a \geqslant 0$ esetén létezik olyan értéke az $x$ argumentumnak, hogy $x^{2k} = a$.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy az *$y = x^n$ függvény értékkészlete, ha $n$ páros természetes szám, a* $[0; +\infty)$ *halmaz lesz.*

Ha $x \neq 0$, akkor $x^{2k} > 0$.

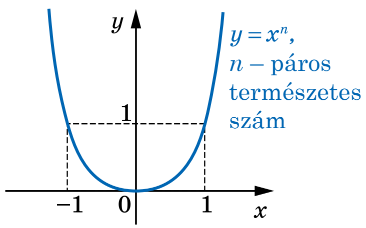
Tehát *n páros természetes szám esetén a* $(-\infty;\ 0)$ *és a* $(0;\ +\infty)$ *intervallumok lesznek az* $y = x^n$ *függvény előjeltartási intervallumai.*

*Minden n páros természetes szám esetén az* $y = x^n$ *függvény páros lesz*. Valóban, bármilyen $x$ esetén, amely az értelmezési tartomány eleme, teljesül a következő egyenlőség: $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

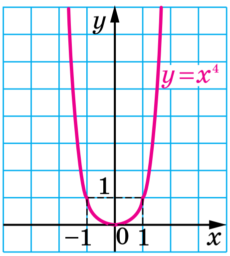
Vizsgáljuk meg a tetszőleges $x_1$ és $x_2$ számot, amelyek az $x_1 \in (-\infty;\ 0]$, $x_2 \in (-\infty;\ 0]$ és $x_1 < x_2$. Ekkor a $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. A számegyenlőtlenség tulajdonságait alkalmazva azt kapjuk, hogy: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Innen $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Tehát *n páros természetes szám esetén az* $y = x^n$ *függvény a* $(-\infty;\ 0]$ *intervallumon fogyó lesz*. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy a $[0;\ +\infty)$ *intervallumon pedig növekvő lesz.*

A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan ábrázolhatjuk az $y = x^n$ függvény grafikonját, ahol $n$ páros természetes szám (2.1. ábra). Az $y = x^4$ függvény grafikonja a 2.2. ábrán látható.




2.1. ábra




2.2. ábra

- **Második eset, ha $n = 2k + 1$, ahol $k \in \mathbb{N}$ vagy $k = 0$**

Ha $k = 0$, akkor az $y = x$ függvényt kapjuk, melynek tulajdonságait és grafikonját a 7. osztályban már vizsgáltuk.

Legyen most $k \in \mathbb{N}$.

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen $a$ értékére létezik az $x$ argumentumnak olyan értéke, melynél $x^{2k+1} = a$.

Ez azt jelenti, hogy *az* $y = x^n$ *függvény értékkészlete, ha n páratlan természetes szám, a valós számok* $\mathbb{R}$ *halmaza lesz.*

Ha $x < 0$, akkor $x^{2k+1} < 0$, ha pedig $x > 0$, akkor $x^{2k+1} > 0$.

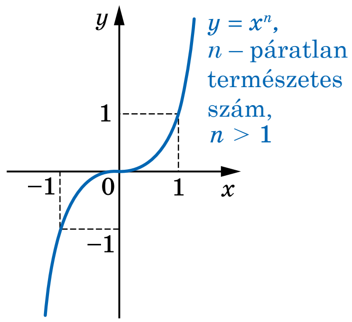
Tehát *a* $(-\infty;\ 0)$ *és a* $(0;\ +\infty)$ *intervallumok az* $y = x^n$ *függvény előjeltartási intervallumai, ha n páratlan természetes szám.*

*n páratlan természetes szám esetén az* $y = x^n$ *függvény páratlan függvény lesz*. Valóban az értelmezési tartomány minden $x$ értékére teljesül a következő egyenlőtlenség: $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

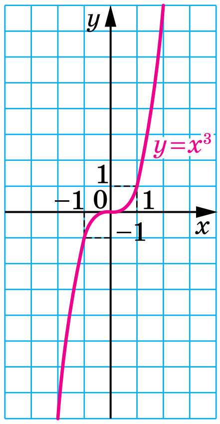
Vizsgáljuk meg az $x_1$ és $x_2$ tetszőleges számokat, melyekre teljesül $x_1 < x_2$. Az egyenlőtlenségek tulajdonságai alapján $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

↳ Tehát *n páratlan természetes szám esetén az* $y = x^n$ *függvény növekvő lesz.*

A kapott tulajdonságok alapján megrajzolható az $y = x^n$ függvény grafikonja, ahol $n$ páratlan természetes szám és $n > 1$ (2.3. ábra). Az $y = x^3$ függvény grafikonja a 2.4. ábrán látható.




**2.3. ábra**




**2.4. ábra**

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk az $y = x^n$ függvény tulajdonságait, ahol $n \in \mathbb{N}$, melyeket ebben a pontban állapítottunk meg.

| Tulajdonságok | $n$ páros természetes szám | $n$ páratlan természetes szám |
|---|---|---|
| Értelmezési tartomány | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| Értékkészlet | $[0; +\infty)$ | $\mathbb{R}$ |
| A függvény zérushelyei | $x = 0$ | $x = 0$ |
| Előjeltartási intervallumai | $y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén | $y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon, $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon |
| Paritás | Páros | Páratlan |
| Növekvő / csökkenő | Csökkenő a $(-\infty; 0]$ intervallumon, növekvő a $[0; +\infty)$ intervallumon | Növekvő |

1. Milyen függvényt nevezünk természetes kitevőjű hatványfüggvénynek?
2. Fogalmazd meg az $y = x^n$ függvény tulajdonságait!
3. Ábrázold az $y = x^n$ függvény grafikonjait!

## GYAKORLATOK

**2.1.°** Az $y = x^5$ függvény mely pontokhoz illeszkedik:
1) $A\ (-1;\ 1)$; 2) $B\ (2;\ 32)$; 3) $C\ (-3;\ -243)$?

**2.2.°** Az $y = x^4$ függvény mely pontokhoz illeszkedik:
1) $A\ (2;\ 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$; 3) $C\ (0{,}5;\ -0{,}0625)$?

**2.3.°** Az $f(x) = x^{19}$ képlettel megadott függvény. Hasonlítsd össze a következő függvényértékeket:
1) $f(1{,}4)$ és $f(1{,}8)$; 3) $f(-6{,}9)$ és $f(6{,}9)$;
2) $f(-7{,}6)$ és $f(-8{,}5)$; 4) $f(0{,}2)$ és $f(-12)$!

**2.4.°** Az $f(x) = x^{50}$ képlettel megadott függvény. Hasonlítsd össze a következő függvényértékeket:
1) $f(9{,}2)$ és $f(8{,}5)$; 3) $f(19)$ és $f(-19)$;
2) $f(-1{,}1)$ és $f(-1{,}2)$; 4) $f(-7)$ és $f(9)$!

**2.5.•** Írd fel csökkenő sorrendbe a kifejezéseket:
$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5,\ \left(-2\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5,\ \left(-2\frac{2}{5}\right)^5!$$

**2.6.•** Írd fel növekvő sorrendbe a kifejezéseket:
$$(1{,}06)^4,\ (-0{,}48)^4,\ (-2{,}12)^4,\ (-3{,}25)^4!$$

**2.7.•** Határozd meg az $f(x) = x^8$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit a következő intervallumon:
1) $[0;\ 2]$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -2]$!

**2.8.•** Határozd meg az $f(x) = x^5$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit a következő intervallumon:
1) $[-3;\ 3]$; 2) $[-2;\ 0]$; 3) $[1;\ +\infty)$!

**2.9.••** Határozd meg grafikusan az egyenlet gyökeinek számát:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$!

**2.10.••** Határozd meg grafikusan az egyenletrendszer gyökeinek számát: $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0! \end{cases}$

**2.11.*** Az $a$ paraméter értékétől függően hány megoldása lesz az egyenletnek:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**2.12.** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2,3)^0-5^{-2}$; 5) $0,5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 4) $9\cdot 0,1^{-1}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$!

**2.13.** Add meg tört alakban a kifejezés értékét:

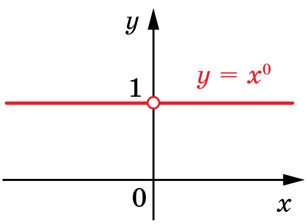
1) $a^{-2}+a^{-3}$; 2) $mn^{-4}+m^{-4}n$; 3) $(c^{-1}-d^{-1})(c-d)^{-2}$!

# 3. Az egész kitevőjű hatványfüggvény

Az $y=x^n$ függvényt, ahol $n\in\mathbb{Z}$, **egész kitevőjű hatványfüggvény**nek nevezzük.

Ennek a függvénynek a tulajdonságait természetes kitevő esetén az előző pontban vizsgáltuk meg. Itt most azokat az eseteket vizsgáljuk majd, amikor az $n$ negatív egész szám vagy nulla.

Az $y=x^0$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ lesz, a függvény értékkészlete az egyelemű $\{1\}$ halmaz. A függvény grafikonja a 3.1. ábrán látható.




**3.1. ábra**

Vizsgáljuk meg az $y=x^{-n}$ függvényt, ha $n\in\mathbb{N}$.

Az $n=1$ egy külön esete ennek a függvénynek, vagyis az $y=\frac{1}{x}$ függvény, ami már ismert a nyolcadikos algebra tananyagból.

Átírjuk az $y=x^{-n}$ függvényt a következő alakba: $y=\frac{1}{x^n}$. Ekkor érthetővé válik, ha $n\in\mathbb{N}$, akkor az $y=x^{-n}$ *függvény értelmezési tartománya a* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ *halmaz lesz.*

Természetesen ennek a függvénynek nincs zérushelye.

A továbbiakban az $y=x^{-n}$ függvényt, ha $n\in\mathbb{N}$, két esetben fogjuk megvizsgálni: $n$ páros természetes szám és $n$ páratlan természetes szám.

- **Első eset: $n=2k$, ahol $k\in\mathbb{N}$.**

A következőt kapjuk: $x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$. Mivel az $\frac{1}{x^{2k}}$ csak pozitív értékeket vesz fel, ezért a függvény értelmezési tartományához nem tartoznak a negatív számok és a 0 sem.

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen $a > 0$ esetén létezik az argumentumnak olyan $x$ értéke, hogy az $x^{-2k} = a$.

- A fenti kijelentés azt jelenti, hogy az $y = x^{-n}$ *függvény értékkészlete, ha* $n$ *páros természetes szám, a* $(0; +\infty)$ *halmaz lesz.*
- Mivel minden $x \neq 0$ esetén teljesül az $\frac{1}{x^{2k}} > 0$ egyenlőtlenség, ezért az $y = x^{-n}$ *függvénynek, ha* $n$ *páros természetes szám, a* $(-\infty; 0)$ *és* $(0; +\infty)$ *intervallumok előjeltartó intervallumai lesznek.*
- *Az* $y = x^{-n}$ *függvény páros, ha* $n$ *páros természetes szám lesz.* Valóban, az értelmezési tartományhoz tartozó minden $x$ esetén teljesül a következő egyenlőség: $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Vizsgáljuk meg az $x_1$ és $x_2$ tetszőleges számokat, melyekre teljesül, hogy $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ és $x_1 < x_2$. Alkalmazva a számegyenlőtlenségek tulajdonságait, a következőt kapjuk: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$. Ebből következik, hogy $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

- Tehát *az* $y = x^{-n}$ *függvény csökkenő a* $(0; +\infty)$ *intervallumon, ha* $n$ *páros természetes szám lesz.*
- Be lehet szintén bizonyítani, hogy az $y = x^{-n}$ *függvény növekvő a* $(-\infty; 0)$ *intervallumon, ha* $n$ *páros természetes szám lesz.*

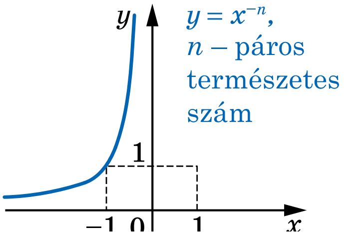
Megjegyezzük, hogy az $x$ abszolút értékének növelésekor az $\frac{1}{x^{2k}}$, ahol $k \in \mathbb{N}$, kifejezés értéke egyre kisebb lesz. Ezért az $y = \frac{1}{x^{2k}}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjának pontja és az abszcisszatengely közötti távolság folyamatosan csökken, ha a pont abszcisszájának abszolút értéke növekszik, és egyre kisebbé válik, de sohasem lesz egyenlő nullával.

Szintén megjegyezhetjük, hogy a pont ordinátája abszolút értékének növelésével az $y = \frac{1}{x^{2k}}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjának pontja és az ordinátatengely közötti távolság folyamatosan csökken és egyre kisebbé válik, de sohasem lesz egyenlő nullával.

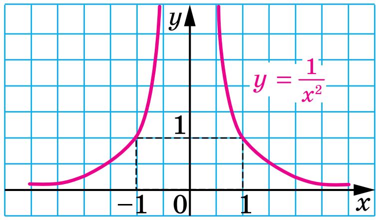
A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan megrajzolható az $y = x^{-n}$ függvény grafikonja, ahol $n$ páros természetes szám (3.2. ábra). Az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja a 3.3. ábrán látható.

- **Második eset: $n = 2k - 1$, ahol $k \in \mathbb{N}$.**

Be lehet bizonyítani, hogy bármely $a \neq 0$ esetén létezik az $x$ argumentumnak olyan értéke, amelynél $x^{-(2k-1)} = a$.




3.2. ábra




3.3. ábra

- *Az $y = x^{-n}$ függvény értékkészlete, ahol az n páratlan természetes szám, a* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ *halmaz lesz.*

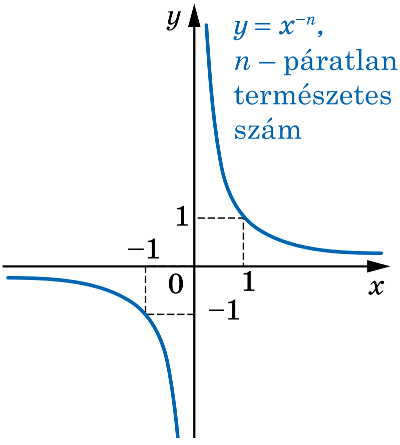
  Ha $x < 0$, akkor $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$, ha $x > 0$, akkor $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

- Tehát a $(-\infty;\ 0)$ és $(0;\ +\infty)$ *intervallumok az $y = x^{-n}$ függvény, ahol n páratlan természetes szám, előjeltartási intervallumai.*
- *Az $y = x^{-n}$ függvény páratlan, ahol n páratlan természetes szám.* Valóban, az értelmezési tartományhoz tartozó minden $x$ esetén teljesül a következő egyenlőség:

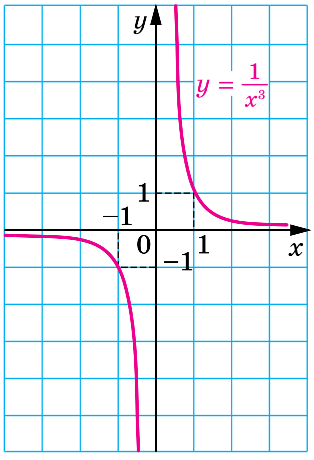
$$(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

- Be lehet bizonyítani, hogy az $y = x^{-n}$ *függvény, ahol n páratlan természetes szám, csökkenő a* $(-\infty;\ 0)$ *és* $(0;\ +\infty)$ *intervallumon.*

A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan megrajzolhatjuk az $y = x^{-n}$ függvény grafikonját, ahol $n$ páratlan természetes szám (3.4. ábra). Az $y = \frac{1}{x^3}$ függvény grafikonja a 3.5. ábrán látható.




3.4. ábra




3.5. ábra

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, függvény tulajdonságait, melyeket ebben a pontban ismertünk meg.

| Tulajdonságok | *n* páros természetes szám | *n* páratlan természetes szám |
|---|---|---|
| Értelmezési tartomány | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ |
| Értékkészlet | $(0; +\infty)$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ |
| A függvény zérushelyei | — | — |
| Előjeltartási intervallumai | $y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén | $y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon |
| Paritás | Páros | Páratlan |
| Növekvő / csökkenő | Növekvő a $(-\infty; 0)$ intervallumon, csökkenő a $(0; +\infty)$ intervallumon | Csökkenő a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén |

1. Milyen függvényt nevezünk egész kitevőjű hatványfüggvénynek?
2. Milyen a képe az $y = x^0$ függvény grafikonjának?
3. Fogalmazd meg az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait!
4. Ábrázold vázlatosan az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjait!

## GYAKORLATOK

**3.1.°** Illeszkedik-e az $y = x^{-4}$ függvény grafikonjára a következő pont:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

**3.2.°** Illeszkedik-e az $y = x^{-5}$ függvény grafikonjára a következő pont:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

**3.3.•** Adott az $f(x) = x^{-19}$ függvény. Hasonlítsd össze:

1) $f(1{,}6)$ és $f(2)$;
2) $f(-5{,}6)$ és $f(-6{,}5)$;
3) $f(-9{,}6)$ és $f(9{,}6)$;
4) $f(0{,}1)$ és $f(-10)$!

**3.4.**• Adott az $f(x) = x^{-40}$ függvény. Hasonlítsd össze:

1) $f(6{,}2)$ és $f(5{,}5)$;
2) $f(-1{,}6)$ és $f(-1{,}7)$;
3) $f(24)$ és $f(-24)$;
4) $f(-8)$ és $f(6)$!

**3.5.**• Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$!

**3.6.**• Határozd meg az $f(x) = x^{-6}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumban:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;
3) $[1; +\infty)$!

**3.7.**• Határozd meg az $f(x) = x^{-3}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumban:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $(-\infty; -3]$!

**3.8.**•• Szerkeszd meg a függvény grafikonját:

1) $y = (x-2)^0$;
2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$!

**3.9.**•• Szerkeszd meg a függvény grafikonját:

1) $(y+2)^0 = x - 2$;
2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$!

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**3.10.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$;
2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09} - 2$;
3) $\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2$!

**3.11.** Hasonlítsd össze a számokat:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{33}$ és 6;
3) $\sqrt{30}$ és $2\sqrt{7}$!

# 4. Az *n*-edik gyök meghatározása

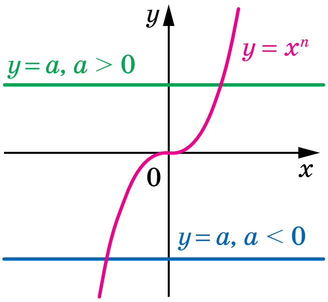
Már tudjátok, hogy az $a$ szám második gyökének (négyzetgyökének) azt a számot nevezzük, melynek második hatványa $a$-val egyenlő. Hasonlóan adjuk meg az $a$ szám $n$-edik gyökének meghatározását is, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

**Definíció. Az *a* szám *n*-edik gyökének, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a számot nevezzük, melynek *n*-edik hatványa *a*-val egyenlő.**

Például a 32 ötödik gyöke 2 lesz, mivel $2^5 = 32$; a –64-nek a harmadik gyöke –4 lesz, mivel $(-4)^3 = -64$; a 81 negyedik gyöke 3 és –3 lesz, mivel $3^4 = 81$ és $(-3)^4 = 81$.

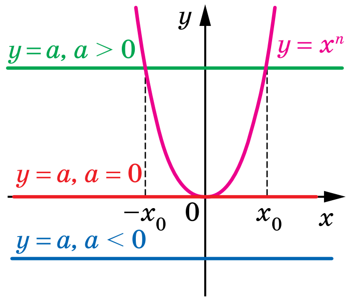
Ha az $n$ páratlan természetes szám, akkor az $y = x^n$ és az $y = a$ függvények grafikonjai egy pontban metszik egymást (4.1. ábra). Ez azt jelenti, hogy az $x^n = a$ egyenletnek minden $a$ értéknél egy gyöke lesz. Ezért levonhatjuk az alábbi következtetést:

***ha n páratlan, 1-nél nagyobb természetes szám, akkor bármilyen számból létezik n-edik gyök, amiből csak egy van.***




$n$ páratlan természetes szám, $n > 1$

**4.1. ábra**




$n$ páros természetes szám

**4.2. ábra**

Az $a$ szám $n$-edik gyökét, ha $n > 1$ és páratlan így jelöljük: $\sqrt[n]{a}$ (így olvassuk: az a szám n-edik gyöke). Például $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Az $\sqrt[n]{\phantom{a}}$ jelet, az ***n*-edik gyök jel**énekl nevezzük. Az $n$-edik gyök jele alatti kifejezést, a **gyök alatti kifejezés**nek nevezzük.

A harmadik gyököt **köbgyök**nek szokás nevezni. Például a $\sqrt[3]{2}$ -t köbgyök 2-nek olvassuk.

Felhívjuk arra a figyelmeteket, hogy a $\sqrt[2k+1]{a}$ kifejezés, ha $k \in \mathbb{N}$, bármilyen $a$ számra értelmezve van.

Az $n$-edik gyök meghatározásából következik, hogy ***bármilyen a esetén teljesül a következő egyenlőség***:

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Például $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Vizsgáljuk meg az $x^n = a$ egyenletet, ha $n$ páratlan természetes szám.

A 4.2. ábrán látható: ha $a < 0$, akkor az $y = x^n$ és az $y = a$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja; ha $a = 0$, akkor a grafikonoknak egy közös pontja lesz; ha $a > 0$, akkor két közös pontjuk van, melyeknek az abszcisszái ellentett számok lesznek. Levonhatjuk a következő következtetést:

***ha az n páros természetes szám, akkor az a < 0 esetén nem létezik n-edik gyöke az a számnak; ha a = 0, akkor az a szám n-edik gyöke 0 lesz; ha az a > 0, akkor az a számnak két ellenkező előjelű n-edik gyöke lesz.***

Már tudjátok, hogy a nemnegatív $a$ számnak a számtani négyzetgyöke az $a$ nemnegatív szám lesz, melynek négyzete $a$-val egyenlő. Hasonlóan adjuk meg a számtani $n$-edik gyök meghatározását.

**Definíció. A nemnegatív $a$ szám számtani $n$-edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek $n$-edik hatványa $a$-val egyenlő.**

A nemnegatív $a$ szám számtani $n$-edik gyökét így jelöljük: $\sqrt[n]{a}$.

Például $\sqrt[4]{81} = 3$, mivel $3 \geqslant 0$ és $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, mivel $2 \geqslant 0$ és $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, mivel $0 \geqslant 0$ és $0^{10} = 0$.

Általánosítva, **ha $b \geqslant 0$ és $b^n = a$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} = b$.**

Az $n$-edik gyök jele segítségével fel lehet írni az $x^n = a$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, egyenlet gyökeinek képletét.

Például az $x^3 = 7$ egyenletnek egy gyöke lesz a: $\sqrt[3]{7}$; az $x^4 = 5$ egyenletnek két megoldása van: $-\sqrt[4]{5}$ és $\sqrt[4]{5}$.

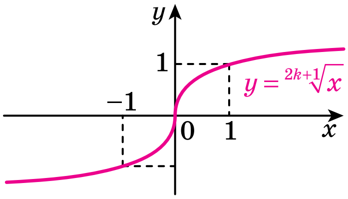
A számtani $n$-edik gyök meghatározásából következik, hogy:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **ha** $a \geqslant 0$ (például $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$);

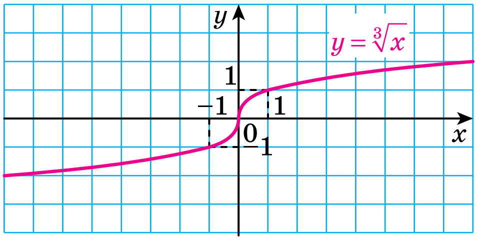
2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **ha** $a \geqslant 0$ (például $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$);

3) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ (például $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Már megállapítottuk, hogy bármilyen szám páratlan gyökének egyetlen értéke van. Tehát minden valós $x$ számnak egyetlen olyan $y$ szám felel meg, hogy $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Ez a szabály adja meg az $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvényt, ahol $k \in \mathbb{N}$, melynek értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ lesz. Ennek a függvénynek a grafikonja a 4.3. ábrán látható. A 4.4. ábrán az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja látható.



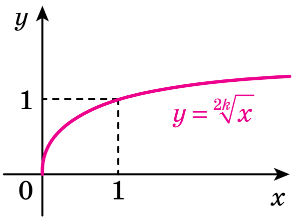

**4.3. ábra**



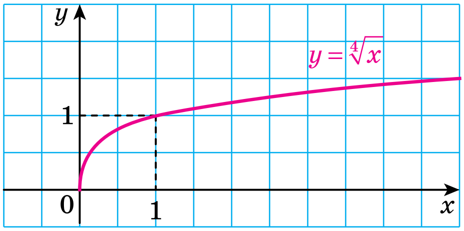

**4.4. ábra**

Hasonlóan adjuk meg az $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvényt is, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya a $[0; +\infty)$ intervallum lesz.

A 4.5. ábrán az $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény látható, a 4.6. ábrán pedig az $f(x) = \sqrt[4]{x}$ függvény grafikonja.




**4.5. ábra**




**4.6. ábra**

A következő táblázatban összefoglaljuk az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény tulajdonságait.

| Tulajdonságok | $n$ – páratlan természetes szám, $n > 1$ | $n$ – páros természetes szám |
|---|---|---|
| Értelmezési tartomány | $\mathbb{R}$ | $[0; +\infty)$ |
| Értékkészlet | $\mathbb{R}$ | $[0; +\infty)$ |
| A függvény zérushelyei | $x = 0$ | $x = 0$ |
| Előjeltartási intervallumai | $y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon, $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon | $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon |
| Paritás | Páratlan | Se nem páros, se nem páratlan |
| Növekvő / csökkenő | Növekvő | Növekvő |

**Feladat.** Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$!

*Megoldás.* 1) Az adott egyenlőtlenséget a következőképpen írjuk át: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Mivel az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény növekvő, ezért le lehet vonni a következtetést, hogy $x < 8$.

*Felelet*: $(-\infty; 8)$.

2) $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Mivel az $y = \sqrt[4]{t}$ függvény a $[0; +\infty)$ intervallumon növekvő, ezért az adott egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Innen $2 \leqslant x < 3$.

*Felelet*: $[2; 3)$. ◄

1. Mit nevezünk az $a$ szám $n$-edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Az *a* mely értékénél van értelme a $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$ kifejezésnek?
3. Mit nevezünk a nemnegatív *a* szám számtani $n$-edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
4. Az *a* mely értékénél van értelme a $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$ kifejezésnek?
5. Fogalmazd meg az $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait, és készítsd el a vázlatos grafikonját!
6. Fogalmazd meg az $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait, és készítsd el a vázlatos grafikonját!

## GYAKORLATOK

**4.1.°** Van-e értelme a kifejezésnek:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

**4.2.°** Igaz-e az egyenlőség:

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

A feleletet magyarázd meg!

**4.3.°** Bizonyítsd be, hogy:

1) a 2 számtani köbgyöke a 8-nak;
2) a 3 számtani negyedik gyöke a 81-nek;
3) a –3 nem számtani negyedik gyöke a 81-nek!

**4.4.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{216}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 3) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$!

**4.5.°** Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 3) $-\sqrt[5]{-1024}$?

**4.6.°** Számítsd ki:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 4) $\left(-2\sqrt[7]{-5}\right)^7$!

**4.7.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$!

**4.8.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;
2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x-2)^3 = 125$;
3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x+5)^4 = 10\ 000$!

**4.9.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;
2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$!

**4.10.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$!

**4.11.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$!

**4.12.•** Számítsd ki: $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$!

**4.13.•** Számítsd ki: $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$!

**4.14.•** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x+1}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$!

**4.15.•** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 2) $y = \sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$!

**4.16.•** Melyik két egymást követő egész szám között helyezkedik el a koordinátaegyenesen a következő szám:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

**4.17.•** Melyik két egymást követő egész szám között helyezkedik el a koordinátaegyenesen a következő szám:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

**4.18.•** Oldd meg az egyenlőtlenséget:

1) $\sqrt[5]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x-3} < 2$; 3) $\sqrt[4]{x+1} > 1$!

**4.19.••** Ábrázold a függvény grafikonját:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$!

**4.20.••** Oldd meg az egyenletet:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3} = 0$!

**4.21.••** Oldd meg az egyenletet: $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3} = 0$!

**4.22.••** Ábrázold a függvény grafikonját: $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$!

**4.23.••** Ábrázold a függvény grafikonját: $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**4.24.** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$!

**4.25.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 3) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$!

## 5. Az $n$-edik gyök tulajdonságai

Megvizsgáljuk azokat a tételeket, melyek az $n$-edik gyök tulajdonságait adják meg.

**5.1. tétel (a hatvány gyökének első tétele).** ***Bármilyen $a \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számokra teljesülnek a következő egyenlőségek***:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

*Bizonyítás.* Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt[2k+1]{x} = y$ egyenlőséget, elegendő belátni, hogy $y^{2k+1} = x$. Az első bizonyítandó egyenlőségnél $x = a^{2k+1}$ és $y = a$. Innen az $y^{2k+1} = x$ egyenlőség már szemmel látható.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt[2k]{x}=y$ egyenlőséget, elegendő belátni, hogy $y \geqslant 0$ és $y^{2k}=x$. A második bizonyítandó egyenlőségnél a következőt kapjuk: $|a| \geqslant 0$ és $(|a|)^{2k}=a^{2k}$. ◄

**5.2. tétel (a szorzat gyöke).** ***Ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor***

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

*Bizonyítás*. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk az $\sqrt[n]{x}=y$ egyenlőséget, ahol $x \geqslant 0$, elegendő bebizonyítani, hogy $y \geqslant 0$ és $y^n=x$.

Mivel $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ és $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Ekkor $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Ezenkívül $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$. ◄

**5.3. tétel (a tört gyöke).** ***Ha $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

**5.4. tétel (a hatvány gyöke).** ***Ha $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

*Bizonyítás*. Ha $k=1$, akkor a bizonyítandó egyenlőség nyilvánvaló.

Legyen $k > 1$.

Ekkor: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{k\text{ tényező}}=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ tényező}}}=\sqrt[n]{a^k}$. ◄

**5.5. tétel (a gyök gyöke).** ***Ha $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, akkor***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

*Bizonyítás*. Mivel $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Ezenkívül az $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=\left(\sqrt[k]{a}\right)^k=a$. ◄

**5.6. tétel (a gyök hatványának második tétele).** ***Ha $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor***

$$\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}.$$

*Bizonyítás*. Ha $k=1$, akkor a bizonyítandó egyenlőség szemmel látható lesz.

Legyen $k > 1$. Ekkor $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}}=\sqrt[n]{a}$. ◄

**1. feladat.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4}$;  2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}}$;  3) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$;  4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$!

*Megoldás.* 1) Alkalmazva az 5.1. tételt felírhatjuk: $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4} = |-7{,}3| = 7{,}3$.

2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}} = 1{,}2^2 = 1{,}44$.

3) Helyettesítve a gyökök szorzatát a szorzat gyökével azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16\cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

4) Helyettesítve a gyökök hányadosát a hányados gyökével kapjuk:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}. \blacktriangleleft$$

**2. feladat.** Egyszerűsítsük a kifejezést:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, ha $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$!

*Megoldás.* 1) Alkalmazva az 5.1. tételt kapjuk: $\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7|$.

2) Mivel $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. A feltétel szerint $a \leqslant 0$, ezért $a^3 \leqslant 0$. Ekkor $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$. $\blacktriangleleft$

**3. feladat.** Vigyük ki a gyökjel alól a tényezőt: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$!

*Megoldás.* 1) A gyökjel alatti számot felírjuk két szám szorzataként, melyek közül az egyik egy racionális szám köbe, és kivisszük a tényezőt a gyökjel elé:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125\cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

2) A feltételből következik, hogy a $b \geqslant 0$.

Ekkor $\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5\sqrt[8]{b^3}$. $\blacktriangleleft$

**4. feladat.** Vigyük be a gyökjel alá a tényezőt: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $c\sqrt[10]{c^7}$!

*Megoldás.* 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) A feltételből következik, hogy $c \geqslant 0$.

Ekkor $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$. $\blacktriangleleft$

**5. feladat.** Egyszerűsítsétek a törtet: $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$!

*Megoldás.* Az adott tört számlálóját és nevezőjét tényezőkre bontjuk, majd a következőt kapjuk:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$ ◄

?

**1.** Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló első tételt!
**2.** Fogalmazd meg a szorzat gyökéről szóló tételt!
**3.** Fogalmazd meg a hányados gyökéről szóló tételt!
**4.** Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló tételt!
**5.** Fogalmazd meg a gyök gyökéről szóló tételt!
**6.** Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló második tételt!

## GYAKORLATOK

**5.1.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{64\cdot125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot7^5}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot11^4}{5^8\cdot2^{16}}}$!

**5.2.°** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot343}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 3) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24}\cdot3^{16}}{5^{16}}}$!

**5.3.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$!

**5.4.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot5^4}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot3^4}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$!

**5.5.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$!

**5.6.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$!

**5.7.•** Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[4]{162}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 4) $\sqrt[3]{40a^5}$; 5) $\sqrt[3]{-a^7}$!

**5.8.•** Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$!

**5.9.•** Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$; 5) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$!

**5.10.•** Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$!

**5.11.•** Helyettesítsd a kifejezést vele azonosan egyenlő kifejezéssel: $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$ !

**5.12.•** Egyszerűsítsd a kifejezést: $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$!

**5.13.•** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$!

**5.14.•** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$!

**5.15.•** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$!

**5.16.•** Egyszerűsítsd a kifejezést: $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$!

**5.17.•** Az $a$ mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

**5.18.••** Az $a$ mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

**5.19.••** Az $a$ és $b$ mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;
2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;
3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;
4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

**5.20.••** Az $x$ mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

**5.21.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, ha $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, ha $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{256k^8}$, ha $k \leqslant 0$;
4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
5) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, ha $b \leqslant 0$;
6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, ha $y \geqslant 0$!

**5.22.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $-5\sqrt{4x^2}$, ha $x \leqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, ha $p \geqslant 0$!

**5.23.**•• Egyszerűsítsd a törtet:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;
2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;
3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$!

**5.24.**•• Egyszerűsítsd a törtet:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;
3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$!

**5.25.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$!

**5.26.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$;
2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;
3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$!

**5.27.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$;
2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$;
3) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$!

**5.28.**•• Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, ha $a > 0$!

**5.29.**•• Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, ha $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$!

**5.30.**•• Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

1) $c\sqrt[8]{3}$, ha $c \leqslant 0$;
2) $b\sqrt[6]{6}$;
3) $a\sqrt[6]{-a}$!

**5.31.**•• Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

1) $a\sqrt[6]{a}$;
2) $a\sqrt[4]{-a^3}$!

**5.32.*** Oldd meg az egyenletet: $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6} = 2$!

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**5.33.** Add meg a kifejezést az $a$ alapú hatványként:

1) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$; 5) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;

2) $a^5 \cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3} : a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$!

**5.34.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 3) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$; 5) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

2) $3^{-3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $9^{-4} \cdot 27^2$; 6) $\dfrac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$!

# 6. A racionális kitevőjű hatvány meghatározása és tulajdonságai

A 7. osztályban már megismertétek a természetes kitevőjű hatvány következő tulajdonságait:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Később megtanultátok a nulla kitevőjű hatvány és a negatív kitevőjű hatvány meghatározását is:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ezek a definíciók nagyon hasznosak: a természetes kitevőjű hatvány mind az öt tulajdonsága érvényes lesz az egész kitevőjű hatványokra is.

Bevezetjük a törtkitevőjű hatvány fogalmát, vagyis az $a^r$-t, melynek kitevője a következő alakban adható meg: $r = \dfrac{m}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ezt úgy kívánjuk megadni, hogy a törtkitevőjű hatvány tulajdonságai megegyezzenek az egész kitevőjű hatvány tulajdonságaival. A meghatározás alapjául a következő példa szolgálhat.

Jelöljük meg $x$-szel a $2^{\frac{2}{3}}$ hatvány értékét, vagyis $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Alkalmazva az $(a^m)^n = a^{mn}$ tulajdonságot felírhatjuk: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Tehát az $x$ a $2^2$ szám köbgyöke lesz, vagyis $x = \sqrt[3]{2^2}$. Következésképpen $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ebből a gondolatmenetből következik, hogy érdemes elfogadni a következő meghatározást.

**Definíció. A pozitív $a$ szám $r$ racionális kitevőjű hatványának, ha az $r$ az $\frac{m}{n}$ alakban írható fel, és az $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, az $\sqrt[n]{a^m}$ számot nevezzük, vagyis**

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Például $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Megjegyezzük, hogy az $a^r$ hatvány értéke, ahol $r$ racionális szám lesz, nem függ attól, hogy az $r$ törtet milyen alakban adjuk meg. Ez az $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ és $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ egyenlőség alkalmazásával bizonyítható be.

A nulla alapú hatvány csak a pozitív racionális kitevőre értelmezhető.

**Definíció.** $\mathbf{0^{\frac{m}{n}} = 0}$**, ha** $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Figyeljetek arra, hogy például a $0^{-\frac{1}{2}}$-nek nincs értelme.

Hangsúlyozzuk, hogy az $a^{\frac{m}{n}}$ hatvány meghatározása az $a < 0$ esetén nincs definiálva. Például a $(-2)^{\frac{1}{3}}$ kifejezés nincs értelmezve. Viszont a $\sqrt[3]{-2}$ kifejezés értelmezve van. Felmerül a kérdés, miért nem tekinthetjük igaznak a $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$ egyenlőséget. Bebizonyítjuk, hogy az ilyen megállapítás ellentmondáshoz vezetne:

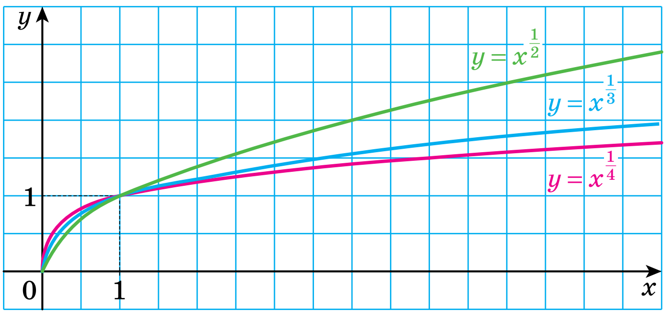
$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Azt kaptuk, hogy a $\sqrt[3]{-2}$ negatív szám „egyenlő” a $\sqrt[6]{4}$ pozitív számmal.

Az $y = x^r$ függvényt, ha $r \in \mathbb{Q}$, **racionális kitevőjű hatványfüggvénynek** nevezzük.

Ha az $\frac{m}{n}$ nem egyszerűsíthető tört, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ pozitív szám lesz, akkor az $y = x^{\frac{m}{n}}$ függvény értelmezési tartománya a $[0; +\infty)$ intervallum lesz, ha ez a tört negatív szám, akkor a $(0; +\infty)$ intervallum.

A 6.1. ábrán az $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$ függvények grafikonjai láthatók.




**6.1. ábra**

Bebizonyítjuk, hogy az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai érvényesek bármilyen racionális kitevőjű hatványra is.

**6.1. tétel (a hatványok szorzata).** ***Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális $p$ és $q$ számra teljesül a következő egyenlőség***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

*Bizonyítás.* A $p$ és $q$ racionális számokat felírjuk egyenlő nevezőjű törtként: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ekkor:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. ◀$$

**Következmény.** ***Bármilyen $a > 0$ és bármilyen $p$ racionális számra teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

*Bizonyítás.* A 6.1. tétel alkalmazásával felírjuk: $a^{-p} \cdot a^{p} = a^{-p+p} = a^{0} = 1$. Innen $a^{-p} = \dfrac{1}{a^{p}}$. ◀

**6.2. tétel (a hatvány hányadosa).** ***Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális $p$ és $q$ számra teljesül a következő egyenlőség***

$$\boxed{a^{p} : a^{q} = a^{p-q}}$$

*Bizonyítás.* A 6.1. tétel alkalmazásával felírjuk: $a^{q} \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^{p}$. Innen $a^{p-q} = a^{p} : a^{q}$. ◀

**6.3. tétel (a hatvány hatványa).** ***Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális $p$ és $q$ számra teljesül a következő egyenlőség***

$$\boxed{(a^{p})^{q} = a^{pq}}$$

*Bizonyítás.* Legyen $p = \dfrac{m}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ és $q = \dfrac{s}{k}$, ahol $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Ekkor:

$$(a^{p})^{q} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}. ◀$$

**6.4. tétel (a szorzat és a hányados hatványa).** ***Bármilyen $a > 0$ és $b > 0$, valamint bármilyen racionális $p$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek***:

$$\boxed{(ab)^{p} = a^{p}b^{p}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}}}$$

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt.

**1. feladat.** Egyszerűsítsük a kifejezést

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})\ (a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

*Megoldás.* Felbontjuk a zárójeleket, alkalmazva a többtagok szorzásának szabályát és a négyzetek különbségének képletét, aztán összevonjuk a hasonló összeadandókat:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$

$$= \underline{3a^{0,6}} - \underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}} + \underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}} - 4b^{0,4} - \underline{a^{0,6}} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. ◀$$

**2. feladat.** Egyszerűsítsük a kifejezést $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$.

*Megoldás*. Elvégezzük az $x^{\frac{1}{3}} = y$ helyettesítést. Ekkor az adott kifejezés a következő alakot veszi fel:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Ezt a kifejezést könnyen leegyszerűsíthetjük. Fejezzétek be önállóan.

*Felelet*: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◄

**?**

1. Mit nevezünk az $a$ szám $\dfrac{m}{n}$ kitevőjű hatványának, ha $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Mit nevezünk a 0 szám $\dfrac{m}{n}$ kitevőjű hatványának, ha $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?
3. Mit nevezünk racionális kitevőjű hatványfüggvénynek?
4. Fogalmazd meg a racionális hatvány tulajdonságait!

## GYAKORLATOK

**6.1.°** Add meg gyök alakban a törtkitevőjű hatványt:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$!

**6.2.°** Add meg gyök alakban a törtkitevőjű hatványt:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$!

**6.3.°** Add meg a kifejezést törtkitevőjű hatvány alakjában:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$!

**6.4.°** Add meg a kifejezést törtkitevőjű hatvány alakjában:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$!

**6.5.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $32^{-0{,}2}$!

**6.6.°** Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

**6.7.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $3^{1,8}\cdot 3^{-2,6}\cdot 3^{2,8}$; 3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5}\cdot 1,2^{4,5}$;

2) $(5^{-0,8})^{6}\cdot 5^{4,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 6) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$!

**6.8.°** Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

1) $5^{3,4}\cdot 5^{-1,8}\cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^{8} : 7^{-7,6}$; 3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 4) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

**6.9.°** Bontsd fel a zárójeleket:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$;

4) $(b^{0,4}+3)^{2}-6b^{0,4}$;

5) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$!

**6.10.°** Bontsd fel a zárójeleket:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

4) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

5) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^{2}+8y^{2}$;

6) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$!

**6.11.•** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot (0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$!

**6.12.•** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1,25}\cdot 25^{1,5}\cdot 125^{\frac{2}{3}}$!

**6.13.•** Egyszerűsítsd a törtet:

1) $\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$; 2) $\frac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$; 3) $\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 5) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$!

**6.14.**• Egyszerűsítsd a törtet:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$!

**6.15.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést: $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$!

**6.16.**•• Egyszerűsítsd a kifejezést: $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$!

**6.17.**•• Bizonyítsd be az azonosságot: $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$!

**6.18.**•• Bizonyítsd be az azonosságot: $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**6.19.** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{3x-7}=0$; 3) $\sqrt{x^2-64}=6$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;

2) $\sqrt{4x-1}=6$; 4) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$; 6) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$!

## 7. Irracionális egyenletek

Az egyenletek megoldása során néha az egyenlet mindkét oldalát ugyanarra a hatványra kell emelni. Megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja ez az átalakítás az egyenlet gyökeinek halmazát.

**7.1. tétel.** ***Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.***

**1. feladat.** Oldjuk meg az $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$ egyenletet!

*Megoldás.* Az egyenlet mindkét oldalát a hetedik hatványra emeljük. Az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Innen $x^2 - 2 = x$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

*Felelet*: –1; 2. ◀

Az 1. feladatban a változó a gyökjel alatt van. Az ilyen egyenletet **irracionális** egyenletnek nevezzük.

Nézzünk néhány példát az irracionális egyenletekre:

$$\sqrt{x-3} = 2;$$
$$\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0;$$
$$\sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

Az 1. feladat megoldása során egy olyan egyenletet alakítottunk át, amely páratlan kitevőjű gyököt tartalmazott. Vizsgáljunk meg egy olyan egyenletet, amely páros kitevőjű gyököt tartalmaz.

**2. feladat.** Oldjuk meg a $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$ egyenletet! (1)

*Megoldás.* A $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ képlet alkalmazásával az adott egyenletet a következő egyenlettel helyettesítjük:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (2)$$

Innen az $x = -3$.

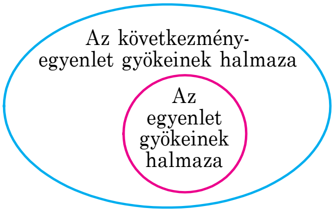
Az ellenőrzés viszont azt mutatja, hogy a –3 szám nem lesz gyöke az eredeti egyenletnek. Azt mondjuk, hogy a –3 az (1) **egyenlet hamis gyöke.**

Tehát az (1) egyenletnek nincs gyöke.

*Felelet*: az egyenletnek nincs gyöke. ◀

A 2. feladat megoldása során a hamis gyök megjelenésének oka az, hogy a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ képlet alkalmazása során nem vettük figyelembe, hogy az $a \geqslant 0$ feltételnek teljesülnie kell. Ezért a (2) egyenlet nem egyenértékű az (1) egyenlettel.

**Definíció. Ha az $f_2(x) = g_2(x)$ egyenlet gyökeinek halmaza tartalmazza az $f_1(x) = g_1(x)$ egyenlet gyökeinek halmazát, akkor az $f_2(x) = g_2(x)$ egyenletet az $f_1(x) = g_1(x)$ egyenlet következményének nevezzük.**




**7.1. ábra**

Például az $x^2 = 25$ egyenlet következménye lesz az $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ egyenletnek. Győződjetek meg erről önállóan.

Azt is mondjuk, hogy az $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ egyenletből **következik** az $x^2 = 25$ egyenlet.

A 7.1. ábrán egy Euler-diagram szemlélteti a következmény-egyenlet halmaza és az eredeti egyenlet halmaza közötti összefüggést.

A hamis gyök megjelenésének másik oka, hogy az $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ egyenlőségből nem feltétlen következik az $x_1 = x_2$ egyenlőség. Például $(-2)^4 = 2^4$, de $-2 \neq 2$. Ugyanakkor az $x_1 = x_2$ egyenlőségből következik az $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ egyenlőség.

Igaz lesz a következő tétel.

**7.2. tétel.** ***Az egyenlet mindkét oldalának páros hatványra emelése során a kapott egyenlet következménye lesz az eredetinek.***

**3. feladat.** Oldjuk meg a $\sqrt{4+3x} = x$ egyenletet!

*Megoldás*. Négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát. A kapott egyenlet következménye lesz az eredetinek:

$$4 + 3x = x^2.$$

Innen $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a $-1$ hamis gyök lesz, Ugyanakkor a 4 kielégíti az eredeti egyenletet.

*Felelet*: 4. ◀

**4. feladat.** Oldjuk meg a $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ egyenletet!

*Megoldás*. Az adott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Innen $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x.$

Áttérve a következmény-egyenletre, a következőt kapjuk:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0; \quad x_1 = 42, \; x_2 = 2.$$

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a 42 hamis gyöke lesz az egyenletnek, ugyanakkor a 2 kielégíti az adott egyenletet.

*Felelet*: 2. ◀

**5. feladat.** Oldjuk meg a $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$ egyenletet!

*Megoldás*. Legyen az $\sqrt[4]{x^3+1} = t.$ Akkor $\sqrt{x^3+1} = t^2.$ Ezután az eredeti egyenletet a következőképpen írhatjuk át:

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Innen $t = -3$ vagy $t = 1$.

Amikor $t = -3$, akkor a következő egyenletet kapjuk: $\sqrt[4]{x^3+1} = -3,$ aminek nincs megoldása.

Amikor $t = 1$, akkor a következő egyenletet kapjuk: $\sqrt[4]{x^3+1} = 1.$ Fejezzük be az egyenletet önállóan.

*Felelet*: 0. ◀

Emlékeztetünk benneteket arra, hogy az utóbbi egyenlet megoldásának módszere már ismert a 8–9. osztályos algebra tantárgyból. Ezt a módszert *változócseré*nek nevezzük.

1. Milyen egyenletet nevezünk irracionálisnak?
2. Az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük. A kapott és az eredeti egyenlet egyenértékű-e?
3. Az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük. A kapott és az eredeti egyenlet egyenértékű-e?
4. Hogyan lehet megállapítani a gyökről, hogy hamis-e?

## GYAKORLATOK

**7.1.°** Magyarázd meg, miért nincs gyöke az egyenletnek:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$!

**7.2.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$!

**7.3.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[3]{x-3}=4$;
2) $\sqrt[3]{8x^3-x-15}=2x$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$!

**7.4.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$!

**7.5.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$!

**7.6.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$!

**7.7.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
4) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$!

**7.8.**• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$.

**7.9.**• Oldd meg az egyenletet: $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$!

**7.10.**• Oldd meg változócserével az egyenletet:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;
3) $2x-7\sqrt{x}-15=0$;
4) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;
6) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8$!

**7.11.**• Oldd meg változócserével az egyenletet:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;
2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;
3) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;
4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$!

**7.12.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$!

**7.13.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$;
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$!

**7.14.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;
2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$!

**7.15.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;
3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$;
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$!

**7.16.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;
2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3$!

**7.17.**•• Oldd meg változócserével az egyenletet:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;
3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;
4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$!

**7.18.**•• Oldd meg változócserével az egyenletet:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0;$

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2;$

3) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123!$

**7.19.*** Oldd meg az $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 6$ egyenletet!

**7.20.*** Oldd meg az $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 6$ egyenletet!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**7.21.** Ábrázold az $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ ha } x < 1, \\ x - 1, \text{ ha } x \geqslant 1 \end{cases}$ függvény grafikonját! A grafikon alapján állapítsd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait!

**7.22.** Add meg a lineáris $f$ függvény képletét, ha $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$!

## A LEMBERGI MATEMATIKAI ISKOLA

Jelenleg az *Algebra és az analízis elemei* egyik fejezetével ismerkedtek meg. A tantárgy nevében egy új szóösszetétel – az *analízis elemei* jelent meg. Mit takar ez a név? A válasz nagyon egyszerű: a matematikai analízis a függvények tanulmányozásával foglalkozik. Ebben az évben az analízis elemeiről kezdtetek el tanulni: újabb és újabb függvénytípussal kell megismerkednetek, megtanuljátok a tulajdonságaikat, elsajátítjátok a függvények vizsgálatának módszereit.

A XX. század első felében bizonyos függvénytípusok vizsgálata során egy új matematikai tárgy jött létre, a funkcionális analízis. Nagyon fontos és jelentős szerepet játszott ennek a tudományágnak a létrejöttében a lembergi matematikai iskola.

A XX. század 20–30-as éveiben Lemberg a világ matematikai fővárosa volt. A tudományos intézetekben olyan neves matematikusok dolgoztak, mint Kazimierz Kuratowski, Stanislaw Mazur, Wladyslaw Orlicz, Waclaw Sierpiński, Stanislaw Ulam, Juliusz Schauder, Hugo Steinhaus és még sokan mások. A lembergi tudósok olyan magasan képzettek voltak, hogy a világhírű matematikus, több matematikai logikáról és halmazelméletről írt könyv szerzője, Alfred Tarski nem kapta meg a lembergi egyetem professzori állását. Lemberg matema-

**Stefan Banach**
(1892–1945)


**Banach *Funkcionális analízis* című tankönyve**

tikusai egy erős tudományos csapatot hoztak létre, melyet a Lembergi Matematikai Iskolának neveztek el. Vezetője a zseniális matematikus, Stefan Banach volt.

Ma a világ matematikusainak közössége Banachot tekinti a funkcionális analízis megteremtőjének. Az egyik első tankönyvet ebből a tárgyból Banach írta. Az általa bevezetett fogalmak klasszikusak lettek. Például a tudós által tanulmányozott teret *Banach-tér*nek nevezik és most már azok között a legszükségesebb fogalmak között van, melyet a felsőoktatásban tanuló matematikusnak, fizikusnak, kibernetikusnak ismernie kell.

Azt mesélik, hogy a lembergi matematikusok sok tételt a kávézóban bizonyították be. Stefan Banach a tanítványaival nagyon szeretett a *Skót kávéház*ban tartózkodni, ahol a kis márvány burkolatú asztalok nagyon alkalmasak voltak a matematikai képletek és tételek levezetésére. A kávézó tulajdonosát bosszantotta, hogy a tudósok nem hagytak fel ezzel a rossz szokásukkal. A helyzetet Banach felesége azzal mentette meg, hogy egy nagy méretű füzetet vásárolt férjének. Így keletkezett a híres *Skót könyv*, a matematikai problémák gyűjteménye, melyeken Banach és munkatársai dolgoztak. A bonyolult matematikai problémák megoldása fejében a tudósok viccesen sört vagy éttermi vacsorát ajánlottak fel egymásnak. Például az egyik probléma megoldásáért a kitalálója (1936-ban) egy élő libát ajánlott fel, melynek a megoldása csak 1972-ben született meg, amikor át is adták a jutalmat.

**A liba átadása**

A *Skót könyv*ben lévő problémák olyan fontosak és bonyolultak, hogy akinek sikerül legalább egyet is megoldania közülük, az azonnal világhírűvé válik. A *Skót könyv* a tudomány egyik leghíresebb és legértékesebb relikviája lett.

## AZ 1. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

### A függvény legnagyobb és legkisebb értékei

Ha minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \leqslant f(x)$ egyenlőtlenség, ahol az $x_0 \in M$, akkor az $f(x_0)$ számot a függvény legkisebb értékének nevezzük az $M$ halmazon, és így jelöljük: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Ha minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \geqslant f(x)$ egyenlőtlenség, ahol az $x_0 \in M$, akkor az $f(x_0)$ számot a függvény legnagyobb értékének nevezzük az $M$ halmazon, és így jelöljük: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

### Páros és páratlan függvények

Az $f$ függvényt párosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen $x$ értékére teljesül a következő egyenlőség: $f(-x) = f(x)$.
Az $f$ függvényt páratlannak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen $x$ értékére teljesül a következő egyenlőség: $f(-x) = -f(x)$.
Az ordinátatengely a páros függvény szimmetriatengelye.
A koordináta-rendszer kezdőpontja a páratlan függvény szimmetriapontja.

### Az *n*-edik gyök

Az $a$ szám $n$-edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a számot nevezzük, melynek $n$-edik hatványa $a$-val egyenlő.
A nemnegatív $a$ szám a számtani $n$-edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek $n$-edik hatványa $a$-val egyenlő.
Bármilyen $a$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek:
$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.
Bármilyen $a \geqslant 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a következő egyenlőség: $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$.

Ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Ha $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Ha $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Ha $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, akkor $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

## A racionális kitevőjű hatvány

A pozitív $a$ szám $\frac{m}{n}$ hatványkitevőjű hatványának nevezzük, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, az $\sqrt[n]{a^m}$, vagyis az $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ számot.

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Az $y = x^r$ képlettel megadott függvényt, ahol $r \in \mathbb{Q}$, racionális kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.

Bármilyen $a > 0$ és bármilyen $p$ és $q$ racionális számok esetén teljesülnek a következő egyenlőségek: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Bármilyen $a > 0$ és $b > 0$, valamint bármilyen $p$ racionális szám esetén teljesülnek a következő egyenlőségek: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

## Irracionális egyenletek

Azokat az egyenleteket, melyekben a változó a gyökjel alatt van, irracionális egyenleteknek nevezzük.

Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

Ha az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük, akkor a kapott egyenlet következménye az eredetinek.

# TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK 2. §.

E paragrafus anyagának elsajátítása során bővíteni fogjátok az eddigi ismereteiteket a trigonometrikus függvényekről és ezek tulajdonságairól, megismerkedtek a szög radiánmértékével, valamint a periodikus függvényekkel.

Megtanuljátok a különböző trigonometrikus függvények közötti összefüggéseket bemutató képleteket, ezek alkalmazását a számítások, a kifejezések egyszerűsítése és az azonosságok bizonyítása során.

Megismerkedtek a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletekkel; a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldóképleteivel.

## 8. A szög radiánmértéke

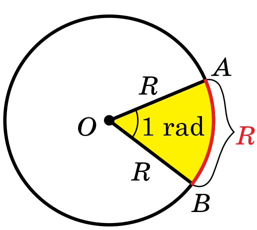
Eddig a szögek mérésére a fokot és ennek a törtrészeit – a percet és másodpercet – alkalmaztuk.

Sok esetben érdemes és hasznos lehet egy másik mértékegységet használni a szög mértékének meghatározásához. Ez a mértékegység a **radián**.

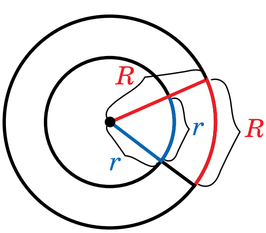
**Definíció. 1 radián olyan középponti szög, melynek ívhossza egyenlő a körvonal sugarával.**

A 8.1. ábrán az $AOB$ középponti szög látható. Ez egy olyan $AB$ ívre támaszkodik, melynek hossza a kör sugarával egyenlő. Az $AOB$ szög egy radiánnal lesz egyenlő. Így írjuk fel: $AOB\angle = 1$ rad. Azt is mondják, hogy az $AB$ ív radiánmértéke egy radiánnal egyenlő. Így írjuk fel: $AB\cup = 1$ rad.

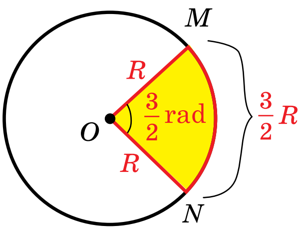
A szög (ív) radiánmértéke független a körvonal sugarától. Ezt az állítást jól szemlélteti a 8.2. ábra.




**8.1. ábra**




**8.2. ábra**




**8.3. ábra**

A 8.3. ábrán az $R$ sugarú kör és az $MN$ ív látható, melynek hossza $\frac{3}{2}R$. Ezért az $MON$ szög ($MN$ ív) radiánmértéke $\frac{3}{2}$ lesz. Általánosítva, ha az $R$ sugarú kör középponti szöge az $\alpha R$ hosszúságú ívre támaszkodik, akkor ennek a szögnek a **radiánmértéke (vagy ívmértéke)** $\alpha$ radián lesz.

A félkörvonal hossza $\pi R$. Tehát a félkörvonal ívmértéke $\pi$ radián lesz. A félkörvonal fokmértéke 180°. Ezek alapján felírhatjuk a szög ívmértéke és fokmértéke közötti összefüggést:

$$\pi \text{ rad} = 180°. \qquad (1)$$

Innen

$$\boxed{\mathbf{1\ rad} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Elosztva a 180-at 3,14-gyel (emlékeztetőül, $\pi \approx 3{,}14$) megállapíthatjuk, hogy $1 \text{ rad} \approx 57°$.

$$\boxed{\mathbf{1°} = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\ \mathbf{rad}} \qquad (2)$$

Ebből az egyenlőségből könnyen megkaphatjuk például, hogy

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}.$$

Amikor a szög ívmértékét írjuk fel, általában a rad jelölést elhagyjuk. Például: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

Az alábbi táblázat a leggyakrabban alkalmazott szögek fokmértékét és ívmértékét tartalmazza:

| A szög fokmértéke | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A szög ívmértéke | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

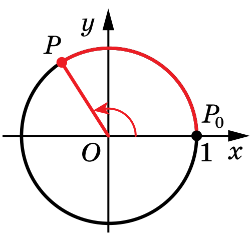
A szög ívmértékének alkalmazásával egy jól használható képletet kapunk a körvonal körívének meghatározására.

Mivel az 1 radián méretű középponti szög egy olyan ívre támaszkodik, melynek hossza egyenlő az $R$ sugárral, ezért az $\alpha$ rad méretű szög az $\alpha R$ hosszúságú középponti szögre fog támaszkodni. Ha az $\alpha$ rad méretű ív hosszát $l$-lel jelöljük, akkor felírható:

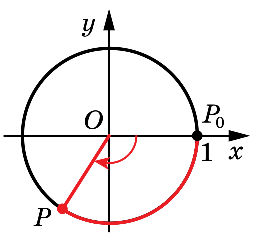
$$\boxed{\boldsymbol{l} = \alpha \boldsymbol{R}}$$

A koordinátasíkon vizsgáljunk meg egy olyan egységsugarú kört, melynek középpontja egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával. Az ilyen kört **egységkör**nek nevezzük.

A $P$ pont a $P_0(1;\ 0)$ ponttól indulva az óramutató járással ellentétes irányban mozog az egységkör mentén. Az adott pillanatban olyan pozícióban lesz, hogy $P_0OP\angle = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (8.4. ábra). Azt is mondhatjuk, hogy a ***P* pontot a *P*$_0$ pontnak az origó körüli** $\frac{2\pi}{3}$ (120° fokos) **szöggel történő elforgatása során kapjuk.**




**8.4. ábra**

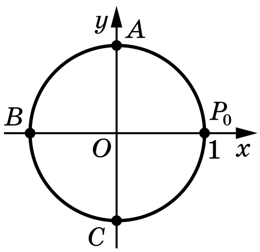



**8.5. ábra**

Most forgassuk el a $P$ pontot az óramutató járásával megegyező irányba addig a helyzetig, melynél $POP_0\angle = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (8.5. ábra). Ekkor azt mondjuk, hogy a $P$ pontot a $P_0$ pontnak az origó körüli $-\frac{2\pi}{3}$ (–120° fokos) szöggel történő elforgatása során kapjuk.

Általánosítva, ha a mozgás a körvonalon az óramutató járásával ellenkező irányban történik (8.4. ábra), akkor az elforgatás szögét pozitívnak tekintjük, ha pedig az óramutató járásával megegyező irányban (8.5. ábra), akkor negatívnak.

Vizsgáljunk meg még néhány esetet. A 8.6. ábra alapján elmondhatjuk, hogy az $A$ pontot a $P_0$ pontnak az origó körüli $\frac{\pi}{2}$-os (90°-kal) vagy $-\frac{3\pi}{2}$-nal (–270°-kal) való elforgatása során kaptuk meg. A $B$ pontot a $P_0$ pontnak az origó körüli $\pi$-nal (180°-kal) vagy $-\pi$-nal (–180°-kal) való elforgatása során kaptuk meg. A $C$ pontot a $P_0$ pontnak az origó körüli $\frac{3\pi}{2}$-nal (270°-kal) vagy $-\frac{\pi}{2}$-nal (–90°-kal) való elforgatása során kaptuk meg.



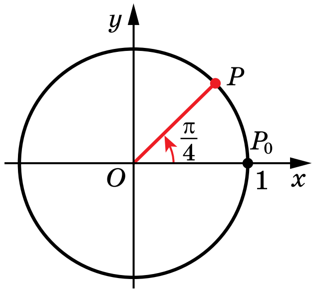

**8.6. ábra**

Ha a $P$ pont egy teljes kört ír le az egységkörön, akkor azt mondjuk, hogy az elfordulás szöge $2\pi$ (360°) vagy $-2\pi$ (–360°).

Ha a $P$ pont másfél kört tesz meg az óramutató járásával ellenkező irányban, akkor az elfordulási szöge $3\pi$ (vagyis 540°) lesz, ha az óramutató járásával megegyező irányban, akkor $-3\pi$ (vagyis –540°) lesz.

*A szög mértéke radiánokban és fokban is bármilyen valós számmal kifejezhető.*

Az elforgatás szöge egyértelműen kifejezi a $P$ pont helyzetét az egységkörön. Ugyanakkor a $P$ pont egy adott helyzetének számtalan elforgatási szög felel meg. Például a $P$ pontnak (8.7. ábra) a következő elforgatási szögek felelnek meg: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ és így tovább, és szintén megfelel a $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ stb. Megjegyezzük, hogy az összes ilyen szöget megkaphatjuk a következő képletből: $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$.




**8.7. ábra**

1. Mit nevezünk egy radián ívmértékű szögnek?
2. Mennyi az 1°-os szög ívmértéke?
3. Mivel egyenlő annak az $R$ sugarú körívnek a hossza, amelynek ívmértéke $\alpha$ radián?

## GYAKORLATOK

**8.1.°** Határozd meg a szög ívmértékét, ha fokmértéke:
1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°!

**8.2.°** Határozd meg a szög fokmértékét, ha ívmértéke:
1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) 1,2π; 5) 3π; 6) 2,5π!

**8.3.°** Töltsd ki a táblázatot!

| A szög fokmértéke | | 12° | 36° | | | 105° | 225° | | | 240° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A szög ívmértéke | $\frac{\pi}{18}$ | | | $\frac{4\pi}{9}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | | | 4π | 1,8π | |

**8.4.°** Mivel egyenlő a körív hossza, ha a kör sugara 12 cm, az ívmértéke pedig:
1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

**8.5.°** Számítsd ki a körív hosszát, ha adott az α szög ívmértéke és a kör $R$ sugara:
1) $\alpha = 3$, $R = 5$ cm; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ cm; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ cm!

**8.6.°** Jelöld az egységkörön azt a pontot, amelyet a $P_0(1;\ 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:
1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 150°; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) –45°; 5) –120°; 6) –450°.

**8.7.°** Jelöld az egységkörön azt a pontot, amelyet a $P_0(1;\ 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:
1) –60°; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 320°; 4) 420°; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$!

**8.8.°** Melyik koordinátanegyedhez tartozik az egységkör azon pontja, amelyet a $P_0(1;\ 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:
1) 127°; 4) 400°; 7) –470°; 10) 2,4π;
2) 89°; 5) 600°; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;
3) 276°; 6) –400°; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) –2?

**8.9.°** Melyik koordinátanegyedhez tartozik az egységkör azon pontja, amelyet a $P_0(1;\ 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:
1) 94°; 2) 176°; 3) 200°; 4) –100°;

5) $-380°$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 11) 1;

6) $700°$; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$; 12) $-3$?

**8.10.°** Határozd meg annak a pontnak a koordinátáit, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\pi$; 3) $-90°$; 4) $-180°$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) $-2\pi$!

**8.11.°** Határozd meg annak a pontnak a koordinátáit, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $3\pi$; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$!

**8.12.•** Nevezd meg azt a legkisebb pozitív és a legnagyobb negatív szöget, amellyel ha elforgatjuk a $P_0(1; 0)$ pontot, akkor a:

1) $(0; 1)$; 2) $(-1; 0)$ pontba jutunk!

**8.13.•** Nevezd meg azt a legkisebb pozitív és legnagyobb negatív szöget, amellyel ha elforgatjuk a $P_0(1; 0)$ pontot, akkor a:

1) $(0; -1)$; 2) $(1; 0)$ pontba jutunk!

**8.14.••** Határozd meg az összes olyan szöget, amellyel el kell fordítani a $P_0(1; 0)$ pontot, hogy a következő pontba jussunk:

1) $P_1(0; 1)$; 2) $P_2(-1; 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$!

**8.15.••** Határozd meg az összes szöget, amellyel el kell fordítani a $P_0(1; 0)$ pontot, hogy a következő pontba jussunk:

1) $P_1(0; -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$!

**8.16.••** Határozd meg az egységkör azon pontjának a koordinátáit, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak:

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

szöggel való elfordításával kapunk!

**8.17.••** Határozd meg az egységkör azon pontjának a koordinátáit, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak:

1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

szöggel való elfordításával kapunk!

**8.18.**[••] Bizonyítsd be, hogy az $\alpha$ radián nagyságú ívhez tartozó körcikk területét az $S=\frac{\alpha R^2}{2}$ képlettel lehet kiszámítani, ahol $R$ a körvonal sugara!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**8.19.** Oldd meg az egyenletet:

1) $\frac{x^2-6}{x-3}=\frac{x}{x-3}$;  2) $\frac{3x-1}{x}-\frac{4}{x-2}=\frac{10-9x}{x^2-2x}$!

**8.20.** Egy városban 88 200 lakos él. Hány lakosa volt a városnak két évvel ezelőtt, ha évente 5%-kal nő a lakosság létszáma?

# 9. A számargumentumú trigonometrikus függvények

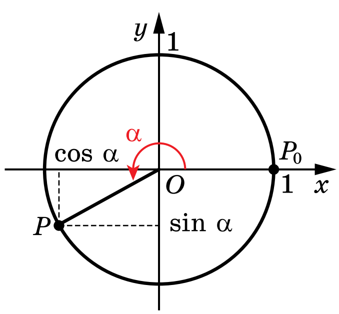
A 9. osztályban a trigonometrikus függvények meghatározásakor a 0° és 180° közötti szögeket az egységfélkörön határoztuk meg. Általánosítjuk ezt a meghatározást bármilyen $\alpha$ szögre.

Tekintsük a 9.1. ábrán lévő egységkört.

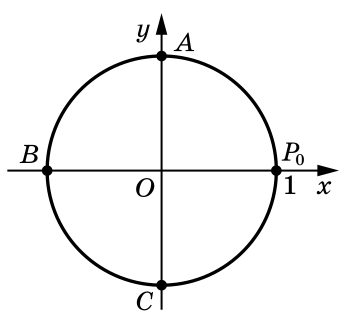
**Definíció. Az $\alpha$ szög koszinuszának (szinuszának) az egységkör azon $P\,(x;\ y)$ pontjának $x$ abszcisszáját ($y$ ordinátáját) nevezzük, melyet a $P_0\,(1;\ 0)$ pontnak az origó körüli $\alpha$ szöggel történő elforgatása után kapunk** (9.1. ábra).

A matematika nyelvén így írjuk fel: $\cos\alpha=x$, $\sin\alpha=y$.

A $P_0$, $A$, $B$ és $C$ pontok (9.2. ábra) megfelelő koordinátái: (1; 0), (0; 1), (–1; 0), (0; –1). Ezeket a pontokat a $P_0\,(1;\ 0)$ pont 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$




9.1. ábra




9.2. ábra

szöggel történő elforgatása során kapjuk. Tehát az adott definíció alapján össze lehet állítani a következő táblázatot[1]:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

**1. feladat.** Határozzuk meg az $\alpha$ szög összes értékét, melyeknél: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$!

*Megoldás*. 1) Csak az egységkör két pontjának ordinátája egyenlő nullával: $P_0$ és $B$ (9.2. ábra). Ezeket a pontokat a $P_0$ pont

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \dots \quad \text{és} \quad -\pi,\ -2\pi, -3\pi,\ -4\pi,\ \dots$$

szöggel történő elforgatásakor kapjuk meg.

Ezeket a szögeket az $\alpha = \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ képlettel írhatjuk fel. Tehát $\sin\alpha = 0$, ha $\alpha = \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

2) Az $A$ és $C$ pontoknak lesz az abszcisszája egyenlő nullával. Ezeket a pontokat a $P_0$ pont

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \dots \text{ és } \frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \frac{\pi}{2}-4\pi,\ \dots$$

szöggel történő elforgatásakor kapjuk meg.

Az összes szöget felírhatjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ képlettel.

Tehát $\cos\alpha = 0$, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. ◄

**Definíció. Az $\alpha$ szög tangensének a szög szinuszának és koszinuszának arányát nevezzük:**

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Például: $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$

---

[1] A 3. előzéken megtalálhatók néhány szög trigonometrikus függvényének értékei.

A tangens meghatározásából következik, hogy csak arra az elfordulási szögre van értelmezve, amikor $\cos\alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Már tudjátok, hogy az egységkörön minden $\alpha$ elfordulási szögnek *egy* pont felel meg. Tehát az $\alpha$ minden értékének egyetlen egy szám felel meg, amelyet az $\alpha$ szög szinuszának (koszinuszának, tangensének, ahol $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) nevezzük. Ezért a szög szinusza (koszinusza, tangense) és az elfordulási szög között függvénykapcsolat áll fenn.

Az $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ és $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ függvényeket az $\alpha$ szög **trigonometrikus függvényei**nek nevezzük.

Minden valós $\alpha$ számnak megfeleltetjük az $\alpha$ radián nagyságú szöget. Ez lehetőséget ad arra, hogy a trigonometrikus függvényekre számargumentumú függvényekként tekintsünk.

Például a $\sin 2$ alatt a 2 radián nagyságú szög szinuszát értjük. A szinusz és koszinusz meghatározásából következik, hogy az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz lesz.

Mivel az egységkör pontjainak abszcisszái és ordinátái a $-1$ és az 1 között az összes értéket felveszi, ezért az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények értékkészletei a $[-1; 1]$ intervallum lesz.

Mivel az $\alpha$ és az $\alpha + 2\pi n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$, szögeknek ugyanaz a pont felel meg az egységkörön, ezért

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{sin}\,\alpha = \mathbf{sin}\,(\alpha + 2\pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\\ \mathbf{cos}\,\alpha = \mathbf{cos}\,(\alpha + 2\pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza lesz, kivéve a $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ számokat. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz.

Be lehet bizonyítani, hogy igaz a következő képlet:

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}}$$

**2. feladat.** Határozd meg az $1 - 4\cos\alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!

*Megoldás.* Mivel $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, ezért $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Tehát az adott kifejezés legkisebb értéke a $-3$, melyet a kifejezés akkor vesz fel, ha $\cos\alpha = 1$. Az adott kifejezés legnagyobb értéke az 5, melyet a kifejezés akkor vesz fel, ha $\cos\alpha = -1$. ◄

1. Mit nevezünk az elforgatási szög koszinuszának? Az elforgatási szög szinuszának? Az elforgatási szög tangensének?
2. Mi az értelmezési tartománya az $y = \sin x$ függvénynek? Az $y = \cos x$ függvénynek?
3. Mi az értékkészlete az $y = \sin x$ függvénynek? Az $y = \cos x$ függvénynek?
4. Mivel egyenlő $\sin(\alpha + 2\pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$?
5. Mi az értelmezési tartománya az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek?
6. Mi az értékkészlete az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek?
7. Mivel egyenlő $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$?

## GYAKORLATOK

**9.1.°** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$!

**9.2.°** Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

**9.3.°** Igaz-e az egyenlőség:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
2) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$?

**9.4.°** Egyenlő lehet e $\frac{\sqrt{5}}{2}$-vel a kifejezés:

1) $\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$?

**9.5.•** Nevezd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:

1) $3\sin\alpha$;
2) $4 + 2\cos\alpha$;
3) $2 - \sin\alpha$;
4) $\sin^2\alpha$!

**9.6.•** Nevezd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:

1) $-5\cos\alpha$;
2) $3\cos\alpha - 2$;
3) $5 + \sin^2\alpha$!

**9.7.•** Nevezd meg az $x$ három olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

1) $\sin x = 1$;
2) $\sin x = -1$!

**9.8.•** Nevezd meg az $x$ három olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$!

**9.9.**•• Határozd meg az $x$ összes olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

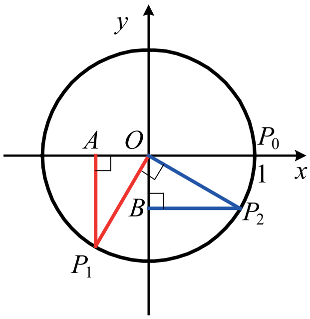
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$!

**9.10.**•• Határozd meg az $x$ összes olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$!

**9.11.**•• Bizonyítsd be a 9.3. ábra alapján, hogy $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$!

**9.12.**•• Bizonyítsd be a 9.3. ábra alapján, hogy $\sin \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$!



**9.3. ábra**

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**9.13.** Hasonlítsd össze a 0-val az $A\ (x;\ y)$ pont koordinátáit, ha a pont a következő koordinátanegyedben található:

1) az I. koordinátanegyed;
2) a II. koordinátanegyed;
3) a III. koordinátanegyed;
4) a IV. koordinátanegyed!

**9.14.** Páros vagy páratlan-e a függvény:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

# 10. A trigonometrikus függvények előjelei. Páros és páratlan trigonometrikus függvények

Már tudjátok, hogy a $P$ pontot úgy kapjuk, hogy az egységsugarú körvonal $P_0\ (1;\ 0)$ pontját elforgatjuk az origó körül $\alpha$ szöggel. Ha a $P$ pont az I. koordinátanegyedben helyezkedik el, akkor az $\alpha$ szög **első negyedbeli szög (**az I. koordinátanegyedben helyezkedik el).

Például $\frac{\pi}{7}$ és a $-300°$ szögek az I. negyed szögei, $\frac{2\pi}{3}$ és a $-185°$ szögek a II. negyed szögei, $\frac{5\pi}{4}$ és a $-96°$ szögek a III. negyed szögei, $355°$ és $-\frac{\pi}{8}$ szögek a IV. negyed szögei lesznek.

A $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú szögek nem tartoznak egyik negyedhez sem.

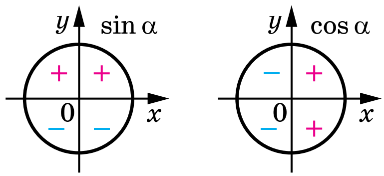
Az I. negyed pontjainak az abszcisszájuk és az ordinátájuk is pozitívak. Tehát, ha $\alpha$ az I. negyedben helyezkedik el, akkor $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

Ha a II. negyedben, akkor $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

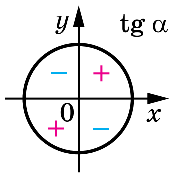
Ha a III. negyedben, akkor $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.

Ha a IV. negyedben, akkor $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

A szinusz és a koszinusz előjeleit a 10.1. ábra szemlélteti.



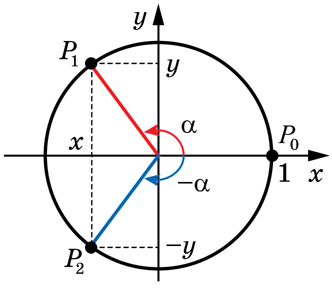

**10.1. ábra**




**10.2. ábra**

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ezért az I. és a III. negyedben lévő szög tangense pozitív, a II. és a IV. negyedben lévő szög tangense pedig negatív (10.2. ábra).

Legyenek a $P_1$ és a $P_2$ pontok a $P_0\,(1;\,0)$ pontnak az origó körüli $\alpha$ és $-\alpha$ szöggel történő elforgatásával kapott képei (10.3. ábra).




**10.3. ábra**

Bármilyen $\alpha$ szög esetén a $P_1$ és a $P_2$ pontoknak egyenlő abszciszszái és ellentétes ordinátái lesznek. Ezért a szinusz és a koszinusz meghatározásából következik, hogy bármilyen $\alpha$ szög esetén teljesül:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \end{aligned}}$$

Ez azt jelenti, hogy ***a koszinusz páros, a szinusz pedig páratlan függvény***.

Az $y = \text{tg}\, x$ függvény szimmetrikus az origóra (ellenőrizzétek le önállóan). Ezenkívül:

$$\text{tg}\,(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha.$$

Tehát ***a tangens függvény páratlan***.

**1. feladat.** Milyen előjele van: 1) sin 280°; 2) tg (–140°)?

*Megoldás*

1) Mivel a 280°-os szög a IV. negyedben van, ezért sin 280° < 0.

2) Mivel a –140°-os szög a III. negyedben van, ezért tg (–140°) > 0. ◄

**2. feladat.** Hasonlítsuk össze a sin 200° és a sin (–200°) értékeit!

*Megoldás*. Mivel a 200 fokos szög a III. negyedben van, a –200 fokos szög pedig a II. negyedben, ezért sin 200° < 0, sin (–200°) > 0.

Tehát sin 200° < sin (–200°). ◄

**3. feladat.** Vizsgáljuk meg a függvény paritását:

1) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$!

*Megoldás*

1) Az adott függvény értelmezési tartománya: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, szimmetrikus az origóra. Tehát:

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x).$$

Tehát az adott függvény páros lesz.

2) Az adott függvény értelmezési tartománya: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, szimmetrikus az origóra. Tehát:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Mivel az $f(-x) = f(x)$ és az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőségek közül egyik sem teljesül az értelmezési tartomány minden $x$ értékére, ezért az adott függvény se nem páros, se nem páratlan. ◄

**?**

1. Mikor mondjuk azt, hogy az $\alpha$ szög az I. koordinátanegyegben van? A II. negyedben van? A III. negyedben van? A IV. negyedben van?
2. Milyen előjelű a szinusz, a koszinusz és a tangens az egyes negyedekben?
3. Mely trigonometrikus függvények párosak, és melyek páratlanok? Írjátok fel a megfelelő egyenlőségeket!

## GYAKORLATOK

**10.1.°** Melyik koordinátanegyedben van a következő szög:
1) 38°; 2) 196°; 3) –74°; 4) $\frac{3\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{2\pi}{3}$?

**10.2.°** Pozitív vagy negatív lesz-e a trigonometrikus függvény értéke:
1) sin 110°; 2) cos 200°; 3) sin (–280°); 4) tg (–75°); 5) cos 2; 6) tg 1?

**10.3.°** Hasonlítsd össze a nullával:
1) tg 104°; 3) sin (–36°); 5) tg (–291°);
2) cos 220°; 4) cos (–78°); 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$!

**10.4.°** Határozd meg a kifejezés értékét:
1) sin (–30°); 2) tg (–60°); 3) cos (–45°)!

**10.5.°** Mivel egyenlő a cos (–60°) + tg (–45°) kifejezés értéke?

**10.6.°** Határozd meg a sin (–30°) – 2tg (–45°) + cos (–45°) kifejezés értékét!

**10.7.°** Határozd meg a $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$ kifejezés értékét!

**10.8.•** Melyik koordinátanegyedben van az α szög, ha:
1) sin α > 0 és cos α < 0; 2) sin α < 0 és tg α > 0?

**10.9.•** Ismert, hogy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Hasonlítsd össze a kifejezés értékét a nullával:
1) sin α tg α; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$!

**10.10.•** Ismert, hogy $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Hasonlítsd össze a kifejezés értékét a nullával:
1) sin β cos β; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$!

**10.11.•** Hasonlítsd össze:
1) tg 130° és tg (–130°); 2) cos 80° és sin 330°; 3) tg 6 és tg 6°!

**10.12.••** Ismert, hogy az α a III. negyedben van. Egyszerűsítsd a kifejezést:
1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\mathrm{tg}\,\alpha| - \mathrm{tg}\,\alpha$!

**10.13.••** Ismert, hogy a β a IV. negyedben van. Egyszerűsítsd a kifejezést:
1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\mathrm{tg}\,\beta| + \mathrm{tg}\,\beta$!

**10.14.••** Vizsgáld meg a függvény paritását:
1) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$!

**10.15.**•• Vizsgáld meg a függvény paritását:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; 2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$!

**ISMÉTLŐ GYAKORLAT**

**10.16.** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}$; 2) $\sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x$!

# 11. A trigonometrikus függvények tulajdonságai és grafikonjai

Már tudjátok, hogy minden egyes $x$ értékre teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Ez azt jelenti, hogy a szinusz és a koszinusz függvények értékei periodikusan ismétlődnek, ha az argumentumaikat $2\pi$-vel változtatjuk. Az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ a **periodikus függvények** példái.

**Definíció. Az $f$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik egy olyan $T \neq 0$ szám, hogy az $f$ függvény értelmezési tartományának bármely $x$ értékére teljesülnek a következő egyenlőségek:**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

**A $T$ számot a függvény periódusának nevezzük.**

Már tudjátok, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értelmezési tartományának bármilyen $x$ értékére igaz a következő egyenlőség:

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

A periodikus függvény meghatározásából az következik, hogy a tangens egy olyan periodikus függvény, melynek a periódusa $\pi$.

Be lehet bizonyítani, hogyha *a függvénynek a periódusa $T$, akkor a $2T$, $3T$, ..., valamint a $-T$, $-2T$, $-3T$, ... számok mindegyike periódusa lesz az adott függvénynek.*

Ebből az következik, hogy a periodikus függvénynek számtalan periódusa lesz.

Például minden $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ alakban megadott szám periódusa az $y = \sin x$, $y = \cos x$ függvényeknek, és minden $\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ alakú szám periódusa az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek.

Ha az $f$ függvénynek az összes periódusa között létezik legkisebb pozitív periódus, akkor ezt az $f$ függvény **fő periódusá**nak nevezzük.

**11.1. tétel.** ***Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények fő periódusa a $2\pi$, az $y = \operatorname{tg} x$ függvény fő periódusa a $\pi$ lesz.***

**1. feladat.** Határozzuk meg a kifejezés értékét: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$!

*Megoldás.*

1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360 \cdot 2) =$

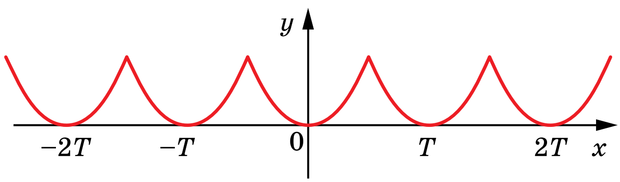
$$= \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1.$ ◄

A 11.1. ábrán egy olyan $f$ periodikus függvényt ábrázoltunk, melynek periódusa $T$, $D(f) = \mathbb{R}$.

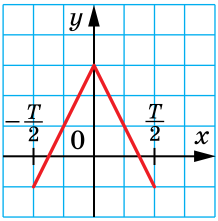



**11.1. ábra**

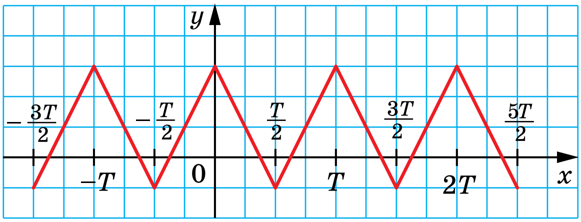
E függvény grafikonjának részletei a $[0;\ T]$, $[T;\ 2T]$, $[2T;\ 3T]$ és így tovább, valamint a $[-T;\ 0]$, $[-2T;\ -T]$, $[-3T;\ -2T]$ és így tovább intervallumokon egybevágó alakzatok lesznek, és ezek közül bármelyiket megkaphatjuk bármelyikből az $(nT;\ 0)$ vektorral való párhuzamos eltolással, ahol $n$ valamilyen egész szám lesz.

**2. feladat.** A 11.2. ábrán egy $T$ periódusú periodikus függvény részlete látható. Ábrázoljuk ezt a függvényt a $\left[-\frac{3T}{2};\ \frac{5T}{2}\right]$ intervallumon.

*Megoldás.* Megrajzoljuk az ábrázolt alakzat képét a $(T;\ 0)$, $(2T;\ 0)$ és $(-T;\ 0)$ koordinátájú vektorokkal történő párhuzamos eltolással. Az így kapott alakzatoknak az egyesítése lesz a keresett grafikon (11.3. ábra). ◄



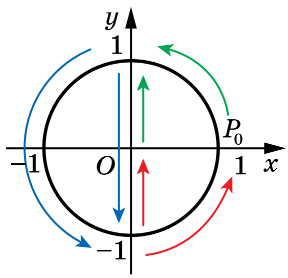

**11.2. ábra**




**11.3. ábra**

Vizsgáljuk meg az $y = \sin x$ függvényt a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon, vagyis e függvény egy teljes periódusán.

A $P_0(1;\ 0)$ pontnak az origó körüli 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig történő elforgatása során a nagyobb szögnek az egységkörön nagyobb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy az $y = \sin x$ függvény a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon növekvő lesz.




**11.4. ábra**

A $P_0(1;\ 0)$ pontnak az origó körüli $\frac{\pi}{2}$-től a $\frac{3\pi}{2}$-ig történő elforgatása során az egységkörön a nagyobb szögnek kisebb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Tehát az $y = \sin x$ függvény a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon csökkenő.

A $P_0(1;\ 0)$ pontnak a $\frac{3\pi}{2}$-től a $2\pi$-ig történő elforgatása során a nagyobb szögnek nagyobb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Tehát az $y = \sin x$ függvény a $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ intervallumon növekvő lesz.

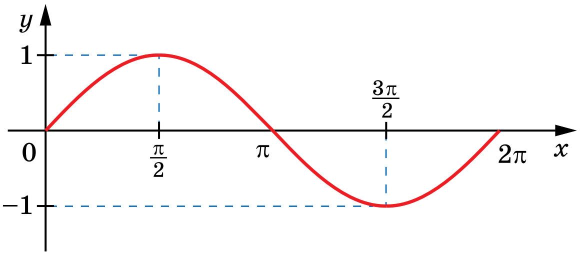
Az $y = \sin x$ függvénynek a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon három zérushelye van: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Ha $x \in (0;\ \pi)$, akkor a $\sin x > 0$; ha $x \in (\pi;\ 2\pi)$, akkor a $\sin x < 0$.

A $[0;\ 2\pi]$ intervallumon az $y = \sin x$ függvény legnagyobb értéke 1, ahol $x = \frac{\pi}{2}$, a legkisebb értéke pedig $-1$, ahol $x = \frac{3\pi}{2}$.

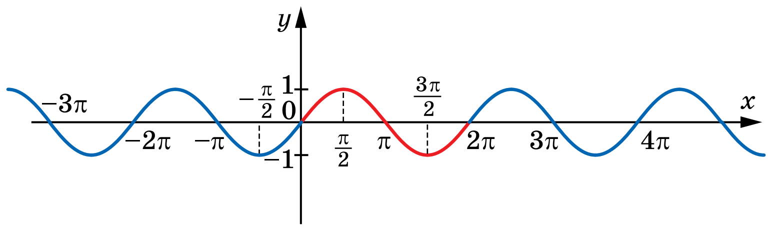
Az $y = \sin x$ függvény a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon felveszi az összes értékét a $[-1;\ 1]$ intervallumnak.

A kapott eredmények lehetőséget adnak arra, hogy ábrázoljuk az $y = \sin x$ függvény grafikonját a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon (11.5. ábra). A grafikont pontosabban is megrajzolhatjuk, ha alkalmazzuk a 3. előzéken lévő trigonometrikus függvények táblázatát.




**11.5. ábra**

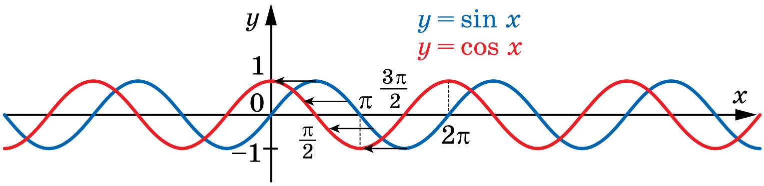
Az $y = \sin x$ függvény grafikonját az egész értelmezési tartományán megkaphatjuk, ha alkalmazzuk a $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolást (11.6. ábra).




**11.6. ábra**

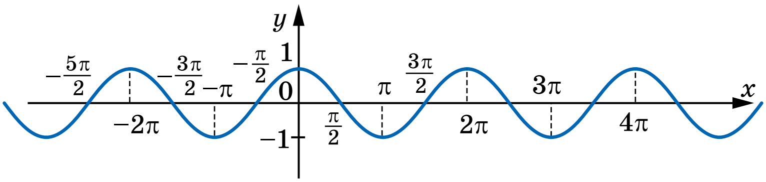
Az $y = \sin x$ függvény grafikonját **szinuszoid**nak vagy **szinuszvonal**nak nevezzük.

Vizsgáljuk meg az $y = \cos x$ függvényt. Ha alkalmazzuk a $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ képletet (lásd a 9.11. gyakorlatot), ekkor érthetővé válik, hogy az $y = \cos x$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = \sin x$ függvény grafikonjának $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolásával (11.7. ábra). Ez azt jelenti, hoz az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvény grafikonjai egybevágó alakzatok lesznek.




**11.7. ábra**

Az $y = \cos x$ függvény grafikonját szintén **szinuszoid**nak nevezzük (11.8. ábra).




**11.8. ábra**

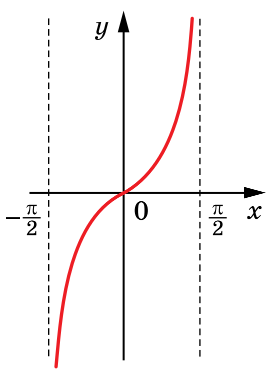
Vizsgáljuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, vagyis e függvény egy teljes periódusán (emlékeztetőül: az $y = \operatorname{tg} x$ függvény a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ pontokban nincs értelmezve).

Be lehet bizonyítani, hogy a tangens $-\frac{\pi}{2}$-től $\frac{\pi}{2}$-ig növekszik. Ez azt jelenti, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon növekvő.

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon egyetlen zérushelye van: $x = 0$.

Ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, akkor a $\operatorname{tg} x < 0$; ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, akkor a $\operatorname{tg} x > 0$.

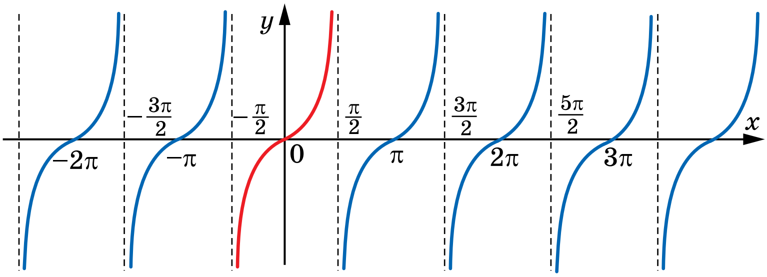
A kapott tulajdonságai alapján megrajzolható az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$




**11.9. ábra**

intervallumon (11.9. ábra). A grafikont pontosabban is ábrázolni lehet, ha alkalmazzuk a 3. előzéken lévő trigonometrikus függvények táblázatát.

Az $y = \text{tg}\, x$ függvény grafikonját az egész értelmezési tartományán megkaphatjuk, ha alkalmazzuk a $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolást (11.10. ábra).




**11.10. ábra**

A 69. oldalon lévő táblázat tartalmazza a trigonometrikus függvények legfontosabb tulajdonságait.

**3. feladat**. Hasonlítsuk össze: 1) $\sin 0{,}7\pi$ és $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ és $\cos 340°$ értékeit!

*Megoldás*. 1) Mivel a $0{,}7\pi$ és a $0{,}71\pi$ számok a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak, amelyen az $y = \sin x$ függvény csökkenő, és $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, ezért $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Mivel a $324°$ és a $340°$ szögek a $[180°;\ 360°]$ intervallumhoz tartoznak, amelyen az $y = \cos x$ függvény növekvő, és $324° < 340°$, ezért $\cos 324° < \cos 340°$. ◀

1. Milyen függvényt nevezünk periodikusnak?
2. Mit nevezünk a függvény fő periódusának?
3. Ábrázold az $y = \sin x$ függvény vázlatos grafikonját, majd fogalmazd meg a tulajdonságait!
4. Ábrázold az $y = \cos x$ függvény vázlatos grafikonját, majd fogalmazd meg a tulajdonságait!
5. Ábrázold az $y = \text{tg}\, x$ függvény vázlatos grafikonját, majd fogalmazd meg a tulajdonságait!

| Tulajdonságok | $y=\sin\ x$ | $y=\cos\ x$ | $y=\mathrm{tg}\ x$ |
|---|---|---|---|
| Értelmezési tartomány | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ |
| Értékkészlet | $[-1;\ 1]$ | $[-1;\ 1]$ | $\mathbb{R}$ |
| Fő periódus | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ |
| Zérushelyek | $\pi n$ | $\frac{\pi}{2}+\pi n$ | $\pi n$ |
| Pozitív előjeltartási intervallum | $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ | $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ |
| Negatív előjeltartási intervallum | $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$ | $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$ |
| Paritás | Páratlan | Páros | Páratlan |
| Növekedési intervallum | $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ | $[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ |
| Csökkenési intervallum | $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$ | $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$ | — |
| Legnagyobb értéke | 1 | 1 | — |
| Legkisebb értéke | –1 | –1 | — |

## GYAKORLATOK

**11.1.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sin 390°$; 3) $\sin(-390°)$; 5) $\cos 300°$;

2) $\operatorname{tg} 780°$; 4) $\operatorname{tg}(-210°)$; 6) $\sin\dfrac{5\pi}{3}$!

**11.2.°** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sin 420°$; 2) $\operatorname{tg}(-315°)$; 3) $\sin 1110°$; 4) $\cos\dfrac{7\pi}{3}$!

**11.3.°** Hozzátartozik-e az $y = \cos x$ függvény grafikonjához a következő pont:

1) $A\left(-\dfrac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\dfrac{9\pi}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C\,(-4\pi; -1)$?

**11.4.°** Átmegy-e az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonján a következő pont:

1) $A\left(-\dfrac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\dfrac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C\,(\pi; 0)$?

**11.5.°** Átmegy-e az $y = \sin x$ függvény grafikonján a következő pont:

1) $A\left(-\dfrac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\,(\pi; -1)$; 3) $C\left(\dfrac{23\pi}{6}; -\dfrac{1}{2}\right)$?

**11.6.°** A $-2\pi$, $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $0$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $2\pi$, $\dfrac{9\pi}{2}$, $6\pi$, $7\pi$ számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

1) az $y = \sin x$ függvény zérushelyei;
2) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \sin x$ függvény a legnagyobb értékét veszi fel;
3) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \sin x$ függvény a legkisebb értékét veszi fel!

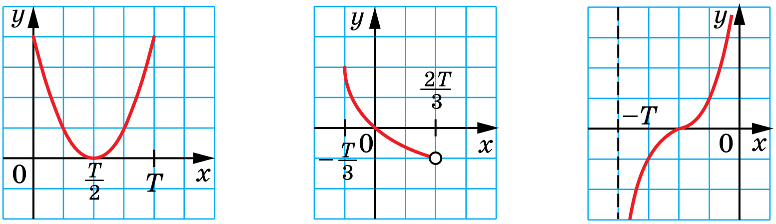
**11.7.°** A $-\dfrac{5\pi}{2}$, $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $0$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{2}$, $5\pi$, $8\pi$ számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

1) $y = \cos x$ függvény zérushelyei;
2) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \cos x$ függvény a legnagyobb értékét veszi fel;
3) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \cos x$ függvény a legkisebb értékét veszi fel!

**11.8.°** A $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $0$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$, $3\pi$ számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

1) az $y = \operatorname{tg} x$ függvény zérushelyei;
2) azokat az értékeket, amelyeknél nincs értelmezve az $y = \operatorname{tg} x$ függvény!

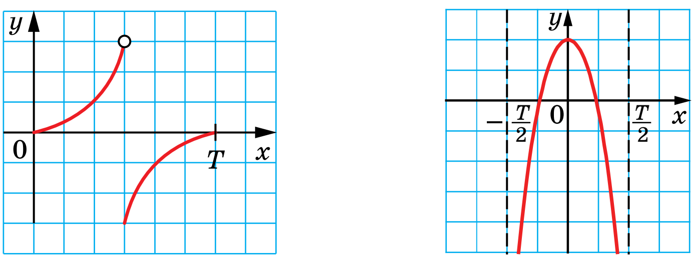
**11.9.**• A 11.11. ábrán egy periodikus függvény látható, melynek periódusa $T$. Ábrázold ezt a függvényt a $[-2T;\ 3T]$ intervallumon!




*a* *b* *c*

**11.11. ábra**

**11.10.**• A 11.12. ábrán egy periodikus függvény látható, melynek periódusa $T$. Ábrázold ezt a függvényt a $[-2T;\ 2T]$ intervallumon!




*a* *b*

**11.12. ábra**

**11.11.**• A következő intervallumok közül melyiken lesz növekvő az $y = \sin x$ függvény:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

**11.12.**• A következő intervallumok közül melyiken lesz csökkenő az $y = \sin x$ függvény:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi;\ 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

**11.13.**• A következő intervallumok közül melyik lesz az $y = \cos x$ függvény fogyási intervalluma:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi;\ 7\pi]$?

**11.14.**$^{\bullet}$ A következő intervallumok közül melyik lesz az $y = \cos x$ függvény növekedési intervalluma:

1) $[-3\pi;\ -2\pi]$; 2) $[0;\ \pi]$; 3) $[-\pi;\ \pi]$; 4) $[3\pi;\ 4\pi]$?

**11.15.**$^{\bullet}$ Hasonlítsd össze a következő értékeket:

1) $\sin 20°$ és $\sin 21°$;
2) $\cos 20°$ és $\cos 21°$;
3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ és $\sin \frac{25\pi}{18}$;
4) $\operatorname{tg}(-38°)$ és $\operatorname{tg}(-42°)$!

**11.16.**$^{\bullet}$ Hasonlítsd össze a következő értékeket:

1) $\cos \frac{\pi}{9}$ és $\cos \frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ és $\sin \frac{17\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg} 100°$ és $\operatorname{tg} 92°$!

**11.17.**$^{\bullet\bullet}$ Bizonyítsd be, hogy a $T$ szám az $f$ függvény periódusa:

1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, $T = 8\pi$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$!

**11.18.**$^{\bullet\bullet}$ Bizonyítsd be, hogy a $\frac{2\pi}{3}$ és $-4\pi$ az $f(x) = \cos 3x$ függvény periódusai!

**11.19.**$^{*}$ Hasonlítsd össze az értékeket:

1) $\sin 58°$ és $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ és $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ és $\sin 70°$!

### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**11.20.** Határozd meg a függvény zérushelyeit:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; 3) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$!

**11.21.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$!

## 12. Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések

Ebben a pontban az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggésekkel fogunk megismerkedni.

Az egységkör bármilyen $P(x;\ y)$ pontjának koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Mivel az $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, ahol az $\alpha$ annak az elforgatásának a szöge, amely során a $P_0(1;\ 0)$ pontból megkapjuk a $P$ pontot, ezért

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Felhívjuk arra a figyelmeteket, hogy az egységkör $P$ pontját szabadon választhatjuk meg, ezért az (1) azonosság bármely $\alpha$ szögre igaz. Ezt az összefüggést a **trigonometria alapazonosságá**nak nevezzük.

A trigonometrikus alapazonosság alkalmazásával meghatározzuk a tangens és a koszinusz közötti összefüggést.

Legyen $\cos\alpha \neq 0$. Ha az (1) egyenlőség mindkét oldalát elosztjuk $\cos^2\alpha$-val, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Innen

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{\mathbf{1} + \mathbf{tg}^2\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\,\alpha}}$$

**1. feladat**. Egyszerűsítsük a kifejezést:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \mathrm{tg}^2\, x$;  2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tg}^2\,\varphi - \sin^2\varphi$!

*Megoldás*. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \mathrm{tg}^2\, x = 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tg}^2\,\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi - \mathrm{tg}^2\,\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi =$

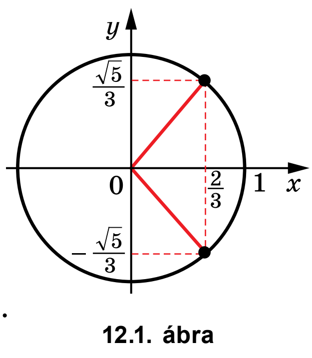
$= \cos^2\varphi$. ◀

**2. feladat**. Adott, hogy $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Számítsuk ki a $\sin\alpha$ értékét!

*Megoldás*. A $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

Innen $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ vagy $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

A feladat megoldását a 12.1. ábra szemlélteti. ◀




**12.1. ábra**

**3. feladat**. Határozzuk meg a $\cos\alpha$ és $\mathrm{tg}\,\alpha$ értékeit, ha $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$ és $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$!

*Megoldás*. Mivel:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Mivel $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, ezért $\cos\alpha < 0$, tehát: $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$. ◄

?

1. Melyik egyenlőséget nevezzük trigonometrikus alapazonosságnak?
2. Milyen azonosság köti össze az azonos argumentumú tangens és koszinusz értékeit?

## GYAKORLATOK

**12.1.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $1 - \cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\beta - 1$;
3) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1$;
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$;
5) $1 - \sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;
6) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$!

**12.2.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$;
2) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)$;
3) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;
4) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}$!

**12.3.•** Létezik-e olyan $\alpha$ szám, melyre egyidejűleg igaz, hogy: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ és $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$?

**12.4.•** Létezik-e olyan $\alpha$ szám, melyre egyidejűleg igaz, hogy: $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ és $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

**12.5.•** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;
2) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;
3) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
4) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$!

**12.6.•** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

4) $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$!

**12.7.•** Határozd meg az $\alpha$ argumentumú trigonometrikus függvények értékeit, ha:

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$ és $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ és $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$!

**12.8.•** Határozd meg az $\alpha$ argumentumú trigonometrikus függvények értékeit, ha:

1) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ és $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ és $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{3}$ és $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$!

**12.9.••** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$!

**12.10.••** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$!

**12.11.••** Határozd meg a $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ értékét, ha $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$!

**12.12.••** Határozd meg az $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$ értékét, ha $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$!

**12.13.••** Határozd meg a $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!

**12.14.••** Határozd meg a $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**12.15.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$, ha $a = 0{,}008$;

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$, ha $a = 0{,}0625$!

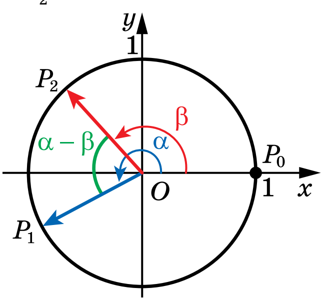
# 13. Addíciós (összegzési) képletek

Addíciós (összegzési) képleteknek nevezzük azokat a képleteket, amelyek a $\cos(\alpha \pm \beta)$, a $\sin(\alpha \pm \beta)$ és a $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)$ értékeit az $\alpha$ és a $\beta$ trigonometrikus függvényein keresztül fejezik ki.

Bebizonyítjuk, hogy $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Legyenek a $P_1$ és $P_2$ pontok olyanok, amelyeket a $P_0\,(1;\,0)$ pontnak az $\alpha$, illetve a $\beta$ szöggel való elforgatásával kapunk.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Ekkor az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ vektorok közötti szög $\alpha - \beta$ lesz (13.1. ábra). A $P_1$ és $P_2$ pontok koordinátái megfelelően $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ és $(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Ekkor az $\overrightarrow{OP_1}$ vektor koordinátái $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, az $\overrightarrow{OP_2}$ vektor koordinátái pedig $(\cos\beta;\ \sin\beta)$ lesznek.




**13.1. ábra**

Kifejezzük az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ vektorok skaláris szorzatát a koordinátáik alapján:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

A vektorok skaláris szorzatának definíciója alapján fel lehet írni, hogy:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Innen megkapjuk a **különbség koszinuszá**nak képletet:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} \qquad (1)$$

Az (1) képlet abban az esetben is igaz lesz, ha az $(\alpha - \beta) \notin [0;\ \pi]$ intervallumhoz.

Bebizonyítjuk az **összeg koszinuszá**nak képletét:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

A $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Az **összeg szinuszá**nak és a **különbség szinuszá**nak képletei a következők:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

Az **összeg tangensé**nek és a **különbség tangensé**nek képletei a következők:

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{tg}\beta}{\mathbf{1}+\mathbf{tg}\alpha\ \mathbf{tg}\beta}} \qquad (3)$$

A (2) azonosság az $\alpha$ és a $\beta$ minden értékére igaz, melyeknél $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

A (3) azonosság az $\alpha$ és a $\beta$ minden értékére igaz, melyeknél-$\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Azokat a képleteket, amelyek a $2\alpha$ argumentumú trigonometrikus függvényeket az $\alpha$ argumentumú trigonometrikus függvényeken keresztül fejezi ki, **a kétszeres szög szögfüggvényei**nek nevezzük.

Az összegzési képletekben:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

alkalmazzuk a $\beta=\alpha$ helyettesítést. A következőket kapjuk:

$$\boxed{\mathbf{cos}\ 2\alpha=\mathbf{cos}^2\alpha-\mathbf{sin}^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{sin}\ 2\alpha=\mathbf{2}\ \mathbf{sin}\,\alpha\ \mathbf{cos}\,\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\ 2\alpha=\frac{\mathbf{2}\,\mathbf{tg}\,\alpha}{\mathbf{1}-\mathbf{tg}^2\alpha}}$$

Ezek **a kétszeres szög szinuszá**nak**, koszinuszá**nak **és tangensé**nek **képletei**.

Mivel $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ és $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ képletbe helyettesítve ezeket, még két képletet kapunk:

$$\boxed{\mathbf{cos}\ 2\alpha=\mathbf{1}-\mathbf{2}\ \mathbf{sin}^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}\ 2\alpha=\mathbf{2}\ \mathbf{cos}^2\alpha-\mathbf{1}}$$

Néha érdemes ezeket a képleteket a következő alakban alkalmazni:

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,$$
$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$$

vagy ilyen alakban:

$$\boxed{\mathbf{sin}^2\alpha=\frac{\mathbf{1}-\mathbf{cos}\ 2\alpha}{\mathbf{2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}^2\alpha=\frac{\mathbf{1}+\mathbf{cos}\ 2\alpha}{\mathbf{2}}}$$

A két utolsó képletet szokták még **hatványcsökkentő képletek**nek is nevezni.

**1. feladat.** Egyszerűsítsük a kifejezést:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$!

*Megoldás.* 1) Az összeg és a különbség szinuszának képleteit alkalmazva a következőt kapjuk: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2) Az adott kifejezést helyettesítsük az $\alpha+45°$ és a $\alpha-45°$ argumentumok különbségének szinuszával. A következőt kapjuk:

$$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=$$
$$=\sin((\alpha+45°)-(\alpha-45°))=\sin(\alpha+45°-\alpha+45°)=\sin 90°=1.$$ ◀

**2. feladat.** Bizonyítsuk be az azonosságot:

$$\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}!$$

*Megoldás.* $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$ ◀

**3. feladat.** Határozzuk meg a kifejezés értékét: $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}$!

*Megoldás.* Alkalmazzuk a 20° és 25° összeg tangensének képletét, a következőt kapjuk:

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,(20°+25°)}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,45°}=1.$$ ◀

**4. feladat.** Egyszerűsítsük a kifejezést: 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$; 2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$!

*Megoldás*

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha.$

2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta.$ ◀

**1.** Írd fel a képletét:

1) a különbség koszinuszának;
2) az összeg koszinuszának;
3) az összeg szinuszának;
4) a különbség szinuszának;
5) az összeg tangensének;
6) a különbség tangensének!

**2.** Írd fel a kétszeres szög koszinuszának, szinuszának és tangensének képletét!

**3.** Írd fel a hatványcsökkentő képleteket!

## GYAKORLATOK

**13.1.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60°-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$!

**13.2.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$!

**13.3.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\sin 4\alpha$;
2) $\cos 17°\cos 43°-\sin 17°\sin 43°$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin 53°\cos 7°-\cos 53°\sin(-7°)$;
5) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
6) $\frac{\sin 20°\cos 5°-\cos 20°\sin 5°}{\cos 10°\cos 5°-\sin 10°\sin 5°}$!

**13.4.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\cos 6\alpha\cos 2\alpha-\sin 6\alpha\sin 2\alpha$;
2) $\sin 12°\cos 18°+\sin 18°\cos 12°$;
3) $\sin(-15°)\cos 75°+\cos 15°\sin 75°$;
4) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$!

**13.5.°** Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ értékét!

**13.6.°** Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ értékét!

**13.7.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°}$; 2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 33°}{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 33°}$!

**13.8.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 24° + \operatorname{tg} 36°}{1 - \operatorname{tg} 24° \operatorname{tg} 36°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$!

**13.9.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$;

3) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;

4) $\dfrac{\sin 50°}{2 \cos 25°}$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$;

6) $1 - 2\sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$;

7) $\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} + \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} - \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)$;

8) $\dfrac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$!

**13.10.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\sin 80°}{\cos 40°}$;

2) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;

3) $\cos 6\alpha + 2\sin^2 3\alpha$;

4) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$;

5) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;

6) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$;

7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

8) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$!

**13.11.°** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $2 \sin 75° \cos 75°$;

2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $1 - 2\sin^2 \dfrac{\pi}{12}$;

4) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 165°}{1 - \operatorname{tg}^2 165°}$!

**13.12.°** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$; 2) $2 \sin \dfrac{3\pi}{8} \cos \dfrac{3\pi}{8}$; 3) $1 - 2\cos^2 \dfrac{\pi}{12}$!

**13.13.•** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\cos(45° + \alpha)}{2\sin(45° + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$!

**13.14.**$^{\bullet}$ Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$!

**13.15.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\cos(\alpha+\beta)$ értékét, ha $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ és $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$!

**13.16.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\sin(\alpha-\beta)$ értékét, ha $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ és $\cos\beta=\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$!

**13.17.**$^{\bullet}$ Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ értékét!

**13.18.**$^{\bullet}$ Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$ értékét!

**13.19.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\sin 2\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha=-0{,}6$ és $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$!

**13.20.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\operatorname{tg}2\alpha$ értékét, ha $\operatorname{tg}\alpha=4$!

**13.21.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\cos 2\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$!

**13.22.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\sin 15^\circ$ értékét!

**13.23.**$^{\bullet}$ Határozd meg a $\cos 75^\circ$ értékét!

**13.24.**$^{\bullet}$ Bizonyítsd be az azonosságot: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$!

**13.25.**$^{\bullet}$ Egyszerűsítsd a $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$ kifejezést!

**13.26.**$^{\bullet\bullet}$ Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$!

**13.27.**$^{\bullet\bullet}$ Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$!

**13.28.**$^{\bullet\bullet}$ Határozd meg a $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$ kifejezés legnagyobb értékét!

**13.29.**$^{\bullet\bullet}$ Határozd meg a $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$ kifejezés legnagyobb értékét!

**13.30.**$^{*}$ Határozd meg a $\sin 2\alpha$ értékét, ha $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$!

**13.31.**$^{*}$ Határozd meg a $\sin\alpha$ értékét, ha $\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{2}$!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**13.32.** Az $x$ mely értékeinél lesznek a $4x+5$, a $7x-1$ és az $x^2+2$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg a sorozatnak ezeket a tagjait!

**13.33.** Az $x$ mely értékeinél lesznek az $x-1$, az $1-2x$ és az $x+7$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg a sorozatnak ezeket a tagjait!

# 14. Visszavezetési képletek

A trigonometrikus függvények periodikussága lehetőséget ad arra is, hogy visszavezessük azok értékeit arra az esetre, amikor az argumentum a $[0;\ 2\pi]$ intervallumhoz tartozik. Ebben a pontban csak azokat a képleteket vizsgáljuk, amelyek a $\left[\mathbf{0};\ \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó szögek értékei alapján történő számításokra korlátozódnak.

A $[0;\ 2\pi]$ intervallumhoz tartozó valamennyi szög megadható a $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ vagy a $\pi\pm\alpha$ vagy a $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ alakban, ahol $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Például: $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

A $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ alakban megadott szögek szinusz, illetve koszinusz értékeinek kiszámítását, az $\alpha$ szög szinuszának, illetve koszinuszának kiszámítására vezethetjük vissza. Például:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Az addíciós képletek alkalmazásával hasonlóan kapjuk meg az alábbi képleteket:

$$\boxed{\begin{array}{lll}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\end{array}}$$

Ezek a képletek **a szinuszra vonatkozó visszavezetés képletei** lesznek.

A következő képletek a **koszinuszra vonatkozó visszavezetés képletei:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

A képletek alaposabb vizsgálata során olyan törvényszerűségeket vehetünk észre, amelyek megkönnyítik e képletek megjegyzését.

Ahhoz, hogy bármelyiket felírjuk, a következő szabályokat kell alkalmazni.

**1.** ***Az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik a bal oldal előjelével, ha*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

**2.** ***Ha a bal oldalon az argumentum*** $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ***vagy*** $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ ***alakú, akkor a szinusz nevét koszinuszra, a koszinuszét pedig szinuszra kell cserélni. Ha az argumentum*** $\pi\pm\alpha$ ***alakú, akkor a függvény neve nem változik***.

A $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ kifejezés példáján bemutatjuk, hogyan kell alkalmazni ezeket a szabályokat.

Feltételezve, hogy a $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, arra a következtetésre jutunk, hogy $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ a III. koordinátanegyedbe esik. Ezért $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. Az első szabály szerint a jobb oldal előjele – lesz.

Mivel az argumentum $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ alakú, ezért a második szabály szerint a szinuszt koszinuszra kell cserélni.

Tehát $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

**1. feladat**. Egyszerűsítsük a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ kifejezést!

*Megoldás.*

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha. \blacktriangleleft$$

**2. feladat.** Vezessük vissza a hegyesszög szögfüggvényeire az alábbi szögfüggvényeket: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$.

*Megoldás.* 1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$. ◄

Fogalmazd meg azokat a szabályokat, amelyek segítenek a visszavezetési képletek alkalmazásakor!

## GYAKORLATOK

**14.1.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 3) $\cos(-\alpha+270°)$; 5) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;

2) $\sin(\pi-\alpha)$; 4) $\cos(\alpha-180°)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$!

**14.2.°** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\sin(180°+\alpha)$;

2) $\cos(\pi-\alpha)$; 4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$!

**14.3.°** Helyettesítsd a trigonometrikus függvényeket hegyesszögű függvények értékével:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$!

**14.4.°** Helyettesítsd a trigonometrikus függvényeket hegyesszögű függvények értékével:

1) $\sin(-305°)$; 2) $\sin\frac{14\pi}{15}$; 3) $\cos(-0{,}7\pi)$; 4) $\cos\frac{6\pi}{5}$!

**14.5.°** Számítsd ki a trigonometrikus függvény értékét:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$!

**14.6.°** Számítsd ki a trigonometrikus függvény értékét:

1) $\cos(-150°)$; 2) $\cos 210°$; 3) $\sin 315°$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$!

**14.7.•** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\frac{\sin^2 315° \cos 300° + \operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$; 2) $\frac{\cos 66° \cos 6° + \cos 84° \cos 24°}{\cos 65° \cos 5° + \cos 85° \cos 25°}$!

**14.8.•** Számítsd ki a kifejezés értékét: $\frac{\cos 64° \cos 4° - \cos 86° \cos 26°}{\cos 71° \cos 41° - \cos 49° \cos 19°}$!

**14.9.••** Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\cos(\pi - \beta)$!

**14.10.••** Bizonyítsd be az azonosságot: $\frac{\sin(\pi - \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos\alpha$!

**14.11.*** Számítsd ki: $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359° + \sin 360°$!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**14.12.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$!

**14.13.** A változó mely értékeinél értelmezhető a kifejezés:

1) $\frac{x + 4}{x^2 - 4}$;

2) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$;

3) $\frac{9}{\sqrt{3x + 6}}$;

4) $\sqrt{7x - 42} + \frac{1}{x^2 - 8x}$;

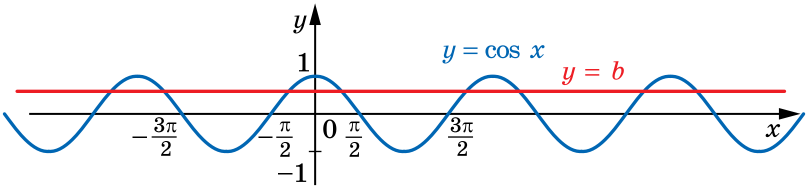
5) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;

6) $\frac{x + 2}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8 - 4x}}$?

# 15. A $\cos x = b$ alakú egyenlet

Mivel az $y = \cos x$ függvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum, ezért $|b| > 1$ esetén a $\cos x = b$ egyenletnek nincs megoldása. Viszont bármilyen $b$ esetére, ha $|b| \leqslant 1$, ennek az egyenletnek számtalan megoldása van.

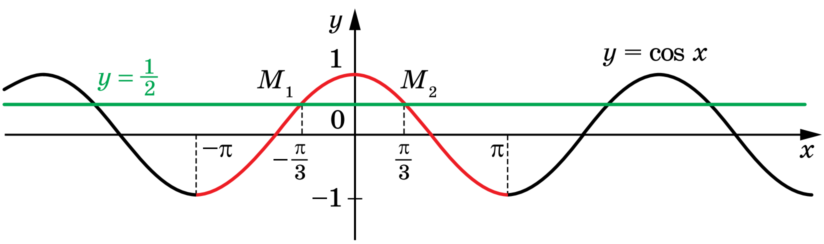
A fenti kijelentést könnyen meg lehet érteni, ha a grafikus megoldást vizsgáljuk: az $y = \cos x$ és az $y = b$, ha $|b| \leqslant 1$ függvények grafikonjainak számtalan közös pontja lesz (15.1. ábra).




**15.1. ábra**

A $\cos x = b$ egyenlet megoldásának megértését elősegíti egy konkrét eset vizsgálata. Oldjuk meg például a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet.

A 15.2. ábrán az $y = \cos x$ és az $y = \frac{1}{2}$ függvények grafikonjai láthatók.




**15.2. ábra**

Vizsgáljuk meg az $y = \cos x$ függvényt a $[-\pi; \pi]$ intervallumon (a 15.2. ábrán lévő görbe piros része), vagyis egy olyan intervallumon, melynek hossza egyenlő az adott függvény periódusával. Az $y = \frac{1}{2}$ egyenes az $y = \cos x$ függvény grafikonját a $[-\pi; \pi]$ intervallumon az $M_1$ és $M_2$ pontokban metszi, melyek abszcisszái ellentett számok lesznek. Tehát a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $[-\pi; \pi]$ intervallumon két gyöke lesz. Mivel $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ezért az egyenlet gyökei a $-\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\pi}{3}$ számok lesznek.

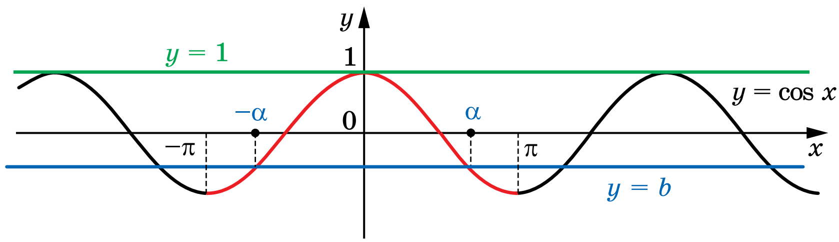
Az $y = \cos x$ periodikus függvény, melynek periódusa $2\pi$. Ezért minden más gyöke a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $-\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\pi}{3}$ számoktól $2\pi n$-nel fog különbözni, ha $n \in \mathbb{Z}$.

Tehát az adott egyenlet gyökeit a következőképpen írhatjuk fel: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ és $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, ha $n \in \mathbb{Z}$.

A fenti képletek összevont képlet alakjában így írhatók fel:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Térjünk vissza az eredeti $\cos x = b$ egyenlethez, ahol $|b| \leqslant 1$. A 15.3. ábrán látható, hogy ennek az egyenletnek a $[-\pi; \pi]$ intervallumon két megoldása lesz, az $\alpha$ és a $-\alpha$, ahol $\alpha \in [0; \pi]$ (ha $b = 1$, akkor ezek egybeesnek és nullával lesznek egyenlők).




**15.3. ábra**

Ekkor a $\cos x = b$ egyenletnek minden gyöke a következő alakú lesz:

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ez a képlet azt mutatja, hogy az $\alpha$ gyöknek különleges szerepe van: ezt ismerve, fel lehet írni a $\cos x = b$ egyenlet összes gyökét. Az $\alpha$ gyöknek egy speciális neve van, az arkusz koszinusz.

**Definíció. A $b$ szám arkusz koszinuszának, ahol $|b| \leqslant 1$, azt a $[0; \pi]$ intervallum vett $\alpha$ számot nevezzük, melynek koszinuszértéke $b$-vel egyenlő.**

A $b$ szám arkusz koszinuszát arccos $b$-vel jelöljük. Például

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ és $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, mivel $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$ és $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Általánosítva, **$\arccos b = \alpha$, ha $\alpha \in [0; \pi]$ és $\cos\alpha = b$.**

Most már $\cos\alpha = b$, $|b| \leqslant 1$ egyenlet gyökeit a következő alakban írhatjuk fel:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \pm \arccos b + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}}} \tag{1}$$

Megjegyezzük, hogy a $\cos\alpha = b$ egyenlet egyedi eseteit (ha $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) már korábban vizsgáltuk (lásd 9. pontot). Idézzük fel a kapott eredményt:

| $\cos x = 1$ | $\cos x = 0$ | $\cos x = -1$ |
|---|---|---|
| $x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ | $x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ |

Ugyanezeket az eredményeket megkaphatjuk, ha alkalmazzuk az (1) képletet.

A következő egyenlőség is teljesül:

$$\mathbf{arccos}\ (-b) = \pi - \mathbf{arccos}\ b.$$

**F e l a d a t .** Oldjuk meg az egyenletet:

1) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$!

*M e g o l d á s .* 1) Alkalmazzuk az (1) képletet, majd felírjuk:

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ezekből megkapjuk: $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

*F e l e l e t :* $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in \mathbb{Z}$.

2) $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$;

$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n$.

*F e l e l e t :* $\pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

3) Átírjuk az adott egyenletet a következő alakba: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Innen:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

*F e l e l e t :* $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7},\ \ n \in \mathbb{Z}$. ◀

**1.** A $b$ mely értékeinél lesz megoldása a $\cos x = b$ egyenletnek?
**2.** Hány megoldása lesz a $\cos x = b$ egyenletnek, ha $|b| \leqslant 1$?
**3.** Mit nevezünk a $b$ szám arkusz koszinuszának?
**4.** Milyen alakban írható fel a $\cos x = b$ egyenlet gyökeinek képlete, ha $|b| \leqslant 1$?
**5.** Milyen alakban írhatók fel a $\cos x = 1$, $\cos x = 0$, és $\cos x = -1$ egyenletek gyökeinek képlete?

## GYAKORLATOK

**15.1.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$!

**15.2.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$!

**15.3.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;

2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$!

**15.4.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$!

**15.5.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$!

**15.6.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$!

**15.7.•** Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}!$$

**15.8.**$^{\bullet}$ Határozd meg az egyenlet valamilyen negatív gyökét:

$$\cos\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}!$$

**15.9.**$^{\bullet\bullet}$ A $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletnek hány gyöke tartozik a $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ intervallumhoz?

**15.10.**$^{\bullet\bullet}$ Határozd meg a $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$ egyenlet összes olyan gyökét, melyek kielégítik a $-\frac{\pi}{6}<x<4\pi$ egyenlőtlenséget!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**15.11.** Egyszerűsítsd a kifejezést: $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}!$

**15.12.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}!$

# 16. A $\sin x = b$ és $\operatorname{tg} x = b$ egyenletek

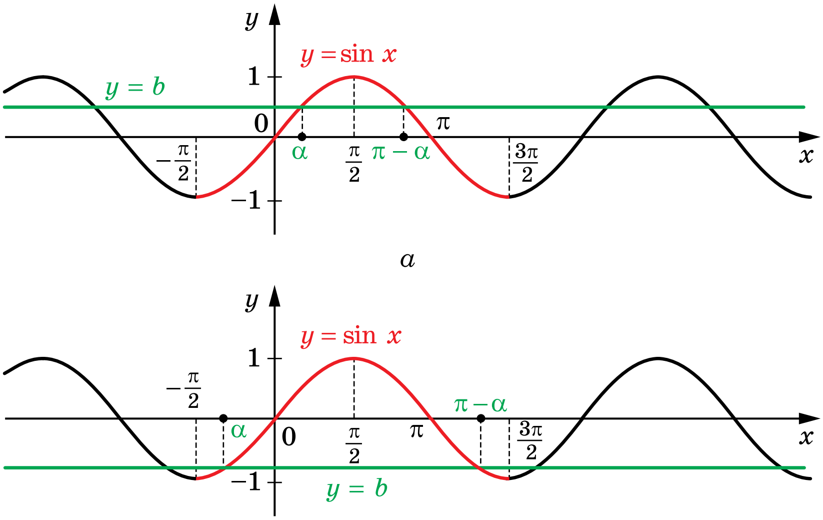
Mivel az $y=\sin x$ függvény értékkészlete a $[-1;\ 1]$ intervallum, ezért $|\ b\ |>1$ esetén a $\sin x=b$ egyenletnek nincs megoldása. Ezzel együtt bármilyen $b$ estén, ha $|b|\leqslant 1$, ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Megjegyezzük, hogy a $\sin x=b$ egyenlet egyedi eseteit (ha $b=1$, $b=0$, $b=-1$) már vizsgáltuk (lásd a 9. pontot). Idézzük fel a kapott eredményeket!

| $\sin x=1$ | $\sin x=0$ | $\sin x=-1$ |
|---|---|---|
| $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ | $x=\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ | $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ |

Ahhoz, hogy megkapjuk a $\sin x=b$, ha $|b|\leqslant 1$ egyenlet általános megoldásának képletét, nézzük a függvény grafikus értelmezését.

A 16.1. ábrán az $y = \sin x$ és az $y = b$, ha $|b| \leqslant 1$ függvények grafikonjai láthatók.




*b*

**16.1. ábra**

Vizsgáljuk meg az $y = \sin x$ függvény grafikonját a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon (a 16.1. ábrán lévő görbe piros színnel jelölt része), vagyis egy olyan intervallumon, amely ennek a függvénynek a periódusa. Ezen az intervallumon a $\sin x = b$ egyenletnek két gyöke van, az $\alpha$ és a $\pi - \alpha$, ahol $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (a $b = 1$ esetén ezek a gyökök egybeesnek és $\frac{\pi}{2}$-vel lesznek egyenlők).

Mivel az $y = \sin x$ függvény periodikus és $2\pi$ a periódusa, ezért a $\sin x = b$ egyenlet minden gyöke $2\pi n$-nel különbözik egymástól, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Így a $\sin x = b$ egyenlet gyökeit a következőképpen lehet megadni:

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ és } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A fenti képletek összevont képlet alakjában így írhatók fel:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Valóban, ha $k$ páros szám, vagyis $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor az $x = \alpha + 2\pi n$ képletet kapjuk, ha $k$ páratlan, vagyis $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor az $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$ képletet kapjuk.

Az (1) képlet azt mutatja, hogy az $\alpha$ gyöknek fontos szerepe van: ennek ismeretében meg lehet határozni a $\sin x = b$ egyenlet többi gyökét is. Az $\alpha$ gyöknek speciális neve van, az arkusz szinusz.

**Definíció. A $b$ szám arkusz szinuszának, ahol $|b| \leqslant 1$, azt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vett $\alpha$ számot nevezzük, amelynek szinuszértéke $b$-vel egyenlő.**

A $b$ szám arkusz szinuszát $\arcsin b$-vel jelöljük.

Például $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, mivel $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Általánosítva, **$\arcsin b = \alpha$, ha $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\alpha = b$.**

Most már a $\sin x = b$, ha $|b| \leqslant 1$ egyenlet gyökeinek képletét a következő alakban írhatjuk fel:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Igaz a következő egyenlőség:

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

**1. feladat.** Oldjuk meg az egyenletet:

1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;  2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

*Megoldás.* Alkalmazzuk a (2) képletet, majd felírjuk:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Továbbá:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

*Felelet*: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

2) Átírjuk az adott egyenletet a következőképpen:

$-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ekkor $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

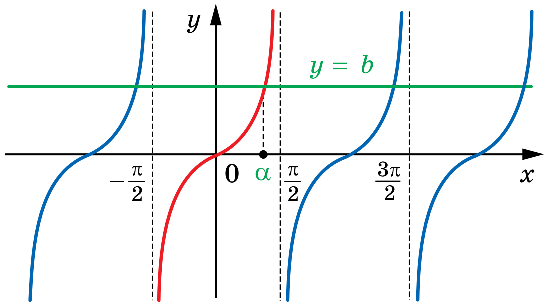
$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

*Felelet*: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

Mivel az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz, ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen $b$ esetén lesz megoldása.

Ahhoz, hogy megkapjuk a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képletét, nézzük a függvény grafikus értelmezését.

A 16.2. ábrán az $y = \operatorname{tg} x$ és az $y = b$ függvények grafikonjai láthatók.




**16.2. ábra**

Vizsgáljuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon (a 16.2. ábrán lévő görbe piros színnel jelölt része), vagyis a függvény periódusával egyenlő szakaszon. Ezen az intervallumon a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen $b$ esetében csak egy $\alpha$ megoldása lesz.

Mivel az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek a periódusa $\pi$, ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet minden gyöke $\pi n$-nel, ahol $n \in \mathbb{Z}$ különbözik az adott gyöktől.

Ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képlete a következő képlettel adható meg:

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A kapott képlet alapján megállapíthatjuk, hogy az $\alpha$ gyöknek különleges szerepe van: ennek ismeretében meg lehet határozni a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet többi gyökét is. Az $\alpha$ gyöknek speciális neve van, az arkusz tangens.

**Definíció. A $b$ szám arkusz tangensének azt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon vett $\alpha$ számot nevezzük, melynek tangense $b$-vel egyenlő.**

A $b$ szám arkusz tangensét az arctg $b$-vel jelöljük.

Például $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, mivel $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Általánosítva, **arctg** $\boldsymbol{b} = \alpha$, ***ha*** $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ***és*** **tg** $\alpha = \boldsymbol{b}$.

Most már felírhatjuk a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képletét:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}}$$

A következő egyenlőség is igaz:

$$\boldsymbol{\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b.}$$

**2. feladat.** Oldjuk meg az egyenletet: $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$!

*Megoldás.* $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

*Felelet:* $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ◀

1. A $b$ mely értékénél lesznek gyökei a $\sin x = b$ egyenletnek?
2. Mit nevezünk arcsin $b$-nek?
3. Írd fel a $\sin x = b$, ahol $|b| \leqslant 1$ egyenlet gyökeinek képletét!
4. Írd fel a $\sin x = 1$; $\sin x = 0$; $\sin x = -1$ egyenletek gyökeinek képleteit!
5. A $b$ mely értékénél lesznek gyökei a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek?
6. Mit nevezünk arctg $b$-nek?
7. Írd fel a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képletét!

## GYAKORLATOK

**16.1.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$!

**16.2.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$!

**16.3.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x = 1$; 3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$!

**16.4.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin\frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$!

**16.5.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = 5$!

**16.6.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$!

**16.7.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$!

**16.8.°** Oldd meg az egyenletet: $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x = 0$!

**16.9.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$!

**16.10.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$!

**16.11.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$!

**16.12.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$!

**16.13.•** Határozd meg az egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}!$$

**16.14.•** Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1!$$

**16.15.**•• Határozd meg a $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ egyenletnek azokat a gyökeit, amelyek a $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak!

**16.16.**•• A $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlet gyökei közül, hány lesz eleme a $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumnak?

**16.17.**•• A $\operatorname{tg} 4x=1$ egyenlet gyökei közül, hány lesz eleme a $[0; \pi]$ intervallumnak?

**16.18.**•• Határozd meg a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ egyenlet gyökeinek összegét, amelyek a $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**16.19.** Oldd meg az egyenletet:

1) $x-\sqrt{x-1}=3$;
2) $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$;
3) $\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x-5}=2x+1$;
4) $\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$!

# 17. Algebrai egyenletekké alakítható trigonometrikus egyenletek

A 15. és 16. pontokban olyan képleteket kaptunk, melyek segítségével megoldhatók a $\cos x=a$, $\sin x=a$, $\operatorname{tg} x=a$ alakú egyenletek. Ezeket **egyszerű trigonometrikus egyenletek**nek nevezzük. Különböző módszerek alkalmazásával sok összetett trigonometrikus egyenlet átalakítható egyszerű trigonometrikus egyenletekké.

**1. feladat.** Oldjuk meg a $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$ egyenletet!

*Megoldás.* Hajtsuk végre a $\cos x=t$ helyettesítést. Ekkor az adott egyenlet átalakul $2t^2-5t+2=0$ alakú egyenletté. Innen $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Mivel $|\cos x|\leqslant 1$, ezért a $\cos x=2$ egyenletnek nincsenek gyökei. Tehát az eredeti egyenlet egyenértékű a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenlettel.

Végül a következőt kapjuk: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

*Felelet*: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

**2. feladat.** Oldjuk meg a $\sin x - 3\cos 2x = 2$ egyenletet!

*Megoldás.* A $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ képlet alkalmazásával átalakítjuk az eredeti egyenletet:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Legyen $\sin x = t$. A következő másodfokú egyenletet kapjuk: $6t^2 + t - 5 = 0$. Innen $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Tehát az adott egyenlet a következő egyenletekkel lesz egyenértékű:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Ebből: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

*Felelet*: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

**3. feladat.** Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$ egyenletet!

*Megoldás.* Mivel az $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, ezért az adott egyenletet át lehet alakítani ilyen alakúvá:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Innen $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Legyen $\operatorname{tg} x = t$. Ebből: $t^2 + t - 2 = 0$. Akkor $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Tehát az adott egyenlet a következő egyenletekkel lesz egyenértékű:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{array}\right.$$

Ebből: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

*Felelet*: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$ ◄

## GYAKORLATOK

**17.1.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2\sin 3x - 3 = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$!

**17.2.°** Oldd meg az egyenletet:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3\cos^2 \dfrac{x}{4} + 5\cos \dfrac{x}{4} - 2 = 0$!

**17.3.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
3) $4\cos 2x - \sin 2x = 0$!

**17.4.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
3) $\cos 4x - 3\sin 4x = 0$!

**17.5.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos \dfrac{2x}{3} - 5\cos \dfrac{x}{3} - 2 = 0$;
7) $\cos \dfrac{x}{2} + \cos x = 0$;
8) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$!

**17.6.•** Oldd meg az egyenletet:

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5\sin \dfrac{x}{6} - \cos \dfrac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin \dfrac{x}{2} = 0$!

**17.7.••** Oldd meg az egyenletet:

1) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
2) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$!

**17.8.**•• Oldd meg az egyenletet:

1) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 3 = \dfrac{3}{\cos^2 x}$!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**17.9.** Hasonlítsd össze a számokat:

1) $\sqrt[5]{7}$ és $\sqrt[10]{47}$; 2) $\sqrt{2}$ és $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 3) $\sqrt[3]{15}$ és $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{25}$ és $\sqrt[3]{5}$!

**17.10.** Oldd meg az egyenletet:

1) $6x^3 - 24x = 0$; 3) $x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0$;
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$!

## LÉGY TE IS OSZTROHRADSZKIJ!

Az ismert ukrán matematikus, Mihajlo Vasziljovics Osztrohradszkij Pasenyivka faluban született Poltava megyében. 1816–1820 között a harkivi egyetemen tanult, aztán Franciaországban folytatta matematikai tanulmányait. A francia fővárosban a matematika olyan korifeusainak az előadásaira járt, mint Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Siméon Denis Poisson (1781–1840), Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

Hatalmas tudományos örökséget hagyott maga után Mihajlo Osztrohradszkij. Ezek között nagy jelentősége van a trigonometrikus sorok és hullámok vizsgálatának. Sok fontos tétel ma is Osztrohradszkij nevét viseli.

A tudományos munkák mellett a kiváló tudós sok tankönyvet is írt az ifjúság számára. Ezek között a legismertebb a *Trigonometria program és jegyzet* című műve. A trigonometria oktatásának módszertanát annyira fontosnak vélte, hogy erről tartotta akadémiai székfoglalóját is.

Osztrohradszkij tudományos teljesítménye olyan jelentős volt, hogy azokban az időkben a fiatalokat *Légy te is Osztrohradszkij!* útravalóval küldték tanulni. Ez a jókívánság ma is nagyon aktuális, ezért:

*Légy te is Osztrohradszkij!*

**Mihajlo Vasziljovics Osztrohradszkij**
(1801–1862)

# A 2. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

## A szög ívmértéke

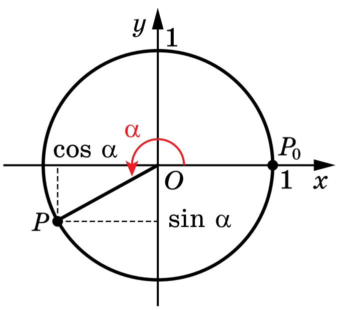
Az egy radián mértékű szögnek azt a középponti szöget nevezzük, amely egy olyan ívre támaszkodik, melynek hossza a kör sugarával egyenlő.

A szög ívmértéke (radián) és fokmértéke (fok) közötti összefüggés:

$$1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \quad 1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right)\text{rad}.$$

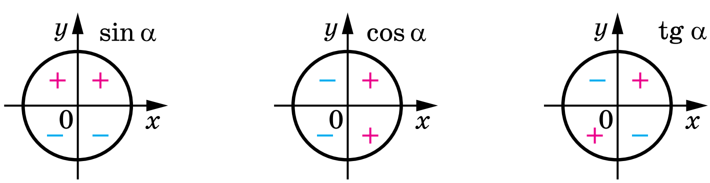
## Az elforgatási szög koszinusza, szinusza és tangense

Az $\alpha$ elforgatási szög koszinuszának (szinuszának) az egységkör azon $P(x;\ y)$ pontjának $x$ abszcisszáját ($y$ ordinátáját) nevezzük, melyet a $P_0(1;\ 0)$ pontnak az origó körüli $\alpha$ szöggel történő elforgatása után kapunk.




Az $\alpha$ elforgatási szög tangensének a szög szinuszának és koszinuszának arányát nevezzük: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

## A trigonometrikus függvények előjelei



## Periodikus függvények

Az $f$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik egy olyan $T \neq 0$ szám, hogy az $f$ függvény értelmezési tartományának bármely $x$ értére teljesülnek a következő egyenlőségek: $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. A $T$ számot az $f$ függvény periódusának nevezzük.

Ha az $f$ függvénynek az összes periódusa között létezik legkisebb pozitív periódus, akkor ezt, az $f$ függvény fő periódusának nevezzük.

## Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$

$1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}.$

## Addíciós (összegzési) képletek

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta;$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta;$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta;$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta;$

$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\beta};$

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\beta}.$

## Visszavezetési képletek

Ahhoz, hogy felírjuk bármelyik visszavezetési képletet, a következő szabályokat kell alkalmazni:

1) az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik a bal oldal előjelével, ha $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;
2) ha a bal oldalon az argumentum $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ vagy $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$ alakú, akkor a szinusz nevét koszinuszra, a koszinuszét pedig szinuszra kell cserélni. Ha a jobb oldalon az argumentum $\pi \pm \alpha$ alakú, akkor a függvény nevét nem kell változtatni.

### A kétszeres argumentumú trigonometrikus függvények képletei

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

### Az arkusz koszinusz, arkusz szinusz és arkusz tangens

A $b$ szám arkusz koszinuszának, ahol $|b| \leqslant 1$, azt a $[0; \pi]$ intervallumon vett $\alpha$ számot nevezzük, melynek koszinuszértéke $b$-vel egyenlő.

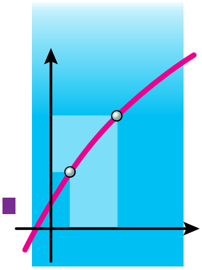
A $b$ szám arkusz szinuszának, ahol $|b| \leqslant 1$, azt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vett $\alpha$ számot nevezzük, amelynek szinuszértéke $b$-vel egyenlő.

A $b$ szám arkusz tangensének azt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon vett $\alpha$ számot nevezzük, melynek tangense $b$-vel egyenlő.

### Az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása

| Egyenlet | Az egyenlet gyökeinek képlete |
|---|---|
| $\cos x = b, \quad |b| \leqslant 1$ | $x = \pm\arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ |
| $\sin x = b, \quad |b| \leqslant 1$ | $x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{tg} x = b$ | $x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ |

# A DERIVÁLT ÉS ALKALMAZÁSA 3. §.



Ebben a paragrafusban megismerkedtek a függvény deriváltjának fogalmával; megtanuljátok alkalmazni a deriváltat a függvények vizsgálata, illetve a függvénygrafikon megrajzolása során.

## 18. A pillanatnyi sebességről és a függvénygrafikon érintőjéről szóló feladatok

Ha a függvény egy reális folyamat matematikai modellje, akkor gyakran válik szükségessé az adott függvény két értéke közötti különbségének a meghatározása. Jelöljük például $f(t)$-vel, illetve $f(t_0)$-val a $t_0$ időponttól $t$-ig felhalmozódott bankbetét[1] összegét. Akkor az $f(t) - f(t_0)$ különbség, ha $t > t_0$, azt a hasznot mutatja, melyre a betét tulajdonosa tesz szert $t - t_0$ idő alatt.

Vizsgáljuk meg az $y = f(x)$ függvényt. Legyen $x_0$ az $f$ függvény értelmezési tartományának egy rögzített pontja.

Ha az $x$ az $f$ függvény értelmezési tartományának egy olyan pontja, hogy $x \neq x_0$, akkor az $x - x_0$ különbséget az **argumentum $x_0$ pontbeli növekményé**nek nevezzük, és $\Delta x$-szel jelöljük (így olvassuk: *delta iksz*)[2]. Adott, hogy

$$\Delta x = x - x_0.$$

Innen

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Azt mondjuk, hogy az argumentum **kapott egy $\Delta x$ növekményt az $x_0$ pontban**.

Megjegyezzük, hogy az argumentum növekménye lehet pozitív és negatív is: ha $x > x_0$, akkor $\Delta x > 0$; ha $x < x_0$, akkor $\Delta x < 0$.

Ha az argumentum az $x_0$ pontban kap egy $\Delta x$ növekményt, akkor az $f$ függvény értéke a következő mennyiséggel fog megváltozni:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Ezt a különbséget az ***f* függvény $x_0$ pontbeli növekményének** nevezzük és $\Delta f$-fel jelöljük (így olvassuk: *delta ef*).

Ezt kaptuk:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ vagy } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

---

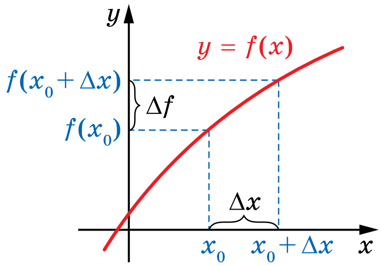
[1] Bankbetét – az a pénzösszeg, amelyet a betétes átad a banknak megőrzésre, és a bank erre bizonyos kamatot fizet a betétesnek.

[2] Az $f$ függvény $x_0$ pontbeli növekményéről itt és a későbbiekben is feltételezzük, hogy bármilyen $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ alakú intervallumon az $f$ függvény értelmezési tartományában az $x_0$ ponton kívül más pontok is lesznek.

Az $y = f(x)$ függvény növekményét $\Delta y$-nak is szokás jelölni, ekkor

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ vagy } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Az argumentum $x_0$ pontjának $\Delta x$ növekményét, valamint az ennek megfelelő függvény $\Delta f$ növekményét a 18.1. ábra szemlélteti.




**18.1. ábra**

Megjegyezzük, hogy egy rögzített $x_0$ pont esetén az $f$ függvény $x_0$ pontbeli növekménye a $\Delta x$ argumentumú függvény lesz.

**Feladat.** Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény $x_0$ pontbeli növekményét, ha az argumentum $\Delta x$-szel változik.

*Megoldás.*

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

*Felelet*: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◀

## A pillanatnyi sebességről szóló feladat

Egy gépkocsi az egyenes vonalú útszakaszon egy adott irányban 2 óra alatt 120 km-t tett meg. Ekkor a gépkocsi átlagsebessége $v_{átl.} = \frac{120}{2} = 60$ (km/ó).

Az adott mennyiség nem ad teljes képet a gépkocsi mozgásáról: az egyik szakaszon lehet, hogy gyorsabban ment, egy másikon pedig lehet, hogy állt.

Ezzel egyidejűleg a gépkocsi sebeségmérője minden pillanatban mutat valamilyen értéket: ez a jármű sebessége az adott pillanatban. A pillanatnyi sebesség jobban jellemezi a gépkocsi mozgását, mint az átlagsebesség.

Megvizsgálunk egy olyan feladatot, amely az adott pillanatban határozza meg az egyenletesen gyorsuló test sebességét.

A feladat feltétele szerint egy anyagi pont a számegyenesen mozog, és az elindulásától számított $t$ idő múlva a koordinátája $s(t)$ lesz. Az így megadott $y = s(t)$ függvény segítségével meghatározhatjuk az anyagi pont pillanatnyi helyzetét. Ezt a függvényt a pont **mozgástörvényének** nevezzük.

Fizikából már jól ismeritek, hogy az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás képlete: $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, ahol az $s_0$ a pont koordinátája a mozgás kezdetén (ha $t = 0$), $v_0$ a kezdősebesség, $a$ pedig a gyorsulás.

Például legyen $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ m/mp, $a = 2$ m/mp$^2$. Ekkor $s(t) = t^2 + t$.

Rögzítünk egy adott $t_0$ időpontot és a $t_0$ argumentumnak adunk egy $\Delta t$ növekményt, vagyis megvizsgáljuk a $t_0$ és a $t_0 + \Delta t$ közötti időintervallumot. Ez alatt az idő alatt az anyagi pont $\Delta s$ elmozdulást végez. Ekkor:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{\left(t_0^2 + t_0\right)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

A mozgás átlagsebessége $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ a $t_0$ és a $t_0 + \Delta t$ közötti időintervallumban egyenlő a $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ hányadossal. A következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ vagy } v_{\text{átl.}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Az átlagsebesség $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ jelölése azt jelenti, hogy az adott $y = s(t)$ mozgásnál a rögzített $t_0$-nál az átlagsebesség csak a $\Delta t$ értékétől függ.

Ha elég kis időintervallumot vizsgálunk a $t_0$-tól a $t_0 + \Delta t$-ig, akkor a gyakorlati okoskodásból adódik, hogy a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ értékei nagyon kicsit különböznek majd egymástól, vagyis a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ lényegében nem változik. Minél kisebb a $\Delta t$ értéke, annál közelebb áll az átlagsebesség értéke egy bizonyos számhoz, ami a $t_0$ pillanatban lévő sebességet adja meg. Más szóval, ha a $\Delta t$ értéke a nullához közelít (így jelölik $\Delta t \to 0$), akkor a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ értéke a $v(t_0)$ számhoz tart. A $v(t_0)$ számot a test $t_0$ időpontbeli **pillanatnyi sebességé**nek nevezzük. Ezt így írjuk át: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{átl.}}(\Delta t)$. Azt mondjuk, hogy a $v(t_0)$ lesz a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ függvény **határértéke**, ha $\Delta t \to 0$.

Ha az adott példában a $\Delta t \to 0$, akkor a $2t_0 + 1 + \Delta t$ közelíteni fog a $2t_0 + 1$ számhoz, amely a $v(t_0)$ pillanatnyi sebesség értéke lesz, vagyis

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Ez a példa azt mutatja, hogy amikor az anyagi pont mozgását az $y = s(t)$ képlet írja le, akkor a $t_0$ időpontban a sebességét a következő képlet alapján határozzuk meg:

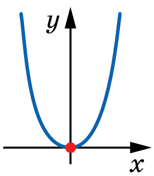
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{átl.}}(\Delta t), \text{ vagyis}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

## A függvénygrafikon érintőjéről szóló feladat

Már ismert, hogy azt az egyenest, amelynek a körvonallal csak egy közös pontja van, érintőnek nevezzük. Ugyanakkor ez a meghatározás tetszőleges görbére már nem alkalmazható.

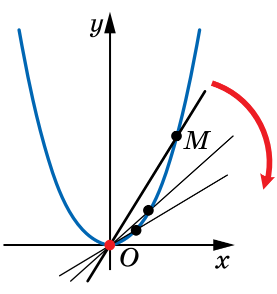
Például az $y = x^2$ parabolának és az ordinátatengelynek is csak egy közös pontja lesz (18.2. ábra), de ezt mégsem tekinthetjük az adott görbe érintőjének. Ezzel együtt, az algebrában már gyakran találkozhattunk azzal, hogy az $y = x^2$ parabolát az abszcisszatengely az $x_0 = 0$ pontban érinti.



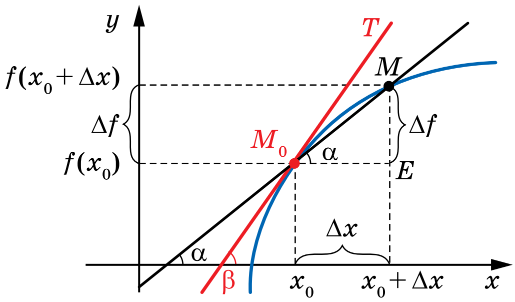
18.2. ábra

Pontosítjuk a függvénygrafikonhoz húzott érintőről alkotott elképzelésünket.

Legyen $M$ az $y = x^2$ parabola egy tetszőleges pontja. Meghúzzuk az $OM$ szelőt (18.3. ábra). Elképzeljük, hogy az $M$ pont a parabolán mozogva az $O$ pont felé tart. Ekkor az $OM$ szelő az $O$ pont körül elfordul. Az $OM$ egyenes és az abszcisszatengely közötti szög egyre kisebb lesz és az $OM$ szelő közelít az abszcisszatengelyhez. Ezért az abszcisszatengelyt az $y = x^2$ parabola $O$ pontba húzott érintőjének tekintjük.



18.3. ábra



18.4. ábra

Vizsgáljuk meg egy tetszőleges $f$ függvény grafikonját és az $M_0(x_0; f(x_0))$ pontot. Az $x_0$ pontban az argumentumnak egy $\Delta x$ növekményt adunk, és megvizsgáljuk a grafikon $M(x; f(x))$ pontját, ahol $x = x_0 + \Delta x$ (18.4. ábra).

Az ábráról leolvasható, hogy egyre kisebb $\Delta x$ esetén az $M$ pont a grafikonon mozogva közelít az $M_0$ ponthoz. Ha a $\Delta x \to 0$, az $M_0M$ szelő közelít egy adott egyeneshez (a 18.4. ábrán ez az $M_0T$ egyenes), akkor ezt az egyenest **az $f$ függvény $M_0$ pontbeli érintőjé**nek nevezzük.

Legyen $y = kx + b$ az $M_0M$ szelő egyenlete, amely az abszcisszatengellyel pozitív $\alpha$ szöget zár be. Mint ismert, az $M_0M$ egyenes $k$ iránytényezője egyenlő $\operatorname{tg}\alpha$-val, vagyis $k = \operatorname{tg}\alpha$. Látható, hogy $MM_0E\angle = \alpha$ (18.4. ábra). Ekkor az $MM_0E$ háromszög alapján felírhatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Bevezetjük a következő jelölést: a $k_{\text{szelő}}(\Delta x)$ az $M_0M$ szelő iránytényezője lesz, ezzel is aláhúzva, hogy az adott $f$ függvényre és az adott $x_0$ pontra az $M_0M$ szelő iránytényezője csak a $\Delta x$ növekménytől függ.

Ezt kaptuk: $k_{\text{szelö}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Legyen az $M_0T$ érintő és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög $\beta$ ($\beta \neq 90°$). Ekkor a $k(x_0)$ iránytényezője $\operatorname{tg}\beta$-val lesz egyenlő.

Természetesnek vehetjük, hogy minél kisebb a $\Delta x$, annál kisebb a metsző egyenes iránytényezője és az érintő iránytényezője közötti eltérés. Másképpen fogalmazva, ha $\Delta x \to 0$, akkor a $k_{\text{szelő}}(\Delta x) \to k(x_0)$. Általában, az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő iránytényezőjét a következő képlettel határozzuk meg

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{szelö}}(\Delta x), \text{ vagyis}$$

$$\boxed{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

**1.** Mit nevezünk a függvény növekményének?
**2.** Milyen képlettel határozzuk meg a pillanatnyi sebességet?
**3.** Milyen képlettel határozzuk meg a függvény görbéjéhez húzott érintő iránytényezőjét?

## GYAKORLATOK

**18.1.°** Határozd meg az $f$ függvény növekményét az $x_0$ pontban, ha:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$!

**18.2.°** Határozd meg az $f$ függvény növekményét az $x_0$ pontban, ha:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$!

**18.3.°** Határozd meg az $f(x) = x^2 - 3x$ függvény $\Delta f$ növekményét az $x_0$ pontban, az $x_0$ és az $x$ által, ha:
1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$;
2) $x_0 = -2$, $x = -1$!

**18.4.°** Határozd meg az $f(x) = x^3$ függvény $\Delta f$ növekményét az $x_0$ pontban, az $x_0$ és az $x$ által, ha $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$!

**18.5.•** Az adott $f(x) = x^2 - x$ függvénynek és az $x_0$ pontnak határozd meg a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ és $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ értékeit!

**18.6.•** Az adott $f(x) = 5x + 1$ függvénynek és az $x_0$ pontnak határozd meg a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ és $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ értékeit!

**18.7.•** Az anyagi pont mozgását a számegyenesen az $s(t) = 2t^2 + 3$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Határozd meg a pont pillanatnyi sebességét, ha a $t_0 = 2$ mp!

**18.8.•** A test mozgását a számegyenesen az $s(t) = 5t^2$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Határozd meg:
1) a test átlagsebességét a $t_0 = 1$ mp és a $t_1 = 3$ mp közötti időintervallumban;
2) határozd meg a test pillanatnyi sebességet a $t_0 = 1$ mp időpontban!

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**18.9.** Adott, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 1$ és $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Határozd meg az $\alpha$ értékét!

**18.10.** Adott, hogy $\operatorname{tg} \alpha = -1$ és $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Határozd meg az $\alpha$ értékét!

# 19. A derivált fogalma

Az előző pontban a pont pillanatnyi sebességének és az érintő iránytényezőjének meghatározásakor ugyanahhoz a matematikai modellhez jutottunk: a függvény növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékéhez, amikor az argumentum növekménye a nullához tart:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1}$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{2}$$

Hasonló képleteket kapunk több fizikai, kémiai, biológiai, gazdasági feladatok megoldása során is. Ez arról tanúskodik, hogy a vizsgált modell különleges figyelmet érdemel. Érdemes nevet adni neki, jelölést bevezetni rá, tanulmányozni a tulajdonságait és megtanulni az alkalmazását.

**Definíció. Az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltjának azt a számot nevezzük, amely egyenlő az $f$ függvény $x_0$ pontbeli növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékével, amikor az argumentum növekménye a nullához tart.**

Az $y = f(x)$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltját $f'(x_0)$ -val jelöljük (így olvassuk: ef vessző az iksz nulla) vagy $y'(x_0)$. Ezt így lehet felírni:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

vagy

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

A pillanatnyi sebesség meghatározása alapján (1) az alábbi következtetést vonhatjuk le: ha *az $y = s(t)$ a számegyenesen mozgó anyagi pont mozgásának szabálya, akkor a pillanatnyi sebessége az adott $t_0$ időpontban egyenlő az $y = s(t)$ függvény $t_0$ pontbeli deriváltjával,* vagyis

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Ez az egyenlőség fejezi ki **a derivált mechanikai értelmezését**.

Az érintő iránytényezőjének meghatározása alapján (2) az alábbi következtetésre jutunk: *az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő iránytényezője egyenlő lesz az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltjának az értékével*, vagyis

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Ezt az egyenlőség fejezi ki **a derivált geometriai értelmezését**.

Ha az $f$ függvénynek az $x_0$ pontban van deriváltja, akkor az ilyen függvényt az **$x_0$ pontban differenciálható**nak mondjuk.

Ha az $f$ függvény differenciálható az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor azt **differenciálható** függvénynek nevezzük.

Az $f$ függvény deriváltjának meghatározását az $f$ függvény **differenciálásá**nak nevezzük.

**1. feladat.** Differenciáljuk az $f(x) = kx + b$ függvényt!

*Megoldás.* Meghatározzuk az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltját, ahol az $x_0$ az $f$ függvény értelmezési tartományának egy tetszőleges pontja.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k\ (x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) az $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Tehát $f'(x_0) = k$.

Mivel az $x_0$ az $f$ függvény értelmezési tartományának bármilyen pontja, ezért az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy bármilyen $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül az $f'(x) = k$ egyenlőség.◀

Az utóbbi képletből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az $f(x) = kx + b$ függvény deriváltja egyenlő $k$-val, amit az alábbi képlettel írhatunk le:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \tag{3}$$

Ha a (3) képletbe behelyettesítjük a $k = 1$ és $b = 0$ értékeket, akkor a következőt kapjuk:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Ha a (3) képletbe behelyettesítjük a $k = 0$ értéket, akkor a következőt kapjuk:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy *a konstans függvény deriváltja minden pontban nullával lesz egyenlő.*

**2. feladat.** Differenciáljuk az $f(x) = x^2$ függvényt!

*Megoldás.* Meghatározzuk az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltját, ahol az $x_0$ az $f$ függvény értelmezési tartományának egy tetszőleges pontja.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) ha a $\Delta x \to 0$, akkor bármely $x_0 \in \mathbb{R}$ értékre a $2x_0 + \Delta x$ értéke a $2x_0$-hoz tart. Tehát $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Mivel az $x_0$ az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartományának tetszőleges pontja, ezért az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül az

$f'(x) = 2x$ egyenlőség. ◀

Az utóbbi egyenlőséget a következőképpen írhatjuk át:

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \tag{4}$$

A (4) képlet a következő általános képletnek egy külön esete:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \tag{5}$$

Például $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Az (5) képlet igaz lesz bármely $n \in \mathbb{Z}$ és $x \neq 0$ esetén, vagyis

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \tag{6}$$

Például a (6) képlet alkalmazásával az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény deriváltjának meghatározására, a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Tehát bármely $x \neq 0$ esetében alkalmazható a következő egyenlőség: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ vagy

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

A (6) képlet általánosítható tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ és $x > 0$ esetére is:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \tag{7}$$

Például az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltját is meghatározhatjuk a (7) képlettel. Ekkor: $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát, ha $x > 0$, akkor felírhatjuk: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ vagy

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Általánosítva, az $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ függvény deriváltját a következő képlettel lehet meghatározni:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \tag{8}$$

Ha az $n$ páratlan természetes szám, akkor a (8) képlettel meghatározhatjuk az $f$ függvény deriváltját minden $x$ értékre, ha $x \neq 0$.

Ha az $n$ páros természetes szám, akkor a (8) képlettel meghatározhatjuk az $f$ függvény deriváltját minden pozitív $x$ értékre.

Visszatérünk az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ trigonometrikus függvényekhez. Ezek a függvények differenciálhatók, és a deriváltjaikat a következő képletekkel lehet kiszámítani:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

A derivált kiszámítása során érdemes használni a 2. előzéken lévő deriváltak táblázatát.

## GYAKORLATOK

**19.1.°** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = 5x - 6$; 2) $y = 9$; 3) $y = 8 - 3x$!

**19.2.°** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$!

**19.3.°** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = x^{10}$; 2) $y = \frac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$!

**19.4.°** Számítsd ki a függvény deriváltját az $x_0$ pontban:
1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -2$!

**19.5.°** Számítsd ki a függvény deriváltját az $x_0$ pontban:
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$!

**19.6.•** Differenciáld a függvényt:
1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$!

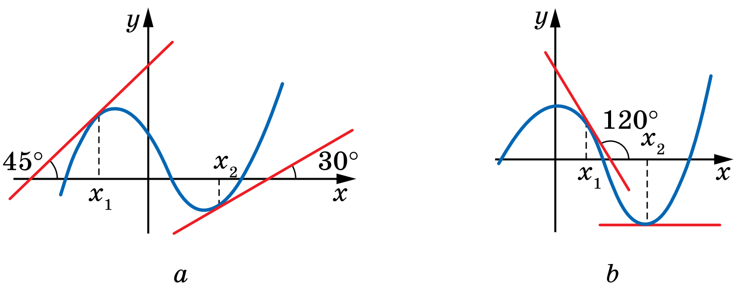
**19.7.•** Differenciáld a függvényt:
1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$!

**19.8.•** Határozd meg annak az érintőnek az iránytényezőjét, amely az $f$ függvényt $x_0$ abszcisszájú pontjában érinti:
1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$!

**19.9.•** Határozd meg annak az érintőnek az iránytényezőjét, amely az $f$ függvényt $x_0$ abszcisszájú pontjában érinti:

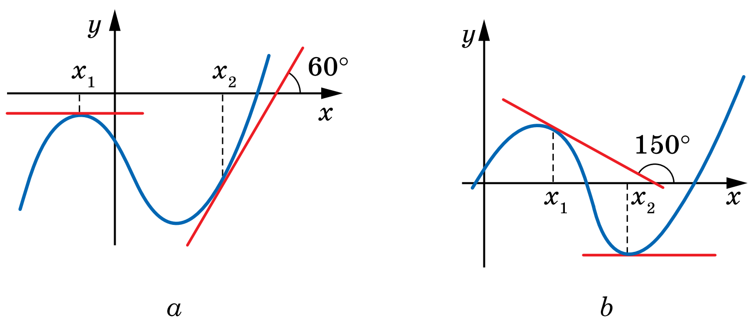
1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$!

**19.10.•** Az $f$ függvény grafikonja alapján (19.1. ábra) határozd meg az $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ értékét!




**19.1. ábra**

**19.11.•** Az $f$ függvény grafikonja alapján (19.2. ábra) határozd meg az $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ értékét!




**19.2. ábra**

**19.12.••** Számítsd ki a függvény deriváltját az $x_0$ pontban:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$;
2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$!

**19.13.••** Számítsd ki a függvény deriváltját az $x_0$ pontban:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 256$;
2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$!

### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**19.14.** Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2+\frac{7+a}{9+a}!$$

**19.15.** Oldd meg az egyenletet: $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=0!$

## 20. A derivált kiszámításának szabályai

A deriváltszámításkor érdemes alkalmazni a következő tételeket[1].

**20.1. tétel (az összeg deriváltja).** ***Ha az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ függvények differenciálhatók valamely pontban, akkor ebben a pontban az $y=f(x)+g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:***

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

Röviden: *az összeg deriváltja egyenlő az összeadandók deriváltjainak összegével.*

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$\boxed{(f+g)'=f'+g'}$$

A 20.1. tétel tetszőleges véges számú összeadandóra kiterjeszthető:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'.$$

**20.2. tétel (a szorzat deriváltja).** ***Ha az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ függvények differenciálhatók valamely pontban, akkor ebben a pontban az $y=f(x)\,g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:***

$$(f(x)\ g(x))'=f'(x)\ g(x)+g'(x)\ f(x).$$

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$\boxed{(fg)'=f'g+g'f}$$

---

[1] A 20.1–20.3. tételek előirányozzák, hogy az $f$ és $g$ függvények differenciálhatók az $x_0$ pontban, és megfelelően az $y=f(x)+g(x)$, az $y=f(x)\,g(x)$ és az $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ függvények értelmezve vannak az $x_0$ pontnak valamely környezetében.

**1. következmény.** ***Ha bizonyos pontokban differenciálható az $y = f(x)$ függvény, akkor az $y = kf(x)$ függvény is differenciálható lesz, ahol a $k$ valamely szám, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség:***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Röviden mondva: *a konstans tényezőt ki lehet vinni a deriválás jele elé.*

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

*Bizonyítás.* Mivel az $y = k$ függvény bármely pontban differenciálható, ezért alkalmazva a szorzat deriváltja tételt, felírhatjuk:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

**2. következmény.** ***Ha bizonyos pontokban az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók, akkor az $y = f(x) - g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

*Bizonyítás.* A következőt kapjuk:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

**20.3. tétel (a hányados deriváltja).** ***Ha az $x$ pontban az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók és ebben a pontban a $g$ függvény nem egyenlő nullával, akkor az $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ függvény szintén differenciálható, és teljesül a következő egyenlőség:***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

**Feladat.** Határozzuk meg a következő függvény deriváltját:
1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$!

*Megoldás.* 1) Alkalmazzuk az összegre vonatkozó deriválási tétel és a szorzatra vonatkozó deriválási tétel következményeit, és a következőt kapjuk:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4\cdot(x^2)' =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4\cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) A szorzatra vonatkozó deriválási szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x-3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'\cdot(5x-3) + (5x-3)'\cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot(5x-3) + 5\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3)
$$y' = (x^3\cos x)' = (x^3)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot x^3 =$$
$$= 3x^2\cos x - \sin x\cdot x^3 = 3x^2\cos x - x^3\sin x.$$

4) A hányadosra vonatkozó deriválási szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2)-(3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{4x(3x-2)-3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2-8x-6x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-8x-3}{(3x-2)^2}. \blacktriangleleft$$

Alkalmazva a hányadosra vonatkozó deriválási szabályt könnyen igazolható, hogy

$$\boxed{(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Valóban, $(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Fogalmazd meg: az 1) összegre; 2) szorzatra; 3) hányadosra vonatkozó deriválási tételt!

## GYAKORLATOK

**20.1.°** Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10;$  2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x};$

3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4 \sin x - 5 \cos x$;
5) $y = \mathrm{tg}\ x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$!

**20.2.°** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = -3 \sin x + 2 \cos x$;
4) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$!

**20.3.•** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
2) $y = x^2 \sin x$;
3) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt{x} \cos x$!

**20.4.•** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x\ \mathrm{tg}\ x$!

**20.5.•** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$;
2) $y = \frac{5}{3x - 2}$;
3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;
4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;
5) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;
6) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$!

**20.6.•** Határozd meg a függvény deriváltját:
1) $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$;
2) $y = \frac{7}{10x - 3}$;
3) $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$;
4) $y = \frac{\sin x}{x}$;
5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
6) $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$!

**20.7.•** Mivel egyenlő az $f$ függvény deriváltjának az értéke az $x_0$ pontban, ha:
1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 2 \sin x$, $x_0 = 0$;
4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

**20.8.•** Számítsd ki az $f$ függvény deriváltjának az értékét az $x_0$ pontban:
1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \frac{1}{4}$;
2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}$, $x_0 = 1$!

**20.9.••** A 4 kg tömegű anyagi pont mozgását a számegyenesen az $s(t) = t^2 + 4$ törvény írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercben mérik). Határozd meg az anyagi pont $P(t) = mv(t)$ impulzusát a $t_0 = 2$ mp időpontban!

**20.10.**•• A 2 kg tömegű test mozgását a számegyenesen az $s(t)=3t^2-4t+2$ törvény írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercben mérik). Határozd meg az $E(t)=\frac{mv^2(t)}{2}$ képlettel megadott kinetikus energiát a $t_0=4$ mp időpontban!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**20.11.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $M(-2; -3)$ pontra illeszkedik és párhuzamos az abszcisszatengellyel!

**20.12.** Állítsd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $M(1; -4)$ pontra illeszkedik, ha az egyenes iránytényezője: 1) 4; 2) 0; 3) –1!

## 21. Az érintő egyenlete

Legyen az $f$ függvény differenciálható az $x_0$ pontban. Akkor az $f$ függvény grafikonjához az $x_0$ abszcisszájú pontba húzható egy nem függőleges érintő (21.1. ábra).

A 9. osztályos mértan tananyagból már tudjátok, hogy a nem függőleges egyenes egyenlete $y=kx+b$ alakú lesz, ahol $k$ az egyenes iránytényezője.

A derivált geometriai értelmezéséből következik:

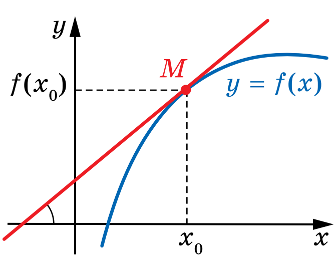
$$k=f'(x_0).$$

Ekkor az érintő egyenletét átírhatjuk a következő alakba:

$$y=f'(x_0)\cdot x+b. \quad (1)$$

Ez az egyenes illeszkedik az $M(x_0; f(x_0))$ pontra. Tehát ennek a pontnak a koordinátái kielégítik az (1) egyenletet. A következőt kapjuk:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b.$$




**21.1. ábra**

Innen $b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$.

Ekkor az (1) egyenlet így írható át:

$$y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0.$$

Tehát, ha az $f$ függvény differenciálható az $x_0$ pontban, akkor **az érintő egyenlete, amely az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjára illeszkedik**, a következő képlettel adható meg:

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

**Feladat.** Állítsuk fel az $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ egyenlettel megadott alakzat $x_0 = -2$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

*Megoldás.* $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2;$

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Behelyettesítjük a meghatározott számot az érintő egyenletébe, és a következőt kapjuk: $y = 8(x + 2) - 2$, vagyis $y = 8x + 14$.

*Felelet*: $y = 8x + 14$. ◄

Írjuk fel az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

## GYAKORLATOK

**21.1.°** Állítsd fel annak a függvénynek az egyenletét, melyet az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzunk, ha:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
6) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$!

**21.2.°** Állítsd fel annak a függvénynek az egyenletét, melyet az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzunk, ha:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$!

**21.3.•** Írd fel az $f(x) = x^2 - 3x - 3$ függvény érintőjének az egyenletét az ordinátatengelyt metsző pontjában!

**21.4.•** Írd fel az $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ függvény érintőjének az egyenletét az ordinátatengelyt metsző pontjában!

**21.5.•** Írd fel az $f$ függvény érintőjének az egyenletét az abszcisszatengelyt metsző pontjában:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;
2) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$!

**21.6.•** Írd fel az $f$ függvény érintőjének az egyenletét az abszcissza-tengelyt metsző pontjában:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = 3x - x^2$!

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**21.7.** Oldd meg az egyenlőtlenséget:

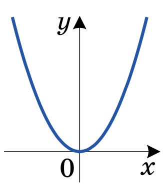
1) $x^2 + x - 12 > 0$; 3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$!

# 22. A függvény növekedésének és csökkenésének (fogyásának) ismertetőjelei

Már tudjátok, hogyha egy függvény konstans, akkor annak deriváltja nullával egyenlő. Felmerül a kérdés: ha az $f$ függvény olyan, hogy az $I$ intervallum minden $x$ értékére teljesül az $f'(x) = 0$, akkor az $f$ függvény konstans-e az $I$ intervallumon?

**22.1. tétel (a függvény állandóságának ismertetőjele).** ***Ha az I intervallum minden x értékére teljesül az $f'(x) = 0$ egyenlőség, akkor az f függvény ezen az intervallumon konstans lesz.***




22.1. ábra

A 22.1. ábrán az $f(x) = x^2$ grafikonja látható. Ennek a függvénynek a következő tulajdonságai lesznek: a $(-\infty; 0)$ intervallumon a függvény csökkenő, a $(0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő. Ebben az esetben a $(-\infty; 0)$ intervallumon az $f'(x) = 2x$ deriváltja negatív értéket vesz fel, és a $(0; +\infty)$ intervallumon a függvény pozitív értéket vesz fel.

Ez a példa azt mutatja, hogy a függvény deriváltjának az előjele egy adott $I$ intervallumon azzal kapcsolatos, hogy növekvő (csökkenő)-e az adott $I$ intervallumon ez a függvény.

A derivált előjele és növekedése (csökkenése) közötti kapcsolatot a következő két tétel határozza meg.

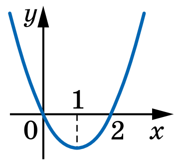
**22.2. tétel (a függvény növekedésének ismertetőjele).** ***Ha az I intervallum minden egyes x elemére teljesül az $f'(x) > 0$ egyenlőtlenség, akkor az f függvény ezen az intervallumon növekvő.***

**22.3. tétel (a függvény csökkenésének ismertetőjele).** ***Ha az I intervallum minden egyes x elemére teljesül az $f'(x) < 0$ egyenlőtlenség, akkor az f függvény ezen az intervallumon csökkenő.***

**1. feladat**. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény növekedési (csökkenési) intervallumát!

*Megoldás*. Az $f'(x) = 2x - 2$. Megoldva a $2x - 2 > 0$ és a $2x - 2 < 0$ egyenlőtlenségeket, arra a következtetésre jutunk, hogy $f'(x) > 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon, és $f'(x) < 0$ a $(-\infty; 1)$ intervallumon. Tehát az $f$ függvény növekvő $(1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $(-\infty; 1)$ intervallumon.

A 22.2. ábra az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény grafikonját szemlélteti. A rajzon látható, hogy az $f$ függvény valóban növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon, az $x = 1$ pontot is beleértve.



**22.2. ábra**

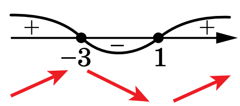
A felelet felírásakor a következő szabályt fogjuk alkalmazni: ha a függvény differenciálható növekedési (csökkenési) intervallumának valamely végpontjában, akkor ezt a pontot is ezekhez az intervallumokhoz soroljuk. A fenti példában az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény differenciálható az $x = 1$ pontban, ezért ezt a pontot is hozzákapcsoljuk az $(1; +\infty)$ és a $(-\infty; 1)$ intervallumokhoz.

*Felelet*: növekvő az $[1; +\infty)$ és csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon. ◀

**2. feladat**. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ függvény növekedési és fogyási intervallumait!

*Megoldás*. Az $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Megvizsgáljuk a derivált előjeleit (22.3. ábra) és figyelembe vesszük, hogy a függvény differenciálható az $x = -3$ és az $x = 1$ pontokban. Azt kaptuk, hogy az $f$ függvény növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $[-3; 1]$ intervallumon. ◀



**22.3. ábra**

1. Fogalmazd meg a függvény állandóságának ismertetőjelét!
2. Fogalmazd meg a függvény növekedésének ismertetőjelét!
3. Fogalmazd meg a függvény csökkenésének ismertetőjelét!

## GYAKORLATOK

**22.1.°** Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$!

**22.2.**° Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = x^4 + 4x - 20$;
4) $f(x) = 8 - 4x - x^3$!

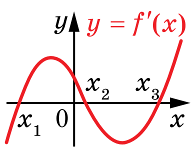
**22.3.**• Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$!

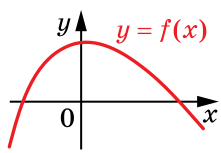
**22.4.**• Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
2) $f(x) = \frac{2x-9}{x-5}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$!

**22.5.**• A 22.4. ábrán az $f$ függvény deriváltjának grafikonja látható, amely differenciálható a valós számok halmazán. Nevezd meg az $f$ függvény fogyási intervallumait!

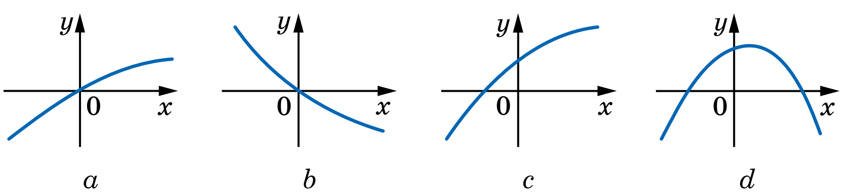



**22.4. ábra**




**22.5. ábra**

**22.6.**•• A 22.5. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a valós számok halmazán van értelmezve. A 22.6. ábrán látható függvények közül melyik lehet az $y = f'(x)$ függvény grafikonja!




**22.6. ábra**

**22.7.**•• Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ függvény csökkenő!

**22.8.**•• Bizonyítsd be, hogy az $(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$ függvény növekvő!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**22.9.** Old meg az egyenletet $1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$!

**22.10.** Old meg az egyenlőtlenséget $x\sqrt{7-x}>0$!

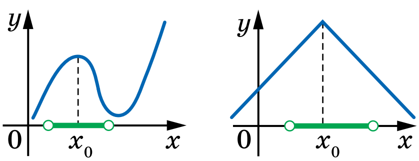
# 23. A függvény extrémumpontjai

Megismerkedve a függvény pontbeli differenciáljának fogalmával, ennek a pontnak a környékén vagy **környezetében** megvizsgáltuk a függvény viselkedését.

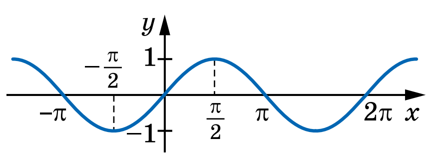
**Definíció. Az $(a;\ b)$ intervallumot, amely tartalmazza az $x_0$ pontot, az $x_0$ pont környezetének nevezzük.**

Például a (–1; 3) intervallum a 2,5 pont egyik környezete lesz. Ezzel együtt, viszont ez az intervallum nem környezete a 3-as pontnak.

A 23.1. ábrán két függvény grafikonja látható. A függvényeknek van egy közös sajátosságuk: létezik az $x_0$ pontnak egy olyan környezete, amelyben minden $x$-re ebből a környezetből teljesül az $f(x_0) \geqslant f(x)$ egyenlőtlenség.




**23.1. ábra**




**23.2. ábra**

**Definíció. Az $x_0$ pontot az $f$ függvény maximumpontjának nevezzük, ha az $x_0$ pont valamely környezetének minden $x$ elemére teljesül az $f(x_0) \geqslant f(x)$ egyenlőtlenség.**

Például az $x_0=\frac{\pi}{2}$ az $y=\sin x$ függvény maximumpontja lesz (23.2. ábra). Ezt így jelöljük: $x_{max}=\frac{\pi}{2}$.

A 23.1. ábrán $x_{max}=x_0$.

**Definíció. Az $x_0$ pontot az $f$ függvény minimumpontjának nevezzük, ha az $x_0$ pont valamely környezetének minden $x$ elemére teljesül az $f(x_0) \leqslant f(x)$ egyenlőtlenség.**

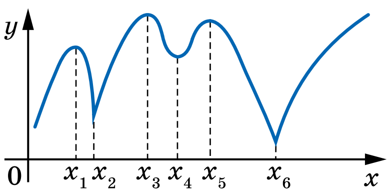
Például az $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ az $y = \sin x$ függvény minimumpontja lesz (23.2. ábra). Ezt így jelöljük: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

A 23.3. ábrán egy olyan függvény grafikonja látható, amelynek az $x_0$ pont a minimumpontja lesz, vagyis $x_{\min} = x_0$.

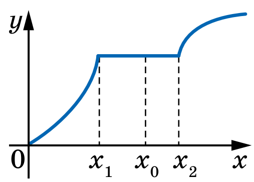

**23.3. ábra**

A függvény minimum- és maximumpontjait a függvény **extrémumpontjai**nak (szélsőértékhelyeinek) nevezzük (a latin *extremum* szóból, amely valaminek a szélét, végét jelenti).

A 23.4. ábrán az $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ pontok extrémumpontok lesznek.




**23.4. ábra**




**23.5. ábra**

A 23.5. ábrán lévő $f$ függvény grafikonja az $[x_1; x_2]$ intervallumon állandó. Az $x_1$ pont a maximumpontja, az $x_2$ pont pedig a minimumpontja lesz, és az $(x_1; x_2)$ intervallumhoz tartozó bármely pont egyszerre lesz az $f$ függvény maximum- és minimumpontja.


*a* *b*

**23.6. ábra**

Az extrémumpont létezése az $x_0$ pontban a függvény viselkedésétől függ a pont környezetében. Ennek megfelelően a 23.6. ábrán látható függvények grafikonjai: a 23.6 *a* ábrán az $(a; x_0]$ intervallumon a függvény növekvő lesz, az $[x_0;\ b)$ intervallumon pedig csökkenő; a 13.6. *b* ábrán az $(a;\ x_0]$ intervallumon a függvény csökkenő, a $[x_0;\ b)$ intervallumon pedig növekvő lesz.

Már tudjátok, hogy a derivált segítségével meg lehet határozni a differenciálható függvény növekedési (csökkenési) intervallumait. A két következő tantételből azt tudjuk meg, hogy a derivált segítségével hogyan lehet meghatározni a differenciálható függvény extrémumait.

**23.1. tétel (a függvény maximumpontjának ismertetőjele).** ***Legyen az f függvény differenciálható az (a; b) intervallumon, és legyen az $x_0$ az intervallum egy pontja. Ha minden x-re, ahol $x \in (a;\ x_0]$, teljesül az $f'(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenség, és minden x-re, ahol $x \in [x_0;\ b)$ teljesül az $f'(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség, akkor az $x_0$ pontot az f függvény maximumpontjának nevezzük*** (23.6. *a* ábra).

**23.1. tétel (a függvény minimumpontjának ismertetőjele).** ***Legyen az f függvény differenciálható az (a; b) intervallumon, és legyen az $x_0$ az intervallum egy pontja. Ha minden x-re, ahol $x \in (a;\ x_0]$ teljesül az $f'(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség, és minden x-re, ahol $x \in [x_0;\ b)$ teljesül az $f'(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenség, akkor az $x_0$ pontot az f függvény minimumpontjának nevezzük*** (23.6. *b* ábra).

Néha érdemesebb az egyszerűbb megfogalmazásait alkalmazni ezeknek a tételeknek: *ha az $x_0$ ponton történő átmenetkor a függvény deriváltja az előjelét pluszról mínuszra változtatja, akkor az $x_0$-t a maximumpontnak; ha a derivált mínuszról pluszra vált, akkor az $x_0$-t minimumpontnak nevezzük.*

Tehát az *f* függvény extrémumpontjait a következő pontok szerint határozhatjuk meg:

1) Kiszámítjuk az $f'(x)$-et.

2) Megvizsgáljuk a derivált előjeleit.

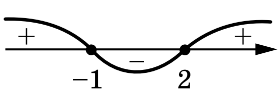
3) A megfelelő tételek alkalmazásával meghatározzuk az extrémumpontokat.

**Feladat.** Határozzuk meg a függvény extrémumait:

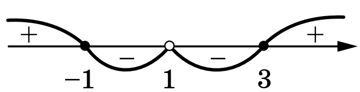
1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$!

*Megoldás.* 1) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$.

Megvizsgáljuk a derivált előjeleit az $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ pontok környezeteiben (23.7. ábra). A következőt kapjuk: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$.



**23.7. ábra**



**23.8. ábra**

2) $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$

Megoldva az $x^2 - 2x - 3 > 0$ egyenlőtlenséget, majd figyelembe véve, hogy $(x-1)^2 > 0$, ha $x \neq 1$, azt kapjuk, hogy az $f'(x) > 0$ a $(-\infty; -1)$ és a $(3; +\infty)$ intervallumon. Hasonlóképpen gondolkodva azt is meg lehet állapítani, hogy $f'(x) < 0$ a $(-1; 1)$ és az $(1; 3)$ intervallumon. A 23.8. ábra illusztrálja ezeket az eredményeket.

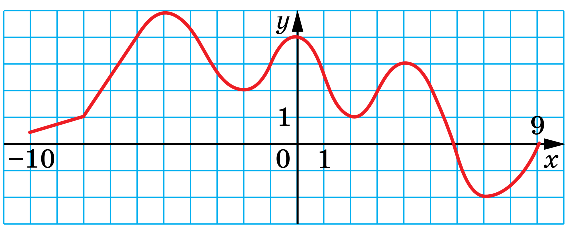
Most már levonhatjuk az alábbi következtetést: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$. ◀

?

1. Milyen intervallumot nevezünk az $x_0$ pont környezetének?
2. Mit nevezünk a függvény maximumpontjának? A függvény minimumpontjának?
3. Fogalmazd meg a maximumpont, illetve minimumpont ismertetőjelét!

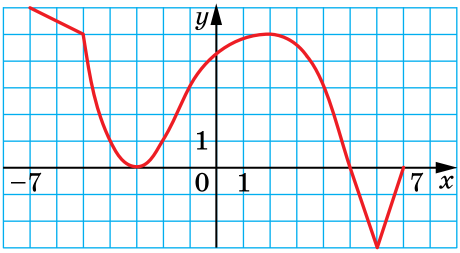
## GYAKORLATOK

**23.1.°** A 23.9. ábrán a $[-10; 9]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható Nevezd meg a:
1) minimumpontját;
2) maximumpontját!




**23.9. ábra**

**23.2.°** A 23.10. ábrán a $[-7; 7]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Nevezd meg a:
1) minimumpontját;
2) maximumpontját!




**23.10. ábra**

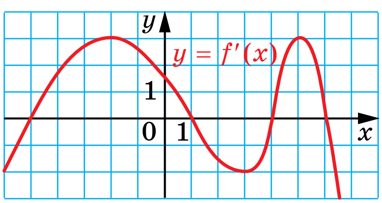
**23.3.**° Határozd meg a függvény minimum- és maximumpontjait:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$!

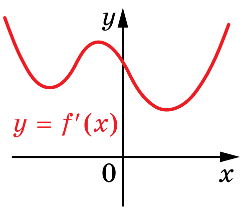
**23.4.**° Határozd meg a függvény minimum- és maximumpontjait:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
4) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$!

**23.5.**• Az $y = f(x)$ függvény differenciálható a valós számok halmazán. A 23.11. ábrán a függvény deriváltjának grafikonja látható. Nevezd meg az $y = f(x)$ függvény maximum- és minimumpontjait!




**23.11. ábra**




**23.12. ábra**

**23.6.**• Az $y = f(x)$ a valós számok halmazán értelmezett függvény, és az értelmezési tartományának minden pontjában van deriváltja. A 23.12. ábrán az $y = f'(x)$ függvény grafikonja látható. Hány extrémumpontja van az $y = f(x)$ függvénynek?

**23.7.**•• Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$!

**23.8.**•• Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$!

## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**23.9.** Határozd meg az $y = 3x^2 - 18x + 2$ függvény legkisebb értékét a következő intervallumon:

1) $[-1;\ 4]$; 2) $[-4;\ 1]$; 3) $[4;\ 5]$!

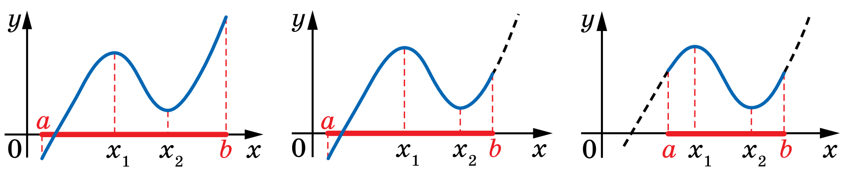
**23.10.** Határozd meg az $y = -x^2 - 8x + 10$ függvény legnagyobb értékét a következő intervallumon:

1) $[-5;\ -3]$; 2) $[-1;\ 0]$; 3) $[-11;\ -10]$!

# 24. A függvény legnagyobb és legkisebb értéke

Mennyi terméket kell előállítani a vállalatnak ahhoz, hogy a maximális profitra tegyen szert? Hogyan lehet a lehető legkevesebb idő alatt végrehajtani a termelési feladatot, ha az alapanyagokhoz való hozzáférés korlátozott? Hogyan lehet megszervezni az áru kiszállítását úgy, hogy a lehető legkevesebb legyen az üzemanyag fogyasztása? Ilyen és ehhez hasonló feladatokat kell az embereknek a gyakorlatban megoldaniuk az optimális megoldás keresése során.

Ebben a pontban megtanuljuk, hogyan kell meghatározni a függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $[a;\ b]$ intervallumon. Csak a differenciálható függvények vizsgálatával foglalkozunk majd.




$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

*a*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

*b*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

*c*

**24.1. ábra**

Be lehet bizonyítani, hogy az $[a;\ b]$ intervallumon differenciálható függvény a legnagyobb és a legkisebb értékét vagy az intervallum végein, vagy az extrémumpontban veszi fel (24.1. ábra).

Ezt figyelembe véve, az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvény legnagyobb és legkisebb értékének meghatározása során a következőképpen kell eljárnunk.

1. Meghatározzuk az $f$ függvény azon pontjait, melyekben a függvény deriváltja nullával egyenlő.

2. Az így meghatározott pontokban kiszámítjuk a függvény értékeit az adott intervallumban, majd az intervallum végein is meghatározzuk a függvényértékeket.

3. Az összes meghatározott értékek közül kiválasszuk a legkisebbet, illetve a legnagyobbat.

**1. feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $[-2; 0]$ intervallumon!

*Megoldás*. Meghatározzuk az adott függvény deriváltját. A következőt kapjuk:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Most megoldjuk a $12x^2 - 18x - 12 = 0$ egyenletet. Innen:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ vagy } x = -\frac{1}{2}.$$

A $[-2; 0]$ intervallumhoz csak az $x = -\frac{1}{2}$ pont tartozik.

Ebből megkapjuk: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Tehát $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38.$

*Felelet*: $\frac{37}{4}$; $-38$. ◀

**2. feladat**. Adjuk meg a 8-as számot két nemnegatív szám öszszegeként úgy, hogy az egyik szám köbének és a másik négyzetének összege a legkisebb legyen!

*Megoldás*. Legyen az első szám $x$, akkor a második szám $8 - x$ lesz. A feladat feltételéből következik, hogy $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Megvizsgáljuk a $[0; 8]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$ függvényt, majd meghatározzuk, hogy az $x$ mely értékénél veszi fel a legkisebb értékét.

Az $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$. Megoldjuk a $3x^2 + 2x - 16 = 0$ egyenletet.

Megkapjuk a gyökeit: $x = 2$ vagy $x = -\frac{8}{3}$.

A kapott gyökök közül csak a 2 tartozik a $[0; 8]$ intervallumhoz. Ezért:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Tehát a függvény legnagyobb értékét az $x = 2$ pontban veszi fel.

*Felelet*: $8 = 2 + 6$. ◀

Ismertesd, hogyan kell meghatározni az $[a;\ b]$ intervallumon differenciálható függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

## GYAKORLATOK

**24.1.°** Határozd meg az $f$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3,\ [-1;\ 3];$
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ [0;\ 2];$
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3,\ [-1;\ 4];$
4) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1},\ [-3;\ 0]!$

**24.2.°** Határozd meg az $f$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x,\ [0;\ 3];$
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2,\ [-2;\ 0];$
3) $f(x) = 2x^4 - 8x,\ [-2;\ 1];$
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2,\ [-1;\ 2]!$

**24.3.••** Add meg a 8-as számot két nemnegatív szám összegeként úgy, hogy az egyik számnak és a másik szám köbének szorzata a legnagyobb legyen!

**24.4.••** Add meg a 12-es számot két nemnegatív szám összegeként úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám kétszeres szorzatának szorzata a legnagyobb legyen!

**24.5.••** Add meg a 180-as számot három nemnegatív szám összegeként úgy, hogy kettőnek az aránya 1 : 2-höz legyen, és a három szám szorzata a lehető legnagyobb legyen!

**24.6.••** Add meg a 18-as számot három nemnegatív szám összegeként úgy, hogy kettőnek az aránya 8 : 3-hoz legyen, és a három szám köbeinek összege a legkisebb legyen!

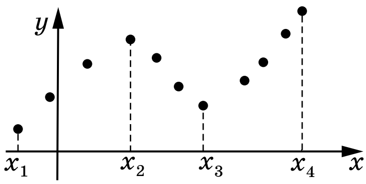
## FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

**24.7.** Rajzolj meg egy olyan függvényt, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: az értelmezési tartomány $[-3;\ 4]$ intervallum; értékkészlete a $[-2;\ 3]$ intervallum; zérushelyei $-1$ és $2$; az $f'(x) > 0$ bármilyen $x$ értékre a $[-3;\ 0)$ és $(2;\ 4]$ intervallumokon; $f'(x) < 0$ bármilyen $x$ értékre a $(0;\ 2)$ intervallumon!

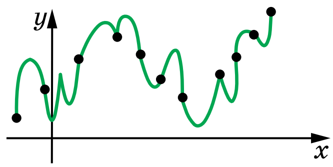
# 25. A függvény grafikonjának ábrázolása

Az előző osztályokban a függvények grafikonjainak megrajzolásakor a következőképpen jártunk el: a koordinátasíkon megjelöltünk néhány olyan pontot, amelyek az adott függvény grafikonjához tartoznak, majd összekötöttük ezeket a pontokat. A szerkesztés pontossága attól függött, hogy hány ilyen pontot jelöltetek meg.

A 25.1. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonjához tartozó pontokat látunk. A 25.2. és a 25.3. ábrák mutatják, hogy a pontok különbözőképpen köthetők össze.

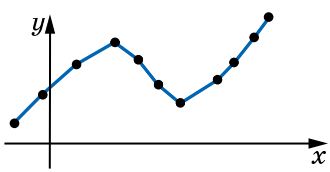



**25.1. ábra**

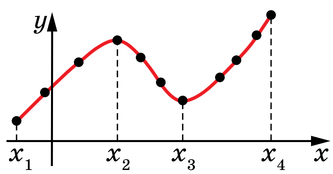



**25.2. ábra**

Azonban, ha tudjuk azt, hogy az $f$ függvény növekvő az $[x_1; x_2]$, illetve az $[x_3; x_4]$ intervallumokon, és csökkenő az $[x_2; x_3]$ intervallumon, valamint differenciálható, akkor legvalószínűbb, hogy a függvény grafikonja olyan lesz, mint a 25.4. ábrán látható.




**25.3. ábra**




**25.4. ábra**

Már ismeritek a páros, páratlan és a periodikus függvények grafikonjainak sajátosságait. Általában, minél több függvénytulajdonságot ismerünk, annál pontosabban tudjuk ábrázolni a függvény grafikonját.

A függvényvizsgálatot az alábbi séma szerint végezzük:

1. *Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát.*
2. *Megvizsgáljuk a függvény paritását.*
3. *Meghatározzuk a zéruspontjait.*
4. *Meghatározzuk a függvény növekedési és csökkenési intervallumait.*
5. *Meghatározzuk extrémumpontjait és a függvény értékeit ezekben a pontokban.*

6. *Megállapítjuk a függvény más különleges tulajdonságait (periodicitását, a függvény viselkedését a különleges pontok környezetében stb.).*

Megjegyezzük, hogy a függvényvizsgálat fentebb leírt módja nem teljes, csupán ajánló jellegű. A vizsgálat során a függvénynek olyan tulajdonságait kell kideríteni, amelyek segítségével aránylag pontosan le tudjuk rajzolni a függvény grafikonját.

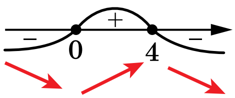
*Feladat*. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ függvényt, és ábrázoljuk grafikonját!

*Megoldás*. 1. A függvény az egész számegyenesen értelmezhető, vagyis $D(f) = \mathbb{R}$.

2. $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Ebből az következik, hogy $f(-x) \neq f(x)$ és $f(-x) \neq -f(x)$, vagyis az $y = f(-x)$ nem esik egybe sem az $y = f(x)$ sem az $y = -f(x)$ függvénnyel. Ezért az adott függvény se nem páros se nem páratlan.

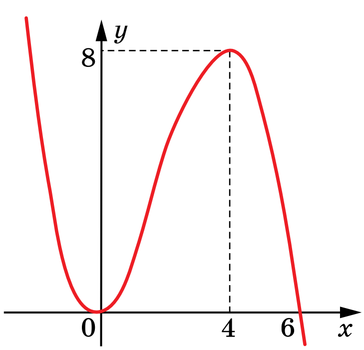
3. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$. A 0 és a 6 lesz az $f$ függvény zérushelyei.

4–5. $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$. Megvizsgálva a derivált előjelét (25.5. ábra), arra a következtetésre jutunk, hogy az $f$ függvény növekvő a [0; 4] intervallumon, és csökkenő a $(-\infty; 0]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumokon. Tehát $x_{max} = 4$; $x_{min} = 0$. A következőt kapjuk: $f(4) = 8$; $f(0) = 0$.




**25.5. ábra**

A kapott eredmények alapján megrajzoljuk a keresett függvény grafikonját (25.6. ábra). ◀




**25.6. ábra**

Sorold fel a függvényvizsgálat lépéseit!

## GYAKORLATOK

**25.1.**•• Végezd el a függvényvizsgálatot, majd ábrázold grafikonját:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$!

**25.2.**•• Végezd el a függvényvizsgálatot, majd ábrázold grafikonját:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$!

## A 3. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

**Az $x$ argumentum növekménye az $x_0$ pontban**

$\Delta x = x - x_0$

**Az $f$ függvény növekménye az $x_0$ pontban**

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ vagy $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

**A függvény deriváltja**

Az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltjának azt a számot nevezzük, amely egyenlő az $f$ függvény $x_0$ pontbeli növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékével, amikor az argumentum növekménye a nullához tart.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{vagy} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

**A derivált geometriai értelmezése**

Az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő iránytényezője egyenlő lesz az $f$ függvény $x_0$ pontbeli deriváltjának az értékével.

**A derivált mechanikai értelmezése**

Ha az $y = s(t)$ a számegyenesen mozgó anyagi pont mozgásának képlete, akkor a pillanatnyi sebessége az adott $t_0$ időpontban egyenlő *az* $y = s(t)$ függvény $t_0$ pontbeli deriváltjával.

**A függvény differenciálhatósága**

Ha a függvénynek létezik deriváltja az adott pontban, akkor ebben a pontban a függvény differenciálható.

Ha az $f$ függvény differenciálható az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható.

**Az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének egyenlete**

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**A derivált kiszámításának szabályai**

| | |
|---|---|
| Az összeg deriváltja | $(f+g)' = f' + g'$ |
| A szorzat deriváltja | $(fg)' = f'g + g'f$ |
| A hányados deriváltja | $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ |

**A függvény állandóságának ismertetőjele**

Ha az $I$ intervallum minden egyes $x$ pontjában teljesül az $f'(x) = 0$ egyenlőség, akkor az $f$ függvény állandó lesz ezen az intervallumon.

**A függvény növekedésének ismertetőjele**

Ha az $I$ intervallum minden egyes $x$ pontjában teljesül az $f'(x) > 0$ egyenlőség, akkor az $f$ függvény növekvő ezen az intervallumon.

**A függvény csökkenésének ismertetőjele**

Ha az $I$ intervallum minden egyes $x$ pontjában teljesül az $f'(x) < 0$ egyenlőség, akkor az $f$ függvény csökkenő ezen az intervallumon.

**A pont környezete**

Az $(a; b)$ intervallumot, amely tartalmazza az $x_0$ pontot, az $x_0$ pont környezetének nevezzük.

**A függvény extrémumpontjai**

Az $x_0$ pontot az $f$ függvény maximumpontjának nevezzük, ha létezik az $x_0$ pontnak olyan környezete, amelyben minden $x$ pontra ebből az intervallumból teljesül a következő egyenlőtlenség: $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Az $x_0$ pontot az $f$ függvény minimumpontjának nevezzük, ha létezik az $x_0$ pontnak olyan környezete, amelyben minden $x$ pontra ebből az intervallumból teljesül a következő egyenlőtlenség: $f(x_0) \leqslant f(x)$.

A maximum és minimum pontokat extrémumpontoknak nevezzük.

**A maximum és minimum pontok ismertetőjelei**

Legyen az $f$ függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, és legyen az $x_0$ az intervallum egy pontja.

Ha minden $x$-re, ahol $x \in (a; x_0]$, teljesül az $f'(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenség, és minden $x$-re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség, akkor az $x_0$ pontot az $f$ függvény maximumpontjának nevezzük.

Ha minden $x$-re, ahol $x \in (a; x_0]$ teljesül az $f'(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség, és minden $x$-re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenség, akkor az $x_0$ pontot az $f$ függvény minimumpontjának nevezzük.

**A függvény tulajdonságainak vizsgálata:**

1. Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát.
2. Megvizsgáljuk a függvény paritását.
3. Meghatározzuk a zéruspontjait.
4. Meghatározzuk a függvény növekedési és csökkenési intervallumait.
5. Meghatározzuk extrémumpontjait és a függvény értékeit ezekben az extrémumpontokban.
6. Megállapítjuk a függvény más különleges tulajdonságait (periodicitását, a függvény viselkedését a különleges pontok környezetében stb.).

# 26. A 10. osztályos algebra és analízis elemei tananyagának ismétlő gyakorlatai

## 1. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik

**26.1.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;
3) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-5}$;
4) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+4}$;
5) $f(x)=\dfrac{7x+13}{x^2-7x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$!

**26.2.** Határozd meg a függvény értékkészletét:

1) $f(x)=\sqrt{x}+1$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-2$;
3) $g(x)=3-x^2$;
4) $f(x)=x^2+2$!

**26.3.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát, majd rajzold meg a függvény grafikonját:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$!

**26.4.** Határozd meg a függvény zérushelyeit:

1) $f(x)=\sqrt{x+7}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-4}$!

**26.5.** Vizsgáld meg a függvény paritását:

1) $f(x)=7x^6$;
2) $f(x)=3x^5-2x^7$;
3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;
4) $f(x)=x^2-x+1$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$!

**26.6.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}+\left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3$;
2) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$!

**26.7.** Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y=\sqrt[4]{3x-5}$; 2) $y=\sqrt[6]{-x}$; 3) $y=\sqrt[5]{x-4}$; 4) $y=\sqrt[8]{6x-x^2}$!

**26.8.** Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, ha $a\geqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{b^4}$, ha $b\leqslant 0$; 3) $\sqrt[7]{c^7}$!

**26.9.** Ábrázold a függvény grafikonját:

1) $y=\left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7$; 2) $y=\sqrt[7]{(x-2)^7}$; 3) $y=\left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8$; 4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$!

**26.10.** Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5}-\sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}$!

**26.11.** Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$; 3) $\sqrt[4]{-243y^5}$!

**26.12.** Hasonlítsd össze a számokat:

1) $\sqrt[6]{80}$ és $\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{6}$ és $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[4]{15}$ és $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[4]{27}$ és $\sqrt[3]{9}$!

**26.13.** Egyszerűsítsd a törtet:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$; 3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$!

**26.14.** Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $3^{1,2}\cdot 3^{-0,7}\cdot 3^{1,5}$; 4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;

2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot 11^{-\frac{3}{4}}\cdot 11^{\frac{1}{12}}$; 5) $0{,}125^{-\frac{1}{3}}+0{,}81^{-\frac{1}{2}}-0{,}216^{-\frac{2}{3}}$!

3) $36^{0,7}\cdot 6^{-0,4}$;

**26.15.** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$!

**26.16.** Oldd meg az egyenletet:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$; 5) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;

2) $\sqrt{6-x}=3x-4$; 6) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$;

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 7) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-5=0$;

4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$; 8) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$!

## 2. Trigonometrikus függvények

**26.17.** Hasonlítsd össze nullával a kifejezés értékét:

1) sin 168° cos 126°; 2) tg 206° cos (–223°)!

**26.18.** Határozd meg a kifejezés értékét:

1) sin 780°; 2) cos 1200°; 3) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$!

**26.19.** Számítsd ki a $\sin\alpha$ értékét, ha $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$!

**26.20.** Határozd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét: $2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha$!

**26.21.** Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi - \alpha)!$$

**26.22.** Adott: $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Határozd meg a $\cos(\alpha + \beta)$ értékét!

**26.23.** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$!

**26.24.** Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

2) $\sin 6\alpha\ \operatorname{tg} 3\alpha + 2\cos^2 3\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$!

**26.25.** Old meg az egyenletet:

1) $2\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0$;

2) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$;

3) $3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1$!

**26.26.** Határozd meg az egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}!$$

**26.27.** Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}!$$

**26.28.** Hány gyöke van a $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$ egyenletnek a $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ intervallumon?

**26.29.** Oldd meg az egyenletet:

1) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$;
2) $\cos 2x + \sin x = 0$;
3) $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;
4) $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$;
5) $\sin x + 2\cos x = 0$;
6) $\sin x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$!

## 3. A derivált és alkalmazása

**26.30.** Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = 3x^4 - 2x^2 + 5$;
2) $y = 4x^3 - \frac{2}{x}$;
3) $y = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + 7$;
4) $y = 5\sin x - 7\cos x$!

**26.31.** Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = (x^2 - 1)(x^5 + 2)$;
2) $y = x^3 \sin x$;
3) $y = \sqrt[3]{x}\cos x$;
4) $y = \frac{2x+3}{3x-2}$;
5) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$;
6) $y = \frac{x^2 - 3x}{\cos x}$!

**26.32.** Határozd meg az $f(x) = x^2 - 5x$ függvény azon pontjának abszcisszáját, melyben a függvény érintője az abszcisszatengely pozitív irányával 45°-os szöget alkot!

**26.33.** Határozd meg az $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ függvény érintőjének iránytényezőjét, amely a függvényt az ordinátatengely metszéspontjában érinti!

**26.34.** Állítsd fel az $f$ függvény $x_0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét, ha:

1) $f(x) = x^3 + x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$!

**26.35.** Állítsd fel annak az érintőnek az egyenletét, amelyet az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény görbéje és az abszcisszatengely metszéspontjába húztak!

**26.36.** A test mozgását a számegyenesen az $s(t) = t^2 + 3t - 2$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Mely $t$ időpontjában lesz a test sebessége 10 m/mp?

**26.37.** Bizonyítsd be, hogy az $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ függvény növekvő!

**26.38.** Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $y = 3x - x^3$;
2) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 3$;
3) $y = x + \frac{16}{x}$;
4) $y = x + \frac{4}{x^2}$;
5) $y = x^2(x - 3)$;
6) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$!

**26.39.** Határozd meg az $f$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumon:

1) $f(x) = x^3 - 3x$, $[-2; 0]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$!

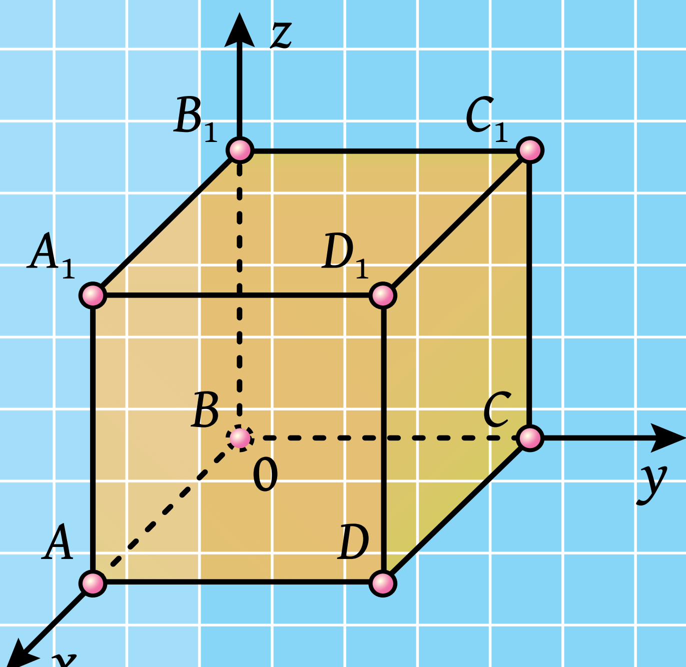
**26.40.** Add meg a 64-et két pozitív szám összegeként úgy, hogy a négyzeteik összege a legkisebb legyen?

**26.41.** Határozd meg azt a pozitív számot, amelyre igaz, hogy háromszoros négyzetének és köbének a különbsége a legnagyobb!

# 2. fejezet

# Térmértan





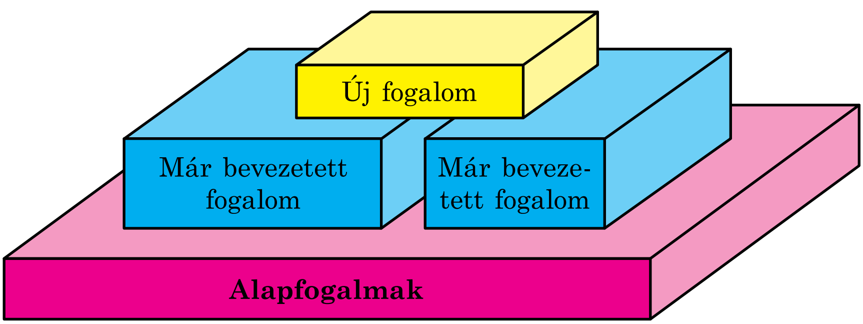
# PÁRHUZAMOSSÁG A TÉRBEN 4.§.

Ebben a paragrafusban a térmértan fogalmával, axiómáival és azok következményeivel fogtok megismerkedni. Alapismeretekre teszitek szert a soklapokról. Megismeritek két egyenes, az egyenes és a sík, valamint két sík kölcsönös helyzetét a térben. Elsajátítjátok a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásának szabályait.

## 27. A térmértan alapfogalmai. A térmértan axiómái

A matematika elsajátítása során már eddig is számtalan fogalommal ismerkedtetek meg. A síkmértanból például már jól ismeritek a négyszög, a trapéz, a kör stb. meghatározásait.

Bármilyen új fogalom meghatározása olyan ismert fogalmakra épül, amelyek tartalmával már tisztában vagyunk. Például vizsgáljuk meg a trapéz meghatározását: *Trapéznak nevezzük azt a négyszöget, melynek két oldala párhuzamos, a másik két oldala pedig nem párhuzamos*. Látjuk, hogy a trapéz definíciója olyan fogalmakra épül, mint a négyszög, a négyszög oldala, párhuzamos és nem párhuzamos oldalak stb. A meghatározás struktúrája a következő: *egy korábbira épülő új fogalom*. Nyilvánvaló, hogy létezniük kell olyan elsődleges fogalmaknak, melyet nem kell definiálni. Ezeket a fogalmakat **alapfogalmak**nak nevezzük (27.1. ábra).




**27.1. ábra**

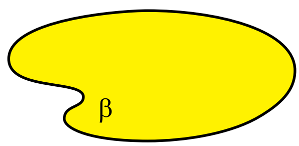
A síkmértanban nem adtuk meg a pont és az egyenes meghatározását. A már eddig megismert alapfogalmak mellett a **sík** a térmértan alapfogalmai közzé tartozik.

A víztározó sima vízfelszínének segítségével szemléletes képet alkothatunk a síkról. De a tükörfelület, a csiszolt asztal lapja stb. is segíti a síkról alkotott elképzeléseink kialakítását.

A sík fogalmára a síkmértanban úgy tekintettünk, hogy csak egy sík van, és minden alakzatot ebben a síkban vizsgáltunk. A térmértanban számtalan, **a térben** elhelyezkedő síkot vizsgálunk.

A síkokat a görög ábécé betűivel jelöljük: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... . A rajzokon a síkokat paralelogrammáknak (27.2. ábra) vagy egyéb síkrészeknek (27.3. ábra) ábrázoljuk.


**27.2. ábra**



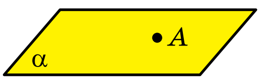

**27.3. ábra**

A sík az egyeneshez hasonlóan pontokból áll, vagyis a sík a pontok halmaza.

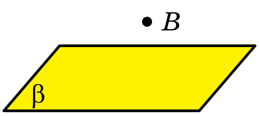
A pontok, az egyenesek és a síkok egymáshoz képest különbözőképpen helyezkedhetnek el a térben. Nézzünk néhány példát.

A 27.4. ábrán az $A$ pont az $\alpha$ síkhoz illeszkedik. Vagy másképpen fogalmazva: *az A pont az* $\alpha$ *síkra illeszkedik,* vagy *az* $\alpha$ *sík átmegy az A ponton.* Ezt röviden így jelöljük: $A \in \alpha$.

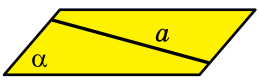
A 27.5. ábrán a $B$ pont nem illeszkedik a $\beta$ síkra. Ezt így írjuk fel: $B \notin \beta$.




**27.4. ábra**



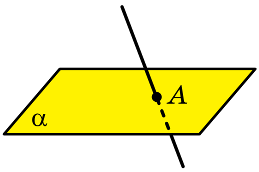

**27.5. ábra**



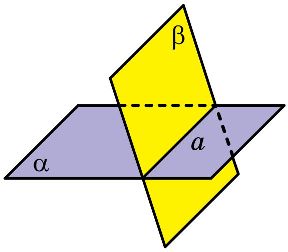

**27.6. ábra**

A 27.6. ábrán az $a$ egyenes az $\alpha$ síkhoz illeszkedik. Azt is mondjuk, hogy *az a egyenes az* $\alpha$ *síkra illeszkedik* vagy *az* $\alpha$ *sík az a egyenesen megy át.* Ezt röviden így írjuk le: $a \subset \alpha$.

Ha az egyenesnek és a síknak csak egy közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy az **egyenes metszi a síkot**. A 27.7. ábrán lévő $a$ egyenes az $A$ pontban metszi az α síkot. Ezt így írjuk fel: $a \cap \alpha = A$.




27.7. ábra




27.8. ábra

A továbbiakban, amikor *két pontról, három egyenesről, két síkról* stb. beszélünk, akkor ezeken különböző pontokat, különböző egyeneseket és különböző síkokat értünk.

Ha két síknak közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy **metszik egymást**.

A 27.8. ábrán az α és β sík láthatók, melyek az $a$ egyenesben metszik egymást. Ezt így írjuk le: $\alpha \cap \beta = a$.

A térmértan tanulmányozásának kezdetén még nem lehet más állításokra alapozva tételeket bizonyítani, amikor még nincsenek ilyen állítások. Ezért a térbeli pontokra, egyenesekre és síkokra vonatkozó első tulajdonságokat bizonyítás nélkül fogadunk el, amit **axiómá**nak nevezzük.

Azt is megjegyezzük, hogy a térmértan több axiómája megegyezik a síkmértanból már ismert axiómákkal. Például:

- *bármilyen is legyen az egyenes, léteznek olyan pontok, melyek illeszkednek az egyenesre, és léteznek olyan pontok, melyek nem*;
- *bármely két ponton keresztül csak egy egyenes húzható.*

Nem fogjuk bemutatni a térmértan szigorú axiomatikus felépítését. Csak néhány olyan állítást vizsgálunk meg, amelyek a síkok tulajdonságait mutatják be a térben, és ezekre alapozva építjük fel az iskolai térmértant.

**A1. axióma.** A tér bármely síkján teljesülnek a síkmértan axiómái.

Ha bármely síkon teljesülnek a síkmértan axiómái, akkor teljesülnek ezeknek az axiómáknak a következményei is, vagyis a síkmértan tételei is. Tehát a térmértanban alkalmazni lehet a síkbéli alakzatok összes ismert tulajdonságát.

**A2. axióma.** A tér bármely nem egy egyenesre illeszkedő három pontjára egy és csakis egy sík illeszkedik.

Ezt a tulajdonságot a 27.9–27.11. ábrák szemléltetik.

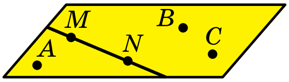
**27.9. ábra**

**27.10. ábra**

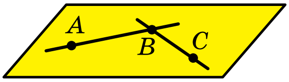
**27.11. ábra**

A fenti axiómákból következik, hogy a tér nem egy egyenesen fekvő három pontja egy síkot határoz meg, amelyre ezek a pontok illeszkedni fognak. Tehát a síkot bármely három pontjával meg lehet adni, ha ezek nem egy egyenesre illeszkednek. Például a 27.12. ábrán az $ABC$ sík látható.

Az $M \in ABC$ azt jelenti, hogy az $M$ pont illeszkedik az $ABC$ síkra. Az $MN \subset ABC$ azt jelenti, hogy az $MN$ egyenes az $ABC$ síkra illeszkedik (27.12. ábra).




**27.12. ábra**




**27.13. ábra**

**A3. axióma.** Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.

Például a 27.13. ábrán az $A$, $B$ és $C$ pontok az $ABC$ síkra illeszkednek. Ezt így is felírhatjuk: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Ebből az axiómából következik, hogyha az egyenes nem illeszkedik a síkra, akkor ezzel a síkkal nem lehet egynél több közös pontja.

Az **A3.** axiómában megfogalmazott állítást gyakran alkalmazzuk a gyakorlatban is, annak ellenőrzésére, hogy az adott felület sima-e (síkot alkot). Ehhez elegendő egy egyenes lécet különböző helyen ráhelyezni a felületre, és azt leellenőrizni, hogy a felület és a léc között van-e hézag (27.14. ábra).

**A4. axióma.** Ha két síknak van közös pontja, akkor egy egyenesben metszik egymást.

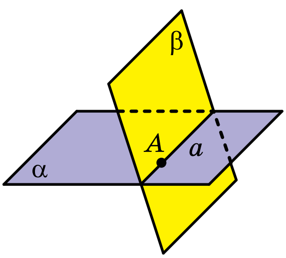
Ezt az axiómát illusztrálhatja egy kettéhajtott papírlap vagy a nyitott könyv (27.15. ábra).

27.14. ábra

27.15. ábra

**F e l a d a t .** Bizonyítsuk be, hogy amikor két síknak van közös pontja, akkor egy olyan egyenesben metszik egymást, amelyre ez a pont illeszkedni fog.

*Megoldás.* Legyen az $A$ pont az $\alpha$ és a $\beta$ síkok közös pontja, vagyis $A \in \alpha$ és $A \in \beta$ (27.16. ábra). Az **A4.** axióma szerint az $\alpha$ és a $\beta$ síkok metszik egymást. Legyen $\alpha \cap \beta = a$. Ekkor az $\alpha$ és a $\beta$ síkok összes közös pontja az $a$ egyenesre illeszkedik. Az $A$ pont az $\alpha$ és a $\beta$ síkok közös pontja, tehát $A \in a$. ◄

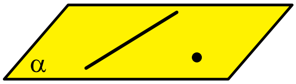



27.16. ábra

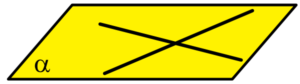
Az axiómán kívül más tulajdonságok is vannak, amelyek a pontok, az egyenesek és a síkok helyzetét írják le a térben. Az axiómákra támaszkodva be lehet bizonyítani a következő állításokat (a térmértan axiómáinak következményeit).

**27.1. t é t e l .** ***Egy egyeneshez egy rajta kívül elhelyezkedő ponton át egy és csakis egy sík fektethető*** (27.17. ábra).

**27.2. t é t e l .** ***Két egymást metsző egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik*** (27.18. ábra).




**27.17. ábra**




**27.18. ábra**

Az **A2.** axiómából és a 27.1., a 27.2. tételekből következik, hogy a síkot egyértelműen meghatározza:

1) *három nem egy egyenesre illeszkedő pont;*
2) *az egyenes és egy rajta kívül elhelyezkedő pont;*
3) *két egymást metsző egyenes.*

Tehát a sík meghatározásának három módját ismerjük.

1. Hogyan nevezzük a matematikában azokat az elsődleges fogalmakat, melyeknek nem adjuk meg a meghatározását?
2. Milyen alakzatok tartoznak a sztereometria alapfogalmai közé?
3. Milyen esetben mondjuk azt, hogy az egyenes metszi a síkot?
4. Milyen esetben mondjuk azt, hogy a síkok metszik egymást?
5. Fogalmazd meg az **A1.**, **A2.**, **A3.**, **A4** axiómákat!
6. A térmértan axiómáinak milyen következményeit ismered?
7. Nevezd meg a sík megadásának módjait!

## GYAKORLATOK

**27.1.°** Ábrázolj egy α síkot, egy $M$ pontot, amely illeszkedik rá, és egy $K$ pontot, amely nem illeszkedik a síkra. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

**27.2.°** Ábrázolj egy γ síkot és egy $a$ egyenest, amelyen a sík átmegy. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

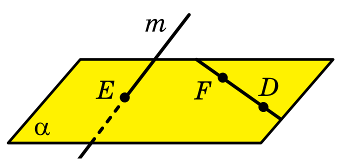
**27.3.°** Ábrázolj egy α síkot, egy $b$ egyenest, amely az $A$ pontban metszi az adott síkot. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával! A $b$ egyenesnek hány pontja illeszkedik az α síkra?

**27.4.°** Ábrázolj egy β és γ síkot, amelyek a $c$ egyenesben metszik egymást. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

**27.5.°** Írd fel a 27.19. ábrán látható pontok, egyenesek és síkok közötti összefüggéseket!

**27.6.•** Hány sík fektethető egy adott egyenesen és ponton át?

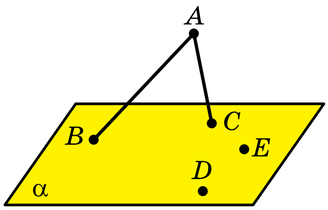
**27.7.•** Adottak az $A$, $B$ és $C$ pontok, melyek olyanok, hogy $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 7$ cm. Hány síkot fektethetünk az $A$, $B$ és $C$ pontokon át?



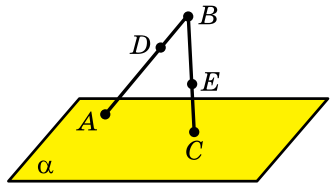

**27.19. ábra**

**27.8.**• Adottak a $D$, $E$ és $F$ pontok, melyek olyanok, hogy $DE = 2$ cm, $EF = 4$ cm, $DF = 6$ cm. Hány síkot fektethetünk a $D$, $E$ és $F$ pontokon át?

**27.9.**•• Az $AB$ és $AC$ egyenesek az $\alpha$ síkot a $B$ és $C$ pontokban metszik, a $D$ és $E$ pontok erre a síkra illeszkednek (27.20. ábra). Szerkeszd meg a $DE$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját!



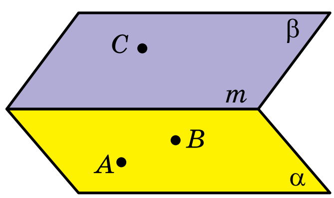

**27.20. ábra**



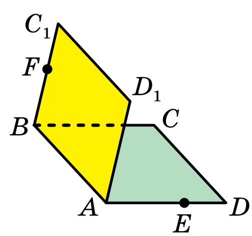

**27.21. ábra**

**27.10.**•• A $BA$ egyenes az $A$ pontban metszi az $\alpha$ síkot, a $BC$ egyenes pedig a $C$ pontban (27.21. ábra). Az $AB$ szakaszon jelöltünk egy $D$ pontot, a $BC$ szakaszon pedig egy $E$ pontot. Szerkeszd meg a $DE$ egyenes és az $\alpha$ sík metszéspontját!

**27.11.**•• Az $m$ egyenes az $\alpha$ és $\beta$ síkok metszésvonala (27.22. ábra). Az $A$ és $B$ pontok az $\alpha$ síkra illeszkednek, a $C$ pont pedig a $\beta$ síkra. Szerkeszd meg az $ABC$ sík metszésvonalát az $\alpha$, illetve a $\beta$ síkkal!




**27.22. ábra**




**27.23. ábra**

**27.12.**•• Az $ABCD$ és az $ABC_1D_1$ négyzetek nem egy síkban fekszenek (27.23. ábra). Az $AD$ szakaszon jelöltünk egy $E$ pontot, a $BC_1$ szakaszon pedig egy $F$-et. Szerkeszd meg a metszéspontjukat:

1) a $CE$ egyenesnek és az $ABC_1$ síknak;
2) az $FD_1$ egyenesnek és az $ABC$ síknak!

**27.13.**•• Hogyan tudja az asztalos két cérnaszállal ellenőrizni, hogy a négy asztalláb végpontjai egy síkhoz illeszkednek?

**27.14.**•• Az $M$ pont az $ABC$ és $BCD$ síkok közös pontja. Határozd meg a $BC$ szakasz hosszát, ha $BM = 4$ cm, $MC = 7$ cm!

**27.15.**•• A $K$ pont az $MNF$ és $MNE$ síkok közös pontja. Határozd meg az $MN$ szakasz hosszát, ha $MK = KN = 5$ cm!

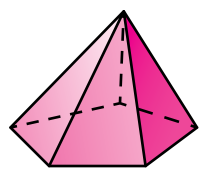
**ISMÉTLŐ GYAKORLAT**

**27.16.** Az $ABC$ egyenlő szárú háromszög ($AB = BC$) $BD$ magasságán felvettek egy $M$ pontot. Határozd meg az $AMC$ háromszög és az $ABC$ háromszög területeinek arányát, ha $BD = 12$ cm, $BM = 8$ cm!

## 28. Térbeli testek. A soklapokra vonatkozó alapismeretek

A térmértan tanulmányozása során a pontokon, egyeneseken és síkokon kívül a térbeli testekkel is foglalkozunk, vagyis olyan alakzatokkal, melynek nem minden pontja illeszkedik egy síkra. Már néhány térbeli testet megismertetek. Például a 28.1. ábrán a henger, a kúp és a gömb látható. Ezekkel a testekkel részletesebben a 11. osztályban fogtok megismerkedni.

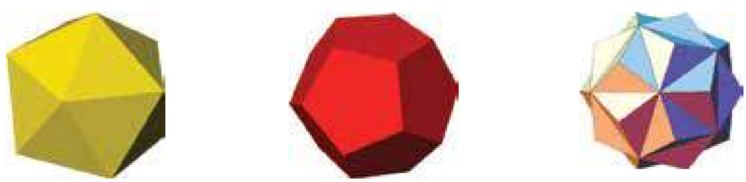
**28.1. ábra**



**28.2. ábra**

A 28.2. ábrán szintén egy már ismert térbeli test, a gúla látható. Ez a test a **soklapok** egyik fajtája.

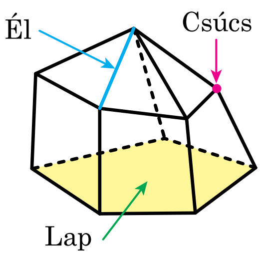
A 28.3. ábrán különböző soklapot láthattok.



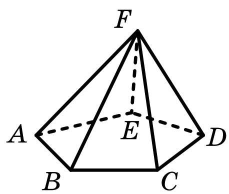
**28.3. ábra**

A **soklap felszíne** sokszögekből áll. Ezeket a **sokszög lapja**inak nevezzük. A sokszögek oldalait a **soklap éle**inek, a csúcsait pedig a **soklap csúcsa**inak nevezzük (28.4. ábra).

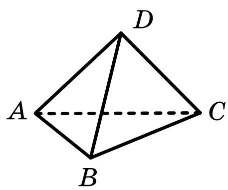
A 28.5. ábrán egy *FABCDE* ötoldalú gúla látható. A soklap felszíne öt db háromszögből áll, melyeket a **gúla oldallapjainak** nevezzük, és egy ötszögből, melyet a **gúla alapjá**nak nevezzük. Az *F* csúcsot, amely minden oldallap közös csúcsa **a gúla csúcsá**nak nevezzük. Az *FA*, *FB*, *FC*, *FD* és *FE* éleket **a gúla oldaléle**inek, az *AB*, *BC*, *CD*, *DE* és *EA* éleket a **gúla alapéle**inek nevezzük.




**28.4. ábra**



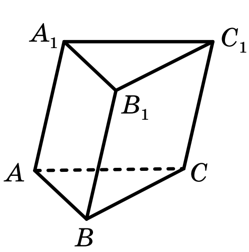

**28.5. ábra**



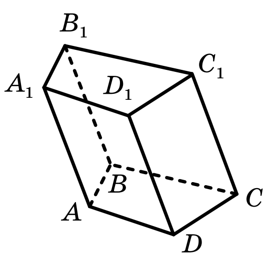

**28.6. ábra**

A 28.6. ábrán egy *ABCD* háromoldalú gúla látható. A háromoldalú gúlát **tetraéder**nek nevezzük.

A soklapoknak egy másik fajtája a **hasáb**. A 28.7. ábrán egy $ABCA_1B_1C_1$ hasáb látható. Ennek a soklapnak öt lapja van, melyek közül kettő egymással egybevágó háromszögek, ezek az *ABC* és $A_1B_1C_1$. Ezeket a **hasáb alapja**inak nevezzük. A hasáb többi lapja paralelogramma, amit a **hasáb oldallapja**inak nevezünk. Az $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ éleket a **hasáb oldaléle**inek nevezzük.



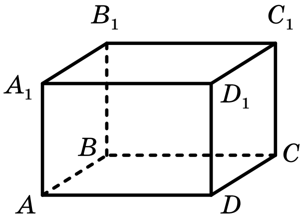

**28.7. ábra**



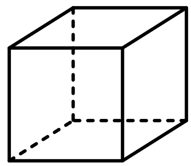

**28.8. ábra**

A 28.8. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasáb látható. A felszíne két egybevágó *ABCD* és $A_1B_1C_1D_1$ négyszögből (a hasáb alapjai) és négy paralelogrammából (a hasáb oldallapjai) áll.

Már megismerkedtetek a négyoldalú hasáb egy külön esetével, a **téglatesttel**. A 28.9. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. A téglatest minden lapja téglalap.




**28.9. ábra**



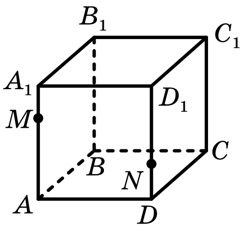
**28.10. ábra**

A **kocka** a téglatest egyik fajtája. A kocka minden lapja egybevágó négyzet (28.10. ábra).

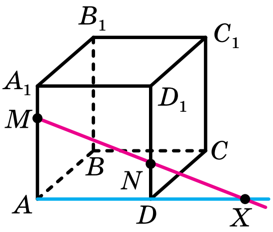
Azt a négyoldalú hasábot, melynek alapja paralelogramma, **paralelepipedon**nak nevezzük.

A 11. osztályban majd részletesebben megismerkedtek a soklapokkal és azok tulajdonságaival is.

**Feladat.** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $AA_1$ és $DD_1$ élein megfelelően $M$ és $N$ pontokat jelöltünk úgy, hogy $AM \neq DN$ (28.11. ábra). Szerkesszük meg az $MN$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját!




**28.11. ábra**




**28.12. ábra**

*Megoldás*. Az $M$ és $N$ pontok az $AA_1D_1$ síkra illeszkednek. Ekkor az **A3**. axióma alapján az $MN$ egyenes is illeszkedik erre a síkra. Hasonlóan az $AD$ egyenes is az $AA_1D_1$ síkra illeszkedik. A síkmértanból tudjuk, hogyha az egyenesek egy síkra illeszkednek, akkor vagy párhuzamosak, vagy metszik egymást. Mivel az $AM \neq DN$, ezért az $AD$ és $MN$ egyenesek metszik egymást. Legyen $X$ a metszéspontjuk (28.12. ábra).

Az $A$ és $D$ pontok az $ABC$ síkra illeszkednek. Ekkor az **A3**. axióma alapján az $AD$ egyenes is illeszkedik erre a síkra. Az $X$ pont az $AD$ egyenesre illeszkedik. Tehát az $X$ pont az $ABC$ síkra is illeszkedik. Mivel az $X$ pont az $MN$ egyenesre is illeszkedik, ezért az $MN$ egyenes az $ABC$ síkot az $X$ pontban metszi. ◄

**1.** Sorolj fel néhány térbeli testet!

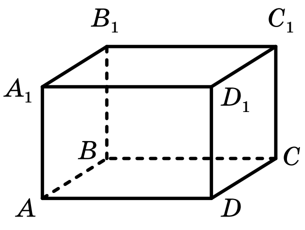
**2.** Milyen alakzatokból áll a soklap felszíne? Hogyan nevezzük ezeket?

**3.** Mit nevezünk a soklap éleinek? A soklap csúcsainak?

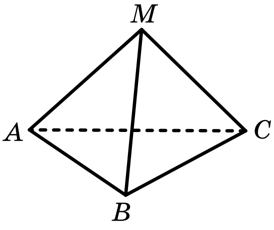
**4.** Milyen soklap típusokat ismersz? Ismertest őket!

## GYAKORLATOK

**28.1.°** A 28.13. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. Nevezd meg:
1) a téglatest alapját;
2) a téglatest oldallapjait;
3) a téglatest oldaléleit;
4) a téglatest alsó alapéleit!




**28.13. ábra**




**28.14. ábra**

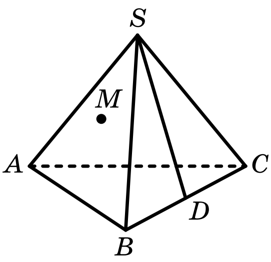
**28.2.°** A 28.14. ábrán az $MABC$ gúla látható. Nevezd meg:
1) a gúla alapját;
2) a gúla csúcsát;
3) a gúla oldallapjait;
4) a gúla oldaléleit;
5) a gúla alapéleit!

**28.3.•** Az $ABCS$ tetraéder $BC$ élén jelöltünk egy $D$ pontot. Melyik egyenes lesz az: 1) $ASD$ és $ABC$; 2) $ASD$ és $BSC$; 3) $ASD$ és $ASC$ síkok metszésvonala?

**28.4.**• Az $M$ pont az $ABCS$ tetraéder $ASC$ lapjára illeszkedik, a $D$ pont pedig a $BC$ élre (28.15. ábra). Szerkeszd meg az $ABC$ sík valamint az $SD$ egyenesre és az $M$ pontra illeszkedő sík metszésvonalát!

**28.5.**• Az $ABCDS$ gúla $SA$ és $SB$ oldalélein megfelelően jelöltük az $M$ és $K$ pontokat. Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját, ha az $MK$ és az $AB$ egyenesek nem párhuzamosak!

**28.6.**• Az $ABCDS$ gúla $SA$ és $SC$ oldalélein megfelelően jelöltük az $M$ és $K$ pontokat. Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját, ha az $MK$ és az $AC$ egyenesek nem párhuzamosak!

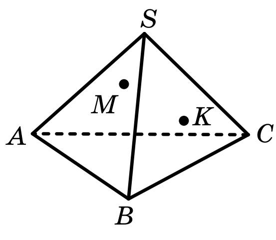



**28.15. ábra**

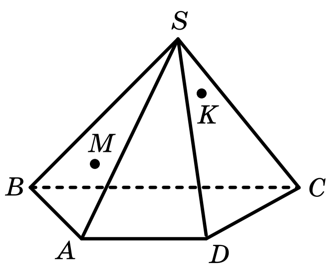
**28.7.**• Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Szerkeszd meg azokat az egyeneseket, amelyek mentén az $A$, $C$ és $B_1$ pontokra illeszkedő sík metszi a kocka lapjait!

**28.8.**• Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb és egy sík, amely az $AC_1$ és az $AB$ egyenesekre illeszkedik. Szerkeszd meg azokat az egyeneseket, amelyek mentén a sík metszi a hasáb lapjait!

**28.9.**•• Az $M$ pont az $ABCS$ tetraéder $ASB$ lapjára illeszkedik, a $K$ pedig a $BSC$ lapra (28.16. ábra). Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját!




**28.16. ábra**



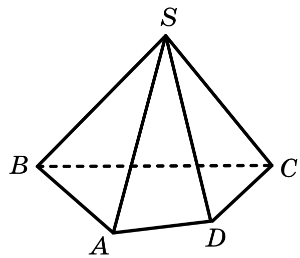

**28.17. ábra**

**28.10.**•• Az $M$ pont az $ABCDS$ gúla $ASB$ lapjára illeszkedik, a $K$ pedig a $CSD$ lapra (28.17. ábra). Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $ABC$ sík metszéspontját!

**28.11.**•• Adott az *ABCDS* gúla (28.18. ábra). Szerkeszd meg az *ASB* és a *CSD* síkok metszésvonalát!

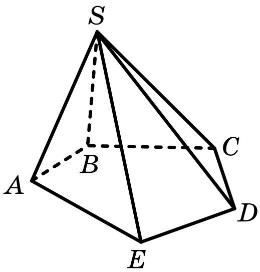
**28.12.**•• Adott az *ABCDES* gúla (28.19. ábra). Szerkeszd meg az *ASE* és a *BSC* síkok metszésvonalát!

**28.13.**•• Az *ABCD* tetraéder *AB* és *CD* élein megfelelően jelölték az *E* és *F* pontokat. Szerkeszd meg az *AFB* és *CED* síkok metszésvonalát!

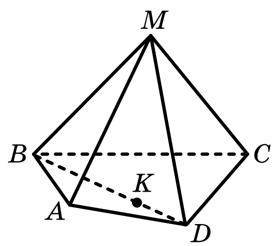



**28.18. ábra**

**28.14.**•• Adott az *ABCDM* gúla, ahol a *K* pont a *BD* szakaszra illeszkedik (28.20. ábra). Szerkeszd meg az *MCK* és *MAB* síkok metszésvonalát!




**28.19. ábra**




**28.20. ábra**

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

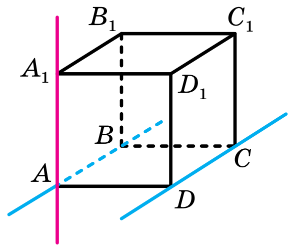
**28.15.** Az egyenlő szárú trapéz átlója a trapézt két egyenlő szárú háromszögre osztja. Határozd meg a trapéz szögeit!

# 29. Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

A síkmértanból már tudjátok, hogy két egyenest egymás metszőnek nevezzük, ha csak egy közös pontjuk van. Ugyanez a meghatározás vonatkozik a térmértanban az egymást metsző egyenesekre is.

Azt is tudjátok, hogy az egyeneseket akkor nevezzük párhuzamosnak, amikor nem metszik egymást. Vajon igaz lesz-e ez a definíció a térmértanban?

Vizsgáljuk meg a 29.1. ábrán lévő $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát. Az $AB$ és az $AA_1$ egyenesek közül egyiknek sincs közös pontja a $DC$ egyenessel. Az $AB$ és $DC$ egyenesek viszont egy síkra illeszkednek, ez az $ABC$ sík, az $AA_1$ és $DC$ egyenesek viszont nem illeszkednek egy síkra, vagyis nem létezik olyan sík, amely ezeket az egyeneseket tartalmazná.




**29.1. ábra**

A fenti példa azt mutatja, hogy a térmértanban két, közös ponttal nem rendelkező egyenes elhelyezkedésének két esete lehetséges: az egyenesek egy síkban vannak, vagy nem fekszenek egy síkban. Mindkét esetre megadjuk a megfelelő meghatározást.

**Definíció. Két egyenest a térben párhuzamosnak nevezzük, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.**

Az $a$ és $b$ egyenesek párhuzamosságát így jelöljük: $a \parallel b$.

**Definíció. Két egyenest kitérőnek nevezzük, ha nem egy síkra illeszkednek.**

Például a 29.1. ábrán az $AB$ és $DC$ egyenesek párhuzamosak, az $AA_1$ és $DC$ egyenesek pedig kitérők lesznek.

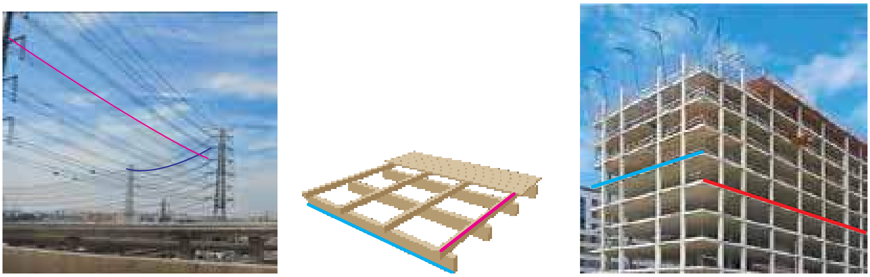
Nemzetközi Kulturális és Művészeti központ, Kijev

Szálfaerdő

Faház

**29.2. ábra**

Az épület oszlopai, az erdő fái, az egymásra helyezett farönkök (29.2. ábra) olyan párhuzamos egyenesek, amelyekkel a mindennapokban találkozunk.

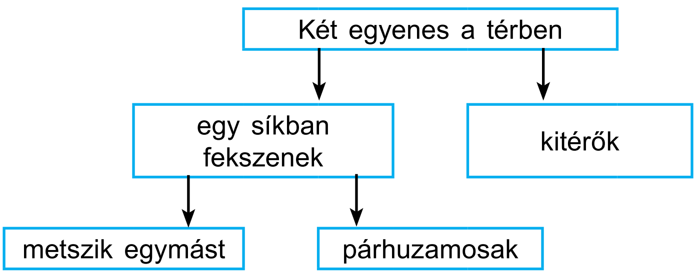


**29.3. ábra**

Az elektromos vezetékek, az épület szerkezeti elemei (29.3. ábra) olyan kitérő egyenesek, amelyekkel a mindennapokban találkozunk.

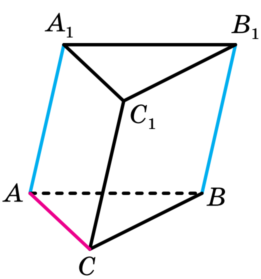
Tehát az egyenesek térbeli elhelyezkedésére három eset lehetséges (29.4. ábra):

1) az egyenesek metszik egymást;
2) az egyenesek párhuzamosak;
3) az egyenesek kitérők.




**29.4. ábra**

Két szakaszt **párhuzamosnak** (**kitérőnek**) nevezzük, ha párhuzamos (kitérő) egyeneseken fekszenek.




**29.5. ábra**

Például az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb $AA_1$ és $BB_1$ élei (29.5. ábra) párhuzamosak, az $AC$ és $BB_1$ élei pedig kitérők lesznek.

**29.1. tétel.** ***Két párhuzamos egyenesen keresztül egy és csakis egy sík fektethető.***

*Bizonyítás.* Legyen adva az $a$ és a $b$ párhuzamos egyenes. Bebizonyítjuk, hogy létezik egy olyan $\alpha$ sík, hogy $a \subset \alpha$ és $b \subset \alpha$.

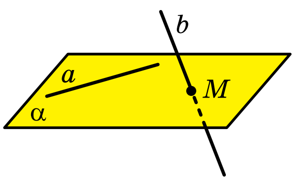
Az $a$ és $b$ egyeneseket tartalmazó $\alpha$ sík létezése a párhuzamos egyenesek definíciójából következik.

Ha feltételezzük, hogy még egy olyan sík létezik, amely az $a$ és $b$ egyeneseket tartalmazza, akkor az $a$ egyenesen és a $b$ egyenes valamelyik pontján át két különböző sík fektethető, ami ellentmond a 27.1. tételnek. ◀

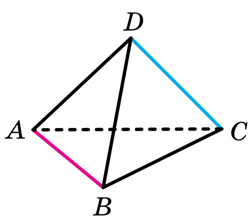
A 27. pontban három módszert ismertettünk a sík megadására. A 29.1. tételre úgy is tekinthetünk, mint a sík megadásának egy újabb esetére, amit két párhuzamos egyenes segítségével adunk meg.

Két egyenes párhuzamosságának megállapítását a síkon, a síkmértanból ismert két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei alapján tudjuk meghatározni. De hogyan állapítjuk azt meg, hogy a két egyenes kitérő? Erre a kérdésre a választ a következő tétel adja meg.

**29.2. tétel (a kitérő egyenesek ismertetőjele).** ***Ha két egyenes közül az egyik egyenes egy síkban fekszik, a másik pedig egy olyan pontban metszi ezt a síkot, amely nem illeszkedik az első egyenesre, akkor az adott egyenesek kitérők lesznek*** (29.6. ábra).




**29.6. ábra**




**29.7. ábra**

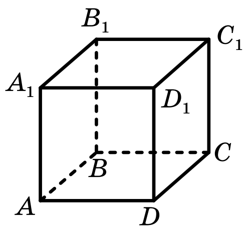
A 29.7. ábrán az $ABCD$ tetraéder $AB$ és $DC$ élei kitérők. Valóban, a $DC$ egyenes az $ABC$ síkot egy olyan $C$ pontban metszi, amely nem illeszkedik az $AB$ egyenesre. Tehát a kitérő egyenesek definíciója alapján az $AB$ és a $DC$ egyenesek kitérők lesznek.

?

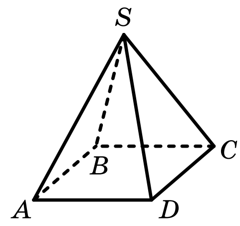
1. A tér mely két egyenesét nevezzük párhuzamosaknak? Kitérőknek?
2. Milyen esetei vannak két egyenes kölcsönös helyzetének a térben?
3. Milyen két szakaszt nevezünk párhuzamosaknak? Kitérőknek?
4. Fogalmazd meg a két párhuzamos egyenes által megadott síkról szóló tételt!
5. Fogalmazd meg a kitérő egyenesek ismertetőjelét!

## GYAKORLATOK

**29.1.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (29.8. ábra). Nevezd meg azokat az éleit, amelyek:
1) párhuzamosak a $CD$ éllel; 2) kitérők a $CD$ éllel!




**29.8. ábra**



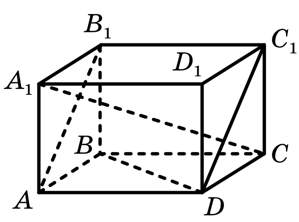

**29.9. ábra**

**29.2.°** Az osztályterem berendezési tárgyai segítségével nevezz meg kitérő egyeneseket!

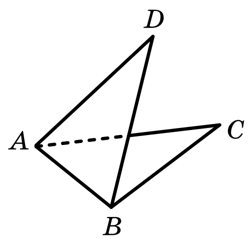
**29.3.°** Adott az $ABCDS$ gúla (29.9. ábra). Nevezd meg az $SA$ élével kitérő éleit!

**29.4.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest (29.10. ábra). Nevezd meg a következő egyenesek kölcsönös helyzetét:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $BC$ és $A_1C$; | 3) $BD$ és $CC_1$; | 5) $DC_1$ és $BB_1$; |
| 2) $AB$ és $C_1D_1$; | 4) $AB_1$ és $DC_1$; | 6) $AA_1$ és $CC_1$! |




**29.10. ábra**




**29.11. ábra**

**29.5.°** Igaz-e a következő állítás:
1) két, egymással nem párhuzamos egyenesnek van közös pontja;
2) két, nem kitérő egyenes egy síkban fekszik;
3) két egyenes kitérő lesz, ha nem metszik egymást és nem párhuzamosak?

**29.6.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (29.8. ábra). Bizonyítsd be, hogy $AA_1$ és $BC$ egyenesek kitérők!

**29.7.°** Az $ABC$ és $ADB$ háromszögek különböző síkokban fekszenek (29.11. ábra). Milyen az $AD$ és $BC$ egyenesek kölcsönös helyzete? Magyarázd meg a válaszodat!

**29.8.**• Milyen lehet a $b$ és $c$ egyenesek kölcsönös helyzete, ha:
1) az $a$ és $b$ egyenesek metszik egymást, az $a$ és $c$ egyenesek pedig párhuzamosak;
2) az $a$ és $b$ egyenesek párhuzamosak, az $a$ és $c$ egyenesek pedig metszik egymást?

**29.9.**• Hány síkot fog megadni három, páronként párhuzamos egyenes? Készíts rajzot is!

**29.10.**• Az $AB$ szakasz $A$ végpontja az $\alpha$ síkhoz illeszkedik. A $B$ és az $AB$ szakaszra illeszkedő $C$ ponton át párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az $\alpha$ síkot megfelelően a $B_1$ és $C_1$ pontokban metszik.
1) Határozd meg a $BB_1$ szakaszt, ha a $C$ pont az $AB$ szakasz felezőpontja és $CC_1 = 5$ cm!
2) Határozd meg a $CC_1$ szakasz hosszát, ha az $AC : BC = 3 : 4$ és $BB_1 = 28$ cm!

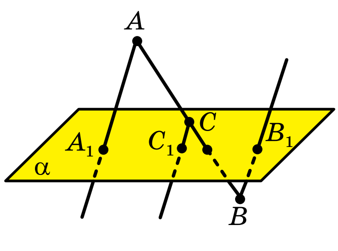
**29.11.**• A $CD$ szakasz $C$ végpontja a $\beta$ síkra illeszkedik. A $CD$ szakaszon egy $E$ pontot jelöltünk úgy, hogy $CE = 6$ cm, $DE = 9$ cm. A $D$ és $E$ pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettek, amelyek a $\beta$ síkot megfelelően a $D_1$ és $E_1$ pontokban metszik. Határozd meg a $DD_1$ szakasz hosszát, ha $EE_1 = 12$ cm!

**29.12.**•• Az $\alpha$ síkot nem metsző $AB$ szakaszon egy $C$ pontot jelöltünk úgy, hogy az $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm. Az $A$, $B$ és $C$ pontokon át párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek az $\alpha$ síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban metszik. Határozd meg az $A_1C_1$ szakasz hosszát, ha $B_1C_1 = 10$ cm!

**29.13.**•• A $C$ pont az $AB$ szakasz felezőpontja, amely nem metszi a $\beta$ síkot. Az $A$, $B$ és $C$ pontokon át párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek a $\beta$ síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban metszik. Határozd meg az $AA_1$ szakasz hosszát, ha $BB_1 = 18$ cm, $CC_1 = 15$ cm!

**29.14.*** Az $\alpha$ síkot metsző $AB$ szakasz végpontjain és a $C$ felezőpontján keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az $\alpha$ síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban metszik (29.12. ábra). Határozd meg a $CC_1$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 8$ cm!

**29.15.*** Az $ABC$ háromszögnek és az $\alpha$ síknak nincsenek közös pontjaik. A $BM$ szakasz az $ABC$ háromszög súlyvonala, az $O$ pont pedig a $BM$ szakasz felezőpontja lesz. Az $A$, $B$, $C$, $M$ és $O$ pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az $\alpha$ síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$, $C_1$, $M_1$ és $O_1$ pontokban metszik. Határozd meg a $BB_1$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 17$ cm, $CC_1 = 13$ cm, $OO_1 = 12$ cm!

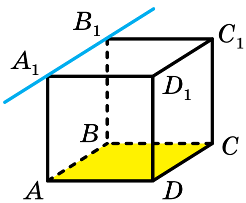



**29.12. ábra**

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**29.16.** Az $E$ pont az $ABC$ háromszög $BM$ súlvonalának felezőpontja. Az $AE$ egyenes a $BC$ oldalt egy $K$ pontban metszi. Milyen arányban osztja a $K$ pont a $BC$ szakaszt, ha a felosztás arányát a $B$ csúcstól kezdjük számolni?

# 30. Az egyenes és a sík párhuzamossága




**30.1. ábra**

Már ismeritek az egyenes és a sík kölcsönös helyzetének két lehetséges módját:

1) az egyenes illeszkedik a síkra, vagyis az egyenes minden pontja illeszkedik erre a síkra;
2) az egyenes metszi a síkot, vagyis az egyenesnek és a síknak csak egy közös pontja van.

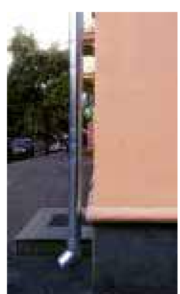
Érthető, hogy egy harmadik eset is fennáll, amikor az egyenesnek és a síknak nincsenek közös pontjaik. Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $A_1B_1$ élének az $ABC$ síkkal nincs közös pontja (30.1. ábra).

**Definíció.** **Az egyenest és a síkot** ***párhuzamosnak*** **nevezzük, ha nincs közös pontjuk.**

Az $a$ egyenes és az $\alpha$ sík párhuzamossságát így jelöljük: $a \parallel \alpha$**.** Azt is mondhatjuk, hogy az $a$ egyenes párhuzamos az $\alpha$ síkkal, vagy azt, hogy az $\alpha$ sík párhuzamos az $a$ egyenessel.

Az egyenest, amely párhuzamos a síkkal, szemléltetni lehet néhány sportszerrel, például a párhuzamos korláttal, melynek rúdjai párhuzamosak a padló síkjával (30.2. ábra). Másik példa az épület falával párhuzamos lefolyócső, amely az ereszcsatornában összegyűlő vizet vezeti le (30.3. ábra).

**30.2. ábra**



**30.3. ábra**

A meghatározás alapján elég nehéz megállapítani, hogy az egyenes és a sík párhuzamos-e. Sokkal célravezetőbb alkalmazni a következő tételt.

**30.1. tétel (az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele).** ***Ha a síkhoz nem illeszkedő egyenes párhuzamos egy síkhoz illeszkedő egyeneshez, akkor magával a síkkal is párhuzamos lesz.***

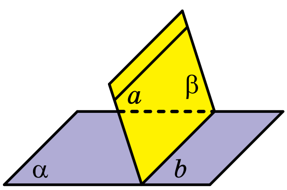
Például a 30.1. ábrán az $A_1B_1$ és az $AB$ egyenesek az $ABB_1A_1$ négyzet szemközti oldalát tartalmazzák. Ezért ezek az egyenesek párhuzamosak. Mivel $AB \subset ABC$, ezért az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele alapján $A_1B_1 \parallel ABC$.

A szakasz akkor **párhuzamos a síkkal**, ha egy olyan egyeneshez illeszkedik, amely párhuzamos az adott síkkal. Például a kocka $AB$ éle párhuzamos a $CDD_1$ síkkal (30.1. ábra).

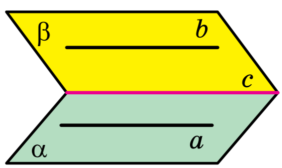
A síkmértanból ismert ismertetőjel alapján már meg tudjátok állapítani két egyenes párhuzamosságát. Vizsgáljunk meg egy tételt, amely két egyenes párhuzamosságának elégséges feltételét adja meg a térben.

**30.2. tétel.** ***Ha a sík illeszkedik egy adott egyeneshez, amely párhuzamos egy másik síkkal és metszi ezt a síkot, akkor a síkok metszésvonala párhuzamos az adott egyenessel.***

A 30.4. ábrán az $a$ egyenes párhuzamos az $\alpha$ síkkal. A $\beta$ sík illeszkedik az $a$ egyeneshez és az $\alpha$ síkot egy $b$ egyenesben metszi. Ekkor $b \parallel a$.




**30.4. ábra**



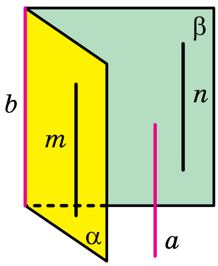

**30.5. ábra**

**30.3. tétel.** ***Ha két párhuzamos egyenesre síkokat fektetünk, és ezek a síkok az eredeti egyenesektől különböző egyenesben metszik egymást, akkor a metszésvonal párhuzamos lesz a két adott egyenessel.***

A 30.5. ábrán az $a$ és $b$ egyenesek párhuzamosak, az $\alpha$ sík az $a$ egyenesre illeszkedik, a $\beta$ sík pedig a $b$ egyenesre, az $\alpha \cap \beta = c$. Ekkor $c \parallel a$ és $c \parallel b$.

**30.4. tétel.** ***Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.***

**Feladat.** Bizonyítsuk be, hogyha az egyenes párhuzamos két egymást metsző síkkal, akkor metszőegyenesükkel is párhuzamos.




**30.6. ábra**

*Megoldás.* Legyen az $a$ egyenes és az $\alpha$ és $\beta$ síkok olyanok, hogy $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (30.6. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $a \parallel b$.

Az $\alpha$ és $\beta$ síkokban találunk olyan $m$ és $n$ egyeneseket, hogy $m \parallel a$ és $n \parallel a$. Ha az $m$ és $n$ egyenesek közül legalább az egyik egybeesik a $b$ egyenessel, akkor az állítás bizonyított lesz. Ha az $m$ és $n$ egyenesek mindegyike különbözik a $b$ egyenestől, akkor a 30.4. tétel alapján azt kapjuk, hogy $m \parallel n$.

Alkalmazzuk a 30.3. tételt, és arra a következtetésre jutunk, hogy $b \parallel n$. Viszont $n \parallel a$, tehát $a \parallel b$. ◄

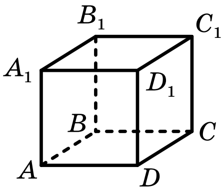
1. Milyen esetben nevezzük az egyenest és a síkot párhuzamosnak?
2. Fogalmazd meg az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjelét!
3. Milyen szakasz lesz párhuzamos a síkkal?
4. Fogalmazd meg azokat a tételeket, amelyek az elégséges feltételét adják meg az egyenesek párhuzamosságának a térben!

## GYAKORLATOK

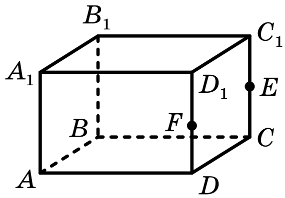
**30.1.°** Nevezd meg a környezetedben lévő tárgyak közül azokat, melyek az egyenes és a sík párhuzamosságát illusztrálják!

**30.2.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (30.7. ábra). Melyik lap síkja lesz párhuzamos a következő éllel: 1) $AD$; 2) $C_1D_1$; 3) $BB_1$?

**30.3.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest (30.8. ábra), ahol az $E$ és $F$ pontok megfelelően a $CC_1$ és $DD_1$ élek felezőpontjai. Írd fel a téglatest azon lapjait, melyekkel a következő egyenes párhuzamos: 1) $AB$; 2) $CC_1$; 3) $AC$; 4) $EF$!




**30.7. ábra**




**30.8. ábra**

**30.4.°** Az $a$ egyenes párhuzamos az $\alpha$ síkkal. Igaz-e az állítás, hogy az $a$ egyenes párhuzamos az $\alpha$ síkra illeszkedő bármely egyenessel?

**30.5.°** Adott az $a$ és $b$ egyenes, valamint az $\alpha$ sík. Igaz-e a következő állítás:
1) ha $a \parallel \alpha$ és $b \parallel \alpha$, akkor $a \parallel b$;
2) ha $a \parallel b$ és $b \subset \alpha$, akkor $a \parallel \alpha$?

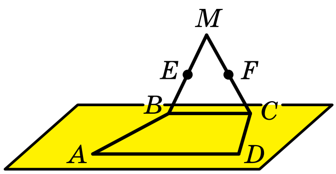
**30.6.°** Az $a$ egyenes és az $\alpha$ sík párhuzamosak a $b$ egyenessel. Milyen lehet az $a$ egyenes és a $\alpha$ sík kölcsönös helyzete?

**30.7.°** Az $a$ és $b$ egyenesek metszik egymást, és az $\alpha$ sík párhuzamos az $a$ egyenessel. Milyen lehet az $b$ egyenes és az $\alpha$ sík kölcsönös helyzete?

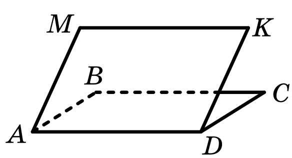
**30.8.•** Az $M$ és $K$ pontok az $ABC$ háromszög $AB$ és $BC$ megfelelő oldalainak a felezőpontjai. A $D$ pont nem illeszkedik az $ABC$ síkra. Bizonyítsd be, hogy az $MK \parallel ADC$!

**30.9.•** Az $E$ és $F$ pontok az $ABCD$ trapéz $AB$ és $CD$ megfelelő szárainak a felezőpontjai. Az $EF$ egyenes az $\alpha$ síkra illeszkedik, amely nem a trapéz síkja. Bizonyítsd be, hogy az $AD$ és $BC$ egyenesek párhuzamosak az $\alpha$ síkkal!

**30.10.•** A $BC$ és $AD$ szakaszok az $ABCD$ trapéz alapjai. A $BMC$ háromszög és az $ABCD$ trapéz nem egy síkra illeszkednek (30.9. ábra). Az $E$ pont a $BM$ szakasz felezőpontja, az $F$ pont pedig a $CM$ szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $EF \parallel AD$!



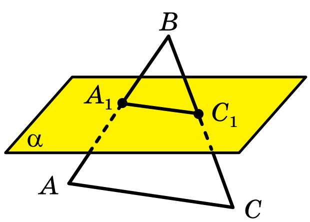
**30.9. ábra**



**30.10. ábra**

**30.11.•** Az $ABCD$ és $AMKD$ paralelogrammák nem egy síkra illeszkednek (30.10. ábra). Bizonyítsd be, hogy a $BMKC$ négyszög paralelogramma lesz!

**30.12.•** Az $\alpha$ sík az $ABC$ háromszög $AC$ oldalával párhuzamos, és az $AB$ és $BC$ oldalakat megfelelően az $A_1$ és $C_1$ pontokban metszi (30.11. ábra). Határozd meg az $A_1C_1$ szakasz hosszát, ha $AC = 18$ cm és $AA_1 : A_1B = 7 : 5$!



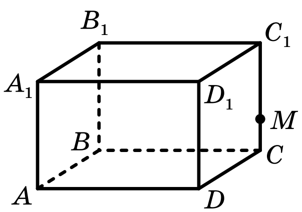
**30.11. ábra**

**30.13.•** Az $\alpha$ sík az $ABC$ háromszög $AB$ oldalával párhuzamos, és az $AC$, illetve $BC$ oldalakat megfelelően az $E$ és $F$ pontokban metszi. Határozd meg az $AE : EC$ arányt, ha $CF : CB = 3 : 11$!

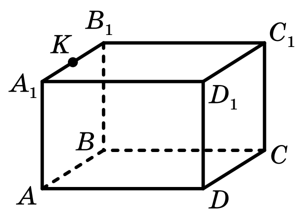
**30.14.••** Az $ABC$ háromszög $A$ és $C$ csúcsa az $\alpha$ síkra illeszkedik, a $B$ csúcs pedig nem illeszkedik ehhez a síkhoz. Az $AB$ és $BC$ oldalakon megfelelően jelölték az $E$ és $F$ pontokat úgy, hogy $BA : BE = BC : BF$. Bizonyítsd be, hogy az $EF$ egyenes párhuzamos az $\alpha$ síkkal!

**30.15.••** Az $M$ pont az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának a felezőpontja. Az $\alpha$ sík illeszkedik az $M$ pontra és párhuzamos az $AC$ egyenessel, a $BC$ oldalt pedig a $K$ pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a $K$ pont a $BC$ oldal felezőpontja! Határozd meg az $AMKC$ négyszög területét, ha az $ABC$ háromszög területe 28 cm$^2$!

**30.16.••** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $CC_1$ élén jelöltünk egy $M$ pontot (30.12. ábra). Szerkeszd meg a következő síkok metszésvonalait: 1) $ADM$ és $BB_1C_1$; $AA_1M$ és $DCC_1$!



**30.12. ábra**



**30.13. ábra**

**30.17.••** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $A_1B_1$ élén jelöltünk egy $K$ pontot (30.13. ábra). Szerkeszd meg a következő síkok metszésvonalait: 1) $CC_1K$ és $ABB_1$; 2) $CDK$ és $ABB_1$!

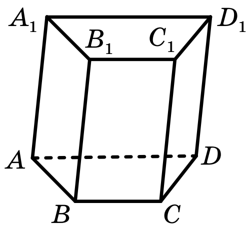
## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**30.18.** A derékszögű trapéz szárai úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5, az alapjaik hosszainak különbsége pedig 16 cm. Határozd meg a trapéz területét, ha a kisebbik átlója 13 cm!

# 31. A síkok párhuzamossága

Vizsgáljuk meg két sík kölcsönös helyzetének eseteit.

Már tudjátok, hogy két síknak lehet közös pontjuk, vagyis metszhetik egymást. Olyan eset is lehet, hogy a két síknak nincsenek közös pontjaik. Például az $ABC$ és az $A_1B_1C_1$ síkoknak, melyek egy hasáb alapjai, nincsenek közös pontjaik (31.1. ábra).




**31.1. ábra**

**Definíció. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.**

Ha az α és a β síkok párhuzamosak, akkor azt így jelöljük: $\alpha \parallel \beta$. Azt is mondhatjuk, hogy az α sík párhuzamos a β síkkal, vagy a β sík párhuzamos az α síkkal.

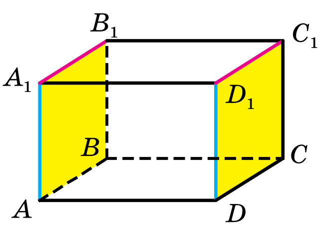
A szoba mennyezete és a padlója, vagy az akvárium vízfelülete és az alja (31.2. ábra) a párhuzamos síkok szemléletes példái.

**31.2. ábra**

A párhuzamos síkok definíciójából következik, hogy *bármilyen egyenes, amely a párhuzamos síkok közül az egyikre illeszkedik párhuzamos lesz a másik síkkal.*

Azokban az esetekben, amikor meg kell állapítani, hogy két sík párhuzamos-e, érdemes a következő tételt alkalmazni.

**31.1. tétel (a párhuzamos síkok ismertetőjele).** ***Ha egy sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos egy másik sík két egyenesével, akkor ezek a síkok is párhuzamosak lesznek.***



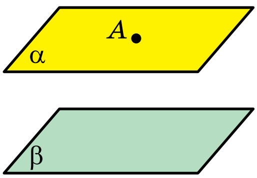

**31.3. ábra**

Például a 31.3. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. Adott, hogy $AA_1 \parallel DD_1$ és $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Ekkor a síkok párhuzamosságának ismertetőjele alapján az $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

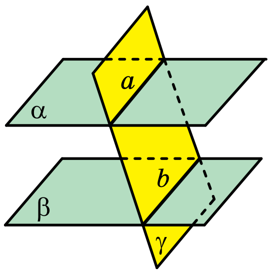
Azt mondhatjuk, hogy **két sokszög akkor párhuzamos**, ha párhuzamos síkokhoz illeszkednek. Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $AA_1B_1B$ és a $DD_1C_1C$ lapjai párhuzamosak (31.3. ábra).

Megvizsgáljuk a síkok párhuzamosságának néhány tulajdonságát.

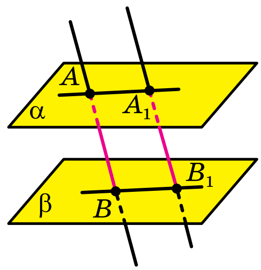
**31.2. tétel.** ***Egy síkhoz egy rajta kívül elhelyezkedő ponton át egy és csakis egy párhuzamos sík fektethető*** (31.4. ábra).




**31.4. ábra**




**31.5. ábra**




**31.6. ábra**

**31.3. tétel.** ***Két párhuzamos síknak egy harmadik síkkal való metszésük által keletkező metszésvonalak párhuzamos egyenesek lesznek*** (31.5. ábra).

**Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy párhuzamos síkok párhuzamos egyenesekből egyenlő szakaszokat metszenek ki.

*Megoldás.* Legyenek az $\alpha$ és a $\beta$ párhuzamos síkok és az $AB$, valamint az $A_1B_1$ párhuzamos egyenesek olyanok, melyeknél $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (31.6. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $AB = A_1B_1$.

Az $AB$ és $A_1B_1$ párhuzamos egyenesek egy olyan $\gamma$ síkot képeznek, amelyekre igaz, hogy $\alpha \cap \gamma = AA_1$ és $\beta \cap \gamma = BB_1$.

A 31.3. tétel alapján azt kapjuk, hogy $AA_1 \parallel BB_1$. Tehát az $AA_1B_1B$ négyszög paralelogramma lesz. Ebből következik, hogy $AB = A_1B_1$. ◀

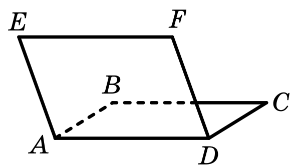
1. Milyen síkokat nevezünk párhuzamosoknak?
2. Fogalmazd meg két sík párhuzamosságának ismertetőjelét!
3. Milyen esetben mondjuk azt, hogy két sokszög párhuzamos?
4. Fogalmazd meg a párhuzamos síkok tulajdonságait!

## GYAKORLATOK

**31.1.**° Igazak-e a következő állítások:

1) ha két sík párhuzamos, akkor az egyik sík bármely egyenese párhuzamos lesz a másik sík bármely egyenesével;
2) ha az egyenes, amely az egyik síkra illeszkedik, párhuzamos a másik síkra illeszkedő egyenessel, akkor az adott síkok párhuzamosak?

**31.2.**° Az $ABCD$ és az $AEFD$ paralelogrammák nem egy síkra illeszkednek (31.7. ábra). Bizonyítsd be, hogy az $ABE$ és a $DCF$ síkok párhuzamosak lesznek!




**31.7. ábra**

**31.3.**° Ki lehet-e jelenteni, hogy az $\alpha$ sík párhuzamos a trapéz síkjával, ha az $\alpha$ sík párhuzamos:

1) a trapéz alapjaival;
2) a trapéz száraival?

**31.4.**° Igaz-e az állítás: ha két síkot egy harmadikkal metszünk, és a keletkezett metszésvonalak párhuzamosak, akkor az adott síkok is párhuzamosak lesznek?

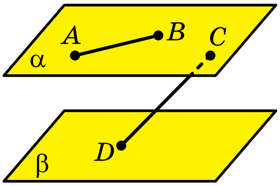
**31.5.**° Az $\alpha$ és $\beta$ síkok párhuzamosak. Az $\alpha$ síkban kiválasztottunk egy $C$ és $D$ pontot, a $\beta$ síkban pedig a $C_1$ és $D_1$ pontokat úgy, hogy a $CC_1$ és $DD_1$ egyenesek párhuzamosak. Határozd meg a $DD_1$ és $C_1D_1$ szakaszok hosszát, ha $CD = 12$ cm, a $CC_1 = 4$ cm!

**31.6.**° Az $ABC$ háromszög az $\alpha$ síkban fekszik. A csúcsain keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az $\alpha$ síkkal párhuzamos $\beta$ síkot $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban fogják metszeni. Határozd meg az $A_1B_1C_1$ háromszög kerületét, ha az $ABC$ háromszög kerülete 20 cm!

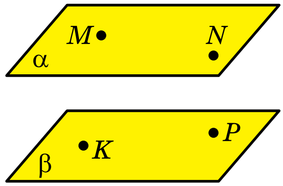
**31.7.**• Az $M$, $N$ és $K$ pontok az $ABCD$ tetraéder $AB$, $AC$ és $AD$ éleinek felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy az $MNK$ és $BCD$ síkok párhuzamosak!

**31.8.**• Az $ABCD$ tetraéder $DA$, $DB$ és $DC$ élein megfelelően jelölték az $E$, $F$ és $K$ pontokat úgy, hogy $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Bizonyítsd be, hogy az $EFK$ és az $ABC$ síkok párhuzamosak!

**31.9.•** Az $\alpha$ és $\beta$ síkok párhuzamosak. Az $AB$ szakasz és a $C$ pont az $\alpha$ síkra illeszkedik, a $D$ pont pedig a $\beta$ síkra (31.8. ábra). Szerkeszd meg: 1) a $\beta$ és az $ABD$ síkok; 2) a $\beta$ és az $BCD$ síkok metszésvonalát!



**31.8. ábra**



**31.9. ábra**

**31.10.•** Az $\alpha$ és $\beta$ síkok párhuzamosak. Az $M$ és $N$ pontok az $\alpha$ síkra illeszkednek, a $K$ és $P$ pontok pedig a $\beta$ síkra (31.9. ábra). Szerkeszd meg:
1) az $\alpha$ és az $MKP$ síkok;
2) a $\beta$ és az $MNK$ síkok metszésvonalát!

**31.11.••** Az $\alpha$ és $\beta$ párhuzamos síkok az $ABC$ szög $BA$ oldalát megfelelően az $A_1$ és $A_2$ pontokban metszi, a $BC$ oldalt pedig a $C_1$ és $C_2$ pontokban. Határozd meg:
1) az $A_1C_1$ szakaszt, ha az $A_2C_2 = 36$ cm, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) a $C_1C_2$ szakaszt, ha az $A_1C_1 = 14$ cm, $A_2C_2 = 21$ cm, $BC_1 = 12$ cm!

**31.12.••** Az $\alpha$ és $\beta$ síkok párhuzamosak. Az $A$ és $B$ pontok az $\alpha$ síkra illeszkednek, a $C$ és $D$ pontok pedig a $\beta$ síkra. Az $AC$ és $BD$ szakaszok az $O$ pontban metszik egymást.
1) Bizonyítsd be, hogy $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$!
2) Határozd meg az $AB$ szakasz hosszát, ha $CD = 32$ cm, $AC : AO = 7 : 3$!

**31.13.••** Az $M$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $A_1D_1$ élére illeszkedik. Szerkeszd meg a $BDD_1$ és $CC_1M$ síkok metszésvonalát!

**31.14.••** Az $E$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $B_1C_1$ élére illeszkedik. Szerkeszd meg az $ACC_1$ és $BED$ síkok metszésvonalát!

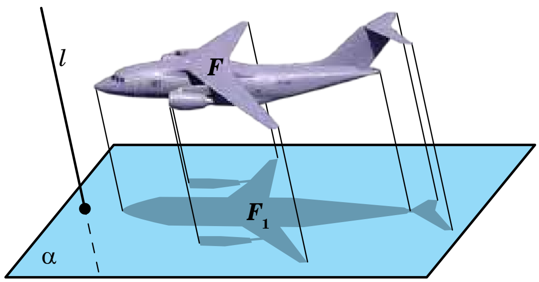
## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**31.15.** Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja az $O$ pont. Az $OC$ szakaszon jelöltünk egy $M$ pontot úgy, hogy $CM : MO = 1 : 2$. Határozd meg a tg $BMO\angle$-et!

# 32. Párhuzamos vetítés

Nagyon sok olyan jelenséggel és folyamattal találkozunk a mindennapi életben, amelyekben a térbeli testek olyan transzformációit alkalmazzuk, melynek a képe síkbeli alakzat lesz. A 32.1. ábrán egy madár síkra vetett árnyékát figyelhetjük meg. Ekkor a testeknek olyan **transzformációjáról** beszélünk, amelyet **párhuzamos vetítés**nek nevezzük. Ennek a transzformációnak a segítségével a síkon megkapjuk a térbeli testek képét.

**32.1. ábra**




**32.2. ábra**

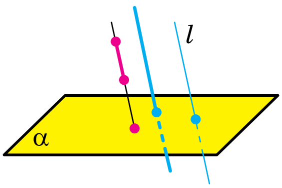
A tankönyvben előforduló rajzok többsége térbeli testek ábrázolását tartalmazzák. Ezeket olyan árnyékoknak tekinthetjük, melyeket a test párhuzamos fénysugarakkal való megvilágítása során kapunk.

Ismerkedjünk meg a párhuzamos vetítéssel részletesebben.

Legyen adva az $\alpha$ sík, az $l$ egyenes, amely metszi ezt a síkot, és az $F$ alakzat (32.2. ábra). Az $F$ alakzat minden pontján át egyenest fektetünk, melyek párhuzamosak lesznek az $l$ egyenessel (ha az $F$ alakzat az $l$ egyenesre illeszkedne, akkor csak az $l$ egyenest kell vizsgálni). Az egyenesek $\alpha$ síkkal való metszéspontjai egy $F_1$ alakzatot adnak meg. Az $F$ alakzat ilyen transzformációját párhuzamos vetítésnek nevezzük. Az $F_1$ alakzatot **az $F$ alakzat az $l$ egyenes menti $\alpha$ síkra vetített képének nevezzük**, vagy **az $F$ alakzat az $l$ egyenes menti vetületének nevezzük.**

Az $\alpha$ sík és az $l$ egyenes megfelelő kiválasztásával az adott $F$ alakzat szemléletes képét kapjuk meg. Ez azzal magyarázható, hogy a párhuzamos leképezésnek csodálatos tulajdonságai vannak (lásd a 32.1–32.3. tételeket). Ezeknek a tulajdonságoknak köszönhetően az eredeti alakzattal hasonló alakzatot kapunk.

Tekintsük az $\alpha$ síkot és az $l$ egyenest, amely metszi ezt a síkot.



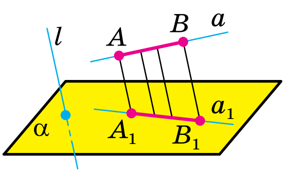

**32.3. ábra**

Ha az $l$ egyenessel párhuzamos egyenesnek a vetülete az α síkra egy pont (32.3. ábra), akkor az $l$ egyenes vetülete is egy pont.

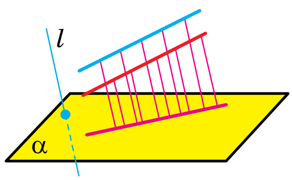
Ha a szakasz az $l$ egyenessel párhuzamos vagy rá illeszkedik, akkor ennek a vetülete az α síkra szintén egy pont (32.3. ábra).

A következő tételek olyan szakaszokra és egyenesekre vonatkoznak, melyek nem párhuzamosak az $l$ egyenessel, és nem is illeszkednek rá.

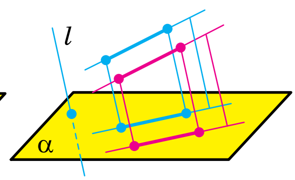
**32.1. tétel.** ***Az egyenes párhuzamos vetülete egyenes, a szakasz párhuzamos vetülete pedig szakasz*** (32.4. ábra).




**32.4. ábra**



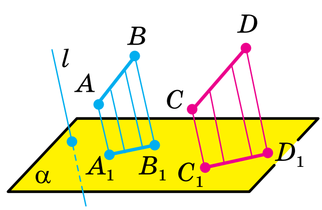

**32.5. ábra**




**32.6. ábra**

**32.2. tétel.** ***Két párhuzamos egyenes párhuzamos vetülete vagy egy egyenes lesz*** (32.5. ábra), ***vagy két párhuzamos egyenes*** (32.6. ábra). ***Két párhuzamos szakasznak a párhuzamos vetületei vagy egy egyenesre, vagy párhuzamos egyenesekre illeszkednek*** (32.6. ábra).

**32.3. tétel.** ***Az egy egyenesre vagy párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok, illetve vetületeik aránya egyenlő*** (32.7. ábra).




$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

**32.7. ábra**

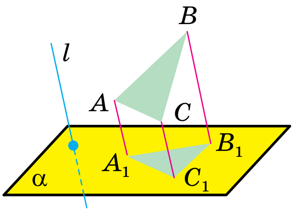
Vizsgáljuk meg valamely sokszög vetületét az α síkra, ha a vetítés iránya az $l$ egyenes.

Ha az $l$ egyenes párhuzamos a sokszög síkjával, vagy ehhez a síkhoz illeszkedik, akkor a sokszög vetülete egy szakasz.

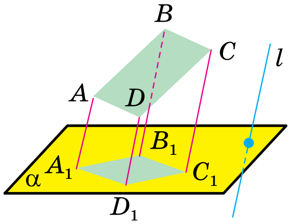
Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az $l$ egyenes metszi a sokkszög síkját.

A párhuzamos vetítés tulajdonságaiból következik, hogy a háromszög párhuzamos vetülete háromszög lesz (32.8. ábra).

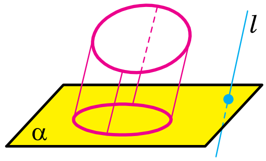
Mivel a párhuzamos vetítés során a szakaszok párhuzamossága megmarad, ezért a paralelogramma (a téglalap, a rombusz és a négyzet is) vetülete paralelogramma lesz (32.9. ábra).




**32.8. ábra**




**32.9. ábra**

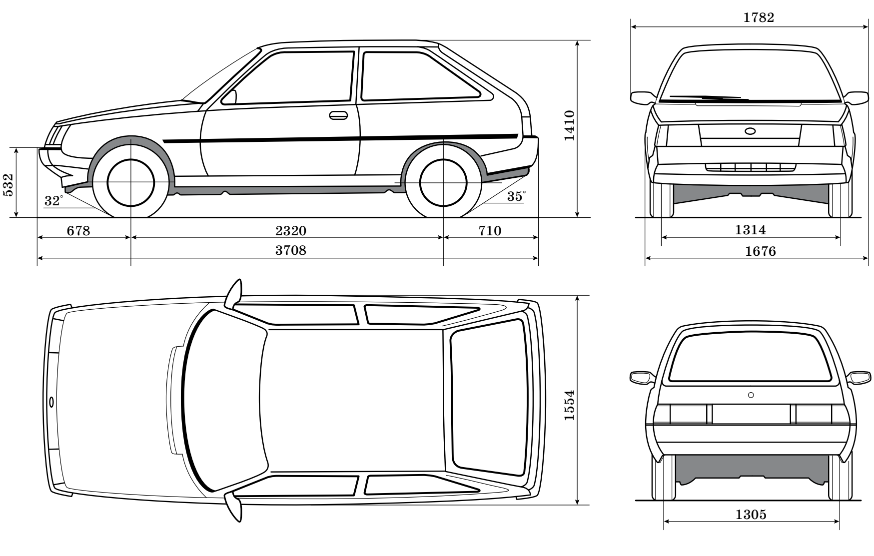



**32.10. ábra**

A párhuzamos vetítés tulajdonságaiból következik, hogy a trapéz vetülete trapéz.

A kör vetülete egy olyan alakzat, amelyet **ellipszis**nek nevezünk (32.10. ábra).

A testek párhuzamos vetítés során kapott képét széleskörűen alkalmazzák a különböző iparágakban, például a gépkocsigyártásban (32.11. ábra).




**32.11. ábra**

**1.** Írd le azt a transzformációt, melyet párhuzamos vetítésnek nevezünk!

**2.** Fogalmazd meg a párhuzamos vetítés tulajdonságait!

## GYAKORLATOK

**32.1.°** Egy alakzat három pontból áll. Hány pontból állhat ennek az alakzatnak a párhuzamos vetülete?

**32.2.°** Lehet-e két egymást metsző egyenesnek a párhuzamos vetülete:
1) két egymást metsző egyenes;
2) két párhuzamos egyenes;
3) egyenes;
4) egyenes és egy rajta kívüli pont?

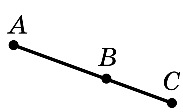
**32.3.°** Lehet-e két kitérő egyenes párhuzamos vetülete:
1) két párhuzamos egyenes;
2) két egymást metsző egyenes;
3) egyenes;
4) egyenes és egy rajta kívüli pont?

**32.4.°** 1) A nem egyenlő szakaszok párhuzamos vetületei lehetnek-e egyenlő szakaszok?
2) Az egyenlő szakaszok párhuzamos vetületei lehetnek-e nem egyenlő szakaszok?
3) Lehet-e a szakasznak olyan szakasz a párhuzamos vetülete, melynek a hossza nagyobb az eredeti szakasz hosszánál?
4) Lehet-e az egyenesnek a párhuzamos vetülete az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes?

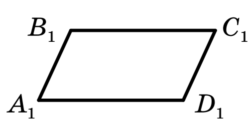
**32.5.°** Lehet-e a 32.12. ábrán látható alakzat a háromszög párhuzamos eltolásának a vetülete?

**32.6.°** Lehet-e a trapéz párhuzamos vetülete az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög, melynek az $A_1$, $B_1$, $C_1$ és $D_1$ szögei megfelelően egyenlők:
1) 10°, 40°, 140°, 170°; 2) 50°, 130°, 50°, 130°?

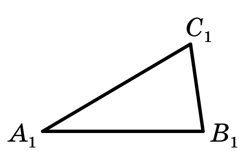
**32.7.°** Lehet-e a paralelogramma párhuzamos vetülete olyan négyszög, melynek oldalai 6 cm, 8 cm, 6 cm, 9 cm?



**32.12. ábra**



**32.13. ábra**



**32.14. ábra**

**32.8.•** Az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontok megfelelően párhuzamos vetületei az $A$, $B$ és $C$ pontoknak, melyek egy egyenesre illeszkednek (a $B$ pont az $A$ és $C$ pontok között van). Határozd meg a $B_1C_1$ szakasz hosszát, ha $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm!

**32.9.•** Az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontok megfelelően párhuzamos vetületei az $A$, $B$ és $C$ pontoknak, melyek egy egyenesre illeszkednek (a $B_1$ pont az $A_1$ és $C_1$ pontok között van). Határozd meg az $A_1C_1$ szakasz hosszát, ha $AB = 10$ cm, $AC = 16$ cm, $B_1C_1 = 3$ cm!

**32.10.••** Az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma az $ABCD$ téglalap képe (32.13. ábra). Szerkeszd meg a téglalap átlóinak metszéspontjából a $BC$ oldalra bocsátott merőleges vetületét!

**32.11.••** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az $ABC$ derékszögű háromszög képe (32.14. ábra). Szerkeszd meg a háromszög átfogójának felezőpontjából az $AC$ befogóra bocsátott merőleges vetületét!

**32.12.••** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az $ABC$ háromszög képe. Szerkeszd meg az $ABC$ háromszög $B$ csúcsából bocsátott szögfelező vetületét, ha $AB : BC = 1 : 2$!

**32.13.••** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az $ABC$ egyenlő szárú háromszög képe, melynek alapja az $AC$ oldal. Szerkeszd meg az $ABC$ háromszögbe írt körvonal középpontjának vetületét, ha $AB : AC = 5 : 4$!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

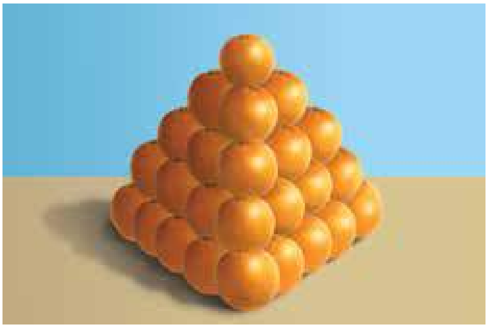
**32.14.** Az $ABCD$ téglalapban adott: $AB = 6$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Határozd meg az $AC$ és $BD$ egyenesek közötti szöget!

## UKRAJNÁNAK VANNAK TEHETSÉGEI!

Hogyan helyezhetünk el minél több narancsot egy ládában? Ez a kérdés első látásra nagyon egyszerűnek és komolytalannak tűnik, viszont régi története van. 1611-ben Johann Kepler német csillagász, matematikus és filozófus, aki a Naprendszer bolygóinak mozgástörvényét alkotta meg, fogalmazta meg a gömbök optimális elrendezésének feladatát a térben. Kepler azt a hipotézist állította fel, hogy a gömböket optimálisan úgy kell elhelyezni, mint ahogy az üzletekben vagy a piacon rakják ki a narancsgúlákat az eladók (32.15. ábra)

400 éven keresztül próbálták a világ legelismertebb matematikusai megmagyarázni ezt a feltevést. Ennek a kérdésnek a végső megoldá-

sa 2017-ben készült el. Kepler hipotézisének bizonyítása rengeteg eset számítógépes feldolgozása után sikerült csak, melyet 19 évig ellenőrizték le, és ezután lett elfogadva a megoldás.



**32.15. ábra**

Nagyon fontos szerepet játszottak a több évszázados probléma megoldásában a következő fiatal ukrán matematikusok: A. Bondarenko, M. Vjazovszka és D. Radcsenko, akik a Tarasz Sevcsenko Kijevi Nemzeti Egyetem diákjai voltak. 2016-ban jelent meg Marina Vjazovszka tudományos cikke a Kepler-sejtés megoldásáról, amely a 8- és a 24-dimenziós terekre vonatkozott. A szerző ezért Salem-díjat kapott, melyet tehetséges fiatal matematikusoknak ítélnek oda. Ennél csak a Fields-érem nívósabb, amit gyakorta neveznek matematikai Nobel-díjnak.

Ez az ukrán tudósok ragyogó eredménye!

# A 4. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

## A térmértan legfontosabb axiómái

A1. A tér bármely síkján teljesülnek a síkmértan axiómái.
A2. A tér bármely nem egy egyenesre illeszkedő három pontjára egy és csakis egy sík illeszkedik.
A3. Ha az egyenes két pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.
A4. Ha két síknak van közös pontja, akkor egy egyenesben metszik egymást.

## A sík egyértelműen meghatározható:

1) nem egy egyenesre illeszkedő három pont által;
2) egyenessel és rá nem illeszkedő pont által;
3) két egymást metsző egyenes által;
4) két párhuzamos egyenes által.

## Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

Két egyenest egymást metsző egyenesnek nevezünk, ha csak egy közös pontjuk van.
Két egyenest a térben párhuzamosnak nevezünk, ha egy síkra illeszkednek, és nem metszik egymást.
Két egyenest a térben kitérőnek nevezünk, ha nem illeszkednek egy síkhoz.

## Párhuzamos egyenesek tulajdonságai

Két párhuzamos egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik.

## Kitérő egyenesek ismertetőjele

Ha két egyenes közül az egyik egy síkra illeszkedik, a másik pedig olyan pontban metszi ezt a síkot, amely nem illeszkedik az első egyenesre, akkor az adott egyenesek kitérők lesznek.

## Párhuzamosság a térben

Az egyenes és a sík akkor párhuzamos, ha nincsenek közös pontjaik.
Két síkot párhuzamosnak mondunk, ha nincsenek közös pontjaik.

### Az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele

Ha az egyenes, amely nem illeszkedik az adott síkra, párhuzamos a síkra illeszkedő valamely egyenessel, akkor az adott egyenes magával a síkkal is párhuzamos lesz.

### Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei

Ha a sík illeszkedik az adott egyenesre, amely párhuzamos egy másik síkkal, és metszi ezt a síkot, akkorsíkok metszésvonala párhuzamos az adott egyenessel.
Ha két párhuzamos egyenesre síkokat fektetünk, és ezek a síkok az eredeti egyenesektől különböző egyenesben metszik egymást, akkor a metszésvonal párhuzamos lesz a két adott egyenessel.
Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.

### Két sík párhuzamosságának ismertetőjele

Ha az egyik sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos egy másik sík két egyenesével, akkor ezek a síkok párhuzamosak lesznek.

### Párhuzamos síkok tulajdonságai

Az adott síkra nem illeszkedő ponton át egy és csakis egy az adott síkkal párhuzamos sík fektethető.
Két párhuzamos síknak egy harmadik síkkal való metszésük által keletkező metszésvonalak párhuzamos egyenesek lesznek.
Párhuzamos egyenesek szakaszai, melyek párhuzamos síkok között helyezkednek el, egyenlők lesznek.

# MERŐLEGESSÉG A TÉRBEN 5. §.

Ebben a paragrafusban megismerkedtek az egyenesek közötti szöggel a térben, az egyenes és a sík közötti szöggel, két sík közötti szöggel; megtudjátok, hogy mit jelent az ortogonális vetítés, elsajátítjátok a sokszög ortogonális vetületének tulajdonságait.

## 33. Az egyenesek közötti szög a térben

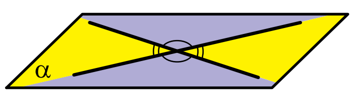
Mivel a tér bármely két egymást metsző egyenese egy síkra illeszkedik, ezért a köztük lévő szöget ugyanúgy határozzuk meg, mint a síkmértanban.

**Definíció. Két egymást metsző egyenes hajlásszögén, annak a metszéspontnál keletkező szögnek a mértékét értjük, amely nem nagyobb, mint 90°** (33.1. ábra).

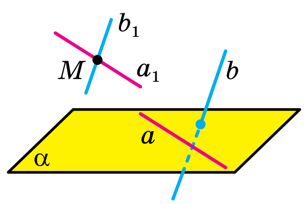
*Úgy tekintjük, hogy a párhuzamos egyenesek hajlásszöge* 0°*-os*. Tehát, ha a $\varphi$ két egy síkra illeszkedő egyenes hajlásszöge, akkor $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Bevezetjük a kitérő egyenes közötti szög fogalmát.

**Definíció. Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet olyan egymást metsző egyenesek alkotnak, melynek szárai párhuzamosak az adott kitérő egyenesekkel.**




33.1. ábra




33.2. ábra

Legyen az $a$ és $b$ kitérő egyenesek. A tér $M$ pontján át $a_1$ és $b_1$ egyeneseket fektetünk úgy, hogy $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (33.2. ábra). Az $a$ és $b$ kitérő egyenesek hajlásszögének meghatározásából következik, hogy az egyenlő lesz az $a_1$ és a $b_1$ egymást metsző egyenesek közötti szöggel.

Felmerül a kérdés: az $a$ és $b$ kitérő egyenesek hajlásszöge függ-e az $M$ pont kiválasztásától? Erre a kérdésre a következő tétel adja meg a választ.

**33.1. tétel.** ***Két egymást metsző egyenes hajlásszöge egyenlő lesz két olyan egymást metsző egyenes hajlásszögével, melynek szárai párhuzamosak az adott egyenesekkel.***

Alkalmazva a 33.1. tételt, be lehet bizonyítani, hogy *az $a$ és $b$ kitérő egyenesek közötti szög egyenlő az $a$ és a $b_1$ egymást metsző egyenesek közötti szöggel, ha $b_1 \parallel b$.*

Például a 33.3. ábrán az $ABCA_1B_1C_1$ háromoldalú hasáb látható. Az $AA_1$ és a $BC$ kitérő egyenesek közötti szög egyenlő a $BB_1$ és a $BC$ egymást metsző egyenesek közötti szöggel.

**Definíció. Két egyenest a térben merőlegesnek nevezünk, ha a köztük lévő szög 90°-os lesz.**

Azt is megjegyezzük, hogy a merőleges egyenesek lehetnek egymást metsző, és kitérő egyenesek is.

Ha az $a$ és $b$ egyenesek merőlegesek, akkor ezt így jelöljük: $a \perp b$.

Két szakaszt a térben **merőleges**nek nevezzük, ha merőleges egyenesekre illeszkednek.

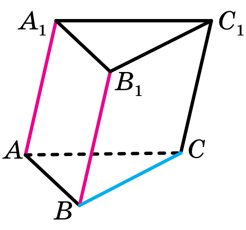
Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockának az $AD$ és $CC_1$ élei merőlegesek egymásra (33.4. ábra). Valóban, mivel a $DD_1 \parallel CC_1$, ezért az $AD$ és $CC_1$ egyenesek közötti szög egyenlő az $AD$ és $DD_1$ közötti szöggel. Mivel $ADD_1\angle = 90°$, ezért $AD \perp CC_1$.

**Feladat.** A 33.5. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka látható. Határozzuk meg az $A_1D$ és a $D_1C$ egyenesek közötti szöget!

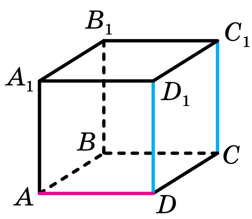
*Megoldás.* Kössük össze az $A_1$ és a $B$ pontokat. Mivel $A_1D_1 \parallel BC$, ezért az $A_1$, $D_1$, $C$ és $B$ pontok egy síkra illeszkednek. Ez a sík az $A_1B$ és $D_1C$ párhuzamos egyenesekben metszi az $AA_1B$ és $DD_1C$ párhuzamos síkokat. Tehát az $A_1D$ és a $D_1C$ egyenesek közötti szög egyenlő a $DA_1B$ szöggel.

Összekötjük a $B$ és $D$ pontokat. Az $A_1D$, $A_1B$ és $BD$ szakaszok egyenlők lesznek, mint az egyenlő négyzetek átlói. Tehát az $A_1BD$ háromszög egyenlő oldalú. Ezért a $DA_1B\angle = 60°$.

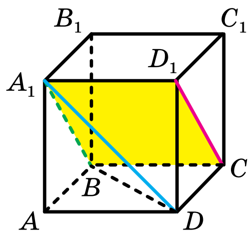
*Felelet*: 60°. ◀



33.3. ábra



33.4. ábra



33.5. ábra

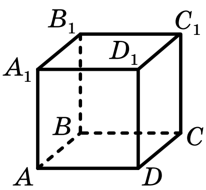
1. Mit nevezünk két egymást metsző egyenes közötti szögnek?
2. Mivel egyenlő két párhuzamos egyenes közötti szög?
3. Mit nevezünk két kitérő egyenes hajlásszögének?
4. Mikor lesz merőleges egymásra a tér két egyenese?
5. Mikor lesz merőleges egymásra a tér két szakasza?

## GYAKORLATOK

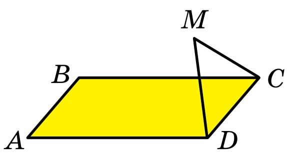
**33.1.°** Hány az adott egyenesre merőleges egyenest lehet húzni egy ponton keresztül, amely: 1) az adott egyenesre illeszkedik; 2) amely nem illeszkedik az adott egyenesre?

**33.2.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (33.6. ábra). Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) $CD$ és $BC$; 2) $AA_1$ és $C_1D_1$; 3) $AA_1$ és $D_1C$; 4) $AC$ és $B_1D_1$; 5) $A_1C_1$ és $AC$!

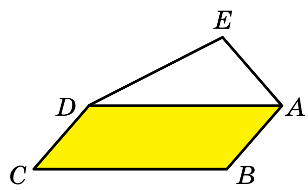
**33.3.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (33.6. ábra). Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) $AB$ és $BB_1$; 2) $AB$ és $B_1D_1$; 3) $A_1D$ és $B_1C$; 4) $B_1D_1$ és $C_1C$!




**33.6. ábra**




**33.7. ábra**




**33.8. ábra**

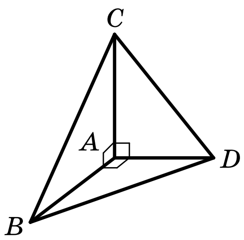
**33.4.°** Az $M$ pont nem illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjához, a $CMD$ háromszög viszont egyenlő oldalú (33.7. ábra). Határozd meg az $AB$ és $MC$ egyenesek közötti szöget!

**33.5.°** Az $M$ pont nem illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjához, az $MBA\angle = 40°$, $MBC\angle = 90°$. Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) $MB$ és $AD$; 2) $MB$ és $CD$!

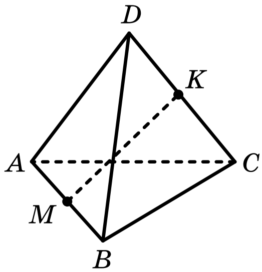
**33.6.•** Az $ABCD$ trapéz, melynek alapjai $AD$ és $BC$, és az $MEF$ háromszög nem illeszkednek egy síkra. Az $E$ pont az $AB$ szakasz felezőpontja, az $F$ pont pedig a $CD$ szakaszé, $ME = FE$, $MEF\angle = 110°$. Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) $AD$ és $EF$; 2) $AD$ és $ME$; 3) $BC$ és $MF$!

**33.7.•** Az $ABCD$ paralelogramma és az $AED$ háromszög nem illeszkednek egy síkra (33.8. ábra). Határozd meg a $BC$ és $AE$ egyenesek közötti szöget, ha $AED\angle = 70°$, $ADE\angle = 30°$!

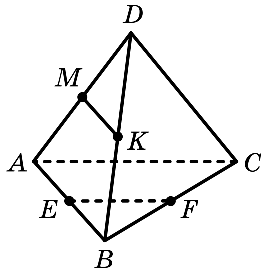
**33.8.•** Adott, hogy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (33.9. ábra). Határozd meg a $CD$ szakasz hosszát, ha $BC = 17$ cm, $AB = 15$ cm, $BD = 3\sqrt{29}$ cm!




33.9. ábra




33.10. ábra




33.11. ábra

**33.9.•** Adott, hogy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (33.9. ábra). Határozd meg a $BC$ szakasz hosszát, ha $CD = 2\sqrt{43}$ cm, $BD = 12$ cm, $ABD\angle = 60°$!

**33.10.••** Az $ABCD$ tetraéder minden éle $a$, az $M$ és $K$ pontok az $AB$ és $CD$ éleinek megfelelő felezőpontjai (33.10. ábra). Határozd meg az $MK$ szakasz hosszát!

**33.11.••** Az $E$, $F$, $M$ és $K$ pontok az $ABCD$ tetraéder $AB$, $BC$, $AD$ és $BD$ éleinek a megfelelő felezőpontjai (33.11. ábra). Határozd meg az $EF$ és $MK$ egyenesek közötti szöget, ha a $BAC\angle = \alpha$!

**33.12.••** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $ABCD$ lapjának átlói az $O$ pontban metszik egymást. Határozd meg az $OB_1$ és az $A_1C_1$ egyenesek közötti szöget!

**33.13.••** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest alapja egy olyan négyzet, melynek oldala $a$. Határozd meg az $AD_1$ és a $B_1C$ egyenesek közötti szöget, ha a téglatest oldalélének hossza $a\sqrt{3}$!

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

**33.14.** Az $ABCD$ paralelogramma $AC$ és $BD$ átlói megfelelően 24 cm és 10 cm, $AD = 13$ cm. Határozd meg a paralelogramma kerületét!

# 34. Az egyenes és a sík merőlegessége

A mindennapi életben azt mondjuk: a zászlórúd merőleges a föld felszínére (34.1. ábra), az árbóc merőleges a fedélzet felszínére (34.2. ábra), a csavart a deszka felületére merőlegesen kell becsavarni (34.3. ábra) stb.

34.1. ábra

34.2. ábra

34.3. ábra

A fenti példáknak segítségével elképzelést nyerhetünk a síkra merőleges egyenesről.

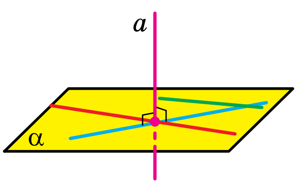
**Definíció. Az egyenest a síkra merőlegesnek mondjuk, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére** (34.4. ábra).

Az $a$ egyenes és az $\alpha$ sík merőlegességét így írjuk fel: $a \perp \alpha$. Azt is szokás mondani, hogy az $\alpha$ sík merőleges az $a$ egyenesre, vagy az $a$ egyenes és az $\alpha$ sík merőlegesek egymásra.

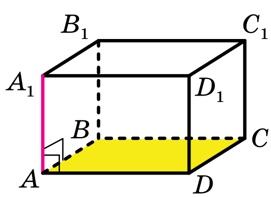
A meghatározásból következik, hogyha az $a$ egyenes merőleges az $\alpha$ síkra, akkor az egyenes metszi a síkot.

A szakaszt a **síkra merőlegesnek** nevezzük, ha a szakasz illeszkedik az egyenesre, amely merőleges az adott síkra.

Például nyilvánvaló, hogy az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $AA_1$ éle merőleges az $ABC$ síkra (34.5. ábra). Ezt az állítást egyszerű bizonyítani a következő tétel alapján.




34.4. ábra




34.5. ábra

**34.1. tétel (az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele).** ***Ha az egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges az adott síkra is.***

34.6. ábra

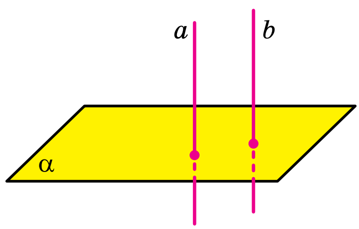
A 34.5. ábrán az $AA_1$ egyenes merőleges az $ABC$ sík $AB$ és $AD$ egyeneseire, amelyek metszik egymást. Ezért az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele alapján $AA_1 \perp ABC$, vagyis az $AA_1$ él merőleges az $ABC$ síkra.

A 34.1. tételt gyakran alkalmazzák a gyakorlatban is. Például a karácsonyfatartó kereszt alakú. Ha a karácsonyfát úgy állítjuk be, hogy a törzse merőleges a kereszt ágaira, akkor a karácsonyfa merőleges lesz a padló síkjára is (34.6. ábra).

A következő tételt is alkalmazhatjuk az egyenes és a sík merőlegességének másik ismertetőjeleként.

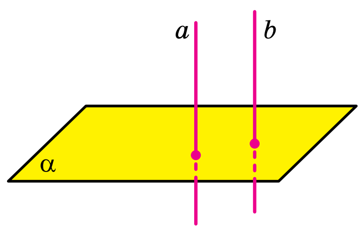
**34.2. tétel.** ***Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges egy síkra, akkor a másik is merőleges a síkra*** (34.7. ábra).

Például a 34.5. ábrán az $AA_1$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra, a $CC_1$ egyenes párhuzamos az $AA_1$ egyenessel. Tehát a 34.2. tétel alapján a $CC_1$ egyenes szintén merőleges lesz az $ABC$ síkra.




**Ha $a \parallel b$ és $a \perp \alpha$, akkor $b \perp \alpha$**

34.7. ábra




**Ha $a \perp \alpha$ és $b \perp \alpha$, akkor $a \parallel b$**

34.8. ábra

Megfogalmazzuk két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelét.

**34.3. tétel.** ***Ha két egyenes egy és ugyanarra a síkra merőleges, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak*** (34.8. ábra).

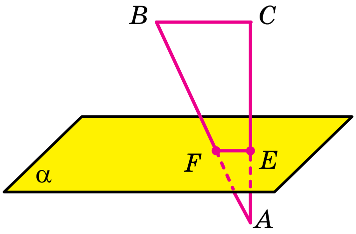
Igaz a következő tétel is.

**34.4. tétel.** ***Adott síkra egy ponton keresztül egy és csakis egy merőleges egyenes bocsátható.***

**Feladat.** Az $\alpha$ sík merőleges az $ABC$ háromszög $AC$ befogójára, az $AC$ befogót az $E$ pontban, az $AB$ átfogót pedig az $F$ pontban metszi (34.9. ábra). Határozzuk meg az $EF$ szakasz hosszát, ha $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ cm!

*Megoldás*. Mivel az $AC$ egyenes merőleges az $\alpha$ síkra, ezért az $AC$ egyenes merőleges ennek a síknak bármely egyenesére, tehát az $EF$ egyenesre is. Az $EF$ és a $BC$ egyenesek egy síkra illeszkednek, és merőlegesek az $AC$ egyenesre, ezért az $EF \parallel BC$. Ebből következik, hogy az $AEF$ és $ACB$ háromszögek hasonlóak. Tehát fel lehet írni, hogy: $EF : CB = AE : AC$. Innen az $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ cm.

*Felelet*: 9 cm. ◀



**34.9. ábra**

?

1. Milyen egyenest nevezünk a síkra merőlegesnek?
2. Milyen szakaszt nevezünk a síkra merőlegesnek?
3. Fogalmazd meg az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét?
4. Fogalmazd meg a két párhuzamos egyenesről szóló tételt, melyek közül az egyik merőleges a síkra!
5. Fogalmazd meg a két egyenesről szóló tételt, melyek merőlegesek ugyanarra a síkra!

## GYAKORLATOK

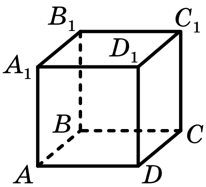
**34.1.°** Az $a$ egyenes merőleges az $\alpha$ síkra. Létezik-e az $\alpha$ síkban olyan egyenes, amely nem lesz merőleges az $a$ egyenesre?

**34.2.°** Az $m$ egyenes merőleges az $\alpha$ síkra illeszkedő $a$ és $b$ egyenesekre. Következik-e ebből, hogy az $m$ egyenes merőleges az $\alpha$ síkra?

**34.3.°** Igaz-e az állítás, hogyha az egyenes nem merőleges a síkra, akkor nem merőleges egyetlen egyenesre sem, amely a síkra illeszkedik?

**34.4.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (34.10. ábra). Nevezd meg azokat a lapjait a kockának, melyekre a következő egyenes merőleges lesz: 1) $AA_1$; 2) $AD$!

**34.5.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (34.10. ábra). Nevezd meg azokat az éleit a kockának, melyek merőlegesek a következő lapjára: 1) $AA_1B_1B$; 2) $A_1B_1C_1D_1$!

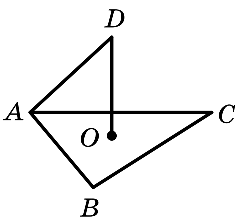


**34.10. ábra**

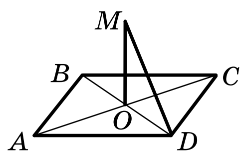
**34.6.°** Igaz-e az állítás, hogy az egyenes merőleges a síkra, ha merőleges:

1) az erre a síkra illeszkedő háromszög oldalaira és oldalfelezőire;
2) az erre a síkra illeszkedő háromszög oldalaira és középvonalaira;
3) az erre a síkra illeszkedő trapéz két oldalára;
4) az erre a síkra illeszkedő körvonal két átmérőjére?

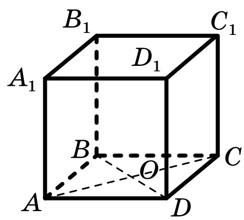
**34.7.°** Az $ABC$ szabályos háromszög $O$ középpontjából annak síkjára $DO$ merőlegest állítottak (34.11. ábra). Határozd meg a $DO$ szakasz hosszát, ha $AB = 6$ cm, $DA = 4$ cm!



**34.11. ábra**



**34.12. ábra**



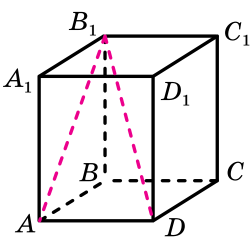
**34.13. ábra**

**34.8.°** Az $ABCD$ négyzet $O$ középpontjából a négyzet síkjára $MO$ merőlegest bocsátottak (34.12. ábra). Határozd meg az $M$ pont és a $D$ csúcs közötti távolságot, ha $AD = 4\sqrt{2}$ cm, $MO = 2$ cm!

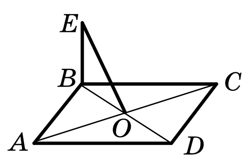
**34.9.•** Az $O$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $ABCD$ lapjának a középpontja, a kocka éle pedig $a$ (34.13. ábra). Határozd meg:

1) az $O$ pont és a $B_1$ csúcs közötti távolságot;
2) a $B_1O$ és a $DD_1$ egyenesek közötti szög tangensét!

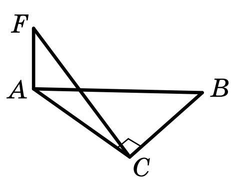
**34.10.•** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $B_1D$ átlója 17 cm, az $AA_1B_1B$ lapnak az $AB_1$ átlója pedig 15 cm (34.14. ábra). Határozd meg a téglatest $AD$ élének hosszát!



**34.14. ábra**



**34.15. ábra**



**34.16. ábra**

**34.11.**• Az $ABCD$ rombusz $B$ csúcsán át $BE$ merőlegest állítottak a rombusz síkjára (34.15. ábra). Bizonyítsd be, hogy az $AC$ egyenes merőleges a $BEO$ síkra!

**34.12.**• Az $ABC$ derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$) $A$ csúcsában az $ABC$ háromszög síkjára $AF$ merőleges egyenest állítottak (34.16. ábra). Bizonyítsd be, hogy a $BC$ egyenes merőleges az $AFC$ síkra!

**34.13.**•• Az $AB$ szakasz nem metszi az $\alpha$ síkot. Az $A$ és $B$ pontokból merőleges egyeneseket bocsátottak az $\alpha$ síkra, melyek azt megfelelően a $C$ és $D$ pontokban metszik. Határozd meg a $CD$ szakasz hosszát, ha $AC = 34$ cm, $BD = 18$ cm, $AB = 20$ cm!

**34.14.**•• Az $AB$ szakasz nem metszi az $\alpha$ síkot. Az $A$ és $B$ pontokból merőleges egyeneseket bocsátottak az $\alpha$ síkra, melyek azt megfelelően az $A_1$ és $B_1$ pontokban metszik. Határozd meg az $AB$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 12$ cm, $AB_1 = 10$ cm!

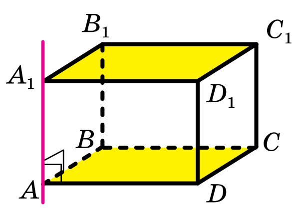
**ISMÉTLŐ GYAKORLAT**

**34.15.** Egy pontból az egyenesre két ferdét húztak, melyeknek a vetületei 5 cm és 9 cm. Határozd meg az adott pont és az adott egyenes közötti távolságot, ha az egyik ferde 2 cm-rel nagyobb a másiknál!

## 35. A merőleges és a ferde

Legyen az $F_1$ alakzat, az $F$ alakzat az $l$ egyenes irányú párhuzamos vetülete az $\alpha$ síkra. Ha $l \perp \alpha$, akkor az $F_1$ alakzat az $F$ alakzat **ortogonális vetülete** lesz az $\alpha$ síkra.

Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $ABCD$ alapja az $A_1B_1C_1D_1$ alapnak az $AA_1$ irányú ortogonális vetülete lesz az $ABC$ síkra (35.1. ábra).

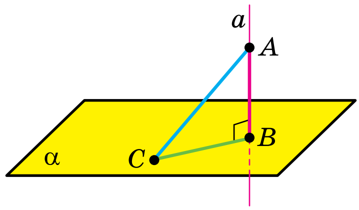


**35.1. ábra**

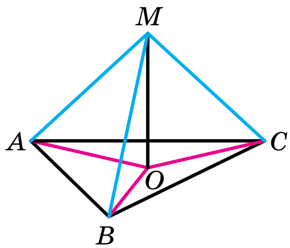
A későbbiekben, ha az alakzat vetületéről beszélünk, és nem adnak meg mást, akkor az ortogonális vetületről lesz szó.

Legyen adott az $\alpha$ sík és az $A$ pont, mely nem illeszkedik erre a síkra. Az $A$ ponton keresztül egy $a$ egyenest fektetünk, amely merőleges az $\alpha$ síkra. Legyen $a \cap \alpha = B$

(35.2. ábra). Az $AB$ szakaszt az $A$ pontból az $\alpha$ síkra bocsátott **merőleges**nek nevezzük, a $B$ pontot pedig a **merőleges talppontjá**nak. A merőleges $B$ talppontja az $A$ pont vetülete lesz az $\alpha$ síkra.




35.2. ábra




35.3. ábra

Jelöljünk az $\alpha$ síkon egy $B$-től különböző tetszőleges $C$ pontot. Meghúzzuk az $AC$ szakaszt (35.2. ábra). Az $AC$ szakaszt az $A$ pontból az $\alpha$ síkra bocsátott **ferdé**nek nevezzük. A $C$ pont a **ferde talppontja** lesz. A $BC$ szakasz az $AC$ **ferde vetülete** lesz.

**35.1. tétel.** ***Ha egy pontból a síkra egy merőlegest és egy ferdét bocsátunk, akkor a ferde hossza nagyobb lesz, mint a merőlegesé.***

**1. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy annak a pontnak a vetülete, amely nem illeszkedik a sokszög síkjára és egyenlő távolságra van a csúcsaitól, a sokszög köré írt körvonal középpontja lesz!

*Megoldás.* A bizonyítást a háromszög esetére végezzük el. A bizonyítás a többi sokszögre is hasonlóan történik.

Legyen az $M$ pont, amely nem illeszkedik az $ABC$ háromszög síkjához, és $MA = MB = MC$. Az $M$ pontból $MO$ merőlegest bocsátunk az $ABC$ síkra (35.3. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $O$ pont az $ABC$ háromszög köré írt körvonal középpontja.

Mivel $MO \perp ABC$, ezért az $MOA\angle = MOB\angle = MOC\angle = 90°$. Az $MOA$, $MOB$, $MOC$ derékszögű háromszögeknek az $MO$ befogója közös, az átfogói egyenlők, tehát ezek a háromszögek egybevágók az átfogójuk és a befogójuk alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy az $OA = OB = OC$, vagyis az $O$ pont lesz az $ABC$ háromszög köré írt körvonal sugara. ◄

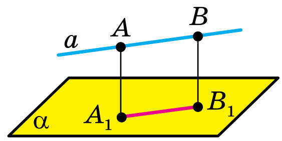
Megjegyezzük, hogy amikor meg kell határozni két mértani alakzat közötti távolságot, akkor a két legközelebbi pontjuk közötti távolságot határozzuk meg. Például a síkmértanból már ismert, hogy az egyeneshez nem illeszkedő pont és az egyenes távolsága egyenlő az adott ponttól az egyenes legközelebbi pontjához mért távolsággal, vagyis a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszával.

A 35.1. tételből következik, hogy érdemes elfogadni a következő meghatározást.

**Definíció. Ha az adott pont nem illeszkedik a síkra, akkor a sík és a pont közötti távolságon az adott pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor a pont és a sík közötti távolságot nullának tekintjük.**

**2. feladat.** Bizonyítsuk be, hogyha az egyenes párhuzamos a síkkal, akkor az egyenes minden pontja egyenlő távolságra lesz a síktól!

*Megoldás.* Legyenek az $A$ és $B$ pontok az $a$ egyenes két tetszőleges pontja. Az $A_1$ és $B_1$ pontok az $A$ és $B$ pontokból az α síkra bocsátott merőlegesek talppontjai (35.4. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $AA_1 = BB_1$.




**35.4. ábra**

A 34.3. tétel alapján az $AA_1 \parallel BB_1$. Tehát az $A$, $A_1$, $B_1$, $B$ pontok egy síkra illeszkednek. Az $ABB_1$ sík az α síkkal párhuzamos $a$ egyenesre illeszkedik, és az α síkot az $A_1B_1$ egyenesben metszi. Ekkor a 30.2. tétel alapján: $AB \parallel A_1B_1$. Ezért az $AA_1B_1B$ négyszög mindkét szemközti oldalpárja párhuzamos egymással. Ebből következik, hogy $AA_1 = BB_1$.

Mivel az $A$ és $B$ pontok az $a$ egyenes tetszőleges pontjai, ezért a feladat állítását bebizonyítottuk. ◄

A fentebb bizonyított tulajdonság alapján elfogadhatjuk a következő meghatározást.

**Definíció. Az egyenes távolsága a vele párhuzamos síktól egyenlő lesz az egyenes tetszőleges pontjának távolságával a síktól.**

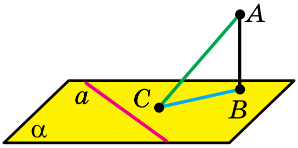
A 2. kulcsos feladat eredményére támaszkodva, könnyen megoldhatjuk az alábbi feladatot.

**3. feladat.** Bizonyítsd be, hogyha két sík párhuzamos, akkor az egyik sík minden pontja ugyanolyan távolságra lesz a másik síktól.

**Definíció. Két párhuzamos sík közötti távolságnak nevezzük az egyik sík bármely pontjának a másik síktól való távolságát.**

A 2. és 3. kulcsos feladat eredményeit gyakran alkalmazzák a gyakorlati feladatok megoldása során, például az építkezéseknél (35.5. ábra).

35.5. ábra




35.6. ábra

**35.2. tétel (három merőleges tétele).** ***Ha az egyenes, amely egy síkra illeszkedik, merőleges a ferde vetületére, akkor merőleges magára a ferdére is. És fordítva, ha a síkban fekvő egyenes merőleges a síkhoz húzott ferdére, akkor merőleges a ferde vetületére is.***

*Bizonyítás.* Bebizonyítjuk a tétel első részét.

Legyen az $a$ az $\alpha$ síkra illeszkedő egyenes, amely merőleges az $AC$ ferde $BC$ vetületére (35.6 ábra). Bebizonyítjuk, hogy $a \perp AC$.

Adott: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, tehát $AB \perp a$. Azt kaptuk, hogy az $a$ egyenes merőleges az $ABC$ síkot alkotó egymásra merőleges $AB$ és $BC$ egyenesekre; tehát $a \perp ABC$. Mivel $AC \subset ABC$, akkor $a \perp AC$.

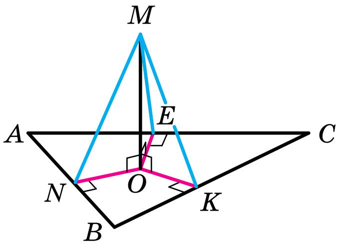
A második rész bizonyítása hasonló az első rész bizonyításához. ◀

**4. feladat.** Az $M$ pont nem illeszkedik a domború sokszög síkjára és egyenlő távolságra van az oldalegyeneseitől. Az $M$ pont vetülete a sokszög síkjára az $O$ pont lesz, amely a sokszögre illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy az $O$ pont a beírt körvonal középpontja!

*Megoldás.* Bebizonyítjuk a háromszög esetére a feladatot. Más sokszög esetén a bizonyítás hasonló lesz.

Az $O$ pontból merőlegeseket bocsátunk az $AB$, $BC$ és $CA$ egyenesekre, amelyek megfelelően az $ON$, $OK$ és $OE$ szakaszok lesznek (35.7. ábra). Az $M$ pontot összekötjük az $E$, $K$ és $N$ pontokkal.

Az $ON$ szakasz az $MN$ ferde vetülete lesz az $ABC$ síkra. A szerkesztés szerint $ON \perp AB$. Ekkor a három merőleges tétele alapján az $MN \perp AB$.




**35.7. ábra**

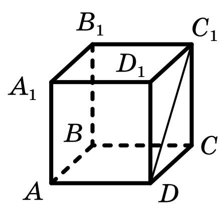
Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $MK \perp BC$ és $ME \perp CA$. Tehát az $MN$, $MK$ és $ME$ szakaszok hosszai az $M$ pont megfelelő távolságai lesznek az $AB$, $BC$ és $CA$ egyenesektől. A feltétel alapján $MN = MK = ME$.

Az $MON$, $MOK$, $MOE$ derékszögű háromszögekben az $MO$ befogó közös és az átfogók egyenlők, tehát ezek a háromszögek egybevágók a befogójuk és az átfogójuk alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $ON = OK = OE$.

Az $ON$, $OK$ és $OE$ szakaszok hosszai megegyeznek az $O$ pont és az $ABC$ háromszög oldalegyenesei közötti távolsággal. Bebizonyítottuk, hogy ezek a távolságok egyenlők. Mivel az $O$ pont az $ABC$ háromszögre illeszkedik, ezért az $O$ pont az $ABC$ háromszögbe írt körvonal középpontja lesz. ◀

1. Milyen esetben mondjuk azt, hogy az $F_1$ alakzat az $F$ alakzat ortogonális vetülete?
2. Milyen szakaszt nevezünk: 1) a pontból a síkra bocsátott merőlegesnek; a pontból a síkra bocsátott ferdének?
3. Fogalmazd meg a pontból a síkra bocsátott ferdéről, illetve merőlegesről szóló tételt!
4. Mit nevezünk a pont és a sík közötti távolságnak? Az egyenes és a vele párhuzamos sík közötti távolságnak? Két párhuzamos sík közötti távolságnak?
5. Fogalmazd meg a három merőleges tételét!

## GYAKORLATOK

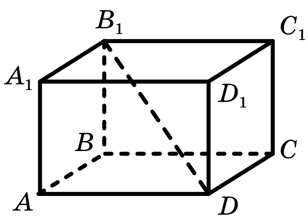



**35.8. ábra**

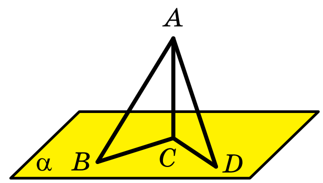
**35.1.°** A 35.8. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka látható. Nevezd meg a $C_1D$ szakasz vetületét a következő síkra:

1) $ABC$;
2) $BB_1C$;
3) $AA_1B_1$!

**35.2.°** A 35.9. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. Nevezd meg a $DB_1$ szakasz vetületét a következő síkra:
1) $A_1B_1C_1$; 2) $CDD_1$; 3) $AA_1D_1$!




**35.9. ábra**




**35.10. ábra**

**35.3.°** A pontból a síkra egy 12 cm-es merőlegest és egy 13 cm-es ferdét bocsátottak. Határozd meg ennek a ferdének a vetületét az adott síkra!

**35.4.°** Az $A$ pontból az α síkra egy merőlegest és egy $\sqrt{7}$ cm-es ferdét húztak. Az adott ferde vetülete $\sqrt{3}$ cm. Határozd meg az $A$ pont és az α sík közötti távolságot!

**35.5.°** Az $A$ pontból az α síkra egy $AC$ merőlegest, valamint az $AB$ és $AD$ ferdéket húztak (35.10. ábra). Határozd meg az $AD$ ferde vetületét az α síkra, ha $ABC\angle = 45°$, $AB = 8$ cm, $AD = 9$ cm!

**35.6.°** Az $M$ pontból az α síkra egy $MH$ merőlegest, valamint az $MA$ és $MB$ ferdéket húztak (35.11. ábra). Határozd meg az $MA$ ferdét, ha $BH = 6\sqrt{6}$ cm, $MB = 18$ cm, $MAH\angle = 60°$!

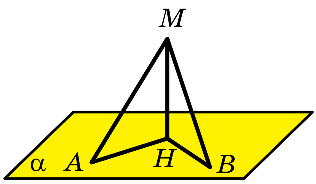
**35.7.•** Bizonyítsd be, hogy az egy adott pontból a síkra bocsátott egyenlő hosszúságú ferdéknek, egyenlők a vetületei is!

**35.8.•** Bizonyítsd be, hogy amikor az egy pontból a síkra bocsátott két ferde vetülete egyenlő, akkor a ferdék is egyenlők!

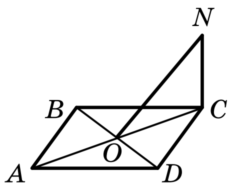
**35.9.•** Az α és a β síkokra megfelelően illeszkedő $a$ és $b$ párhuzamos egyenesek közötti távolság 7 cm. Igaz-e az az állítás, hogy az α és a β síkok közötti távolság is 7 cm?

**35.10.•** Az $M$ pontból az α síkra $MA$, $MB$, $MC$ és $MD$ egyenlő hosszúságú ferdéket húztak. Lehetnek-e az $A$, $B$, $C$ és $D$ pontok:
1) egy téglalapnak; 3) egy derékszögű trapéznak;
2) egy rombusznak; 4) egy egyenlő szárú trapéznak a csúcsai?

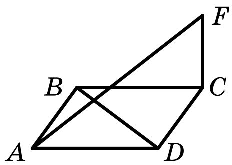
**35.11.•** A 35.12. ábrán az $ABCD$ négyzet látható, ahol az $NC$ egyenes merőleges a négyzet síkjára. Bizonyítsd be, hogy a $BD$ és $NO$ egyenesek merőlegesek egymásra!




**35.11. ábra**



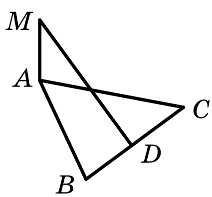

**35.12. ábra**



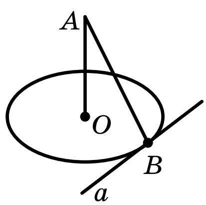

**35.13. ábra**

**35.12.**• A 35.13. ábrán az $ABCD$ rombusz látható. Az $FC$ egyenes merőleges a rombusz síkjára. Bizonyítsd be, hogy az $AF$ és $BD$ egyenesek merőlegesek egymásra!

**35.13.**• A 35.14. ábrán az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög látható, ahol a $D$ pont a $BC$ oldal felezőpontja. Az $AM$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra. Bizonyítsd be, hogy az $MD \perp BC$!




**35.14. ábra**




**35.15. ábra**

**35.14.**• Az $AO$ egyenes merőleges az $O$ középpontú körlap síkjára (35.15. ábra). Az $a$ egyenes a körlap síkjára illeszkedik, és az adott kört a $B$ pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AB \perp a$!

**35.15.**• Bizonyítsd be, hogyha a pont illeszkedik egy egyeneshez, amely merőleges a sokszög síkjára és illeszkedik a sokszög köré írt körvonal középpontjára, akkor ez a pont egyenlő távoságra lesz a sokszög csúcsaitól!

**35.16.**• Az $A$ pontból az $\alpha$ síkra $AB = 25$ cm és $AC = 17$ cm ferdéket húztak. Határozd meg az $A$ pont távolságát az $\alpha$ síktól, ha a síkra való vetületeik úgy aránylanak egymáshoz, mint 5 : 2!

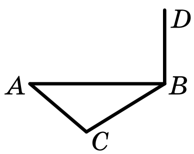
**35.17.**• A $D$ pontból az $\alpha$ síkra $DA$ és $DB$ ferdéket húztak, melyek összege 28 cm lesz. Határozd meg ezeknek a ferdéknek a hosszát, ha az $\alpha$ síkra való vetületeik megfelelően 9 cm és 5 cm!

**35.18.**• Az $M$ pont 6 cm-re van az $ABC$ szabályos háromszög minden csúcsától, melynek oldala 9 cm. Határozd meg az $M$ pont távolságát az $ABC$ háromszög síkjától!

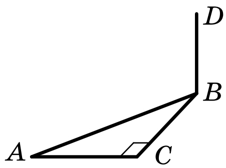
**35.19.**• Az $ABC$ derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$) befogói 6 és 18 cm. A $D$ pont a háromszög minden csúcsától 13 cm-re van. Határozd meg a $D$ pont és az $ABC$ sík közötti távolságot!

**35.20.**• A $BD$ szakasz merőleges az $AC$ alapú $ABC$ egyenlő szárú háromszög síkjára (35.16. ábra). Szerkessz merőlegest a $D$ pontból az $AC$ egyenesre!

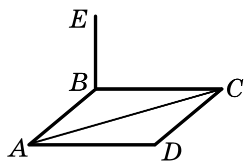
**35.21.**• A $BD$ szakasz merőleges az $ABC$ derékszögű háromszög síkjára, melynek $C$ a derékszöge (35.17. ábra). Szerkessz merőlegest a $D$ pontból az $AC$ egyenesre!




**35.16. ábra**




**35.17. ábra**




**35.18. ábra**

**35.22.**• A $BE$ szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára (35.18. ábra). Szerkessz merőlegest az $E$ pontból az $AC$ egyenesre!

**35.23.**• Az $M$ pont egyenlő távolságra van az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög oldalaira illeszkedő egyenesektől. Az $M$ pont vetülete az $ABC$ háromszög síkjára az $O$ pont lesz, amely a háromszögre illeszkedik. Határozd meg az $M$ pont távolságát az $AB$ oldaltól, ha az adott pont távolsága az $ABC$ síktól $3\sqrt{2}$ cm és az $AB = 18$ cm lesz!

**35.24.**• A rombusz oldala 10 cm, az egyik átlója 16 cm. Az $M$ pont 5,2 cm-re lesz a rombusz oldalegyeneseitől. Határozd meg az $M$ pont távolságát a rombusz síkjától!

**35.25.**•• Az $M$ pontból az $\alpha$ síkhoz $MN$ és $MK$ ferdéket húztunk, melyek a síkbeli vetületeikkel 60°-os szögeket alkotnak. Határozd meg az adott ferdék talppontjai közötti távolságot, ha a ferdék közötti szög 90°, az $M$ pont és az $\alpha$ sík közötti távolság pedig $\sqrt{3}$ cm!

**35.26.**•• Az $A$ pontból az $\alpha$ síkhoz $AB$ és $AC$ ferdéket húztunk, melyek a síkbeli vetületeikkel 30°-os szögeket alkotnak. Határozd meg az adott ferdék hosszait, valamint az $A$ pont és az $\alpha$ sík távolságát, ha a ferdék vetületei közötti szög 90°, a ferdék talppontjai közötti távolság pedig 6 cm!

**35.27.**•• A $DA$ szakasz merőleges az $ABC$ háromszög síkjára, ahol $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 21$ cm. Határozd meg a $D$ pont és a $BC$ egyenes távolságát, ha a $D$ pont távolsága az $ABC$ síktól 15 cm!

**35.28.**•• Az $AB$ szakasz az $O$ középpontú körvonal átmérője, a $BC$ pedig a kör húrja, ahol $AB = 12$ cm, $ABC\angle = 30°$. Az $AE$ szakasz merőleges a körvonal síkjára. Határozd meg az $E$ pont és a körvonal síkja közötti távolságot, ha az $E$ pont a $BC$ egyenestől 10 cm-re van!

**35.29.**•• Az $MA$ szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára. Határozd meg az $M$ pont és a $CD$ egyenes közötti távolságot, ha $BAD\angle = 30°$, $AD = 10$ cm, $MA = 5\sqrt{3}$ cm!

**35.30.**•• A $DA$ szakasz merőleges az $ABC$ háromszög síkjára, $ABC\angle = 120°$, $AB = 14$ cm. Határozd meg a $D$ pont távolságát az $ABC$ síktól, ha ez a pont a $BC$ egyenestől $2\sqrt{43}$ cm-re van!

**35.31.**•• Az $M$ pont nem illeszkedik az $ABC$ ($ACB\angle = 90°$) háromszög síkjára és $2\sqrt{5}$ cm-re van mindegyik oldalegyenesétől. Az $M$ pont vetülete az $ABC$ síkra az $O$ pont, amely az adott háromszögben fekszik. Az $ABC$ háromszögbe írt körvonal érintési pontja az $AB$ átfogót 3 cm és 10 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg az $M$ pont távolságát az $ABC$ síktól!

**35.32.**•• Az $M$ pont nem illeszkedik a sokszög síkjára, az adott síkra való vetülete pedig a sokszögbe írt körvonal középpontja. Bizonyítsd be, hogy az $M$ pont egyenlő távolságra lesz a sokszög oldalaitól!

**35.33.**•• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 16 cm és 36 cm. Ebbe a trapézba írt körvonal középpontja az $O$ pont, amelyből a trapéz síkjára $MO$ merőlegest állítottak. Az $M$ pont a trapéz síkjától 16 cm távolságra van. Határozd meg az $M$ pont távolságát a trapéz oldalaitól!

**35.34.**•• Az $O$ pont az $ABCD$ trapézba írt körvonal középpontja, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ cm, $ADC\angle = 45°$. Az $MO$ szakasz merőleges a trapéz síkjára. Az $M$ pont a trapéz síkjától $6\sqrt{2}$ cm távolságra van. Határozd meg az $M$ pont távolságait a trapéz oldalaitól!

**35.35.*** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Bizonyítsd be, hogy $CD_1 \perp AB_1C_1$!

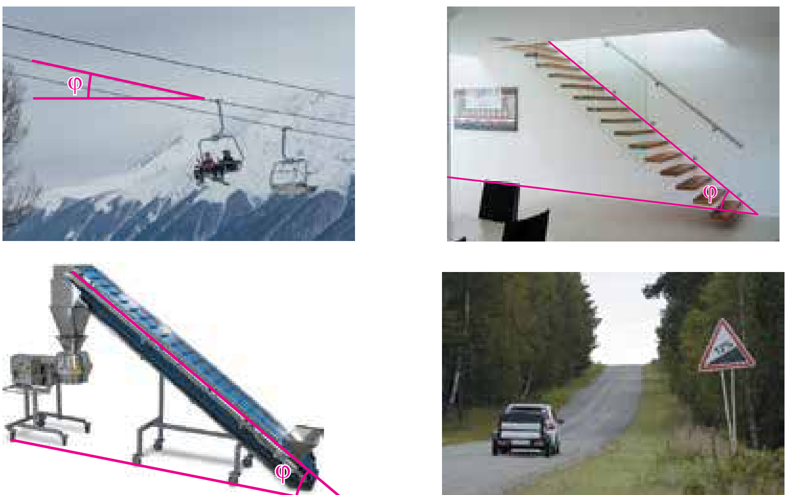
## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**35.36.** A kör köré írt szabályos háromszög oldala 12 cm. Határozd meg e kör köré írt négyzet oldalát!

# 36. Az egyenes és a sík hajlásszöge

Már tudjátok, hogy a régmúltban az utazók a csillagok szerint tájékozódtak. Ilyenkor azt a szöget határozták meg, amelyet a látóhatár síkja és az adott pontot az égitesttel összekötő félegyenes zár be.

A mai kor emberének a tevékenysége során tudnia kell meghatározni egy adott sík és egy objektum között fekvő szögek nagyságát (36.1. ábra).



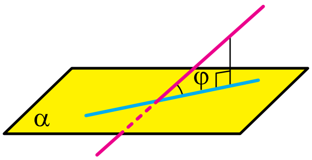

**36.1. ábra**

Ezek a példák azt mutatják, hogy célszerű meghatározni az egyenes és a sík hajlásszögét.

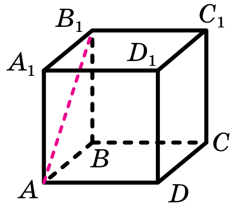
**Definíció.** **Ha az egyenes párhuzamos a síkkal, vagy rá illeszkedik, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge 0°.**

**Ha az egyenes merőleges a síkra, akkor úgy tekintjük, hogy az egyenes és a sík hajlásszöge 90°.**

**Ha az egyenes metszi a síkot és nem merőleges rá, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével bezár** (36.2. ábra).




**36.2. ábra**




**36.3. ábra**

A meghatározásból következik, hogyha a φ az egyenes és a sík hajlásszöge, akkor $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

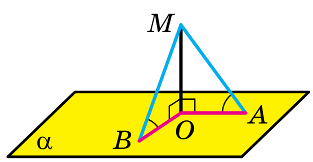
Úgy is szokták mondani, hogy az egyenes a síkkal φ szöget alkot.

A **szakasz és a sík hajlásszögé**nek a szakaszt tartalmazó egyenes és a sík hajlásszögét tekintjük.

Vizsgáljuk meg például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát (36.3. ábra). Az $AA_1B_1B$ lap $AB_1$ átlója az $ABC$ síkkal 45°-os szöget zár be. Valóban az $AB$ egyenes az $AB_1$ egyenesnek a vetülete lesz az $ABC$ síkon. Ezért az $AB_1$ egyenes és az $ABC$ sík hajlásszöge egyenlő a $B_1AB$ szöggel. Mivel az $AA_1B_1B$ négyszög négyzet lesz, ezért a $B_1AB\angle = 45°$.

**F e l a d a t .** Bizonyítsuk be, hogy amikor egy pontból a síkra olyan ferdéket húzunk, melyek egyenlő szögeket zárnak be a síkkal, akkor az adott pont vetülete egyenlő távolságra lesz a ferdék talppontjaitól!

*Megoldás*. Legyen az $MA$ és $MB$ olyan ferdék, melyek egyenlő szögeket zárnak be az α síkkal, az $OA$ és $OB$ pedig ezeknek a ferdéknek a vetületei (36.4. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $OA = OB$.




**36.4. ábra**

Az $OA$ egyenes az $MA$ egyenesnek az α síkra való vetülete. Mivel az $MAO$ szög hegyesszög, ezért egyenlő az $OA$ és $MA$ egyenesek közti szöggel. Tehát az $MAO$ szög egyenlő az $MA$ ferde és az α sík hajlásszögével. Hasonlóan bizonyítható, hogy az $MBO$ szög egyenlő az $MB$ ferde és az α sík hajlásszögével. A feladat feltétele alapján $MAO\angle = MBO\angle$.

Mivel az $MO \perp \alpha$, ezért $MOA\angle = MOB\angle = 90°$. Azt kaptuk, hogy az $MOA$ és az $MOB$ derékszögű háromszögek egybevágók a befogójuk és a szemközti hegyesszögük alapján. Ebből következik, hogy $OA = OB$. ◀

1. Mivel egyenlő az egyenes és a sík hajlásszöge, ha az egyenes párhuzamos a síkkal? Ha az egyenes a síkra illeszkedik? Ha az egyenes merőleges a síkra?
2. Mit nevezünk az egyenes és a sík hajlásszögének, ha az egyenes metszi a síkot és nem merőleges rá?

## GYAKORLATOK

**36.1.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, ahol az $O$ pont az $ABCD$ oldallap középpontja (36.5. ábra). Nevezd meg:
1) az $AB$ egyenes és az $A_1B_1C_1$ sík közötti;
2) az $AC_1$ egyenes és az $ABC$ sík közötti;
3) az $AC_1$ egyenes és a $CDD_1$ sík közötti;
4) az $OA_1$ egyenes és az $ABC$ sík közötti;
5) az $AC$ egyenes és az $ADD_1$ sík közötti szöget!

**36.2.°** Egy pontból a síkra egy merőlegest és egy ferdét húztak, amely az adott síkkal 50°-os szöget alkot. Mivel lesz egyenlő az adott ferde és az adott pontból bocsátott merőleges közötti szög?

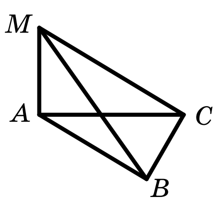
**36.3.°** Az $M$ pontból az $\alpha$ síkra egy $MA$ merőlegest és egy $MB$ ferdét állítottak, amely az $\alpha$ síkkal $\varphi$ szöget alkot. Határozd meg: 1) az $MB$ ferde vetületét az $\alpha$ síkra, ha az $M$ pont és a sík közötti távolság $d$-vel egyenlő; 2) az $MB$ ferdét, ha az $\alpha$ síkra való vetülete $a$!

**36.4.°** Az $A$ pontból az $\alpha$ síkra egy ferdét állítottak. Mivel egyenlő a ferde és az $\alpha$ sík hajlásszöge, ha az $A$ pont és az $\alpha$ sík közötti távolság: 1) egyenlő a ferde vetületével az $\alpha$ síkra; 2) kétszer rövidebb, mint maga a ferde?

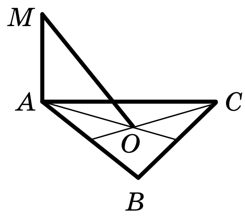
**36.5.°** Hány olyan ferde húzható a síkra nem illeszkedő $A$ pontból, amely az $\alpha$ síkkal 40°-os szöget alkot?

**36.6.°** Az $MA$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra (36.6. ábra), $AB = AM = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Határozd meg azt a szöget, amelyet az $ABC$ sík: 1) az $MB$; 2) az $MC$ egyenessel alkot!

**36.7.°** Az $O$ pont az $ABC$ szabályos háromszög középpontja (36.7. ábra), melynek oldala 6 cm. Az $MA$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra. Határozd meg az $MO$ egyenes és az $ABC$ sík közötti szöget, ha $MA = 2$ cm!




**36.6. ábra**




**36.7. ábra**

**36.8.**• Bizonyítsd be, hogy a síkhoz ugyanabból a pontból húzott egyenlő hosszúságú ferdék az adott síkkal azonos szöget alkotnak!

**36.9.**• Bizonyítsd be, hogyha a síkhoz ugyanabból a pontból húzott ferdék ugyanolyan szög alatt hajlanak a síkhoz, akkor a ferdék hosszai is egyenlők lesznek!

**36.10.**• Az $M$ pontból az $\alpha$ síkra $MB$ merőlegest, valamint $MA$ és $MC$ ferdéket bocsátottak. Határozd meg az $MC$ egyenes és az $\alpha$ sík közötti szöget, ha $MA = 5\sqrt{2}$ cm, $MC = 10$ cm, az $MA$ és az $\alpha$ sík közötti szög pedig 45°!

**36.11.**• Az $A$ pontból az $\alpha$ síkra $AH$ merőlegest, valamint $AB$ és $AC$ ferdéket bocsátottak, melyek az $\alpha$ síkkal 45° és 60°-os szögeket alkotnak. Határozd meg az $AB$ szakasz hosszát, ha $AC = 4\sqrt{3}$ cm!

**36.12.**• A $D$ pontból az $\alpha$ síkra $DA$ és $DB$ ferdéket húztak, amelyek az adott síkkal 30°-os szöget zárnak be. Az adott ferdék $\alpha$ síkra való vetületei közötti szög 120°-os. Határozd meg a ferdék talppontjai közötti távolságot, ha $DA = 2$ cm!

**36.13.**• A $B$ pontból az $\alpha$ síkra $BA$ és $BC$ ferdéket húztak, amelyek az adott síkkal 45°-os szöget zárnak be. A ferdék talppontjai közötti távolság 16 cm. Határozd meg a $B$ pont távolságát az $\alpha$ síktól, ha a ferdék közötti szög 60°-os!

**36.14.**•• Az $A$ pont az $\alpha$ síktól $3\sqrt{3}$ cm távolságra van. Az $AB$ és $AC$ ferdék a síkkal megfelelően 60° és 45°-os szögeket alkotnak, a ferdék közötti szög pedig 90°-os. Határozd meg a ferdék talppontjai közötti távolságot!

**36.15.**•• Az $M$ pontból az $\alpha$ síkra $MA$ és $MB$ ferdéket húztak. Az $MA$ ferde az $\alpha$ síkkal 45°-os szöget alkot, az $MB$ ferde pedig 30°-os szöget. Határozd meg a ferdék talppontjai közötti távolságot, ha $MA = 6$ cm, a ferdék közötti szög pedig 45°-os!

**36.16.**•• Az $M$ pont az $ABCD$ négyzet minden csúcsától 12 cm távolságra van, az $MA$ egyenes a négyzet síkjával 60°-os szöget alkot. Határozd meg az $M$ pont és a négyzet oldala közötti távolságot!

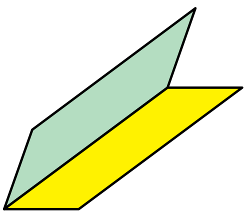
**36.17.**•• Az $M$ pont az $ABCD$ négyzet minden oldalától egyenlő távolságra van. A négyzet oldala $9\sqrt{6}$ cm, és 9 cm távolságra van a négyzet síkjától. Határozd meg az $MA$ egyenes és a négyzet síkja közötti szöget!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**36.18.** A háromszög oldalai 2 cm, $2\sqrt{7}$ cm és $4\sqrt{3}$ cm. Határozd meg a háromszög középső oldalával szemközti szögét!

# 37. Lapszögek. A síkok hajlásszöge

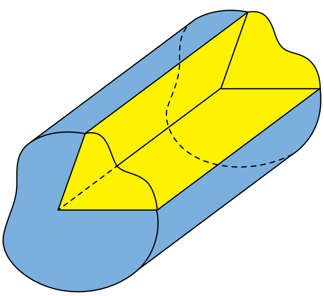
A 37.1. ábrán egy olyan alakzat látható, amely két félsíkból áll, melyeknek közös a határuk. Ez az alakzat a teret két részre osztja, amit a 37.2. ábrán két szín jelöl. Mindkét részt a félsíkokkal együtt **lapszög**nek nevezzük. A határoló félsíkok a **lapszög lapjai**, közös határegyenesük a **lapszög éle**.



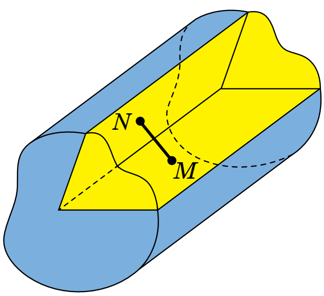
**37.1. ábra**

A 37.2. ábrán látható sárga és kék lapszögek lényegesen különböznek egymástól. Ezt a különbözőséget a következő tulajdonság adja meg. A lapszög lapjain kijelölünk tetszőleges $M$ és $N$ pontokat (37.3. ábra. Az $MN$ szakasz a sárga lapszögben helyezkedik el, a kékben csak a szakasz végpontjai lesznek.

A továbbiakban, ha lapszögről beszélünk, akkor ezen azokat a lapszögeket értjük, melyek olyan tetszőleges szakaszt tartalmaznak, melyeknek végpontjai a lapszög lapjaira illeszkednek (a sárga lesz a lapszög).



**37.2. ábra**




**37.3. ábra**

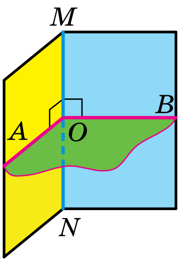
**37.4. ábra**

A félig nyitott osztálytábla, a nyeregtető, a nyitott laptop (37.4. ábra) némi elképzelést nyújt számunkra a lapszögről.

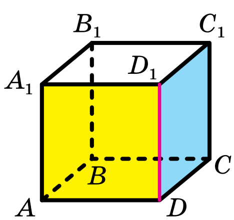
A lapszöget a síkon lévő szög térbeli analógiájának tekintjük.

Már tudjátok, hogyan határozzuk meg a szög mértékét a síkon. Megismerkedünk a lapszög mértékének meghatározásával.

A lapszög $MN$ élén megjelölünk egy tetszőleges $O$ pontot. Az $O$ pontból a lapszög lapjaira illeszkedő $OA$ és $OB$ félegyeneseket húzunk, merőlegesen az $MN$ élre (37.5. ábra). A félegyenesek által keletkezett $AOB$ szöget **a lapszög élszögé**nek nevezzük. Mivel az $MN \perp OA$ és $MN \perp OB$, ezért az $MN \perp AOB$. Így, *ha a lapszög élének bármilyen pontjából merőleges síkot fektetünk a lapszög élére, akkor ez a sík a lapszöget az élszögében metszi.*




**37.5. ábra**




**37.6. ábra**

**Definíció. A lapszög mértéke az élszögének mértékével lesz egyenlő.**

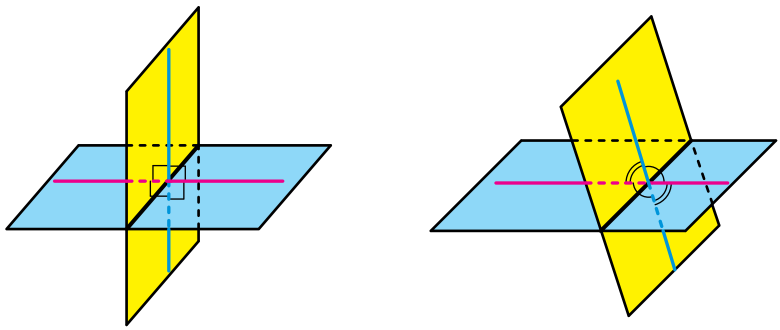
A lapszöget hegyes-, derék-, tompa- vagy egyenesszögűnek nevezzük, ha az élszöge megfelelően hegyes-, derék-, tompa- vagy egyenesszög lesz.

Például vizsgáljuk meg az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát (37.6. ábra). A $DD_1$ élű lapszög, melynek lapjai az $AAD_1$ és $CDD_1$ síkra illeszkednek, derékszögű lesz. Valóban, mivel $AD \perp DD_1$ és $CD \perp DD_1$, ezért az $ADC$ szög lesz a $DD_1$ élű lapszög élszöge. Az $ADC$ szög derékszög.

Két sík metszésekor négy lapszög keletkezik, melyek nem lesznek egyenesszögűek (37.7. ábra). Itt két eset lehetséges:

1) mind a négy lapszög derékszögű (37.7. *a* ábra);

2) a négy lapszög közül két egyenlő hegyesszögű és két egyenlő tompaszögű lapszög keletkezik (37.7. *b* ábra).



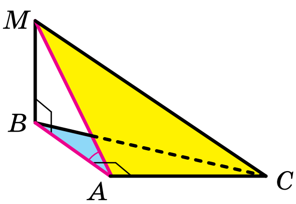
**37.7. ábra**

Mindkét esetben a négy lapszög között mindig lesz olyan, melynek mértéke nem nagyobb 90°-nál.

**Definíció. Két egymást metsző sík hajlásszögének azt a lapszöget nevezzük, amely nem nagyobb 90°-nál. Két párhuzamos sík hajlásszöge 0°-os.**

**A sokszög és a sík hajlásszögének**, amelyre az adott sokszög nem illeszkedik, a sokszög síkja és az adott sík hajlásszögét nevezzük.

**Két különböző síkra illeszkedő sokszög hajlásszögének**, azoknak a síkoknak a hajlásszögét nevezzük, amelyre az adott sokszögek illeszkednek.



**37.8. ábra**

**Feladat.** Az $ABC$ ($A\angle = 90°$) és $ABM$ ($B\angle = 90°$) derékszögű háromszögek $AB$ befogója közös (37.8. ábra). Az $MB$ szakasz merőleges az $ABC$ síkra. Adott, hogy $MB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $MC = 10$ cm. Határozd meg az $ABC$ és $AMC$ síkok közötti szöget!

*Megoldás*. A $BA$ szakasz az $MA$ ferde merőleges vetülete az $ABC$ síkon. Mivel $BA \perp AC$, ezért a három merőleges tétele alapján az $MA \perp AC$. Tehát az $MAB$ szög az $AC$ élű lapszög élszöge lesz, melyeknek lapjai az $ABC$ és $AMC$ síkok lesznek. Mivel az $MAB$ szög hegyesszög, ezért az $ABC$ és $AMC$ síkok közötti szög egyenlő az $MAB$ szöggel.

Az $AMC$ derékszögű háromszög $AM$ oldalának hosszát a következő képlettel számíthatjuk ki: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Innen $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (cm).

Az $MAB$ derékszögű háromszög $MAB$ szöge pedig a $\sin MAB\angle = \dfrac{MB}{MA}$ képlettel számítható ki. Innen $\sin MAB\angle = \dfrac{1}{2}$ és $MAB\angle = 30°$.

*Felelet*: 30°. ◀

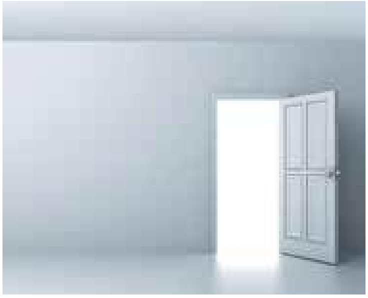
Igaz a következő tétel, amely az adott sokszög területét és a vetületének a területét kapcsolja össze.

**37.1. tétel (a sokszög ortogonális vetületének területe).** ***A domború sokszög vetületének területe egyenlő a sokszög területének, valamint a sokszög és a vetülete közötti*** $\alpha$ ***szög koszinuszának szorzatával, ahol*** $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

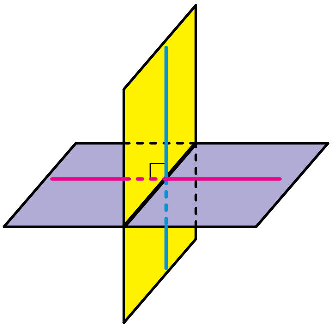
**Definíció. Két síkot merőlegesnek mondunk, ha a köztük lévő szög 90°-os.**

Ha az $\alpha$ és $\beta$ síkok merőlegesek, akkor azt így jelöljük: $\alpha \perp \beta$. Úgy is szokás mondani, hogy az $\alpha$ sík merőleges a $\beta$ síkra, vagy a $\beta$ sík merőleges az $\alpha$ síkra.

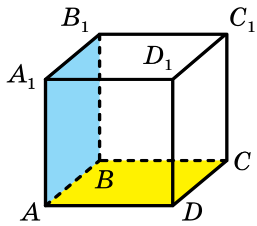
A merőleges síkok szemléletes példái lehetnek: a szoba fala és a mennyezete, az ajtó síkja és a padló, a teniszpálya és a hálójának a síkja (37.9. ábra).



**37.9. ábra**



37.10. ábra




37.11. ábra

Természetesen az egymásra merőleges síkok négy egyenlő lapszöget alkotnak (37.10. ábra).

**37.2. tétel (a merőleges síkok ismertetőjele).** ***Ha két sík közül az egyik olyan egyenesre illeszkedik, amely merőleges a másik síkra, akkor ezek a síkok merőlegesek egymásra.***

Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $AA_1B_1B$ lapjának a síkja (37.11. ábra) merőleges az $ABCD$ lap síkjára. Valóban, az $AA_1B_1$ sík az $AA_1$ egyenesre illeszkedik, amely merőleges az $ABC$ síkra.

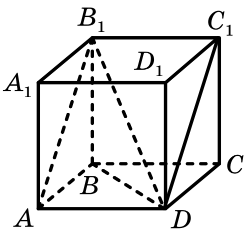
1. Milyen alakzatot nevezünk a lapszög élszögének?
2. Mit nevezünk a lapszög mértékének?
3. Mit nevezünk a két egymást metsző sík közötti szögnek?
4. Mivel egyenlő két párhuzamos sík közötti szög?
5. Fogalmazd meg a sokszög ortogonális vetületéről szóló tételt!
6. Milyen síkokat nevezünk merőlegeseknek?
7. Fogalmazd meg a merőleges síkok ismertetőjelét!

## GYAKORLATOK

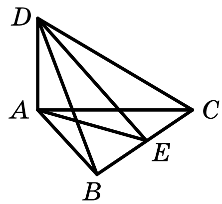
**37.1.°** A környezetedben lévő tárgyakon mutasd meg a lapszögeket!

**37.2.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (37.12. ábra).

1) A felsorolt szögek közül melyik lesz az $ABC$ és $AB_1C$ síkok lapszöge:
   a) $A_1AB\angle$; b) $A_1AB_1\angle$; c) $B_1DA\angle$; d) $B_1AB\angle$; e) $B_1DB\angle$?
2) Határozd meg az adott lapszög értékét!




**37.12. ábra**

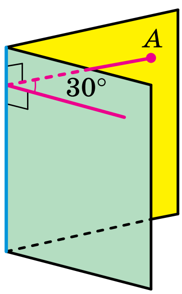



**37.13. ábra**

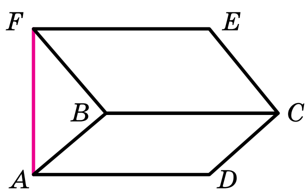
**37.3.°** Az $AD$ szakasz merőleges az $ABC$ szabályos háromszög síkjára (37.13. ábra), az $E$ pont pedig a $BC$ szakasz felezőpontja. A következő szögek közül nevezd meg annak a lapszögnek az élszögét, melynek lapjai az $ABC$ és $BCD$ síkokra illeszkednek:

1) $ABD\angle$; 2) $AED\angle$; 3) $BAD\angle$; 4) $ACD\angle$!

**37.4.°** A 30°-os lapszög egyik lapján egy $A$ pontot jelöltünk (37.14. ábra). Az $A$ pont és a lapszög éle közötti távolság 18 cm. Mennyi az $A$ pont és a lapszög másik lapja közötti távolság?



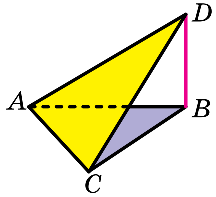

**37.14. ábra**



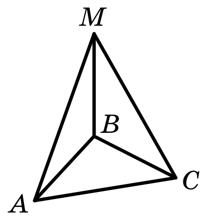

**37.15. ábra**

**37.5.°** A hegyesszögű lapszög egyik lapján felvettünk egy pontot, amelynek a másik laptól való távolsága $4\sqrt{3}$ cm, a lapszög élétől pedig 8 cm-re van. Mekkora az adott lapszög mértéke?

**37.6.°** Az $ABCD$ és $BCEF$ téglalapok különböző síkokhoz illeszkednek (37.15. ábra), Az $AF$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra. Határozd meg a lapszög mértékét, melynek lapjaira az adott téglalapok illeszkednek, ha $AF = \sqrt{15}$ cm, $CD = \sqrt{5}$ cm!




37.16. ábra




37.17. ábra

**37.7.°** Az $ABC$ és $ACD$ háromszögek különböző síkokra illeszkednek (37.16. ábra). A $BD$ egyenes merőleges az $ABC$ síkra. Határozd meg a lapszöget, melynek lapjaira illeszkednek az adott háromszögek, ha ismert, hogy $ACD\angle = 90°$, $BC = 6$ cm, $CD = 12$ cm!

**37.8.°** Adott az $\alpha$ sík és a vele párhuzamos $a$ egyenes. Hány olyan síkot lehet fektetni az $a$ egyenesre, hogy az $\alpha$ sík és a másik sík közötti $\varphi$ szögre teljesüljön a következő feltétel:
1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

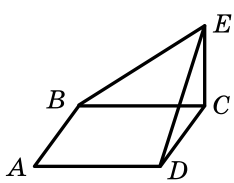
**37.9.°** Az $MB$ szakasz merőleges az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög síkjára (37.17. ábra). Határozd meg az $ABM$ és $CBM$ síkok közötti szöget!

**37.10.°** A $CE$ szakasz merőleges az $ABCD$ négyzet síkjára (37.18. ábra). Határozd meg a $BCE$ és $DCE$ síkok közötti szöget!

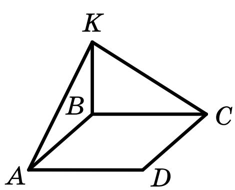
**37.11.°** A $BK$ szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára (37.18. ábra), ahol $ABC\angle = 100°$. Határozd meg az $ABK$ és $CBK$ síkok közötti szöget!

**37.12.°** Határozd meg a sokszög vetületét egy adott síkra, ha a sokszög területe $18\sqrt{2}$ cm$^2$, a sokszög síkja és a vetület síkja közötti szög pedig 45°!

**37.13.°** Határozd meg a sokszög területét, ha vetületének területe egy adott síkra 24 cm$^2$, a sokszög síkja és a vetület síkja közötti szög pedig 30°!




37.18. ábra

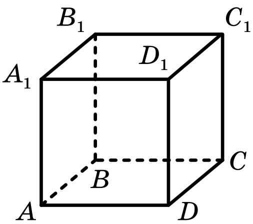



37.19. ábra

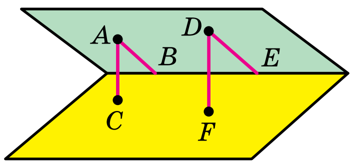
**37.14.°** A környezetedben lévő tárgyak közül melyek alkotnak merőleges síkokat!

**37.15.°** A 37.20. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka látható. Határozd meg, hogy merőlegesek-e a síkok:

1) $A_1B_1C_1$ és $CDD_1$;
2) $ABC$ és $A_1B_1C_1$;
3) $AA_1C_1$ és $ABC$;
4) $ACC_1$ és $BDD_1$!




**37.20. ábra**




**37.21. ábra**

**37.16.•** A hegyesszögű lapszög egyik lapján felvettük az $A$ és $D$ pontokat (37.21. ábra). Az $A$ pontból $AB$ és $AC$ merőlegeseket bocsátunk a lapszög élére és a másik lapjára. A $D$ pontból pedig $DE$ és $DF$ merőlegeseket a lapszög élére és a másik lapjára. Határozd meg a $DE$ szakasz hosszát, ha $AB = 21$ cm, $AC = 12$ cm, $DF = 20$ cm!

**37.17.•** A hegyesszögű lapszög egyik lapján felvettük az $A$ és $B$ pontokat, melyek megfelelően 14 és 8 cm-re lesznek a másik lapjától. Az $A$ pont és a lapszög éle közötti távolság 42 cm. Határozd meg a $B$ pont távolságát a lapszög élétől!

**37.18.•** Az egyenlő szárú trapéz alapjai 10 cm és 18 cm, a szára pedig 8 cm. Határozd meg az adott trapéz vetületének területét az $\alpha$ síkra, ha a trapéz síkja és az $\alpha$ sík közötti szög 30°-os!

**37.19.•** A rombusz egyik oldalán keresztül, melynek átlói 6 cm és 12 cm, $\alpha$ síkot fektettünk, amely a rombusz síkjával 30°-os szöget alkot. Határozd meg a rombusz vetületét az $\alpha$ síkra!

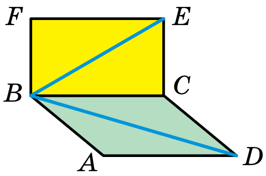
**37.20.••** A $B$ pont a lapszög belsejében helyezkedik el, és a lapjaitól $\sqrt{2}$ cm és $\sqrt{3}$ cm távolságra van, az élétől pedig 2 cm-re. Határozd meg a lapszög szögét!

**37.21.••** A $C$ pont a lapszög belsejében helyezkedik el. A $C$ pontból a lapszög lapjaira bocsátott merőlegesek közötti szög 110°-os. Határozd meg a lapszög szögét!

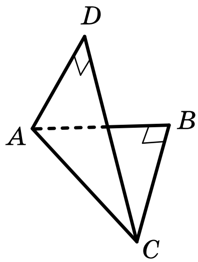
**37.22.••** A 45°-os lapszög lapjaira a lapszög élével párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az élétől megfelelően $2\sqrt{2}$ cm és 3 cm-re vannak. Határozd meg a párhuzamos egyenesek közötti távolságot!

**37.23.**•• Az α sík a lapszög lapjait az $m$ és $n$ párhuzamos egyenesekben metszi. A lapszög éle az $m$ egyenestől 3 cm-re, az $n$ egyenestől pedig 5 cm távolságra van. Az $m$ és $n$ egyenesek közötti távolság 7 cm. Határozd meg a lapszög szögét!

**37.24.**•• Az $ABCD$ és a $CBFE$ téglalapok síkjai merőlegesek egymásra (37.22. ábra). Határozd meg az $E$ pont és az $AD$ egyenes közötti, valamint a $D$ pont és a $BF$ egyenes közötti távolságot, ha $AB = BF = 5$ cm, $BC = 12$ cm!




**37.22. ábra**




**37.23. ábra**

**37.25.**•• Az $ABC$ és $ADC$ szabályos háromszögek merőleges síkokra illeszkednek. Határozd meg a $BD$ egyenes és az $ABC$ sík hajlásszögét!

**37.26.**•• Az $ABC$ és $ADC$ egyenlő szárú derékszögű háromszögek közös $AC = 6$ cm átfogóval rendelkeznek, a síkjaik pedig merőlegesek egymásra (37.23. ábra). Határozd meg a $B$ és $D$ pontok közötti távolságot!

**37.27.**•• A szakasz végpontjai két merőleges síkra illeszkednek. A szakasz végpontjai és a síkok metszésvonala közötti távolság pedig 15 cm és 16 cm. A szakasz végpontjaiból a metszésvonalra bocsátott merőlegesek talppontjai közötti távolság 12 cm. Határozd meg az adott szakasz hosszát!

**37.28.**•• Az $A$ és $B$ pontok megfelelően az α és β merőleges síkokra illeszkednek. Az $A$ és $B$ pontból $AC$ és $BD$ merőlegeseket bocsátottak az α és β síkok metszésvonalára. Határozd meg a $B$ pont és az α és β síkok metszésvonala közötti távolságot, ha az $A$ pont és a metszésvonal távolsága 9 cm, $AB = 17$ cm, $CD = 12$ cm!

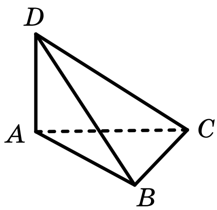
**37.29.**•• Az α és β merőleges síkok. Az $A$ pont az α síkra illeszkedik, a $B$ pont pedig a β síkra. Az $A$ pont távolsága az α és β síkok metszésvonalától 5 cm, a $B$ ponté pedig $5\sqrt{2}$ cm. Határozd meg az $AB$ egyenes és az α sík közötti szöget, ha az $AB$ egyenes és a β sík közötti szög 30°-os!

**37.30.** A 6 cm-es szakasz végpontjai két egymásra merőleges síkra illeszkednek, a szakasz végpontjainak távolsága a síkok metszésvonaláig 3 cm és $3\sqrt{3}$ cm. Határozd meg azokat a szögeket, amelyeket ez a szakasz az adott síkokkal alkot!

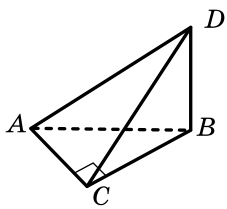
**37.31.** Az $ABCD$ és $AEFD$ közös $AD$ alapú trapézok síkjai merőlegesek egymásra, $BAD\angle = EAD\angle = 90°$, $ADC\angle = ADF\angle = 60°$, $CD = 4$ cm, $DF = 8$ cm. Határozd meg: 1) a $BC$ és az $EF$ egyenesek; 2) a $C$ és $F$ pontok közötti távolságot!

**37.32.** Az $ABCD$ négyzet és az $AEFD$ téglalap síkjai merőlegesek egymásra. Határozd meg a $BC$ és $EF$ egyenesek közötti távolságot, ha a négyzet területe 25 cm$^2$, a téglalap területe pedig 60 cm$^2$!

**37.33.** Az $ABCD$ tetraéder $DA$ éle merőleges az $ABC$ síkra (37.24. ábra), ahol $AB = BC = AC = 8$ cm, $BD = 4\sqrt{7}$ cm. Határozd meg az $ABC$ és a $BCD$ síkok által megadott lapszög szögét!




**37.24. ábra**




**37.25. ábra**

**37.34.** Az $ABCD$ tetraéder $DB$ éle merőleges az $ABC$ síkra (37.25. ábra), ahol $ACB\angle = 90°$, $AC = BC = 7$ cm, $AD = 7\sqrt{5}$ cm. Határozd meg az $ABC$ és $ACD$ síkok által alkotott lapszög szögét!

**37.35.*** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $CC_1$ élének az $M$ pont a felezőpontja. Határozd meg a $BMD$ és az $A_1BD$ síkok hajlásszögét!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**37.36.** A háromszög két oldala 15 cm és 25 cm, a harmadik oldalra bocsátott súlyvonal pedig 16 cm. Határozd meg a háromszög harmadik oldalát!

## AZ 5. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

### Az egyenesek közötti szög a térben

Két egymást metsző egyenes közötti szögnek annak a szögnek a mértékét nevezzük, amely a metszéspontjuknál keletkezik és nem nagyobb, mint 90°.

Két párhuzamos egyenes egymással 0°-os szöget zár be.

Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet olyan egymást metsző egyenesek alkotnak, melynek szárai párhuzamosak az adott kitérő egyenesekkel.

Két egyenest a térben merőlegesnek nevezzük, ha a köztük lévő szög 90°-kal egyenlő.

### Az egyenes és a sík merőlegessége

Az egyenest a síkra merőlegesnek mondjuk, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.

Ha az egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges erre a síkra is.

Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges a síkra, akkor a másik is merőleges ugyanerre a síkra.

Ha két egyenes egy és ugyanarra a síkra merőleges, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.

Az adott ponton keresztül az adott síkra egy és csak is egy merőleges bocsátható.

### Az alakzat ortogonális vetülete

Legyen az $F_1$ alakzat az $F$ alakzat $l$ egyenes menti párhuzamos vetülete az $\alpha$ síkra. Ha az $l \perp \alpha$, akkor az $F_1$ alakzatot az $F$ alakzat ortogonális vetületének nevezzük az $\alpha$ síkra.

### A pont és a sík távolsága

Ha az adott pont nem illeszkedik a síkra, akkor a sík és a pont közötti távolságon az adott pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszát érjük. Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor a pont és a sík közötti távolságot nullának tekintjük.

**Az egyenes és a vele párhuzamos sík közötti távolság**

Az egyenes távolsága a vele párhuzamos síktól egyenlő lesz az egyenes tetszőleges pontjának távolságával a síktól.

**Két párhuzamos sík közötti távolság**

Két párhuzamos sík közötti távolságnak nevezzük az egyik sík bármely pontjának a másik síktól való távolságát.

**Három merőleges tétele**

Ha az egyenes, amely egy síkra illeszkedik merőleges a ferde vetületére, akkor merőleges magára a ferdére is. És fordítva, ha a síkban fekvő egyenes merőleges a síkhoz húzott ferdére, akkor merőleges a ferde vetületére is.

**Az egyenes és a sík hajlásszöge**

Ha az egyenes párhuzamos a síkkal, vagy rá illeszkedik, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge 0°.

Ha az egyenes merőleges a síkra, akkor úgy tekintjük, hogy az egyenes és a sík hajlásszöge 90°.

Ha az egyenes metszi a síkot, és nem merőleges rá, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével bezár.

**A lapszög szöge**

A lapszög szögének az élszögének mértékét nevezzük.

**Két egymást metsző sík hajlásszöge**

Két egymást metsző sík hajlásszögének azt a lapszöget nevezzük, amely nem nagyobb 90°-nál.

**A sokszög ortogonális vetületének területe**

A domború sokszög vetületének területe egyenlő a sokszög területének, valamint a sokszög és a vetülete közötti $\alpha$ szög koszinuszának szorzatával, ahol $0° \leqslant \alpha < 90°$.

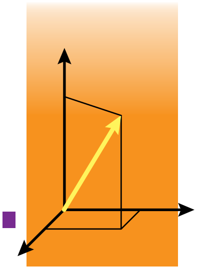
**Merőleges síkok**

Két síkot merőlegesnek mondunk, ha a köztük lévő szög 90°-os.

**A merőleges síkok ismertetőjele**

Ha két sík közül az egyik olyan egyenesre illeszkedik, amely merőleges a másik síkra, akkor ezek a síkok merőlegesek egymásra.

# KOORDINÁTÁK ÉS VEKTOROK A TÉRBEN 6. §.

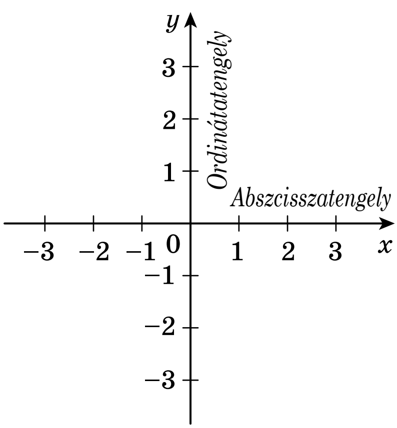


Ebben a paragrafusban megismerkedtek a térbeli derékszögű koordináta-rendszerrel, megtanuljátok meghatározni a pontok térbeli koordinátáit, a szakasz hosszát és a felezőpontjának koordinátáit.

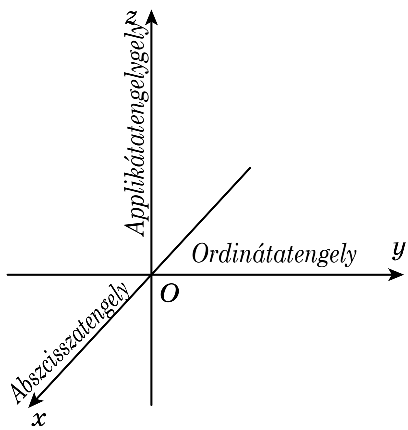
Általánosítjátok és bővítitek a vektorokról eddig tanultakat.

## 38. A pont Descartes-féle koordinátái a térben

Az előző osztályokban megismerkedtetek a derékszögű koordináta-rendszerrel a síkon, amit két, egy közös kezdőpontból kiinduló, egymásra merőleges számegyenes alkot (38.1. ábra).



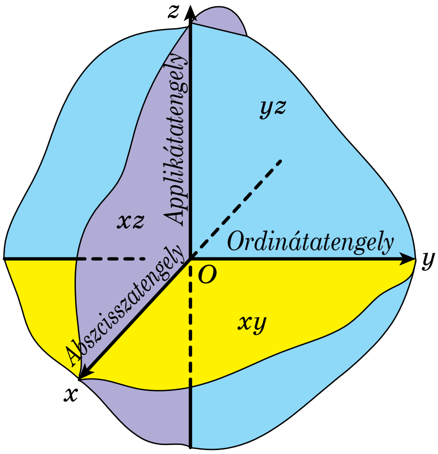

**38.1. ábra**



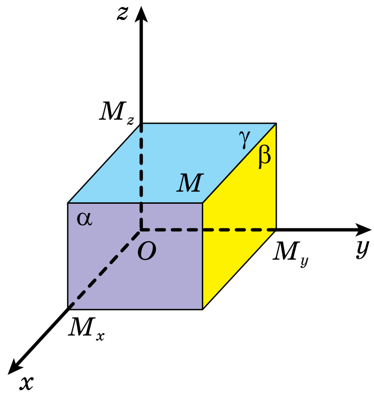

**38.2. ábra**

A koordináta-rendszert a térben is megadhatjuk.

A **derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszernek a térben** három, egymásra kölcsönösen merőleges számegyenest nevezzük, melyeknek közös a kezdőpontjuk (38.2. ábra). A három számegyenes metszéspontját $O$ betűvel jelöljük, és **origónak** (a **koordináta-rendszer kezdőpontjának**) mondjuk. A koordinátaegyeneseket $x$, $y$ és $z$ betűkkel jelöljük, és megfelelően **abszcisszatengely**nek, **ordinátatengely**nek és **applikátatengely**nek nevezzük.




**38.3. ábra**




**38.4 ábra**

Azokat a síkokat, amelyek illeszkednek az $x$ és $y$, $x$ és $z$, $y$ és $z$ tengelypárokra, **koordinátasíkok**nak nevezzük, és jelölésük megfelelően: $xy$, $xz$, $yz$ (38.3. ábra).

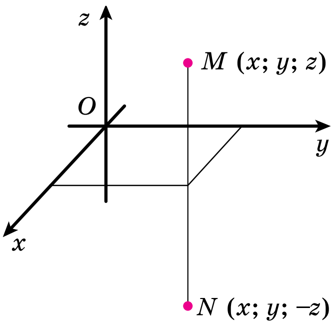
A koordináta-rendszer által meghatározott teret **koordinátatér**nek mondjuk. Ha a koordinátatengelyeket az $x$, $y$, $z$ betűkkel jelöljük, akkor a koordinátateret $xyz$-vel.

A síkmértanból már tudjuk, hogy minden $M$ pontnak az $xy$ koordinátasíkon egy $(x; y)$ rendezett számpár felel meg, melyeket az $M$ pont koordinátáinak nevezzük. Így jelöljük: $M\,(x; y)$.

Hasonlóan minden $M$ pontnak a koordinátatérben egy $(x; y; z)$ rendezett számhármas felel meg, melyet a következőképpen definiálunk. Az $M$ ponton át három $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ síkot fektetünk, melyek megfelelően merőlegesek az $x$, $y$ és $z$ tengelyekre. A síkok koordinátatengelyekkel való metszéspontjait az $M_x$, $M_y$ és $M_z$ betűkkel jelöljük (38.4. ábra). Az $M_x$ pont koordinátáját az $x$ tengelyen az $M$ pont **abszcisszájának** nevezzük és $x$-szel jelöljük. Az $M_y$ pont koordinátáját az $y$ tengelyen az $M$ pont **ordinátájá**nak nevezzük és $y$-nal jelöljük. Az $M_z$ pont koordinátáját az $z$ tengelyen az $M$ pont **applikátájá**nak nevezzük és $z$-vel jelöljük.

Az ily módon kapott $(x; y; z)$ számhármast az ***M* pont térbeli koordinátájá**nak nevezzük. Így írjuk fel: $M\,(x; y; z)$.

Ha az $M$ pont koordinátája $M\,(x; y; z)$, akkor az $|x|$, $|y|$, $|z|$ számok egyenlők az $M$ pont és az $yz$, $xz$, $xy$ koordinátasíkok közötti távolságokkal. E tény ismeretében be lehet bizonyítani, hogy az



**38.5. ábra**

$M(x;\ y;\ z)$ és $N(x;\ y;\ -z)$ pontok például egy olyan egyenesre illeszkednek, amely merőleges az $xy$ síkra, és egyenlő távolságra van ettől a síktól (38.5. ábra). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $M$ és $N$ **pontok szimmetrikusak** az $xy$ síkra.

Ha egy pont a koordinátasíkra vagy a koordinátatengelyre illeszkedik, akkor egyes koordinátái nullával lesznek egyenlők. Például az $A(x;\ y;\ 0)$ pont az $xy$ koordinátasíkra illeszkedik, a $B(0;\ 0;\ z)$ pont pedig az applikátatengelyre.

Igazak lesznek a következő állítások.

**38.1. tétel.** ***Az $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ és a $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ pontok közötti távolság a következő képlettel határozható meg*:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**38.2. tétel.** ***A végpontok koordinátáival megadott szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepével, vagyis az $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ és a $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ pontok felezőpontja a következő pont lesz:***

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2};\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

A 38.1. és a 38.2. tétel hasonlóan bizonyítható, mint a síkmértan megfelelő tételei.

Például az $A(x;\ y;\ z)$ és $B(-x;\ -y;\ -z)$ pontok felezőpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, vagyis az $O(0;\ 0;\ 0)$ pont. Az ilyen esetben azt mondjuk, hogy az $A$ és $B$ pontok **szimmetrikusak a koordináta-rendszer kezdőpontjára.**

1. Hogyan nevezzük a közös kezdőpontú három, egymásra kölcsönösen merőleges koordinátatengelyt?
2. Hogyan nevezzük azt a koordinátatengelyt, melyet $x$-szel jelölünk? $y$-nal jelölünk? $z$-vel jelölünk?
3. Hogyan kell felállítani a kapcsolatot a koordinátatér minden $M$ pontja és az $(x;\ y;\ z)$ rendezett számhármasok között?
4. Milyen esetben mondjuk azt, hogy két pont szimmetrikus az $xy$ koordinátasíkra? A $xz$ koordinátasíkra? Az $yz$ koordinátasíkra?
5. Hogyan kell meghatározni két pont közötti távolságot, ha ismertek a pontok koordinátái?

**6.** Hogyan kell meghatározni a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha ismertek a szakasz végpontjainak koordinátái?

**7.** Milyen esetben mondjuk azt, hogy két pont szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára?

## GYAKORLATOK

**38.1.°** Állapítsd meg, hogy az adott pont illeszkedik-e koordinátatengelyre:
1) $A\,(4;\ -3;\ 0)$; 3) $C\,(-6;\ 0;\ 0)$; 5) $E\,(0;\ 0;\ -2)$;
2) $B\,(1;\ 0;\ -5)$; 4) $D\,(0;\ 7;\ 0)$; 6) $F\,(3;\ 0;\ 0)$!
Igenlő válasz esetén nevezd meg a tengelyt is!

**38.2.°** Állapítsd meg, hogy az adott pont illeszkedik-e koordinátasíkra:
1) $A\,(4;\ -3;\ 5)$; 3) $C\,(3;\ 3;\ 0)$; 5) $E\,(0;\ 4;\ 0)$;
2) $B\,(0;\ -2;\ 6)$; 4) $D\,(2;\ 0;\ 8)$; 6) $F\,(-1;\ 1;\ 2)$!
Igenlő válasz esetén nevezd meg a koordinátasíkot is!

**38.3.°** Mekkora távolságra van az $M\,(4;\ -5;\ 2)$ pont a következő koordinátasíktól:
1) $xy$; 2) $xz$; 3) $yz$?

**38.4.°** Milyen az $M\,(-3;\ 2;\ 4)$ pont vetületének koordinátái a következő koordinátasíkra:
1) $xz$; 2) $yz$; 3) $xy$?

**38.5.°** Határozd meg az $A$ és $B$ pontok közötti távolságot, ha:
1) $A\,(3;\ -4;\ 2)$, $B\,(5;\ -6;\ 1)$; 2) $A\,(-2;\ 3;\ 1)$, $B\,(-3;\ 2;\ 0)$!

**38.6.°** Határozd meg a $C\,(6;\ -5;\ -1)$ és $D\,(8;\ -7;\ 1)$ pontok közötti távolságot!

**38.7.°** Határozd meg a $CD$ szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $C\,(-2;\ 6;\ -7)$, $D\,(4;\ -10;\ -3)$!

**38.8.°** Határozd meg az $EF$ szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $E\,(3;\ -3;\ 10)$, $F\,(1;\ -4;\ -8)$!

**38.9.•** Az $A\,(-1;\ 6;\ 2)$, $B\,(-1;\ -6;\ 2)$, $C\,(1;\ 6;\ -2)$, $D\,(1;\ -6;\ 2)$ pontok közül melyek illeszkednek az $xz$ síkkal párhuzamos síkra?

**38.10.•** Az $M\,(5;\ 10;\ -3)$, $N\,(5;\ 9;\ 3)$, $K\,(4;\ -9;\ 3)$, $P\,(4;\ -9;\ 2)$ pontok közül melyek illeszkednek az $xy$ síkkal párhuzamos síkra?

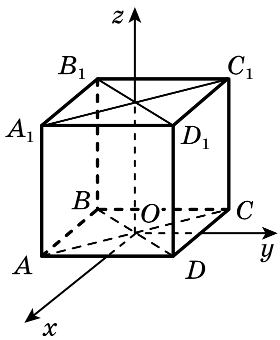
**38.11.•** Nevezd meg annak a pontnak a koordinátáit, amely szimmetrikus az $M\,(1;\ -5;\ 2)$ ponttal a következő koordinátasíkra:
1) $xz$; 2) $yz$; 3) $xy$!

**38.12.•** Nevezd meg annak a pontnak a koordinátáit, amely szimmetrikus az $N\,(-7;\ 1;\ 0)$ ponttal a koordináta-rendszer kezdőpontjához képest!

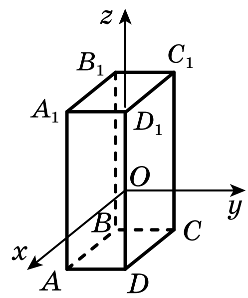
**38.13.•** Az $A\,(5;\ -8;\ 1)$, $B\,(5;\ 8;\ 1)$, $C\,(-5;\ 7;\ 1)$, $D\,(5;\ -7;\ -1)$ pontok közül melyek illeszkednek egy az ordinátatengellyel párhuzamos egyenesre?

**38.14.•** A $D$ (2; 3; 4), $E$ (–2; 3; 4), $K$ (2; 3; –4), $M$ (–2; –3; 4) pontok közül melyek illeszkednek egy, az applikátatengellyel párhuzamos egyenesre?

**38.15.•** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka a derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyezkedik el, mint ahogy a 38.6. ábrán látható. Az $A$ pont koordinátái (1; –1; 0). Határozd meg a többi csúcsának a koordinátáit!




**38.6. ábra**




**38.7. ábra**

**38.16.•** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest oldalélei párhuzamosak az applikátatengellyel (38.7. ábra). $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. A koordináta-rendszer $O$ kezdőpontja a $DD_1$ él felezőpontja. Határozd meg a téglatest csúcsainak a koordinátáit!

**38.17.•** Az $A$ (3; –2; 6) és $C$ (–1; 2; –4) pontok az $ABCD$ négyzet csúcsai. Határozd meg a négyzet területét!

**38.18.•** Az $A$ (5; –5; 4) és $B$ (8; –3; 3) pontok az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög csúcsai. Határozd meg a háromszög kerületét!

**38.19.•** Az $S$ pont az $AD$ szakasz felezőpontja, ahol $A$ (–1; –2; –3), $S$ (5; –1; 0). Határozd meg a $D$ pont koordinátáit!

**38.20.•** Az $A$ (1; $y$; 3) és $B$ (3; –6; 5) pontok közötti távolság $2\sqrt{6}$. Határozd meg az $y$ értékét!

**38.21.•** Az $A$ pont az abszcisszatengelyre illeszkedik. Az $A$ pont távolsága a $C$ (1; –1; –2) ponttól 3 egység. Határozd meg az $A$ pont koordinátáit!

**38.22.••** Határozd meg az $M$ (–3; 4; 9) pont és az applikátatengely közötti távolságot!

**38.23.••** Határozd meg a $K$ (12; 10; –5) pont és az ordinátatengely közötti távolságot!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**38.24.** Az egyenlő szárú trapéz alapjai 13 cm és 37 cm, az átlói pedig merőlegesek egymásra. Határozd meg a trapéz területét!

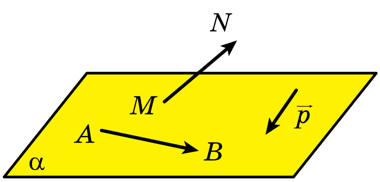
# 39. Vektorok a térben

A síkmértanban megismerkedtünk a síkbeli vektorokkal. Most pedig megkezdjük az ismerkedést a térbeli vektorokkal. A síkbeli vektorok sok fogalma és tulajdonsága szinte megegyezik a térbeli vektorokéval. A tételek bizonyítása is teljesen hasonlóan történik a térbeli vektorokra, mint a megfelelő tétel bizonyítása a síkvektorokra.

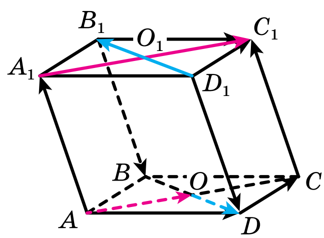
Vizsgáljuk meg az $AB$ szakaszt. Ha az $A$ pontot a szakasz **kezdőpontjá**nak tekintjük, a $B$ pontot pedig a **végpontjá**nak, akkor az ilyen szakaszt nem csak a hossza, de az $A$ pontból a $B$ pontba való iránya is jellemezi. Ha meg van adva, hogy melyik pont a szakasz kezdőpontja és melyik a szakasz végpontja, akkor az ilyen szakaszt **irányított szakasz**nak vagy **vektor**nak nevezzük.

Azt a vektort, melynek kezdete az $A$ pont, a végpontja pedig a $B$, így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$ (így olvassuk: $AB$ vektor). A vektorok jelölésére az ábécé kisbetűjét is használhatjuk, amely fölé kis nyilat teszünk.

A 39.1. ábrán az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ és $\vec{p}$ vektorok láthatók.




**39.1. ábra**




**39.2. ábra**

A szakasztól eltérően, melynek végpontjai különböző pontok, a vektor kezdő- és végpontja egybeeshet.

Azt a vektort, melynek a kezdő- és végpontja egybeesik, **nullvektor**nak nevezzük, és $\vec{0}$-val jelöljük.

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor **abszolút értéké**nek az $AB$ szakasz hosszát nevezzük. Így jelöljük: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Az $\vec{a}$ abszolút értékét így jelöljük: $\left|\vec{a}\right|$. Úgy tekintjük, hogy a nullvektor hossza nullával egyenlő: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

**Definíció. Két nem nullvektort kollineárisnak nevezzük, ha párhuzamos egyenesekre vagy egy egyenesre illeszkednek. A nullvektort minden vektorral kollineárisnak tekintjük.**

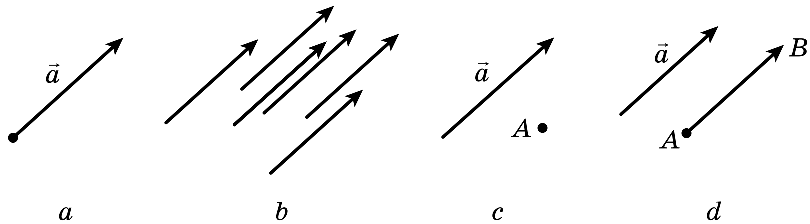
A 39.2. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyoldalú hasáb látható. Az $\overrightarrow{AO}$ és az $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektorok kollineárisak. Ezt így írjuk fel: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

A nem nullvektorok lehetnek **egyirányúak** és **ellentétes irányúak** is. Például a 39.2. ábrán az $\overrightarrow{AO}$ és $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektorok egyirányúak. Ezt így jelöljük: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Az $\overrightarrow{OD}$ és $\overrightarrow{D_1B_1}$ vektorok ellentétes irányúak. Ezt így jelöljük: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

**Definíció. Két nem nullvektort egyenlőnek mondunk, ha az abszolút értékük egyenlő és egyirányúak. Bármilyen két nullvektor egyenlő.**

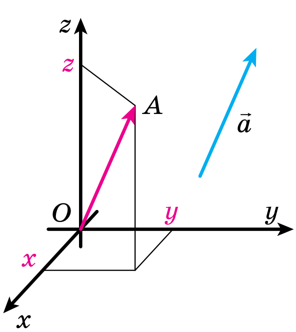
A 39.2. ábrán $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Gyakran, amikor egy vektorról beszélünk, nem tisztázzuk, hogy melyik pont lesz annak a kezdőpontja. Így, a 39.3. *a* ábrán az $\vec{a}$ vektor látható. A 39.3. *b* ábrán az $\vec{a}$ vektorral egyenlő vektorok láthatók. Ezek mindegyikét $\vec{a}$ vektornak szokás nevezni.




**39.3. ábra**

A 39.3. *c* ábrán az $\vec{a}$ vektor és az *A* pont látható. Megszerkesztjük az $\overrightarrow{AB}$ vektort, amely egyenlő az $\vec{a}$ vektorral. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\vec{a}$ vektort az *A* pontból indítjuk (39.3. *d* ábra).




**39.4. ábra**

Vizsgáljuk meg a koordinátatérben az $\vec{a}$ vektort. A koordináta-rendszer kezdőpontjából indítjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort, amely az $\vec{a}$ vektorral egyenlő (39.4. ábra). Az $\vec{a}$ **vektor koordinátái**nak az *A* pont koordinátáit nevezzük. Az $\vec{a}$ **(*x*; *y*; *z*)** felírás azt jelenti, hogy az $\vec{a}$ vektornak a koordinátái $(x; y; z)$ lesz.

*Az egyenlő vektoroknak a koordinátái is egyenlők és fordítva, ha két vektor megfelelő koordinátái egyenlők, akkor maguk a vektorok is egyenlők lesznek.*

**39.1. tétel.** ***Ha az $A(x_1; y_1; z_1)$ és $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontjai, akkor az $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ és $z_2 - z_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első, második és harmadik koordinátái lesznek.***

A két pont távolságának képletéből következik, hogyha ***az $\vec{a}$ vektornak a koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor***

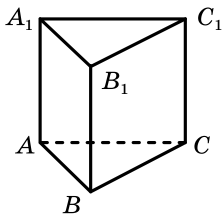
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

1. Hogyan jelöljük az $A$ kezdőpontú és $B$ végpontú vektort?
2. Mit nevezünk nullvektornak?
3. Mit nevezünk a vektor abszolút értékének?
4. Milyen vektorokat nevezünk kollineárisoknak?
5. Milyen két nem nullvektort nevezünk egyenlőknek?
6. Mit mondhatunk az egyenlő vektorok koordinátáiról?
7. Mit mondhatunk azokról a vektorokról, melyeknek a megfelelő koordinátái egyenlők?
8. Hogyan kell meghatározni a vektor koordinátáit, ha ismert a kezdő- és végpontjának a koordinátái?
9. Hogyan kell meghatározni a vektor abszolút értékét, ha ismertek a koordinátái?

## GYAKORLATOK

**39.1.°** A 39.5. ábrán az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb látható, melynek alapja szabályos háromszög. Egyenlők-e a következő vektorok:

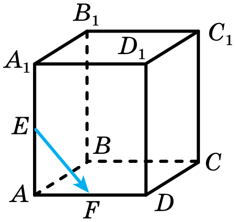
1) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{A_1C_1}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{A_1B_1}$;
3) $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{C_1C}$;
4) $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{AA_1}$?




**39.5. ábra**

**39.2.°** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $AA_1$ és $AD$ éleinek megfelelő felezőpontjai az $E$ és $F$ pontok (39.6. ábra). $AB \neq AD$. Nevezd meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjuk a téglatest csúcsai, és:

1) egyirányúak az $\overrightarrow{EF}$ vektorral;
2) ellentétes irányúak az $\overrightarrow{AB_1}$ vektorral;
3) azonos az abszolút értékük a $\overrightarrow{BC_1}$ vektorral!




**39.6. ábra**

**39.3.°** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $CD$ és $CC_1$ éleinek megfelelő felezőpontjai az $M$ és $K$ pontok. Nevezd meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjuk a téglatest csúcsai, és:

1) egyirányúak az $\overrightarrow{AD}$ vektorral;

2) ellentétes irányúak az $\overrightarrow{MK}$ vektorral;

3) egyenlő az abszolút értékük az $\overrightarrow{AC_1}$ vektorral!

**39.4.°** Rajzolj egy $ABCD$ tetraédert! Mérj fel:

1) az $A$ pontból a $\overrightarrow{CA}$ vektorral egyenlő vektort;

2) a $B$ pontból az $\overrightarrow{AC}$ vektorral egyenlő vektort;

3) a $D$ pontból a $\overrightarrow{BC}$ vektorral egyenlő vektort!

**39.5.°** Rajzolj egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát! Mérj fel:

1) az $A$ pontból az $\overrightarrow{A_1A}$ vektorral egyenlő vektort;

2) a $C$ pontból az $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektorral egyenlő vektort;

3) a $D_1$ pontból a $\overrightarrow{B_1D}$ vektorral egyenlő vektort!

**39.6.°** Mik a nullvektor koordinátái?

**39.7.°** Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit, ha
1) $A\,(3;\ 4;\ 2)$, $B\,(1;\ -4;\ 5)$; 2) $A\,(-6;\ 7;\ -1)$, $B\,(2;\ 9;\ 8)$!

**39.8.°** Határozd meg a $\overrightarrow{CD}$ vektor koordinátáit, ha $C\,(-1;\ 10;\ 4)$, $D\,(-1;\ 0;\ 2)$!

**39.9.°** Határozd meg az $\vec{m}\left(2; -5; \sqrt{7}\right)$ vektor abszolút értékét!

**39.10.°** Határozd meg az $\overrightarrow{MK}$ vektor abszolút értékét, ha $M\,(10; -4; 20)$, $K\,(8;\ -2;\ 19)$!

**39.11.•** Határozd meg a $\overrightarrow{PF}\,(2;\ -3;\ 6)$ vektor végpontjának koordinátáit, ha $P\,(3;\ 5;\ -1)$!

**39.12.•** Határozd meg az $\overrightarrow{ST}\,(-3;\ 4;\ -2)$ vektor kezdőpontjának koordinátáit, ha $T(4;\ 2;\ 0)$!

**39.13.•** Adottak az $A\,(-2;\ 3;\ 5)$, $B\,(1;\ 2;\ 4)$, $C\,(4;\ -3;\ 6)$ pontok. Határozd meg a $D$ pont koordinátáit, hogy teljesüljön a következő egyenlőség: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$!

**39.14.•** Adott az $A\,(5;\ -12;\ 7)$, $B\,(0;\ y,\ 3)$, $C\,(x;\ 17;\ -14)$, $D\,(15;\ 0;\ z)$ pontok. Az $x$, $y$ és $z$ mely értékeinél teljesül az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ egyenlőség?

**39.15.•** Az $\vec{a}\,(-4;\ y;\ 12)$ abszolút értéke 13. Határozd meg az $y$ értékét!

**39.16.**• A $k$ mely értékeinél lesznek az $\vec{a}\,(4;\ k+3;\ 10)$ és $\vec{b}\,(k;\ 4;\ k+9)$ vektorok abszolút értékei egyenlők?

**39.17.**•• Vektorokat alkalmazva bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ha a csúcsainak koordinátái: $A\,(-4;\ 2;\ 5)$, $B\,(-6;\ 3;\ 0)$, $C\,(12;\ -8;\ 1)$ és $D\,(14;\ -9;\ 6)$!

**39.18.**•• Adott az $ABCD$ paralelogramma három csúcsának koordinátái: $A\,(10;\ -8;\ -1)$, $C\,(-2;\ 4;\ 4)$ és $D\,(11;\ -20;\ 10)$. Határozd meg a $B$ pont koordinátáit, és ehhez használj vektorokat!

**39.19.**•• Az $\vec{m}$ vektor abszolút értéke $4\sqrt{3}$, a koordinátái pedig egyenlők. Határozd meg az $\vec{m}$ vektor koordinátáit!

**39.20.**•• A $\vec{c}\,(x; y; z)$ vektor abszolút értéke 9, az $x$ és $z$ koordinátái egyenlők, az $x$ és $y$ koordináták pedig ellentett számok. Határozd meg a $\vec{c}$ vektor koordinátáit!

### ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**39.21.** A kör középpontjának egyik oldalán 30 és 48 cm-es párhuzamos húrokat húztak. Határozd meg a húrok közötti távolságot, ha a kör sugara 25 cm!

## 40. A vektorok összeadása és kivonása

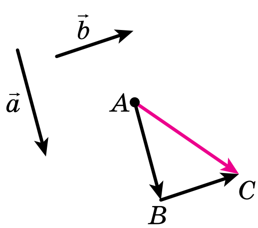
Legyen adott a térben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. Fektessünk egy tetszőleges $A$ pontból egy $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, majd a $B$ pontból egy $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{BC}$ vektort. Az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok összegé**nek nevezzük (40.1. ábra) és így írjuk fel: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

A két vektor összeadásának fenti algoritmusát **háromszög-szabály**nak nevezzük.

Be lehet bizonyítani, hogy az $\vec{a}+\vec{b}$ összeg független az $A$ pont kiválasztásától.

Megjegyezzük, hogy *tetszőleges* $A$, $B$ és $C$ *pontokra teljesül* az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *egyenlőség*.

Ez az egyenlőség a háromszög-szabályt fejezi ki.




**40.1. ábra**

A vektorok összeadásának tulajdonságai hasonlóak a számok összeadásának tulajdonságaival.

***Tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra igazak a következő egyenlőségek:***

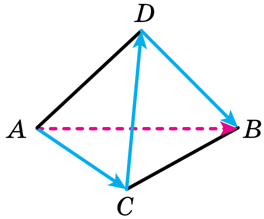
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(*felcserélhetőségi tulajdonság*);**

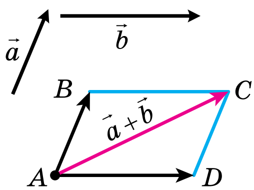
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **(*csoportosítási tulajdonság*).**

Három vagy több vektor összegét a következőképpen határozzuk meg: először összeadjuk az első két vektort, aztán a kapott összeghez hozzáadjuk a harmadik vektort és így tovább. Például $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

A 40.2. ábrán látható $ABCD$ tetraéder esetében fel lehet írni a következő egyenlőséget: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.




**40.2. ábra**



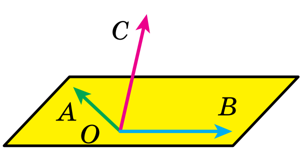

**40.3. ábra**

Két nem kollieneáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összeadására célszerű alkalmazni a **paralelogramma-szabály**t.

Egy közös $A$ kezdőpontból indítjuk az $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort és a $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AD}$ vektort (40.3. ábra). Megszerkesztjük az $ABCD$ paralelogrammát. Ekkor az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor egyenlő lesz az $\overrightarrow{AC}$ vektorral.

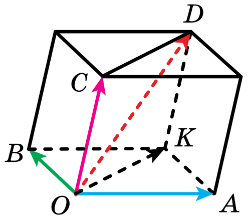
Megvizsgáljuk az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorokat, melyek nem illeszkednek egy síkra (40.4. ábra). Meghatározzuk ezeknek a vektoroknak az összegét.

Megszerkesztünk egy olyan paralelepipedont, melynek az $OA$, $OB$ és $OC$ szakaszok lesznek az élei (40.5. ábra), az $OD$ szakasz pedig az átlója. Bebizonyítjuk, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

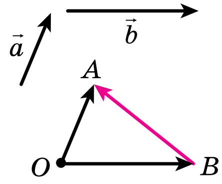



**40.4. ábra**

Mivel az $OBKA$ négyszög paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$. A következőt kaptuk: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Mivel az $OCDK$ négyszög paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.




**40.5. ábra**




**40.6. ábra**

A három vektor összeadásának a fenti módszerét, amely az egy pontból induló és nem egy síkra illeszkedő vektorokról szól, **paralelepipedon-szabály**nak nevezzük.

**Definíció. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségének azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, amelynek a $\vec{b}$ vektorral való összege egyenlő az $\vec{a}$ vektorral.**

Ezt így írjuk fel: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Megmutatjuk, hogyan kell megszerkeszteni azt a vektort, amely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége lesz.

Egy tetszőleges $O$ pontból felmérjük az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat, melyek megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal (40.6. ábra). Ekkor $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, vagyis $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, tehát a $\overrightarrow{BA}$ vektor egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségével.

Megjegyezzük, hogy *bármely három $O$, $A$ és $B$ pontra teljesül az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ egyenlőség.* Ez az egyenlőség két egy pontból induló vektor különbsége meghatározásának szabályát adja meg.

**40.1. tétel.** ***Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok koordinátái megfelelően $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ és $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, akkor az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$, az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor koordinátái pedig $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$ koordináták lesznek.***

1. Írd le a két vektor összeadásának háromszög-szabályát!
2. Írd le a két vektor összeadásának paralelogramma-szabályát!
3. Írd le a három vektor összeadásának paralelepipedon-szabályát!
4. Mit nevezünk két vektor különbségének?
5. Mivel egyenlő két adott vektor összegének koordinátái?
6. Mivel egyenlő két adott vektor különbségének koordinátái?

## GYAKORLATOK

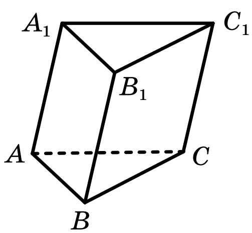
**40.1.°** Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (40.7. ábra). Határozd meg a következő vektorok összegét:

1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1C_1}$!

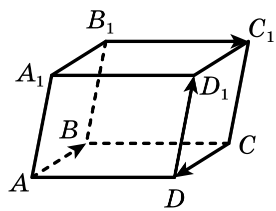
**40.2.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg a következő vektorok összegét:

1) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1D_1}$!

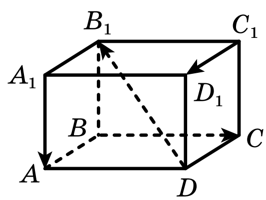
**40.3.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (40.8. ábra). Határozd meg a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{B_1C_1}$ vektorok összegét!




**40.7. ábra**




**40.8. ábra**




**40.9. ábra**

**40.4.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (40.9. ábra). Határozd meg a $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}$ vektorok összegét!

**40.5.°** Adott az $\vec{a}\,(3; -6; 4)$ és $\vec{b}\,(-2; 4; -5)$ vektor. Határozd meg az 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ vektorok koordinátáit!

**40.6.°** Adott az $\vec{m}\,(-7; -1; 8)$ és $\vec{n}\,(-3; 2; -4)$ vektor. Határozd meg az 1) $\vec{m}+\vec{n}$; 2) $\left|\vec{m}+\vec{n}\right|$ vektorok koordinátáit!

**40.7.°** Adott az $\vec{a}\,(-10; 15; -20)$ és a $\vec{b}\,(2; 6; -12)$ vektor. Határozd meg az 1) $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$vektorok koordinátáit!

**40.8.°** Adott az $\vec{m}\,(3; -1; 2)$ és $\vec{n}\,(4; -2; -3)$ vektor. Határozd meg az 1) $\vec{m}-\vec{n}$; 2) $\left|\vec{m}-\vec{n}\right|$ vektorok koordinátáit!

**40.9.°** Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (40.7. ábra). Határozd meg a következő vektorok különbségét:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}$!

**40.10.°** Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg a következő vektorok különbségét:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$!

**40.11.**• Egyszerűsítsd a kifejezést: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NK}$!

**40.12.**• Egyszerűsítsd a kifejezést: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BM}$!

**40.13.**•• Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg azt a vektort, amely az $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{C_1D_1}$ vektorral egyenlő!

**40.14.**•• Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg azt a vektort, amely az $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{BC}$ vektorral egyenlő!

**40.15.**•• Határozd meg annak az $A$ pontnak a koordinátáit, amelyre igaz az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ egyenlőség, ha $B\,(4;\ -2;\ 12)$, $C\,(3;\ -1;\ 4)$!

**40.16.**•• Határozd meg annak az $M$ pontnak a koordinátáit, amelyre teljesül az $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ egyenlőség, ha $C\,(1;\ -5;\ 3)$, $D\,(-2;\ 0;\ 6)$!

### ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**40.17.** A körvonal $AB$ és $AC$ húrjai merőlegesek, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Határozd meg az $A$ pont távolságát a $BC$ egyenestől!

## 41. A vektor számmal való szorzása

**Definíció. Az $\vec{a}$ nem nullvektor és egy $k$ nullától különböző szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, amelyre teljesül, hogy:**

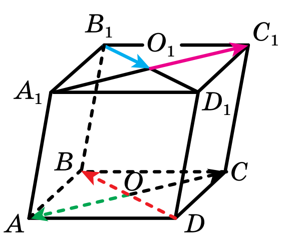
**1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;**

**2) ha $k>0$, akkor $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; ha $k<0$, akkor $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.**

Így írjuk fel: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Ha $\vec{a}=\vec{0}$ vagy $k=0$, akkor $k\vec{a}=\vec{0}$.

A 41.1. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon látható, amelyben $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=-2\overrightarrow{OA}$.




**41.1. ábra**

A meghatározásból következik, hogy

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}.$$

**41.1. tétel. Bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesül az $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$ egyenlőség.**

Ez a tétel lehetővé teszi a vektorok kivonásának összeadásra való visszavezetését: ahhoz, hogy az $\vec{a}$ vektorból kivonjuk a $\vec{b}$ vektort, az $\vec{a}$ vektorhoz elegendő hozzáadni a $(-1)\cdot\vec{b}$ vektort.

A $-1\cdot\vec{a}$ vektort $-\vec{a}$ -val jelöljük, és az $\vec{a}$ vektor **ellentettjének** nevezzük. Például:

$$\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

A vektor számmal való szorzásának meghatározásából következik, *hogyha* $\vec{b}=k\vec{a}$, *akkor az* $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ *vektorok kollineárisak.*

Tehát *az* $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ *egyenlőségből következik, hogy az O, A és B pontok egy egyeneshez illeszkednek.*

**41.2. tétel.** ***Ha az*** $\vec{a}$ ***és*** $\vec{b}$ ***vektorok kollineárisak és*** $\vec{a}\neq\vec{0}$, ***akkor létezik egy olyan k szám, amelyre teljesül a*** $\vec{b}=k\vec{a}$ ***egyenlőség.***

**41.3. tétel.** ***Ha az*** $\vec{a}$ ***vektor koordinátái*** $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, ***akkor a*** $k\vec{a}$ ***vektor koordinátái*** $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$ ***lesznek egyenlők.***

A vektor számmal való szorzásának tulajdonságai:

***Bármely k, m számra és bármely*** $\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ ***vektorra teljesülnek a következő egyenlőségek:***

$(km)\vec{a}=k\left(m\vec{a}\right)$ ***(csoportosítási tulajdonság);***

$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ ***(az első széttagolási tulajdonság);***

$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ ***(a második széttagolási tulajdonság).***

Az algebrai kifejezésekhez hasonlóan ezek a tulajdonságok lehetőséget adnak az olyan kifejezések átalakítására, melyek vektorok összegét és különbségét, valamint a vektor számmal való szorzását tartalmazza. Például

$$2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}-6\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{b}.$$

?

1. Mit nevezünk az $\vec{a}$ nem nullvektor és a $k$ nullától különböző szám szorzatának?
2. Milyen vektort nevezünk az adott vektor ellentett vektorának?
3. Mit mondhatunk az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra, ha $\vec{b}=k\vec{a}$, ahol $k$ egy tetszőleges szám?
4. Adott, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak, és $\vec{a}\neq\vec{0}$. Hogyan lehet kifejezni a $\vec{b}$ vektort az $\vec{a}$ vektoron keresztül?
5. Az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Mivel egyenlők a $k\vec{a}$ vektor koordinátái?

**6.** Mit mondhatunk azokról a vektorokról, melyeknek koordinátái $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ és $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$?

**7.** Írd fel a vektor számmal való szorzásának csoportosítási és széttagolási tulajdonságait!

## GYAKORLATOK

**41.1.°** Az $\vec{m}$ vektor abszolút értéke 4. Mivel lesz egyenlő az $\vec{n}$ vektor abszolút értéke, ha:
1) $\vec{n} = 3\vec{m}$; 2) $\vec{n} = -5\vec{m}$?

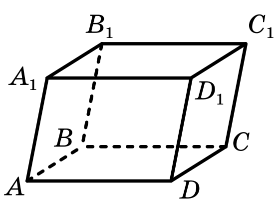
**41.2.°** Egyirányúak vagy ellentétes irányúak lesznek-e az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok, ha:
1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

**41.3.°** Adott az $\vec{a}\,(4;\ -8;\ -20)$ vektor. Milyen koordinátái lesznek a $\vec{b}$ vektornak, ha:
1) $\vec{b} = 5\vec{a}$; 2) $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$?

**41.4.°** Adottak az $\vec{a}\,(-3;\ 2;\ 5)$ és $\vec{b}\,(-2;\ -4;\ 1)$ vektorok. Határozd meg a $\vec{c}$ vektor koordinátáit, ha:
1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$!

**41.5.°** Adottak az $\vec{m}\,(1;\ 7;\ -8)$ és az $\vec{n}\,(3;\ -1;\ 6)$ vektorok. Határozd meg az $\vec{a}$ vektor koordinátáit, ha:
1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$; 2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$!

**41.6.°** Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (41.2. ábra). Nevezd meg az összes olyan vektort, melynek kezdő- és végpontja a paralelepipedon csúcsai lesznek, és ellentétes irányúak a következő vektorral:
1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{B_1D}$; 3) $\overrightarrow{AC}$!



**41.2. ábra**

**41.7.°** Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (41.2. ábra). Nevezd meg az összes olyan vektort, melynek kezdő- és végpontja a paralelepipedon csúcsai lesznek, és ellentétes irányúak a következő vektorral:
1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$!

**41.8.°** Nevezd meg annak a vektornak a koordinátáit, mely ellentétes irányú az $\vec{a}\,(13;\ -10;\ 9)$ vektorral!

**41.9.**$^\bullet$ Határozd meg a $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$ vektor abszolút értékét, ha $\vec{a}\,(-1;\,1;\,1)$, $\vec{b}\,(2;\,2;\,-2)$!

**41.10.**$^\bullet$ Határozd meg a $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$ vektor abszolút értékét, ha $\vec{a}\,(0{,}5;\,-0{,}5;\,1{,}5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3};\,-\frac{2}{3};\,\frac{1}{9}\right)$!

**41.11.**$^\bullet$ Kollineárisak-e az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok, ha $A\,(4;\,-1;\,-4)$, $B\,(0;\,5;\,6)$, $C\,(0;\,2;\,7)$, $D\,(2;\,-1;\,2)$?

**41.12.**$^\bullet$ Kollineárisak-e az $\overrightarrow{DE}$ és $\overrightarrow{FK}$ vektorok, ha $D\,(2;\,-3;\,4)$, $E\,(-1;\,6;\,2)$, $F\,(-2;\,8;\,6)$, $K\,(-3;\,11;\,7)$?

**41.13.**$^\bullet$ Határozd meg az $x$ és $y$ értékeit, ha az $\vec{a}\,(x;\,y;\,2)$ és a $\vec{b}\,(-2;\,3;\,1)$ vektorok kollineárisak!

**41.14.**$^\bullet$ Határozd meg az $x$ és $z$ értékeit, ha az $\vec{m}\,(-1;\,7;\,z)$ és az $\vec{n}\,(x;\,4;\,5)$ vektorok kollineárisak!

**41.15.**$^{\bullet\bullet}$ Adott az $\vec{a}\,(3;\,2;\,1)$ vektor. Határozd meg a vele kollineáris $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha az $A\,(1;\,1;\,1)$, és a $B$ pont az $yz$ síkra illeszkedik!

**41.16.**$^{\bullet\bullet}$ Adottak az $A\,(-3;\,6;\,4)$, $B\,(6;\,-1;\,2)$, $C\,(0;\,3;\,-2)$ pontok. Határozd meg a $D$ pont koordinátáit, amely az $xz$ síkra illeszkedik, és $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$!

**41.17.**$^{\bullet\bullet}$ Adott az $\vec{a}\,(-2;\,6;\,3)$ vektor. Határozd meg a $\vec{b}$ koordinátáit, ha az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok ellentétes irányúak, és a $\vec{b}$ vektor abszolút értéke 1!

**41.18.**$^{\bullet\bullet}$ Adott: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}\,(1;\,-1;\,2)$. Határozd meg az $\vec{m}$ koordinátáit!

**41.19.**$^{\bullet\bullet}$ Egy egyenesre illeszkednek-e a következő pontok:

1) $A\,(5;\,6;\,-4)$, $B\,(7;\,8;\,2)$ és $C\,(3;\,4;\,14)$;

2) $D\,(-1;\,-7;\,-8)$, $E\,(0;\,-4;\,-4)$ és $F\,(2;\,2;\,4)$?

**41.20.**$^{\bullet\bullet}$ Az $A$, $B$ és $C$ pontokra igaz, hogy $\overrightarrow{AB}\,(10;\,15;\,-5)$ és $\overrightarrow{AC}\,(-6;\,y;\,z)$. Az $y$ és $z$ mely értékeinél fognak az $A$, $B$ és $C$ pontok egy egyenesre illeszkedni?

**41.21.**$^{\bullet\bullet}$ Az $E$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon $CC_1$ élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{AE}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$ vektorok által!

**41.22.**$^{\bullet\bullet}$ Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon. Az $M$ pont az $A_1B_1$ élének a felezőpontja, a $K$ pont pedig a $CC_1$ élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{MK}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$ vektorok által!

**41.23.**•• Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Az $E$ pont a $CC_1$ élének a felezőpontja, az $F$ pont pedig az $AD$ élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$ vektorok által!

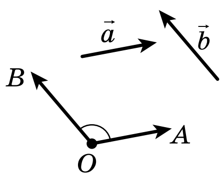
### ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**41.24.** Az egyenlő szárú háromszög alapja 48 cm, a területe pedig 432 cm$^2$. Határozd meg a háromszögbe írt körvonal sugarát!

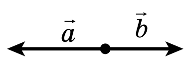
## 42. A vektorok skaláris szorzata

Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ két nem egyirányú és nem nullvektor. Az $O$ ponttól felmérjük az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal megfelelően egyenlő $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat (42.1. ábra). Az $AOB$ szöget az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok közötti szög**nek nevezzük.

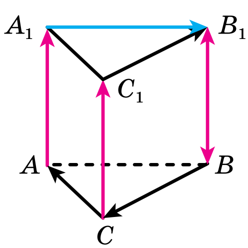
Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöget így jelöljük: $(\vec{a},\vec{b})\angle$. Természetesen, ha $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, akkor $(\vec{a},\vec{b})\angle=180°$ (42.2. ábra).




42.1. ábra




42.2. ábra




42.3. ábra

Ha $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, akkor $(\vec{a},\vec{b})\angle=0°$. Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor úgy tekintjük, hogy az $(\vec{a},\vec{b})\angle=0°$.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat **merőlegesek**nek nevezzük, ha a köztük lévő szög 90°. Ezt így jelöljük: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

A 42.3. ábrán egy háromoldalú hasáb látható, melynek az alaplapja szabályos háromszög, és az oldalélei merőlegesek az alaplap síkjára.

A következőt kapjuk: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C_1B_1})\angle=60°$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{A_1B_1})\angle=120°$, $(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1})\angle=0°$, $(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BC})\angle=90°$, $(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{B_1B})\angle=180°$.

**Definíció. Két vektor skaláris szorzatának nevezzük e vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát.**

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát így jelöljük: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A meghatározás matematikai nyelven való leírása:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})\angle$.

Ha az $\vec{a}$ vagy a $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor természetesen az $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skaláris szorzatot az $\vec{a}$ vektor **skaláris négyzeté**nek nevezzük és $\vec{a}^2$-tel jelöljük.

A vektor skaláris négyzete egyenlő a vektor abszolút értékének a négyzetével, vagyis $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

**42.1. tétel.** ***Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek egymásra.***

Például a 42.3. ábrán látható vektorokra igazak a következő egyenlőségek: $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

**42.2. tétel.** ***Az $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ vektorok skaláris szorzatát a következő képlettel lehet meghatározni***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

**42.3. tétel.** ***Az $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ nem nullvektorok közötti szög koszinuszát a következő képlettel lehet kiszámítani:***

$$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b})\angle = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

A vektorok skaláris szorzatának néhány tulajdonsága megegyezik a számok szorzásának tulajdonságával. Például:

***bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorra és bármely $k$ számra igazak a következő egyenlőségek:***

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

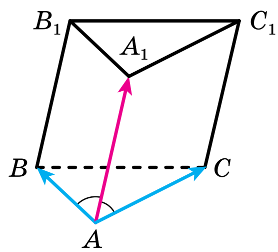
$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

A vektorok összeadását és számmal való szorzását, valamint a vektorok skaláris szorzatát tartalmazó kifejezéseket, az algebrai kifejezésekhez hasonlóan lehet átalakítani. Például

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=$$
$$=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

**Feladat.** A hasáb $ABC$ alapja egy egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$). Az $AA_1$ oldaléle az $AB$ és $AC$ élekkel egyenlő szögeket alkot (42.4. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $AA_1 \perp BC$!




**42.4. ábra**

*Megoldás*. Legyen a $BAA_1\angle = \alpha$. A feladat feltétele alapján fel lehet írni, hogy: $CAA_1\angle = \alpha$.

Meghatározzuk az $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok skaláris szorzatát.

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

Felírjuk a következőt:

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=$$
$$=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha-\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha.$$

Mivel $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, ezért a vizsgált skaláris szorzat egyenlő nullával. Tehát $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BC}$. ◀

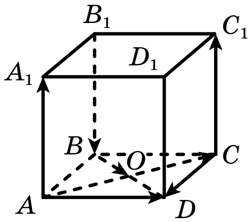
?

1. Mivel egyenlő két ellentétes irányú vektor hajlásszöge? Két egyirányú vektor hajlásszöge?
2. Mivel egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge, ha legalább az egyik nem nullvektor?
3. Milyen vektorokat nevezünk merőlegesnek?
4. Mit nevezünk két vektor skaláris szorzatának? Mivel egyenlő ez a szorzat?
5. Mit nevezünk a vektor skaláris négyzetének? Mivel egyenlő ez a szorzat?
6. Fogalmazd meg két nem nullvektor merőlegességének a feltételét!
7. Hogyan kell meghatározni a vektorok skaláris szorzatát, ha ismerjük a koordinátáikat?
8. Írd fel a vektorok skaláris szorzatának a tulajdonságait!

## GYAKORLATOK

**42.1.°** Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (42.5. ábra), ahol az $O$ pont az $ABCD$ lap középpontja. Mivel egyenlő a következő vektorok hajlásszöge:

1) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ és $\overrightarrow{CD}$?




**42.5. ábra**

**42.2.°** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 40°. Mivel egyenlő a következő vektorok hajlásszöge:

1) $2\vec{a}$ és $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ és $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ és $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ és $10\vec{b}$?

**42.3.°** Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 30°$;
2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 135°$!

**42.4.°** Határozd meg az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok skaláris szorzatát, ha: $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n})\angle = 120°$!

**42.5.°** Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $\vec{a}\,(1; -2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$!

**42.6.°** Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $\vec{a}\,(4; -1; 6)$, $\vec{b}\,(-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a}\,(1; -3; 9)$, $\vec{b}\,(-1; 3; 0)$!

**42.7.°** Adott az $\vec{m}\,(3; -2; 4)$ és $\vec{n}\,(2; 2; z)$ vektor. A $z$ mely értékénél teljesül $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$ egyenlőség?

**42.8.°** Adott az $\vec{a}\,(9; c; -1)$ és $\vec{b}\,(-2; 3; c)$ vektor. A $c$ mely értékénél teljesül $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$ egyenlőség?

**42.9.°** Az $\vec{a}\,(1; 1; 2)$, $\vec{b}\,(1; 2; 1)$ és $\vec{c}\,(-5; 3; 1)$ vektorok közül válaszd ki a merőleges vektorokat!

**42.10.•** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 45°, $|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Határozd meg:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$!

**42.11.**• Az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok közötti szög 150°, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Határozd meg:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$!

**42.12.**• Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Határozd meg az $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$ skaláris szorzatot!

**42.13.**• Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 60°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Határozd meg az $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$ skaláris szorzatot!

**42.14.**• Az $x$ mely értékei mellett lesznek merőlegesek az $\vec{a}\,(x; -x; 1)$ és $\vec{b}\,(x; 2; 1)$ vektorok?

**42.15.**• A $p$ mely értékei mellett lesznek merőlegesek az $\vec{a}\,(p; -2; 1)$ és $\vec{b}\,(p; 1; -p)$ vektorok?

**42.16.**• Határozd meg a $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ skaláris szorzatot, ha az $\vec{a}\,(2; -1; -2)$, $\vec{b}\,(4; -3; 2)$!

**42.17.**• Határozd meg az $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$ skaláris négyzetet, ha $\vec{m}\,(2; 1; -3)$, $\vec{n}\,(4; -2; 0)$!

**42.18.**•• Az $ABCD$ tetraéder minden éle $a$-val egyenlő, az $M$ pont az $AB$ él felezőpontja. Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát:

1) $\overrightarrow{CM}$ és $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$!

**42.19.**•• Az $ABCDM$ gúla alapja egy olyan négyzet, melynek minden éle $a$-val egyenlő. Határozd meg az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatát!

**42.20.**•• Határozd meg az $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ és az $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 135°$!

**42.21.**•• Határozd meg az $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m}, \vec{n})\angle = 30°$!

**42.22.**•• Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok közötti szög koszinuszát, ha $A\,(3; -2; 1)$, $B\,(-1; 2; 1)$, $C\,(4; -1; 5)$, $D\,(1; 3; 0)$!

**42.23.**•• A háromszög csúcsai az $A\,(1; 0; 1)$, $B\,(-5; 4; 3)$ és $C\,(0; 3; -1)$ pontok. Határozd meg a háromszög $A$ szögét!

## ISMÉTLŐ GYAKORLAT

**42.24.** Az egyenlő szárú trapéz szára 10 cm, a beírt kör sugara pedig 4 cm. Határozd meg a trapéz területét!

## A 6. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

**Két pont távolsága**

Az $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ és a $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ pontok közötti távolság az $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ képlettel határozható meg.

**A szakasz felezőpontjának koordinátái**

A végpontok koordinátáival megadott szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepével.

**Két vektor kölcsönös helyzete**

Két nem nullvektort kollineárisnak nevezzük, ha párhuzamos egyenesekre vagy ugyanarra az egyenesre illeszkednek. A nullvektor minden vektorral kollineáris lesz.

**A vektorok egyenlősége**

Két nem nullvektort egyenlőnek mondunk, ha az abszolút értékük egyenlő és egyirányúak. Bármely két nullvektor egyenlő egymással.

**A vektor koordinátái**

Ha az $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ és a $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontjai, akkor az $x_2-x_1$, $y_2-y_1$ és $z_2-z_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első, második és harmadik koordinátái lesznek.

**Vektor abszolút értéke**

Ha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1;\,a_2;\,a_3)$, akkor az $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

**Műveletek a vektorokkal**

Bármilyen $A$, $B$ és $C$ pontra teljesül az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ egyenlőség.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor különbségének azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, melynek a $\vec{b}$ vektorral való összege egyenlő az $\vec{a}$ vektorral.

Bármely három $O$, $A$ és $B$ pontra teljesül az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ egyenlőség.

Az $\vec{a}$ nem nullvektor és egy nullától különböző $k$ szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, amelyre tejesül: 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) ha $k > 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; ha $k < 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor kollineáris, és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan $k$ szám, amelyre teljesül a $\vec{b} = k\vec{a}$ egyenlőség.

A $-1 \cdot \vec{a}$ -t a $-\vec{a}$ -ral jelöljük és az $\vec{a}$ vektor ellentettjének nevezzük.

Két vektor skaláris szorzatának nevezzük a vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát.

Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok megfelelő koordinátái $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ és $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, akkor:

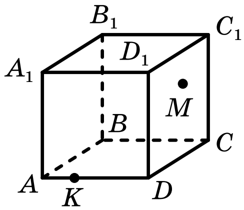
- az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$;
- az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$;
- a $k\vec{a}$ vektor koordinátái $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$;
- az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzata $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ lesz egyenlő;
- $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\angle = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (ahol az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok).

# 43. A 10. osztályos mértan tananyagának ismétlő gyakorlatai

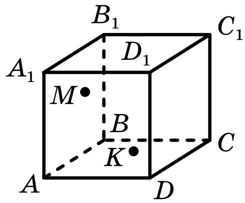
### Párhuzamosság a térben

**43.1.** Az $ABCD$ téglalap átlói az $O$ pontban metszik egymást. Az $M$ pont nem illeszkedik az $ABC$ síkhoz. Lehet-e olyan síkot fektetni, amely:
1) az $AM$ egyenesre és az $O$ és $C$ pontokra illeszkedik;
2) az $AC$ egyenesre és a $B$ és $M$ pontokra illeszkedik?

**43.2.** Az $M$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $BB_1C_1C$ lapjának egy pontja, a $K$ pedig az $AD$ élének a pontja (43.1. ábra). Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $ABB_1$ sík metszéspontját!




**43.1. ábra**




**43.2. ábra**

**43.3.** Az $M$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $AA_1B_1B$ lapjának egy pontja, a $K$ pedig az $AA_1D_1D$ lapjának a pontja (43.2. ábra). Szerkeszd meg az $MK$ egyenes és az $A_1B_1C_1$ sík metszéspontját!

**43.4.** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasáb $BB_1$, $CC_1$ és $DD_1$ élein úgy vették fel az $M$, $N$ és $K$ pontokat, hogy $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ és $CN \neq DK$. Szerkeszd meg az $ABC$ és az $MNK$ síkok metszésvonalát!

**43.5.** Az $M$ pont $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasáb $A_1B_1$ élének felezőpontja, a $K$ pont pedig a $CD$ élének a felezőpontja. Szerkeszd meg az $AMK$ és a $BB_1C_1$ síkok metszésvonalát!

**43.6.** Az $ABCD$ tetraéder $AB$, $AD$, $AC$ és $BC$ élein megfelelően jelölték az $E$, $F$, $M$ és $K$ pontokat. Szerkeszd meg az $EFM$ és a $DAK$ síkok metszésvonalát!

**43.7.** Az $ABCD$ tetraéder $DA$ és $DB$ élein megfelelően jelölték az $M$ és $K$ pontokat. Szerkeszd meg az $ABC$ és az $MKC$ síkok metszésvonalát!

**43.8.** Az $MK$ egyenes, amely nem illeszkedik az $ABCD$ paralelogramma síkjához, párhuzamos az $AD$ egyenessel. Milyen az: 1) $MK$ és $BC$; 2) $MK$ és $AB$ egyenesek kölcsönös helyzete?

**43.9.** Adott, hogy az $a$ és $b$ egyenesek párhuzamosak, és a $c$ egyenes metszi a $b$-t, de nem metszi az $a$-t. Bizonyítsd be, hogy az $a$ és $c$ egyenesek kitérő egyenesek lesznek?

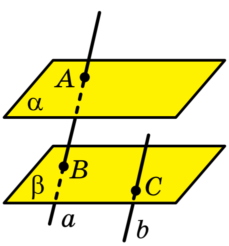
**43.10.** Az $AB$ és $CD$ szakaszok egy kör átmérői. Az $\alpha$ síknak nincs közös pontja ezzel a körrel. Az $A$, $B$, $C$ és $D$ pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek az $\alpha$ síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$, $C_1$ és $D_1$ pontokban metszik. Határozd meg a $CC_1$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 5$ cm, $BB_1 = 9$ cm, $DD_1 = 3$ cm!

**43.11.** Az $M$ pont nem illeszkedik az $ABCD$ paralelogramma síkjára. Bizonyítsd be, hogy $AB \parallel CMD$!

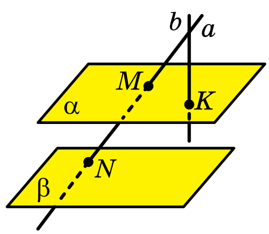
**43.12.** Az $ABC$ és $ABD$ háromszögek nem egy síkra illeszkednek. Az $M$ pont az $AC$ szakasz felezőpontja, az $N$ pont pedig a $BC$-jé. Az $AD$ szakaszon jelöltünk egy $K$ pontot, a $BD$ szakaszon pedig egy $E$ pontot úgy, hogy $KE \parallel ABC$. Bizonyítsd be, hogy $KE \parallel MN$!

**43.13.** Az $ABCD$ tetraéder $AD$, $BD$ és $CD$ élein megfelelően úgy jelölték az $E$, $F$ és $M$ pontokat, hogy $ABE\angle = FEB\angle$, $CBM\angle = FMB\angle$. Bizonyítsd be, hogy az $ABC$ és $EFM$ síkok párhuzamosak!

**43.14.** Adott, hogy $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Az $a$ egyenes az $A$ pontban metszi az $\alpha$ síkot, a $\beta$ síkot pedig a $B$ pontban. A $b$ egyenes a $C$ pontban metszi a $\beta$ síkot (43.3. ábra). Szerkeszd meg a $b$ egyenes és az $\alpha$ sík metszéspontját!




**43.3. ábra**




**43.4. ábra**

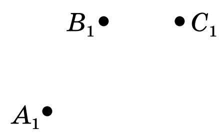
**43.15.** Adottak az $\alpha$ és a $\beta$ párhuzamos síkok, valamint az $a$ és $b$ egymást metsző egyenesek. Az $a$ egyenes az $\alpha$ síkot az $M$ pontban metszi, a $\beta$ síkot pedig az $N$ pontban, a $b$ egyenes az $\alpha$ síkot az $K$ pontban metszi (43.4. ábra). Szerkeszd meg a $b$ egyenes és a $\beta$ sík metszéspontját!

**43.16.** Az $ABCD$ tetraéder $ADB$ lapjának súlyvonalai az $E$ pontban metszik egymást, a $BDC$ lapé pedig az $F$ pontban. Bizonyítsd be, hogy az $EF$ egyenes párhuzamos az $ABC$ síkkal!

**43.17.** Igaz-e az állítás:

1) ha két egyenes síkra eső vetületei párhuzamosak, akkor az adott egyenesek is párhuzamosak;
2) ha egy síkbeli alakzat egybevágó a párhuzamos vetületével, akkor a sík, amelyre az adott alakzat illeszkedik, és az a sík, melyre a vetülete illeszkedik párhuzamosak?

**43.18.** Az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontok megfelelően az $ABCD$ paralelogramma $A$, $B$ és $C$ csúcsainak a vetületei (43.5. ábra). Szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma vetületét!




**43.5. ábra**

**43.19.** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az $ABC$ derékszögű háromszög vetülete lesz, az $AB$ átfogójának a vetülete pedig az $A_1B_1$ szakasz. Szerkeszd meg annak a négyzetnek a képét, melynek közös szöge van az $ABC$ háromszöggel, és minden csúcsa a háromszög oldalán helyezkedik el!

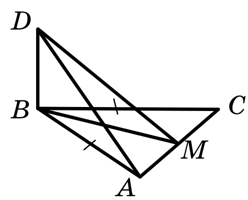
## Merőlegesség a térben

**43.20.** Az $m$ egyenes párhuzamos az $ABC$ háromszög $AC$ oldalával, és nem illeszkedik az $ABC$ síkra, $ABC\angle = BAC\angle = 30°$.

1) Bizonyítsd be, hogy az $m$ és a $BC$ egyenesek kitérők!
2) Határozd meg az $m$ és a $BC$ egyenesek közötti szöget!

**43.21.** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest $ABCD$ lapja négyzet, és az $AA_1$ éle kétszer nagyobb az $AB$ élnél. Határozd meg: 1) $AB_1$ és $CD$; 2 A $B_1$ és $CD_1$; 3) $AB_1$ és $A_1C_1$ egyenesek hajlásszögét!

**43.22.** Az $ABC$ háromszög $B$ csúcsán keresztül $BD$ egyenest fektettek, amely merőleges az $ABC$ síkra (43.6. ábra). Az $M$ pont az $AC$ szakasz felezőpontja. Határozd meg a $DA$ és $DM$ szakaszok hosszát, ha $AB = BC = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $DB = 24$ cm!




**43.6. ábra**

**43.23.** Az $ABCD$ négyzet $O$ középpontján át a négyzet síkjára merőlegesen egy $MO$ egyenest fektettünk. A $K$ pont a $CD$ szakasz felezőpontja, $MC = 6$ cm, $MCK\angle = 60°$.

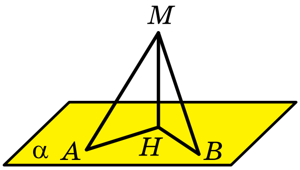
1) Bizonyítsd be, hogy a $CD$ egyenes merőleges a $MOK$ síkra!
2) Határozd meg az $MO$ szakasz hosszát!

**43.24.** Az $AB$ szakasz nem metszi az $\alpha$ síkot, az $AB$ egyenes viszont az $\alpha$ síkot a $C$ pontban metszi. Az $A$ és $B$ pontokra illeszkedve az $\alpha$ síkra merőleges egyeneseket fektettünk, amelyek megfelelően az

$A_1$ és $B_1$ pontokban metszik a síkot. Határozd meg a $B_1C$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 6$ cm, $A_1B_1 = 4$ cm!

**43.25.** Az $AB$ szakasz metszi az $\alpha$ síkot. Az $A$ és $B$ pontokon és az $AB$ szakasz $C$ felezőpontján át merőleges egyeneseket bocsátottunk az $\alpha$ síkra, melyek ezt a síkot megfelelően az $A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban metszik. Határozd meg a $CC_1$ szakasz hosszát, ha $AA_1 = 18$ cm, $BB_1 = 9$ cm!

**43.26.** Az $M$ pontból az $\alpha$ síkra $MH$ merőlegest, valamint egymással egyenlő $MA$ és $MB$ ferdéket bocsátottunk (43.7. ábra). Határozd meg a ferdék talppontjai közötti távolságot, ha $MAH\angle = 30°$, $AMB\angle = 60°$, $MH = 5$ cm!




**43.7. ábra**

**43.27.** Az $ABCD$ téglalap átlója és egyik oldala közötti szög 30°. Az $M$ pont a téglalap minden csúcsától $5\sqrt{3}$ cm-re van, a téglalap síkjától pedig $5\sqrt{2}$ cm-re. Határozd meg a téglalap területét!

**43.28.** Az $MC$ szakasz merőleges az $ABC$ háromszög síkjára, $ACB\angle = 90°$, $AC = BC = 6$ cm. Az $M$ pont és az $AB$ egyenes közötti távolság $3\sqrt{6}$ cm. Határozd meg az $M$ pont és az $ABC$ sík közötti távolságot!

**43.29.** Az $MB$ szakasz merőleges az $ABCD$ téglalap síkjára, $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm. Határozd meg az $M$ pont távolságát az $AD$ egyenestől, ha az $M$ pont és a $CD$ egyenes közötti távolság 20 cm!

**43.30.** A 6 cm, 25 cm és 29 cm oldalú $ABC$ háromszögbe írt körvonal $O$ középpontjából a háromszög síkjára $DO$ merőlegest állítottak. A $D$ pont és az $ABC$ háromszög közötti távolság $2\sqrt{15}$ cm. Határozd meg a $D$ pont távolságát a háromszög oldalaitól!

**43.31.** Az $M$ pont az $ABC$ szabályos háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van, a háromszög síkjától pedig 5 cm-re. Határozd meg az $ABC$ háromszög területét, ha az $MA$ egyenes az $ABC$ háromszög síkjához 60°-os szög alatt hajlik!

**43.32.** A $DC$ szakasz merőleges az $ABC$ derékszögű háromszög síkjára ($ACB\angle = 90°$), $DC = 9$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. A $DE$ szakasz a $D$ pontból az $AB$ egyenesre bocsátott merőleges. Határozd meg a $DE$ egyenes és az $ABC$ sík hajlásszögét!

**43.33.** Az $MK$ szakasz nem metszi az $\alpha$ síkot. Határozd meg az $MK$ egyenes és az $\alpha$ sík közötti szöget, ha $MK = 6$ cm, és az $MK$ szakasz végpontjainak távolsága az $\alpha$ síktól $8\sqrt{3}$ cm és $5\sqrt{3}$ cm!

**43.34.** Az $ABC$ szabályos háromszög $BC$ oldala az $\alpha$ síkra illeszkedik. A háromszög $AH$ magassága az $\alpha$ síkhoz $\varphi$ szög alatt hajlik. Határozd meg az $AB$ egyenes és az $\alpha$ sík közötti szöget!

**43.35.** Az $A$ pont a lapszög lapjai között helyezkedik el, amelynek mértéke $\alpha$. Az $A$ pont távolsága a lapszög mindegyik lapjától $h$ lesz. Határozd meg az $A$ pont és a lapszög éle közötti távolságot!

**43.36.** Az $MC$ szakasz merőleges az $ABC$ háromszög síkjára ($ABC\angle = 90°$). Határozd meg az $ABC$ és az $ABM$ síkok hajlásszögét, ha $AC = 8$ cm, $BAC\angle = 30°$, az $M$ pont és az $AB$ egyenes közötti távolság pedig 12 cm!

**43.37.** Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalán keresztül $\alpha$ síkot fektettek. Az $ABC$ háromszög síkja és az $\alpha$ sík közötti szög 60°-os. Határozd meg a $C$ pont távolságát az $\alpha$ síktól, ha $AC = 7$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = 13$ cm!

**43.38.** Az $ABCD$ négyzet síkja és az $AEFD$ téglalap síkjának hajlásszöge 60°-os. A négyzet területe 16 cm$^2$, a téglalapé pedig 32 cm$^2$. Határozd meg négyzet és a téglalap párhuzamos oldalai közötti távolságot!

**43.39.** A $c$ egyenes az $\alpha$ és a $\beta$ sík metszésvonala. Az $M$ pont az $\alpha$ síktól 9 cm-re, a $\beta$ síktól pedig 12 cm-re van. Határozd meg az $M$ pont és a $c$ egyenes közötti távolságot!

**43.40.** Az $ABC$ háromszög $C$ derékszögének csúcsán át egy $m$ egyenest fektettek, amely merőleges az $ABC$ síkra. Az $m$ egyenesen úgy jelöltek egy $D$ pontot, hogy az $ABC$ és az $ABD$ síkok közötti szög 30°-os lesz. Határozd meg az $ABD$ háromszög területét, ha $AB = 16$ cm, $BAC\angle = 45°$!

**43.41.** A $40\sqrt{2}$ cm$^2$ területű trapéz vetülete egy síkra egy olyan egyenlő szárú trapéz, melynek alapjai 7 cm és 13 cm, a szára pedig 5 cm. Határozd meg az adott trapézok síkjai közötti hajlászöget!

## Térkoordináták és térvektorok

**43.42.** Adott az $A\,(7;\ 3;\ -1)$ és a $B\,(x;\ 5;\ z)$ pont. Ismert, hogy az $AB$ szakasz $C$ felezőpontja az ordinátatengelyre illeszkedik.
1) Határozd meg a $C$ pont koordinátáit!
2) Határozd meg az $x$ és $z$ értékeit!

**43.43.** Adottak az $A\,(8;\ 0;\ 4)$, $B\,(13;\ 4;\ 7)$, $C\,(11;\ -3;\ 3)$ pontok.
1) Bizonyítsd be, hogy az $ABC$ háromszög derékszögű!
2) Határozd meg az $ABC$ háromszög köré írt körlap területét!

**43.44.** Határozd meg az $ABC$ egyenlő szárú háromszög területét, ha $A\,(1;\ 1;\ -2)$, $C\,(-3;\ 3;\ 2)$, a $B$ pont pedig az applikátatengelyre illeszkedik!

**43.45.** Adottak a következő pontok: $A(-2;\ 1;\ 3)$, $B(0;\ 5;\ 9)$ és $C(-3;\ y;\ 6)$. Az $y$ mely értékeinél lesz az $AB$ szakasz hossza kétszer nagyobb az $AC$ szakasz hosszánál?

**43.46.** A $C(2;\ -3;\ 1)$ pontból induló $\overrightarrow{CD}$ vektor egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ vektorral. Határozd meg a $D$ pont koordinátáit, ha $A(-1;\ 0;\ 5)$, $B(0;\ 4;\ -1)$!

**43.47.** Adottak az $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ -1)$ és $C(-1;\ 2;\ 0)$ pontok. Határozd meg a $D$ pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$!

**43.48.** Az $\vec{a}\,(x;\ 3;\ -4)$ és $\vec{b}\,(20;\ -12;\ 16)$ vektorok a paralelogramma szemközti oldalaira illeszkednek. Határozd meg az $x$ értékét!

**43.49.** Adottak az $A(-4;\ 1;\ 2)$, $B(-2;\ 0;\ -1)$ és $C(1;\ 1;\ 0)$ pontok. Határozd meg az $yz$ síkra illeszkedő $D$ pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok kollineárisak!

**43.50.** Az $ABCD$ tetraéder $BDC$ lapjának súlyvonalai az $O$ pontban metszik egymást, az $M$ pont az $AD$ él felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{MO}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által!

**43.51.** Határozd meg az $\vec{a}\,(2;\ 2;\ 1)$ és a $\vec{b}\,(6;\ -2;\ -3)$ vektorok közötti szög koszinuszát!

**43.52.** Határozd meg az $\vec{a}\,(3;\ -2;\ 4)$ és a $\vec{b}\,(2;\ 3;\ 0)$ vektorok közötti szöget!

**43.53.** Az $x$ mely értékeinél lesznek az $\vec{a}\,(x;\ -2;\ 1)$ és a $\vec{b}\,(x;\ 2x;\ 3)$ vektorok merőlegesek!

**43.54.** Határozd meg annak az $\vec{m}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az $\vec{n}\,(1;\ -2;\ 1)$ vektorral, ha $\vec{m}\cdot\vec{n}=-3$!

**43.55.** Határozd meg az $\vec{a}\,(-1;\ 2;\ 5)$ vektor és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szöget!

**43.56.** Határozd meg a $\vec{b}\,(6;\ -2;\ -3)$ vektor és az applikátatengely negatív iránya közötti szöget!

**43.57.** Adott, hogy $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $(\vec{a},\vec{b})\angle=135°$. Határozd meg az $|\vec{a}-\vec{b}|$ értékét!

**43.58.** Az $M$ pont az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $AB$ élének a felezőpontja, az $A_1B_1$ él felezőpontja pedig a $K$ pont. Határozd meg az $MB_1$ és a $DK$ egyenesek közötti szög mértékét!

# Feleletek és útmutatások

## 1. fejezet. Algebra és az analízis elemei

### 1. §. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjai

**1.16.** 1) 16; 2) 32. **1.17.** 2500 $m^2$. **1.22.** 2; 5. **1.23.** –3; –1. **1.28.** 3) {–6}.

**2.7.** 4) $\min\limits_{(-\infty;-2]} f(x) = 256;$ legnagyobb értéke nem létezik. **2.11.** 1) Ha $a = 6$, akkor egy gyöke van; ha $a > 6$, akkor 2 gyöke; ha $a < 6$, akkor nincsenek gyökei; 2) ha $a = 1$ vagy $a = -8$, akkor egy gyöke van; ha $a < -8$ vagy $a > 1$, akkor 2 gyöke van; ha $-8 < a < 1$, akkor nincsenek gyökei.

**3.5.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$ 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$ **3.6.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x) = 64,$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x) = 1;$ 2) $\max\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64,$ $\min\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1;$ 3) $\max\limits_{[1;+\infty)} f(x) = 1,$ legkisebb értéke nem létezik. **3.7.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x) = 27,$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x) = \frac{1}{8};$ 2) $\max\limits_{[-2;-1]} f(x) = -\frac{1}{8},$ $\min\limits_{[-2;-1]} f(x) = -1;$ 3) legnagyobb értéke nem létezik, $\min\limits_{(-\infty;-3]} f(x) = -\frac{1}{27}.$

**4.4.** 5) –1. **4.8.** 6) Nincsenek megoldásai; 9) 5; –15. **4.9.** 5) –0,5; 6) 0; 6. **4.12.** 29. **4.13.** –11,8. **4.14.** 1) $\mathbb{R}$; 2) [–1; +∞); 3) (–∞; –1] ∪ ∪ [2; +∞). **4.15.** 1) (–∞; 2]; 2) (–∞; 3) ∪ (3; +∞); 3) (–∞; 1] ∪ ∪ [3; +∞). **4.16.** 4) –5 és –4. **4.20.** 1) –1; 2; 2) –1; 3. **4.21.** –3; 1.

**5.11.** 0. **5.12.** $27\sqrt[3]{2}$. **5.13.** 3) $\sqrt[12]{128}$. **5.14.** 3) $\sqrt[3]{a}$. **5.19.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) $a$ és $b$ tetszőleges számok; 4) $a$ és $b$ tetszőleges számok. **5.20.** 2) $\mathbb{R}$. **5.21.** 2) $-n$; 4) $c^4$. **5.22.** 2) $10x$. **5.25.** 1) [–4; +∞); 2) $\mathbb{R}$. **5.26.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **5.28.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$. **5.29.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$. **5.30.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{6b^6}$, ha $b \geqslant 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, ha $b < 0$; 3) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **5.31.** 1) $\sqrt[6]{a^7}$; 2) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **5.32.** [3; 5]. **5.34.** 6) 16.

**6.5.** 3) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.6.** 3) 4. **6.7.** 3) 125. **6.8.** 2) 49. **6.11.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2. **6.12.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$. **6.13.** 2) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 5) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **6.14.** 3) $1+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$. **6.15.** $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$. **6.16.** $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

**7.3.** 3) –1; 1. **7.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) nincsenek gyökei; 4) 7. **7.5.** 2) Nincsenek gyökei. **7.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. **7.7.** 1) –5; 2) 4; 3) –1; 4) 5. **7.8.** 1) 4; 2) 2; 3. **7.9.** $\frac{1}{3}$. **7.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 8; 5) 0; 16; 6) $\frac{9}{8}$. **7.11.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) –4; 11; 4) 2,8; –1,1. **7.12.** 1) 0; 5; 2) 7. **7.13.** 1) 6; 2) 2; 3) –1; 3; 4) –2. **7.14.** 1) 2; 2) 8. **7.15.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) nincsenek gyökei; 4) 1; –3. **7.16.** 1) –5; 4; 2) –1. **7.17.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) –1; 4; 4) –2; 5. **7.18.** 1) –1; 5; 2) 1; 2; 3) –6; 4. **7.19.** 27. **7.20.** 10. **7.22.** $f(x) = -2x + 1$.

## 2. §. Trigonometrikus függvények

**8.4.** 3) $10\pi$. **8.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **8.8.** 8) Az I. negyedben. **8.9.** 4) A III. negyedben; 7) A II. negyedben. **8.10.** 3) (0; –1); 6) (1; 0). **8.11.** 2) (–1; 0). **8.13.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) $2\pi$; $-2\pi$. **8.14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$. **8.15.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$. **8.16.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (0; –1); 3) (0; 1), (0; –1); 4) (1; 0), (–1; 0). **8.19.** 1) –2; 2) $-\frac{4}{3}$. **8.20.** 80 000 lakos.

**9.1.** 1) 5; 4) $\frac{7}{4}$. **9.2.** 1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.** 1) Nem; 2) nem. **9.4.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **9.5.** 1) 3; –3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. **9.6.** 2) 1; –5. **9.11.** *Útmutatás.* Legyen a $P_1$ és $P_2$ pontok a $P_0$ pontnak $\alpha$-val és $\alpha+\frac{\pi}{2}$-vel történő elforgatásának az eredménye. $P_1A$ és $P_2B$ merőlegeseket bocsátunk megfelelően az $x$ és $y$ tengelyre (9.3. ábra). Mivel a $P_1OP_2\angle = \frac{\pi}{2}$, ezért megállapítható, hogy a $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Ebből következik, hogy $OA = OB$. Tehát a $P_1$ pont abszcisszája egyenlő a $P_2$ pont ordinátájával, vagyis $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. A $P_1$ és $P_2$ pontok elhelyezkedésének más eseteit hasonlóan lehet megvizsgálni. Vizsgáld meg külön azokat az eseteket, amikor a $P_1$ és $P_2$ pontok a koordinátatengelyekre illeszkednek.

**10.4.** 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.5.** $-\frac{1}{2}$. **10.6.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **10.7.** 1,5. **10.8.** 1) A II. negyedben. **10.12.** 1) 2 sin α; 2) –2 cos α; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Páros; 2) se nem páros, se nem páratlan. **10.15.** 1) Páratlan; 2) páros. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

**11.1.** 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **11.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **11.15.** 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 3) $\sin\frac{10\pi}{9} > \sin\frac{25\pi}{18}$. **11.16.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$. **11.19.** 1) sin 58° > cos 58°; 2) sin 18° < cos 18°; 3) cos 80° < sin 70°. **11.21.** 1) [2; +∞); 2) [3; +∞).

**12.1.** 5) $2\cos^2\alpha$. 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 3) $\sin^4\alpha$; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$. **12.7.** 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.8.** 1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. **12.11.** $-\frac{1}{2}$. *Útmutatás.* Osszuk el a tört számlálóját és nevezőjét cos α-val. **12.12.** $-\frac{16}{11}$. **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; –2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

**13.1.** 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) sin 2β; 6) tg 15°. **13.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) cos (α + β). **13.5.** $\frac{6}{7}$. **13.7.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.8.** 1) $\sqrt{3}$. **13.9.** 1) 2 cos α; 2) tg 2α; 3) $\cos^2\alpha$; 4) sin 25°; 5) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 6) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 7) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$. **13.10.** 1) 2 sin 40°;

2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 6) 2 $\sin 2\alpha$; 7) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 8) $\sin 3\alpha$. **13.11.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.12.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.15.** $-\frac{24}{25}$. **13.16.** $-\frac{4}{5}$. **13.17.** 2. **13.18.** 5. **13.19.** –0,96. **13.20.** $-\frac{8}{15}$. **13.21.** $\frac{7}{8}$. **13.22.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.23.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.25.** 1. **13.26.** 1) 2; 2) tg $2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **13.27.** 1) $\frac{2}{\operatorname{tg} 4\alpha}$; 2) tg $2\alpha$. **13.28.** 2. **13.29.** –2. **13.30.** $-\frac{8}{9}$. **13.31.** $\frac{3}{4}$. **13.32.** Ha $x = 1$, akkor 9, 6, 3; ha $x = 9$, akkor 41, 62, 83. **13.33**. Ha $x = 2$, akkor 1, –3, 9; ha $x = \frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$.

**14.3.** 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **14.4.** 2) $\sin\frac{\pi}{15}$. **14.7.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) 1. **14.8.** –1. **14.9.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1. **14.11.** 0. **14.12.** 1) 1; 2) 1.

**15.3.** 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.7.** $-\frac{\pi}{6}$. **15.8.** Például $-3\pi$. **15.9.** 4 gyöke van. **15.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **15.11.** 1. **15.12.** 1) $\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-3;-2)\cup(-2;3]$.

**16.3.** 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.4.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.7.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.9.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.10.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.11.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.12.** 2) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.13.** $\frac{13\pi}{12}$. **16.14.** $-\frac{13\pi}{90}$. **16.15.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **16.16.** 6 gyöke van. **16.17.** 4 gyöke van. **16.18.** $-\frac{2\pi}{3}$. **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

**17.1.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.2.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm 4\arccos\frac{1}{3} + 8\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.3.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.4.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos(1-\sqrt{2}) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n \arcsin(2-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **17.7.** 1) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.8.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.10.** 3) –2; 4) 1.

## 3. §. A derivált és alkalmazása

**18.7.** 8 m/s. **18.8.** 1) 20 m/s; 2) 10 m/s.

**19.4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.8.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **19.9.** 1) –32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **19.13.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$.

**20.9.** 16 kg·m/s. **20.10.** 400 J. **20.12.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$.

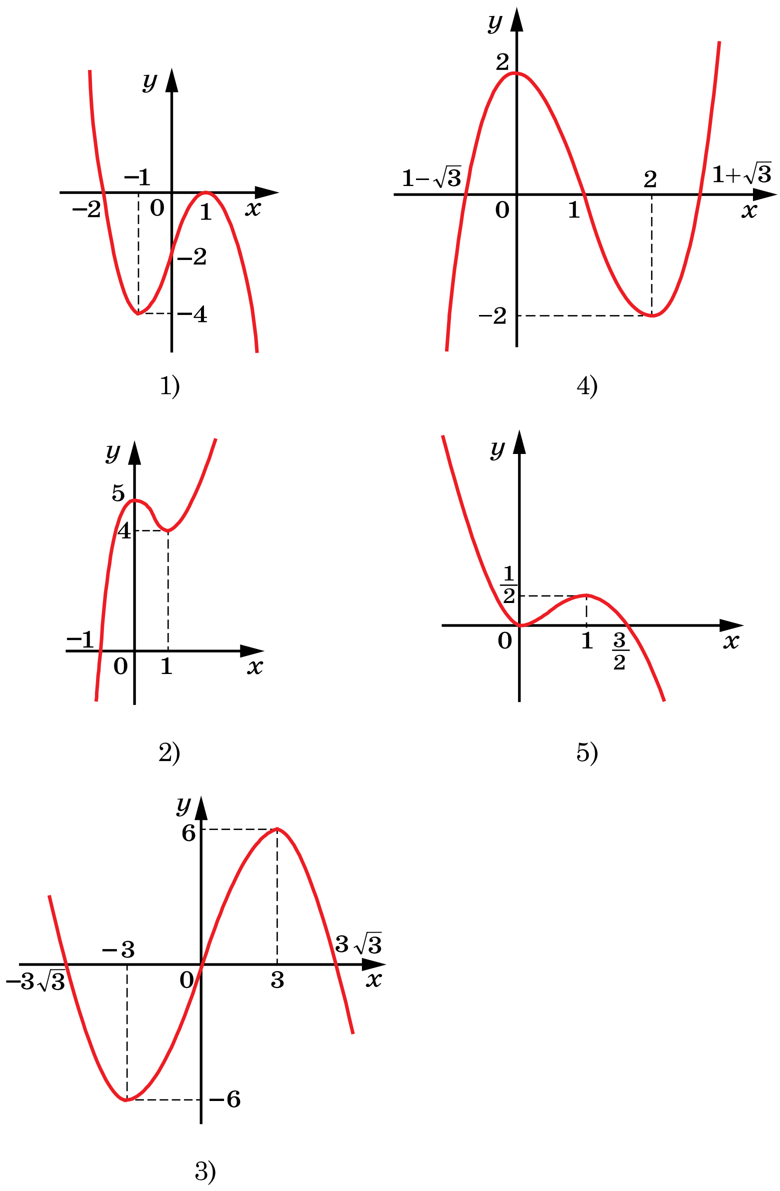
**21.1.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$; 6) $y = x + 4$. **21.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = 5x - 18$. **21.3.** $y = -3x - 3$. **21.4.** $y = -5x + 2$. **21.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **21.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **21.7.** 4) $[1; 3) \cup (3; 4]$.

**22.1.** 1) Növekvő a $[-2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; -2]$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 0]$ és $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[0; 1]$; 3) növekvő a $[-1; 7]$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; -1]$ és a $[7; +\infty)$ intervallumon; 4) növekvő a $[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő $(-\infty; 2]$ intervallumon. **22.2.** 1) Növekvő a $(-\infty; 3]$ intervallumon, csökkenő a $[3; +\infty)$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; 1]$ intervallumon; 3) növekvő a $[-1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő $(-\infty; -1]$ intervallumon. **22.3.** 1) Növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 2)$ és a $(2; +\infty)$ intervallumon; 3) növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 0)$ és a $(0; 1]$ intervallumon; 4) növekvő a $(-\infty; -3]$ és a $[3; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; 0)$ és a $(0; 3]$ intervallumon. **22.4.** 1) Növekvő a $(-\infty; 3]$ intervallumon, csökkenő a $[3; +\infty)$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 0)$ és a $[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 2]$ intervallumon. **22.9.** $-\frac{1}{3}$.

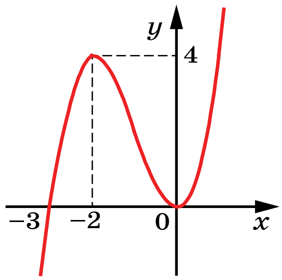
**23.3.** 1) $x_{min} = 0$; 2) $x_{min} = 3$; 3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = 5$, $x_{max} = -1$. **23.4.** 1) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -1$; 2) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 3) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -7$; 4) $x_{min} = \frac{3}{2}$. **23.7.** 1) Növekvő a $(-\infty; -2]$ és a $[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-2; 0)$ és a $(0; 2]$ intervallumon, $x_{max} = -2$; $x_{min} = 2$; 2) Növekvő a $(-\infty; 0]$ intervallumon, csökkenő a $[0; +\infty)$ intervallumon, $x_{max} = 0$. **23.8**. 1) Növekvő a $(-\infty; -3]$ és a $[3; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; 0)$ és a $(0; 3]$ intervallumon, $x_{max} = -3$; $x_{min} = 3$; 2) növekvő a $[0; +\infty)$ intervallumon, csökkenő $(-\infty; 0]$ intervallumon, $x_{min} = 0$. **23.9.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **23.10**. 1) 26; 2) 17; 3) –10.

**24.1.** 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) –3; –30; 4) –4; –8. **24.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; –2; 3) 48; –6; 4) 0; –28. **24.3.** $8 = 2 + 6$. **24.4.** $12 = 8 + 4$. **24.5.** $180 = 40 + 80 + 60$. **24.6.** $18 = 8 + 3 + 7$.

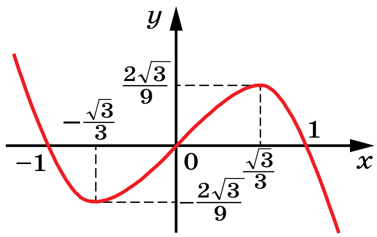
**25.1.** Lásd az ábrát! **25.2.** Lásd az ábrát!



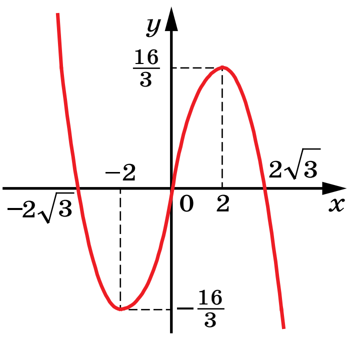

**A 25.1. feladathoz**




1)




3)




2)

**A 25.2. feladathoz**

**26.6.** 1) –163; 2) 3. **26.14.** 5) $\frac{1}{3}$. **26.16.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) –2; 5) –2; 6) $\frac{2}{9}$; 2; 7) 625; 8) –25; 3. **26.19.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **26.20.** 2; –3. **26.21.** 1) 0; 2) 0. **26.22.** –1. **26.24.** 1) tg α; 2) 2; 3) 0; 4) 1. **26.25.** 1) $-\frac{7\pi}{2}+12\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{3}+4\pi k$ vagy $-\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{2}$. **26.27.** $-\frac{\pi}{24}$. **26.28.** 2 gyöke van. **26.29.** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.32.** 3. **26.33.** 1. **26.34.** 3) $y = -6x+13$; 4) $y = \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.35.** $y=-4x$ és $y=4x-16$. **26.36.** 3,5 s.

**26.38.** 2) Növekvő a $(-\infty; 0]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[0; 4]$ intervallumon, $x_{max} = 0$; $x_{min} = 4$; 3) növekvő a $(-\infty; -4]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-4; 0)$ és a $(0; 4]$ intervallumon, $x_{max} = -4$; $x_{min} = 4$; 6) növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; -1)$ és a $(-1; 4]$ intervallumon, $x_{max} = -3$; $x_{min} = 1$. **26.39.** 2) 2; –2. **26.40.** 32 + 32. **26.41.** 2.

## 2. fejezet. Térmértan

### 4. §. Párhuzamosság a térben

**27.6.** Végtelen vagy egy. **27.14.** 11 cm vagy 3 cm. **27.15.** 10 cm. **27.16.** 1 : 3.

**28.15.** 72°, 108°, 72°, 108°.

**29.9.** Egy sík vagy három sík. **29.14.** 4 cm. **29.15.** 9 cm. **29.16.** 1 : 2.

**30.12.** 7,5 cm. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Útmutatás.* Bizonyítsd be, hogy az $ABC\Delta \sim EBF\Delta$, és alkalmazd a hasonló háromszögek megfelelő szögeinek egyenlőségét. **30.18.** 156 cm$^2$.

**31.13.** 2) 24 cm. **31.15.** 1,5.

**32.8.** 9 cm. **32.14.** 60°.

### 5. §. Merőlegesség a térben

**33.4.** 60°. **33.5.** 1) 90°; 2) 40°. **33.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **33.7.** 80°. **33.8.** 10 cm. **33.9.** 10 cm. **33.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **33.11.** $\alpha$ vagy $180° - \alpha$. **33.12.** 90°. *Útmutatás.* Bizonyítsd be, hogy a keresett szög egyenlő lesz az $OB_1$ és $AC$ egyenesek közötti szöggel, valamint azt, hogy az $AB_1C$ háromszög egyenlő szárú. **33.13.** 60°. **33.14.** 52 cm.

**34.7.** 2 cm. **34.8.** $2\sqrt{5}$ cm. **34.9.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **34.10.** 8 cm. **34.13.** 12 cm. **34.14.** 14 cm. **34.15.** 12 cm.

**35.5.** 7 cm. **35.6.** 12 cm. **35.16.** 15 cm. **35.17.** 15 cm, 13 cm. **35.18.** 3 cm. **35.19.** 12 cm. **35.23.** $3\sqrt{5}$ cm. **35.24.** 2 cm. **35.25.** $2\sqrt{2}$ cm. **35.26.** $2\sqrt{6}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{6}$ cm. **35.27.** 17 cm. **35.28.** 8 cm. **35.29.** 10 cm. **35.30.** 5 cm. **35.31.** 4 cm. **35.33.** 20 cm. **35.34.** $3\sqrt{10}$ cm. **35.36.** $4\sqrt{3}$ cm.

**36.7.** 30°. **36.10.** 30°. **36.11.** $6\sqrt{2}$ cm. **36.12.** 3 cm. **36.13.** $8\sqrt{2}$ cm. **36.14.** $3\sqrt{10}$ cm. **36.15.** 6 cm. **36.16.** $3\sqrt{14}$ cm. **36.17.** 30°. **36.18.** 30°.

**37.6.** 60°. **37.7.** 60°. **37.11.** 80°. **37.16.** 35 cm. **37.18.** 84 $cm^2$. **37.20.** 105°. **37.21.** 70°. **37.22.** $\sqrt{5}$ cm. **37.23.** 120°. **37.24.** $5\sqrt{2}$ cm, 13 cm. **37.25.** 45°. **37.26.** $3\sqrt{2}$ cm. **37.27.** 25 cm. **37.28.** 8 cm. **37.29.** 45°. **37.30.** 30°, 60°. **37.31.** 1) $2\sqrt{15}$ cm; 2) 8 cm. **37.32.** 13 cm. **37.33.** 45°. **37.34.** 60°. **37.35.** 90°. **37.36.** 26 cm.

## 6. §. Koordináták és vektorok a térben

**38.18.** 66. **38.19.** $3\sqrt{14}$. **38.20.** $y=-2$ vagy $y=-10$. **38.21.** $A\,(3;\,0;\,0)$ vagy $A\,(-1;\,0;\,0)$. **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.** 625 $cm^2$.

**39.10.** 3. **39.13.** $D\,(7;\,-4;\,5)$. **39.14.** $x=20$, $y=-29$, $z=-18$. **39.15.** –3 vagy 3. **39.16.** –14 vagy 2. **39.18.** $B\,(-3;\,16;\,-7)$. **39.19.** $\vec{m}\,(4;\,4;\,4)$ vagy $\vec{m}\,(-4;\,-4;\,-4)$. **39.20.** $\vec{c}\left(3\sqrt{3};\,-3\sqrt{3};\,3\sqrt{3}\right)$ vagy $\vec{c}\left(-3\sqrt{3};\,3\sqrt{3};\,-3\sqrt{3}\right)$. **39.21.** 13 cm.

**40.11.** $\overrightarrow{NK}$. **40.12.** $\overrightarrow{FM}$. **40.15.** $A\,(3{,}5;\,-1{,}5;\,8)$. **40.16.** $(-0{,}5;\,-2{,}5;\,4{,}5)$. **40.17.** 9,6 cm.

**41.14.** $x=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{35}{4}$. **41.15.** $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **41.16.** $D\,(6;\,0;\,10)$. **41.17.** $\vec{b}\left(\frac{2}{7};-\frac{6}{7};-\frac{3}{7}\right)$. **41.18.** $\vec{m}\,(5;\,-5;\,10)$. **41.19.** 1) Nem; 2) igen. **41.20.** $y=-9$, $z=3$. **41.21.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.22.** $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.23.** $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.24.** 8 cm.

**42.7.** 4. **42.8.** –3. **42.9.** $\vec{a}$ és $\vec{c}$. **42.12.** –19,5. **42.13.** –12. **42.14.** 1. **42.15.** –1 vagy 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Útmutatás.* Fejezd ki a $\overrightarrow{CM}$ vektort a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok által! 2) 0. *Útmutatás.* Fejezd ki az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{DB}$ vektorok által! **42.19.** $a^2$. *Útmutatás.* Fejezd ki a $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által! **42.20.** $180°-\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **42.21.** $180°-\arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **42.22.** 0,7.

**42.23.** $60°$. **42.24.** $80\ cm^2$.

**43.10.** 11 cm. **43.20.** 2) $60°$. **43.21.** 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **43.22.** 26 cm, $8\sqrt{10}$ cm. **43.23.** 2) $3\sqrt{2}$ cm. **43.24.** 2,4 cm. **43.25.** 4,5 cm. **43.26.** 10 cm. **43.27.** $25\sqrt{3}\ cm^2$. **43.28.** 6 cm. **43.29.** 13 cm. **43.30.** 8 cm. **43.31.** $\frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$. **43.32.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **43.33.** $60°$. **43.34.** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)$. **43.35.** $\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **43.36.** $\arccos\frac{1}{3}$. **43.37.** 6 cm. **43.38.** $4\sqrt{3}$ cm. **43.39.** 15 cm. **43.40.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}\ cm^2$. **43.41.** $45°$. **43.42.** 1) $C(0;\ 4;\ 0)$; 2) $x=-7$, $z=1$. **43.43.** 2) $\frac{69\pi}{4}$. **43.44.** 9. **43.45.** $y=3$ vagy $y=-1$. **43.46.** $D(3;\ 1;\ -5)$. **43.47.** $D(-2;\ 1;\ 2)$. **43.49.** $D(0;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. **43.50.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. **43.51.** $\frac{5}{21}$. **43.52.** $90°$. **43.53.** $x=1$ vagy $x=3$. **43.54.** $\vec{m}(-0{,}5;\ 1;\ -0{,}5)$. **43.55.** $180°-\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **43.56.** $\arccos\frac{3}{7}$. **43.57.** $2\sqrt{5}$. **43.58.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

# TÁRGYMUTATÓ

# Tartalom

*Навчальне видання*

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

# МАТЕМАТИКА

## АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

**Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти з навчанням угорською мовою**

**Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

Переклад з української мови
Перекладач *Поллої Деже Федорович*
Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.
Тираж ????? прим. Зам. № ?????.

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua
e-mail: office@svit.gov.ua

Друк ??????