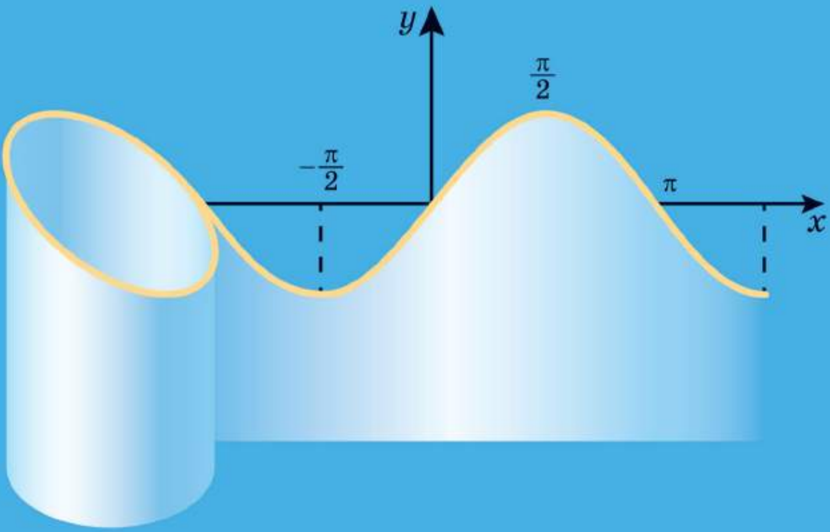
10

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ. GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD



УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.
Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. осв. з навч. румунською/молдовською мовами / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Ю. М. Гаврилюк. – Львів : Світ, 2018. – 256 с. : іл.
ISBN 978-966-914-138-5

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-914-138-5 (рум./молд.)
ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

DE LA AUTORI

Dragi elevi ai clasei a 10-a!

În timpul nostru nu există aşa o ramură a ştiinței unde nu s-ar folosi realizările matematicii. În fizică şi chimie, astronomie şi biologie, geografie şi economie, chiar şi în lingvistică şi istorie se foloseşte ”instrumentul matematic”.

Avem speranța, că manualul care va nimeri la voi în mâini o să vă ajute să obțineți cunoştințe matematice temeinice. El este alcătuit din două capitole: primul este consacrat algebrei şi elementelor de analiză (punctele 1–26), al doilea – geometriei (punctele 27–43).

Algebra şi elementele de analiză este util şi foarte interesant obiect de studiu. El dezvoltă gândirea analitică şi logică, deprinderile de cercetare, cultura matematică, ingeniozitatea. În acest an voi începeți să faceți cunoştință cu elementele analizei matematice; va trebui să cercetați clase noi de funcții, să studiați proprietățile lor, să însuşiți (stăpâniți) metode de cercetare ale funcțiilor.

Capitolul de geometrie, în care se vor studia figurile în spațiu şi proprietățile lor, este numit **stereometrie**. Anume acest capitol al geometriei voi o să-l studiați în clasele a 10–11-a. Cuvântul ”stereometrie” provine de la cuvintele greceşti ”stereos” – ”voluminos”, ”spațial” şi ”metreo” – ”a măsura”. Să cunoşti stereometria este deosebit de important. Fără închipuirea spațială şi cunoştințe adânci din geometrie nu este posibil de însuşit specialități inginereşti, de constructor sau arhitect, să lucrezi în ramura graficii computaționale, designului, modelării îmbrăcămintei şi încălțămintei etc. Aceasta este clar, deoarece majoritatea obiectelor, ce ne înconjoară, – create atât de om, cât şi de natură, – nu sunt plane (fig. 1).

Clopotnţa Lavrei Pecersk din Kiev

Avionul de producţie ucraineană ”Mriya” – cel mai mare avion din lume

Aspectul Pământului – vedere din cosmos

Fig. 1

Manualul este împărțit în puncte. Studiind materialul teoretic atrageți o deosebită atenție la textul, care este tipărit cu **caracter gras**, cu ***cursiv gras*** şi *cursiv*; astfel în manual sunt evidențiate definițiile, regulile şi cele mai importante afirmații matematice. De regulă expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de probleme rezolvate. Aceste scrieri se pot accepta ca una din variantele posibile de definitivare a rezolvării.

În această carte voi o să faceți cunoştință cu o serie de teoreme importante. Unele din ele sunt prezentate cu demonstrări. În acele cazuri, când demonstrarea este în afara limitelor cursului dat, în manual sunt prezentate doar formulările teoremelor.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme destinate rezolvării de sine stătător, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceți după însuşirea materialului teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții de o complexitate simplă şi mijlocie, cât şi probleme complicate mai ales acelea, care sunt marcate cu „asterix” (*).

Vă dorim succes!

INSEMNĂRI CONVENŢIONALE

n°	însărcinări, ce corespund nivelului începător şi mijlociu de pregătire;
$n^{\bullet}$	însărcinări, ce corespund nivelului satisfăcător de pregătire;
$n^{\bullet\bullet}$	însărcinări, ce corespund nivelului înalt de pregătire;
n^*	probleme pentru cercurile şi facultativele de matematică;
◄	terminarea demonstrării teoremei, rezolvării problemei;
	probleme-cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;

Cu culoare **verde** sunt însemnate numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru teme de acasă, cu culoare **albastră** – numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru rezolvare orală.

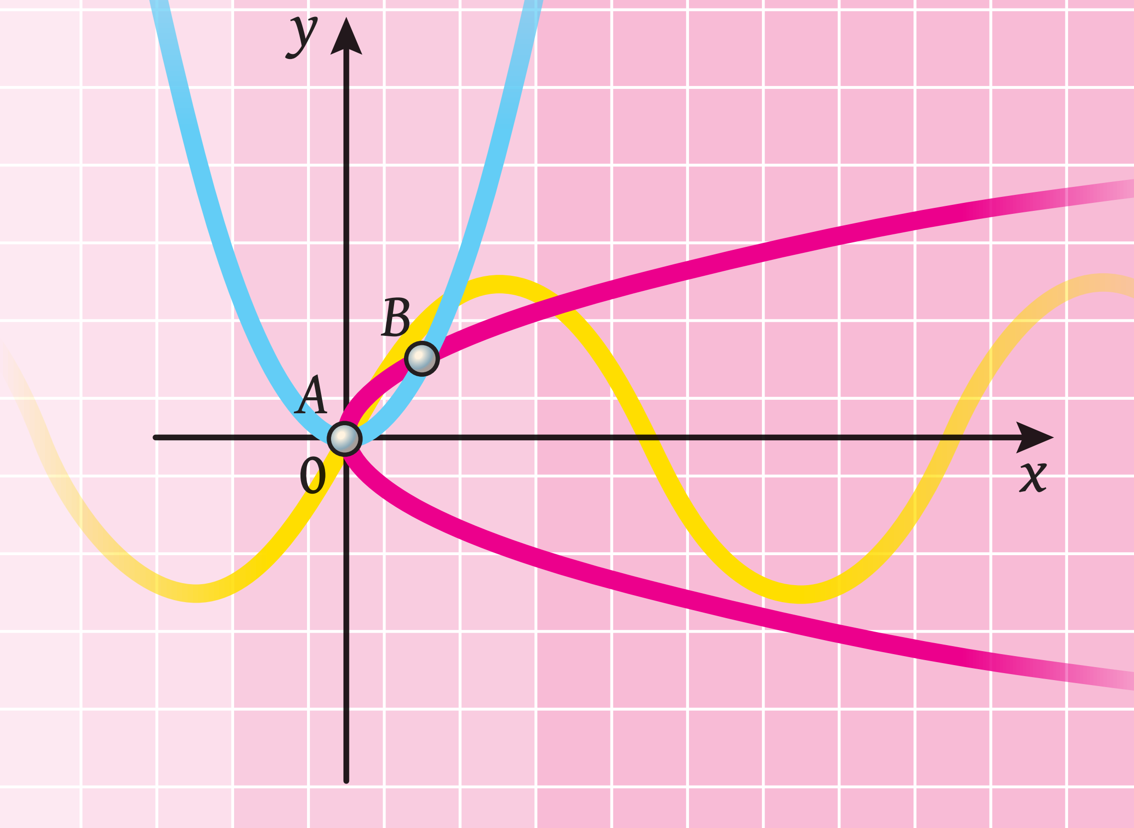
Capitolul 1.

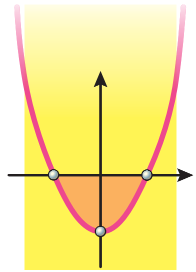
Algebră şi elemente de analiză

§ 1. Funcţii, proprietăţile şi graficele lor

§ 2. Funcţii trigonometrice

§ 3. Derivata şi aplicaţia ei





FUNCŢII, PROPRIETĂŢILE ŞI GRAFICELE LOR §1

În acest paragraf veţi repeta principalele noţiuni despre funcţie; veţi afla, ce se numeşte cea mai mare şi cea mică valoare a funcţiei pe mulţime, care funcţii se numesc pare, şi care – impare; veţi face cunoştinţă cu proprietăţile graficelor funcţiilor pare şi impare.

Veţi afla, care funcţie se numeşte funcţie putere cu exponent întreg, ce proprietăţi posedă această funcţie; ce se numeşte radical de ordinul n; ce proprietăţi are radicalul de ordinul n; ce se numeşte putere cu exponent raţional şi care sunt proprietăţile ei; care ecuaţii se numesc iraţionale.

O să vă învăţaţi a extrage radicali de ordinul n; de executat ridicarea la putere cu exponent raţional; de transformat expresiile, care conţin puteri cu exponent raţional şi radicali de ordinul n; de rezolvat ecuaţii iraţionale.

1. Cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei. Funcţii pare şi impare

Înainte de studierea acestui punct se recomandă îndeplinirea exercițiilor 1.24 – 1.28.

În clasa a 7-a ați făcut cunoştinţă cu noțiunea de funcție şi în timpul studierii multor capitole ale cursului de algebră va-ți adresat deseori la această noțiune. O astfel de importanță funcția o are nu întâmplător, deoarece modelele matematice ale multor procese reale sunt anume funcțiile.

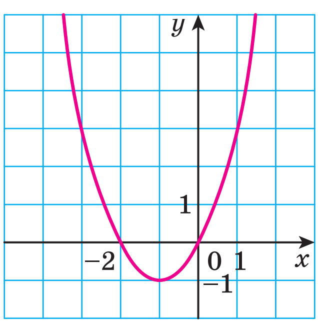


Fig. 1.1

Vă sunt cunoscute astfel de noțiuni, ca *domeniul de definiție, domeniul de valori, zerourile, intervalele de constanță ale semnului, intervalele de creştere şi descreştere* ale funcției.

De exemplu, pentru funcția $y = x^2 + 2x$, graficul căreia este reprezentat în figura 1.1, avem:

- domeniul de definiție: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- domeniul de valori: $E(y) = [-1; +\infty)$;
- zerourile: numerele -2 şi 0;

- intervalele de constanță ale semnului: funcția obține valori pozitive pe fiecare din intervalele $(-\infty; -2)$ şi $(0; +\infty)$, iar valori negative – pe intervalul $(-2; 0)$;
- intervalele de creştere şi descreştere: funcția descreşte pe intervalul $(-\infty; -1]$ şi creşte pe intervalul $[-1; +\infty)$.

Enumerarea prezentată mai sus deloc nu epuizează acele proprietăți care trebuie studiate în timpul cercetării funcției. Să cercetăm noțiuni noi, care o să vă ajute să caracterizați mai detaliat funcția.

Definiție. **Numărul $f(x_0)$ se numeşte cea mai mare valoare a funcției f pe mulțimea $M \subset D(f)$, dacă există un astfel de număr $x_0 \in M$, că pentru toate valorile lui $x \in M$ se îndeplineşte inegalitatea $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Se înseamnă: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Definiție. **Numărul $f(x_0)$ se numeşte cea mai mică valoare a funcției f pe mulțimea $M \subset D(f)$, dacă există un astfel de număr $x_0 \in M$, că pentru toate valorile lui $x \in M$ se îndeplineşte inegalitatea $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Se înseamnă: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Să cercetăm câteva exemple.

Pentru funcția $f(x) = \sqrt{x}$ şi mulțimea $M = [0; 4]$ avem (fig. 1.2): $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

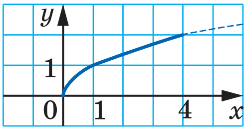


Fig. 1.2

Pentru funcția $f(x) = x^2$ şi mulțimea $M = [-1; 2]$ avem (fig. 1.3): $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$.

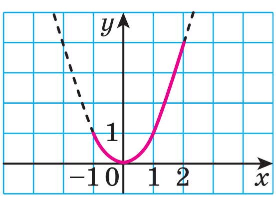


Fig. 1.3

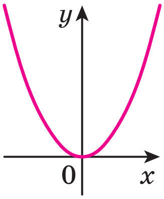


Fig. 1.4

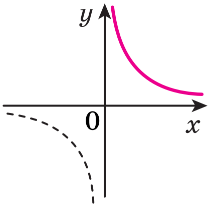


Fig. 1.5

Nu orice funcție pe mulțimea dată posedă valoare minimală sau valoare maximală. Astfel, pentru funcția $f(x) = x^2$ avem: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Valoare maximală pe mulțimea numerelor reale această funcție nu are (fig. 1.4).

Funcția $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pe mulțimea $(0; +\infty)$ nu are nici maximum nici minimum (fig. 1.5).

Definiție. **Funcția f se numeşte pară, dacă pentru orice x din domeniul de definiție se îndeplineşte egalitatea $f(-x) = f(x)$.**

Definiție. **Funcția f se numeşte impară, dacă pentru orice x din domeniul de definiție se îndeplineşte egalitatea $f(-x) = -f(x)$.**

De exemplu, funcția $f(x) = x^2$ este pară, iar funcția $g(x) = x^3$ – impară. Într-adevăr, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se execută egalitățile $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ şi $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Satisfacerea egalității $f(-x) = f(x)$ sau egalitățiif $(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D(f)$ înseamnă, că domeniul de definiție al funcției f este simetric față de originea coordonatelor, adică posedă astfel de proprietate: dacă $x_0 \in D(f)$, atunci $-x_0 \in D(f)$.

Din definițiile prezentate reiese, că dacă domeniul de definiție al funcției nu este simetric față de originea de coordonate, atunci această funcție nu poate fi nici pară, nici impară.

De exemplu, domeniul de definiție al funcției $y = \dfrac{1}{x-1}$ este mulțimea $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, care nu este simetric față de originea de coordonate. De aceea această funcție nu este nici pară, nici impară.

Problemă. Demonstrați, că funcția $f(x) = x^3 - x$ este impară.

Rezolvare: Deoarece $D(f) = \mathbb{R}$, atunci domeniul de definiție ale funcției f este simetric față de originea de coordonate.

Pentru orice $x \in D(f)$ dispunem de:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Deci funcția f este impară. ◄

Teorema 1.1. ***Axa de ordonate este axa de simetrie a graficului funcției pare.***

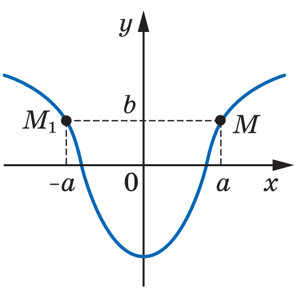


Fig. 1.6

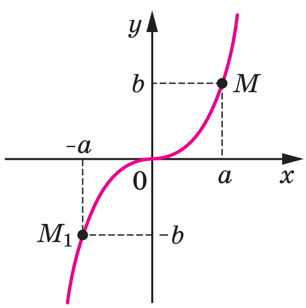


Fig. 1.7

Teorema 1.2. ***Originea de coordonate este centrul de simetrie al graficului funcției impare.***

Afirmația teoremelor 1.1. şi 1.2 este ilustrată în figurile 1.6 şi 1.7 corespunzător.

?

1. Care număr se numeşte cea mai mare (mai mică) valoare a funcţiei pe mulţime?
2. Cum se înseamnă cea mai mare (cea mia mică) valoare a funcţiei f pe mulţimea M?
3. Care funcţie se numeşte pară (impară)?
4. Ce proprietate posedă graficul funcţiei pare (impare)?

EXERCIŢII

1.1.° În figura 1.8 este prezentat graficul funcției $y = f(x)$, definită pe intervalul [–4; 5]. Folosindu-vă de grafic, aflați cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcției pe intervalul:
1) [1; 2]; 2) [–2,5; 1]; 3) [–2,5; 3,5].

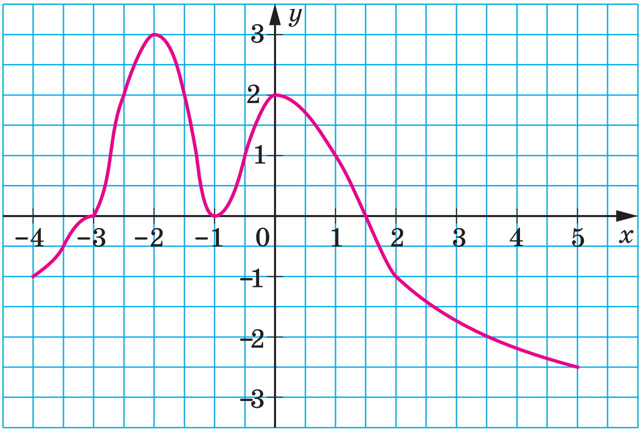


Fig. 1.8

1.2.° În figura 1.9 este prezentat graficul funcției $y = g(x)$, definită pe intervalul [–4; 4]. Folosindu-vă de grafic, aflați cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcției pe intervalul:
1) [–3; –2]; 2) [–3; –1]; 3) [–3; 1].

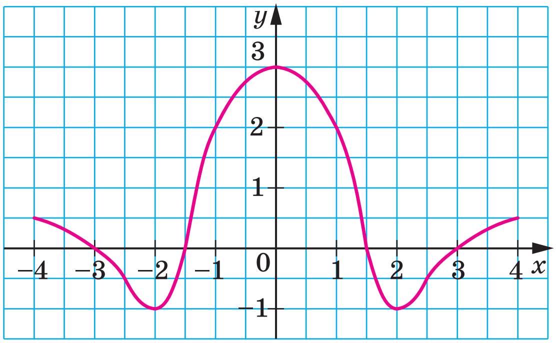


Fig. 1.9

1.3.° Se cunoaşte că, $f(7) = -16$. Aflați $f(-7)$, dacă funcția este: 1) pară; 2) impară.

1.4.° Se ştie că, $f(-3) = 8$. Aflați $f(3)$, dacă funcția este: 1) pară; 2) impară.

1.5.° Funcția f este pară. Se poate oare îndeplini egalitatea:
1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\ f(-5) = -2$?

1.6.° Funcția f este impară. Se poate oare îndeplini egalitatea:
1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\ f(-2) = 3$?

1.7.° Este oare pară funcția, dată prin formula $y = x^2$, dacă domeniul de definiție al ei este mulțimea:
1) $[-9;\ 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6;\ 6)$; 4) $(-\infty;\ 4]$?

1.8.° Funcția, graficul căreia este prezentat în figura 1.10, este pară sau impară?

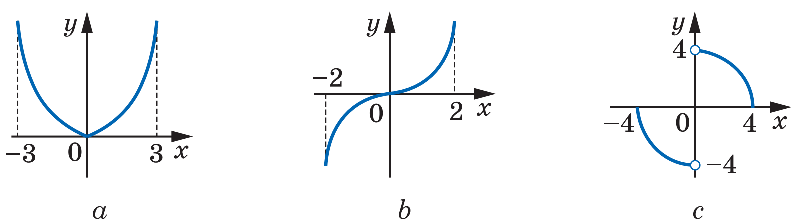


Fig. 1.10

1.9.• Pe intervalul [2; 5] aflați cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcției:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{20}{x}$.

1.10.• Aflați:

1) $\max\limits_{[1;\,2]} (-x^2 + 6x)$;
2) $\min\limits_{[1;\,4]} (-x^2 + 6x)$;
3) $\max\limits_{[4;\,5]} (-x^2 + 6x)$.

1.11.• Găsiți cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției: $y = x^2 + 2 - 8$ pe intervalul:

1) $[-5;\ -2]$;
2) $[-5;\ 1]$; 3) $[0;\ 3]$.

1.12.• Demonstrați, că funcția este pară:

1) $f(x) = -5x^4$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

1.13.• Demonstrați, că funcția este pară:

1) $f(x) = x^6$;
2) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$.

1.14.• Demonstrați, că funcția este impară:

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$.

1.15.• Demonstrați, că funcția este impară:

1) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;
2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$.

1.16.•• Suma a două numere este egală cu 8. Găsiți:

1) cea mai mare valoare pe care o poate obține produsul acestor numere:
2) cea mai mică valoare pe care o poate obține suma pătratelor acestor numere.

1.17.•• O parcelă de formă dreptunghiulară a fost împrejmuită cu un gard cu lungimea de 200 m. Care poate fi cea mai mare arie a acestei parcele?

1.18.•• Cercetați la paritate funcția:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
2) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^3 - x}$.

1.19.•• Cercetați la paritate funcția:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;
2) $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2 - 9}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$.

1.20.•• În figura 1.11 este reprezentat un fragment de grafic al funcției $y = f(x)$, definit pe intervalul $[-5;\ 5]$. Terminați de construit graficul acestei funcții, dacă ea este: 1) pară; 2) impară.

1.21.•• Linia frântă $ABCD$, unde $A\,(0;\ 0)$, $B\,(2;\ -2)$, $C\,(3;\ 4)$, $D\,(6;\ 1)$ este o parte a graficului funcției $y = f(x)$, definită pe intervalul $[-6;\ 6]$. Construiți graficul acestei funcții, dacă ea este:

1) pară;
2) impară.

1.22.•• Funcția f este pară și $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Găsiți $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

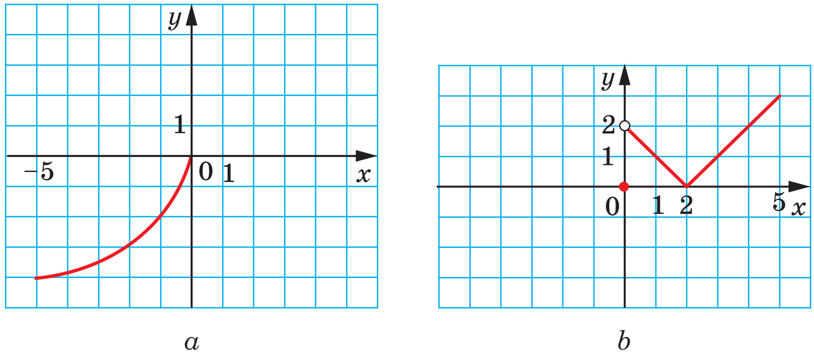


Fig. 1.11

1.23.•• Funcția f este pară și $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Găsiți $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

1.24. Funcția este dată cu formula $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Aflați: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.
2) Găsiți valorile argumentului, pentru care valoarea funcției f este egală cu: 0; –1; –56.

1.25. Indicați în figura 1.12 figura, care nu poate servi ca grafic al funcției.

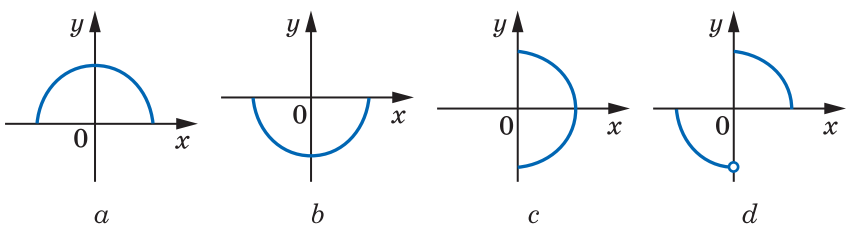


Fig. 1.12

1.26. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\dfrac{9}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{x-6}{4}$;
3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;
5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;
7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

1.27. Găsiți zerourile funcției:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$.

1.28. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x}+2$; 2) $f(x)=7-x^2$; 3) $f(x)=-6$.

2. Funcţia putere cu exponent natural

Proprietățile şi graficele funcțiilor $y=x$ şi $y=x^2$ vă sunt bine cunoscute din cursul de matematică al claselor anterioare. Aceste funcții sunt cazuri particulare ale funcției $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, care se numeşte **funcție putere cu exponent natural.**

Deoarece expresia x^n, $n\in\mathbb{N}$, este adevărată pentru orice $\boldsymbol{x}$, atunci *domeniul de definiție al funcției putere cu exponent natural este mulțimea* $\mathbb{R}$.

Evident, că *funcția* cercetată *posedă un sigur zerou* $x=0$.

Cercetarea de mai departe ale proprietăților funcției $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, o vom executa pentru două cazuri: n – număr natural par şi n – număr natural impar.

• **Primul caz: $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.**

Menționăm, că pentru $k=1$ obținem funcția $y=x^2$, proprietățile şi graficul căreia au fost cercetate în cursul de algebră clasa a 8-a.

Deoarece pentru orice valoare x expresia x^{2k} obține doar valori nenegative, atunci domeniul de valori al funcției cercetate nu conține nici un număr negativ.

Se poate arăta, că pentru orice $a\geqslant 0$ există o astfel de valoare a argumentului x, că $x^{2k}=a$.

Din cele spuse rezultă, că *domeniul de valori al funcției* $y=x^n$, *unde* n *– număr natural par, este mulțimea* $[0;+\infty)$.

Dacă $x\neq 0$, atunci $x^{2k}>0$.

Deci, *intervalele* $(-\infty;\ 0)$ *şi* $(0;\ +\infty)$ *sunt intervale de constanță ale semnului funcției* $y = x^n$, *unde* n *– număr natural par.*

Funcția $y = x^n$, *unde* n *– număr natural par, este pară.* Într-adevăr, pentru orice x din domeniul de definiție se îndeplineşte egalitatea $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Să considerăm numerele arbitrare x_1 şi x_2, astfel, că $x_1 \in (-\infty;\ 0]$, $x_2 \in (-\infty;\ 0]$ şi $x_1 < x_2$. Atunci $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Folosindu-ne de proprietățile inegalităților numerice, obținem: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. De aici $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Deci, *funcția* $y = x^n$, *unde* n *– număr natural par, descreşte pe intervalul* $(-\infty;\ 0]$. Analogic se poate arăta, că această funcție *creşte pe intervalul* $[0;\ +\infty)$.

Proprietățile obținute oferă posibilitatea de a reprezenta schematic graficul funcției $y = x^n$, unde n – număr natural par (fig. 2.1). În particular, graficul funcției $y = x^4$ este reprezentat în figura 2.2.

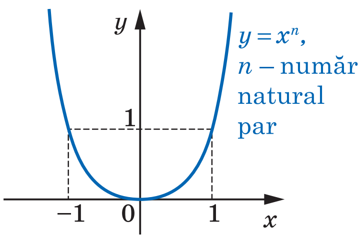


Fig. 2.1

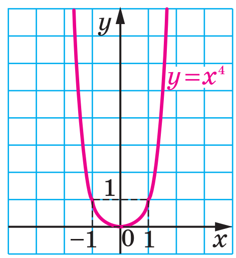


Fig. 2.2

• **Cazul doi:** $\boldsymbol{n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}}$ **sau** $\boldsymbol{k = 0}$

Menționam că pentru $k = 0$ obținem funcția $y = x$, proprietățile şi graficul căreia au fost cercetate în cursul de algebră din clasa a 7-a.

Fie acum că $k \in \mathbb{N}$.

Se poate demonstra, că pentru orice a există o astfel de valoare a argumentului x, că $x^{2k+1} = a$.

Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției* $y = x^n$, *unde* n *– număr natural impar, este mulțimea* $\mathbb{R}$.

Dacă $x < 0$, atunci $x^{2k+1} < 0$; dacă $x > 0$, atunci $x^{2k+1} > 0$.

Deci, *intervalele* $(-\infty;\ 0)$ şi $(0;\ +\infty)$ *sunt intervale de constanță ale semnului funcției* $y = x^n$, *unde* n *– număr natural impar.*

Funcția $y = x^n$, *unde* n *– număr natural impar, este impară.* Într-adevăr, pentru orice x din domeniul de definiție se îndeplineşte egalitatea $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Să considerăm numerele arbitrare x_1 şi x_2, astfel, că $x_1 < x_2$. Folosindu-ne de proprietățile inegalităților numerice, obținem: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Deci, *funcția* $y = x^n$, *unde* n *– număr natural impar, este crescătoare.*

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției $y = x^n$, unde n – număr natural impar, $n > 1$ (fig. 2.3). În particular, graficul funcției $y = x^3$ este reprezentat în figura 2.4.

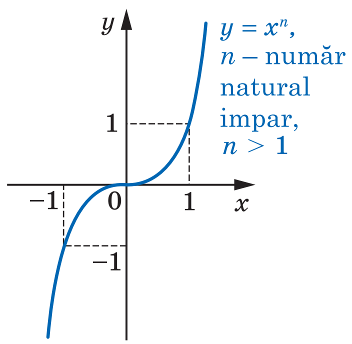


Fig. 2.3

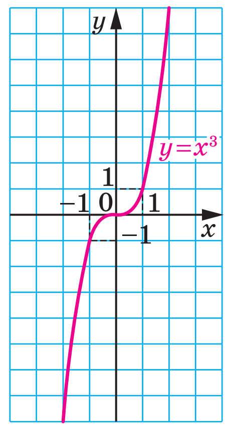


Fig. 2.4

În tabel sunt prezentate proprietățile funcțiilor $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, stabilite în acest punct.

Proprietatea	n – număr natural par	n – număr natural impar
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Domeniul de valori	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Zerourile funcției	$x = 0$	$x = 0$
Intervalele de constanță a semnului	$y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ şi $(0; +\infty)$	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Pară	Impară
Creştere/ descreştere	Descreşte pe intervalul $(-\infty; 0]$, creşte pe intervalul $[0; +\infty)$	Crescătoare

1. Care funcţie se numeşte funcţie putere cu exponent natural?
2. Formulaţi proprietăţile funcţiei $y = x^n$.
3. Reprezentaţi schematic graficul funcţiei $y = x^n$.

EXERCIŢII

2.1.° Prin care din punctele date trece graficul funcției $y = x^5$:
1) $A\ (-1;\ 1)$; 2) $B\ (2;\ 32)$; 3) $C\ (-3;\ -243)$?

2.2.° Prin care din punctele date trece graficul funcției $y = x^4$:
1) $A\ (2;\ 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$; 3) $C\ (0,5;\ -0,0625)$?

2.3.° Funcția este dată prin formula $f(x) = x^{19}$. Comparați:
1) $f(1,4)$ şi $f(1,8)$; 3) $f(-6,9)$ şi $f(6,9)$;
2) $f(-7,6)$ şi $f(-8,5)$; 4) $f(0,2)$ şi $f(-12)$.

2.4.° Funcția este dată prin formula $f(x) = x^{50}$. Comparați:
1) $f(9,2)$ şi $f(8,5)$; 3) $f(19)$ şi $f(-19)$;
2) $f(-1,1)$ şi $f(-1,2)$; 4) $f(-7)$ şi $f(9)$.

2.5.• Amplasați expresiile în ordinea descrescătoare a valorilor lor:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5,\ \left(-2\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5,\ \left(-2\frac{2}{5}\right)^5.$$

2.6.• Amplasați expresiile în ordinea descrescătoare a valorilor lor:

$$(1,06)^4,\ (-0,48)^4,\ (-2,12)^4,\ (-3,25)^4.$$

2.7.• Aflați cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = x^8$ pe intervalul:
1) $[0;\ 2]$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -2]$.

2.8.• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = x^5$ pe intervalul:
1) $[-3;\ 3]$; 2) $[-2;\ 0]$; 3) $[1;\ +\infty)$.

2.9.•• Determinați în mod grafic numărul rădăcinilor ecuației:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$.

2.10.•• Determinați în mod grafic numărul de soluții al sistemului de ecuații $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$

2.11.* Câte rădăcini are ecuația în dependență de valoarea a:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

2.12. Calculaţi valoarea expresiei:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2{,}3)^{0}-5^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 4) $9\cdot 0{,}1^{-1}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$.

2.13. Prezentaţi în formă de fracţie ordinară expresia:

1) $a^{-2}+a^{-3}$; 2) $mn^{-4}+m^{-4}n$; 3) $(c^{-1}-d^{-1})(c-d)^{-2}$.

3. Funcţia putere cu exponent întreg

Funcţia, care poate fi prezentată prin formula $y=x^{n}$, unde $n\in\mathbb{Z}$, se numeşte **funcţie putere cu exponent întreg**.

Proprietăţile acestei funcţii pentru exponent natural au fost cercetate în punctul precedent. Aici noi vom cerceta cazurile, când exponentul n este număr întreg negativ sau zero.

Domeniul de definiţie al funcţiei $y=x^{0}$ este mulţimea $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, domeniul de valori – mulţimea unitară $\{1\}$. Graficul acestei funcţii este reprezentat în figura 3.1.

Să cercetăm funcţia $y=x^{-n}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Cazul particular al acestei funcţii, când $n=1$, adică funcţia $y=\frac{1}{x}$, vă este cunoscut din cursul de algebră al clasei a 8-a.

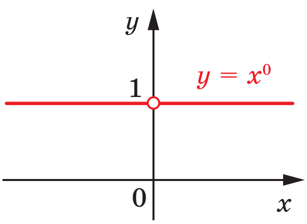


Fig. 3.1

Să scriem funcţia $y=x^{-n}$ în forma $y=\frac{1}{x^{n}}$. Atunci devine clar, că *domeniul de definiţie al funcţiei* $y=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, este mulţimea $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Evident, că această funcţie nu posedă zerouri.

Cercetările de mai departe ale proprietăţilor funcţiei $y=x^{-n}$, unde $n\in\mathbb{N}$, o să le executăm pentru două cazuri: n – număr natural par şi n – număr natural impar.

- **Primul caz: $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.**

Dispunem de: $x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$. Deoarece expresia $\frac{1}{x^{2k}}$ obţine doar valori pozitive, atunci în domeniul de valori al funcţiei cercetate nu intră numerele negative, precum şi numărul 0.

Se poate arăta, că pentru oricare $a > 0$ există o astfel de valoare a argumentului x, că $x^{-2k} = a$.

Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției $y = x^{-n}$, unde n – număr natural par, este mulțimea* $(0; +\infty)$.

Deoarece pentru oricare $x \neq 0$ se execută inegalitatea $\dfrac{1}{x^{2k}} > 0$, atunci *intervalele* $(-\infty; 0)$ şi $(0; +\infty)$ *sunt intervale de constanță a semnului funcției $y = x^{-n}$, unde n – număr natural par.*

Funcția $y = x^{-n}$*, unde n – număr natural par, este pară.* Într-adevăr, pentru oricare x din domeniul de definiție se execută egalitatea $(-x)^{-2k} = \dfrac{1}{(-x)^{2k}} = \dfrac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Să luăm numerele arbitrare x_1 şi x_2 astfel, că $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ şi $x_1 < x_2$. Folosindu-ne de proprietatea inegalităților numerice, obținem: $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} > 0$. De aici $\left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\dfrac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

Deci, *funcția $y = x^{-n}$, unde n – număr natural par, descreşte pe intervalul* $(0; +\infty)$.

Se poate deasemenea de demonstrat, că *funcția $y = x^{-n}$, unde n – număr natural par, creşte pe intervalul* $(-\infty; 0)$.

Atragem atenția, că odată cu mărirea modulului x valorile expresiei $\dfrac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, devin tot mai mici şi mai mici. Din această cauză distanța de la punctul graficului funcției $y = \dfrac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, până la axa absciselor se micşorează cu mărirea modulului abscisei punctului şi poate să devină oricât de mică, însă nicicând nu vă fi egală cu zero.

De asemenea se poate stabili, că odată cu mărirea modulului ordonatei distanța de la punctul graficului funcției $y = \dfrac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, până la axa ordonatelor se micşorează şi poate să devină oricât de mică, însă nicicând nu vă fi egală cu zero.

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției $y = x^{-n}$, unde n – număr natural par (fig. 3.2). În particular graficul funcției $y = \dfrac{1}{x^2}$, este reprezentat în figura 3.3.

- **Primul caz: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Se poate arăta că pentru oricare $a \neq 0$ există o astfel de valoare a argumentului x, că $x^{-(2k-1)} = a$.

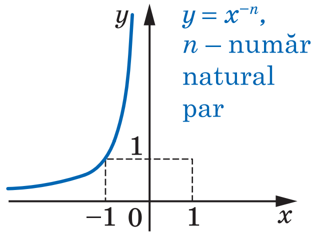


Fig. 3.2

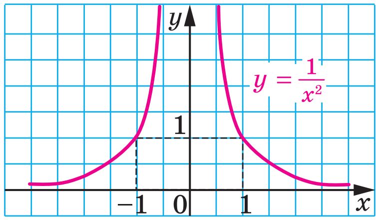


Fig. 3.3

- Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției* $y = x^{-n}$, *unde* n *– număr natural impar, este mulțimea* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

  Dacă $x < 0$, atunci $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; dacă $x > 0$, atunci $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.
- Deci, *intervalele* $(-\infty;\ 0)$ *şi* $(0;\ +\infty)$ *sunt intervale de constanță a semnului funcției* $y = x^{-n}$, *unde* n *– număr natural impar.*
- *Funcția* $y = x^{-n}$, *unde* n *– număr natural impar, este impară.* Într-adevăr, pentru oricare $\boldsymbol{x}$ din domeniul de definiție se execută egalitatea $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.
- Se poate demonstra că, *funcția* $y = x^{-n}$, *unde* n *– număr natural impar, descreşte pe fiecare din intervalele* $(-\infty;\ 0)$ şi $(0;\ +\infty)$.

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției $y = x^{-n}$, unde n – număr natural impar (fig. 3.4). În particular, graficul funcției $y = \frac{1}{x^3}$, este reprezentat în figura 3.5.

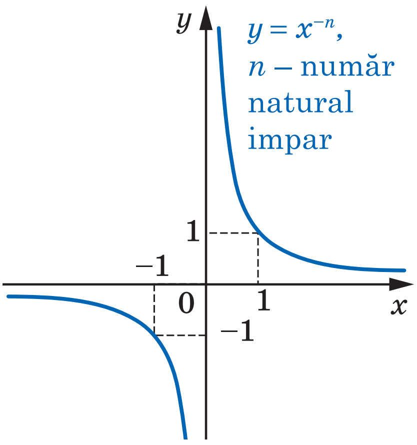


Fig. 3.4

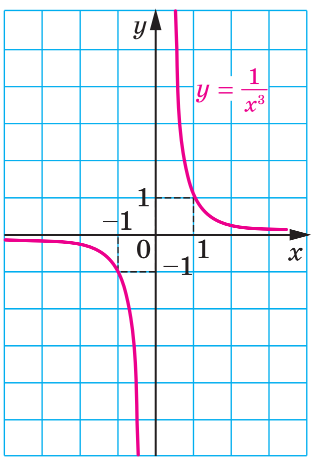


Fig. 3.5

În tabel sunt prezentate proprietățile funcției $y = x^{-n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, studiate în acest punct.

Proprietatea	n – număr natural par	n – număr natural impar
Domeniul de definiție	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Domeniul de valori	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Zerourile funcției	—	—
Intervalele de constanță a semnului	$y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ şi $(0; +\infty)$	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$, $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Pară	Impară
Creştere / descreştere	Creşte pe intervalul $(-\infty; 0)$, descreşte pe intervalul $(0; +\infty)$	Descreşte pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ şi $(0; +\infty)$

1. Ce funcţie se numeşte funcţie putere cu exponent întreg?
2. Ce figură prezintă graficul funcţiei $y = x^0$?
3. Formulaţi proprietăţile funcţiei $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Reprezentaţi schematic graficul funcţiei $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCIŢII

3.1.° Trece oare graficul funcției $y = x^{-4}$ prin punctul:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

3.2.° Trece oare graficul funcției $y = x^{-5}$ prin punctul:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

3.3.• Se dă funcția $f(x) = x^{-19}$. Comparați:

1) $f(1,6)$ şi $f(2)$;
2) $f(-5,6)$ şi $f(-6,5)$;
3) $f(-9,6)$ şi $f(9,6)$;
4) $f(0,1)$ şi $f(-10)$.

3.4.• Funcția este dată prin formula $f(x) = x^{-40}$. Comparați:

1) $f(6,2)$ şi $f(5,5)$;
2) $f(-1,6)$ şi $f(-1,7)$;
3) $f(24)$ şi $f(-24)$;
4) $f(-8)$ şi $f(6)$.

3.5.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

3.6.• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = x^{-6}$ pe intervalul:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;
3) $[1; +\infty)$.

3.7.• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = x^{-3}$ pe intervalul:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $(-\infty; -3]$.

3.8.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = (x-2)^0$;
2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$.

3.9.•• Construiți graficul ecuației:

1) $(y+2)^0 = x - 2$;
2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

3.10. Aflați valoarea expresiei:

1) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$;
2) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$;
3) $\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$.

3.11. Comparați numerele:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ şi $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{33}$ şi 6;
3) $\sqrt{30}$ şi $2\sqrt{7}$.

4. Definiţia radicalului de ordinul n

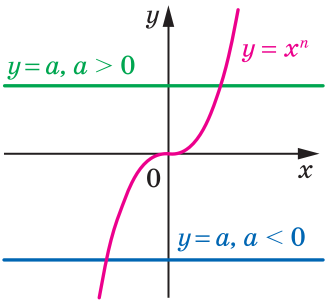
Cunoaşteți faptul, că rădăcina de ordinul doi (rădăcina pătrată) din numărul a se numeşte un astfel de număr, care ridicat la puterea a doua este egal cu a. Analogic se dă definiția rădăcinii de ordinul n din numărul a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Definiție. Rădăcina de ordinul n din numărul a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se numeşte un astfel de număr, care ridicat la puterea n este egal cu a.

De exemplu, rădăcina de ordinul cinci din numărul 32 este numărul 2, deoarece $2^5 = 32$; rădăcina de ordinul trei din numărul -64 este numărul -4, deoarece $(-4)^3 = -64$; rădăcini de ordinul patru din numărul 81 sunt numerele 3 şi -3, deoarece $3^4 = 81$ şi $(-3)^4 = 81$.

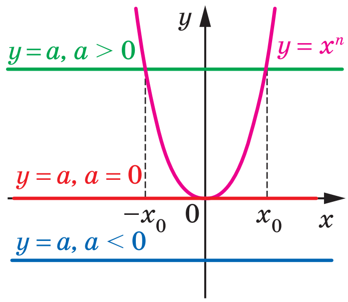
Dacă n – număr natural impar, atunci graficele funcțiilor $y = x^n$ şi $y = a$ pentru oricare a se intersectează într-un punct (fig. 4.1). Aceasta înseamnă, că ecuația $x^n = a$ are o singură soluție pentru orice a. Atunci se poate trage o astfel de concluzie:

dacă n – număr natural impar, este mai mare decât 1, atunci din orice număr există rădăcină de ordinul n, totodată numai una singură.



n — număr natural impar, $n > 1$

Fig. 4.1



n — număr natural par

Fig. 4.2

Rădăcina de ordin impar n, $n > 1$, din numărul a se înseamnă astfel: $\sqrt[n]{a}$ (se citeşte astfel: ”rădăcina de ordinul n din a”). De exemplu, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Semnul $\sqrt[n]{\ }$ se numeşte **rădăcină de ordinul *n*** sau ***radical de ordinul n***. (Numărul ***n*** se numeşte **ordinul radicalului** sau **indicele radicalului)**[1]. Expresia, care se află sub semnul radicalului, se numeşte **expresie de sub radical**.

Radicalul de ordinul trei este primit deasemenea de-l numit rădăcină cubică. De exemplu, scrierea $\sqrt[3]{2}$ se citeşte: ”rădăcina cubică din numărul 2”.

Accentuăm, că expresia $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, este definită pentru oricare a.

Din definiția radicalului de ordinul ***n*** reiese, că **pentru *a* arbitrar se execută egalitatea**

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

De exemplu, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

[1] Nota traducătorului

Să considerăm ecuaţia $x^n = a$, unde n – număr natural par.

Din figura 4.2 se vede: dacă $a < 0$, atunci graficele funcţiilor $y = x^n$ şi $y = a$ nu au puncte comune; dacă $a = 0$, atunci graficele considerate au un punct comun; dacă $a > 0$, atunci sunt două puncte comune, şi totodată abscisele lor sunt numere opuse. Atunci se poate face astfel de concluzie:

Dacă n este număr natural par, atunci pentru a < 0 rădăcina de ordinul n din numărul a nu există; pentru a = 0 rădăcina de ordinul n din numărul a este egală cu zero; pentru a > 0 există două numere opuse, fiecare din ele fiind rădăcina de ordinul n din numărul a.

Voi ştiţi, că rădăcina pătrată aritmetică dintr-un număr nenegativ $\boldsymbol{a}$ se numeşte un astfel de număr nenegativ, pătratul căruia este egal cu a. Analogic se dă definiţia rădăcinii aritmetice de ordinul n.

Definiţie. Se numeşte rădăcină aritmetică de ordin n dintr-un număr nenegativ a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, un astfel de număr nenegativ puterea n a căruia este egală cu a.

Rădăcina aritmetică de ordinul n dintr-un număr nenegativ a se înseamnă astfel: $\sqrt[n]{a}$.

De exemplu, $\sqrt[4]{81} = 3$, deoarece $3 \geqslant 0$ şi $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, deoarece $2 \geqslant 0$ şi $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, deoarece $0 \geqslant 0$ şi $0^{10} = 0$.

În general, **dacă $b \geqslant 0$ şi $b^n = a$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci $\sqrt[n]{a} = b$.**

Cu ajutorul semnului radicalului de ordinul $\boldsymbol{n}$ se pot scrie rădăcinile ecuaţiei $x^n = a$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

De exemplu, rădăcina ecuaţiei $x^3 = 7$ este singurul număr $\sqrt[3]{7}$; rădăcinile ecuaţiei $x^4 = 5$ sunt două numere: $-\sqrt[4]{5}$ şi $\sqrt[4]{5}$.

Din definiţia rădăcinii aritmetice de ordinul $\boldsymbol{n}$ reiese, că:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **unde** $a \geqslant 0$ (de exemplu, $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$);

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **unde** $a \geqslant 0$ (de exemplu, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$);

3) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ (de exemplu, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Mai sus s-a stabilit, că rădăcina de ordin impar din orice număr există şi are o singură valoare. Deci, fiecărui număr real $\boldsymbol{x}$ i se poate pune în corespondenţă un singur număr y, astfel, că $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Regula menţionată defineşte funcţia $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, unde $k \in \mathbb{N}$, cu domeniul de definiţie $\mathbb{R}$. Graficul acestei funcţii este prezentat în figura 4.3. În figura 4.4 este prezentat graficul funcţiei $y = \sqrt[3]{x}$.

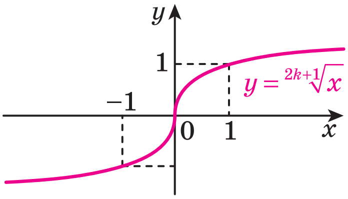


Fig. 4.3

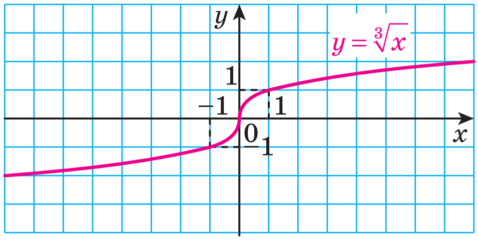


Fig. 4.4

Analogic se defineşte şi funcția $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Domeniul de definiție al acestei funcții este intervalul $[0; +\infty)$.

În figura 4.5. este reprezentat graficul funcției $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, iar în figura 4.6. – graficul funcției $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

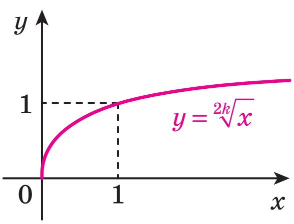


Fig. 4.5

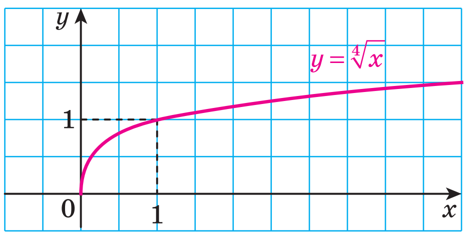


Fig. 4.6

În tabel sunt expuse proprietățile funcției $y = \sqrt[n]{x}$.

Proprietatea	n – număr natural impar, $n > 1$	n – număr natural par
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Domeniul de valori	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Zerourile funcției	$x = 0$	$x = 0$
Intervalele de constanță a semnului	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$	$y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Impară	Nu este nici pară nici impară
Creştere / descreştere	Crescătoare	Descrescătoare

Problemă. Rezolvați inecuația: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$.

Rezolvare. 1) Inecuația dată o transcriem în astfel de mod: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Deoarece funcția $y = \sqrt[3]{x}$ este crescătoare, atunci se poate concluziona, că $x < 8$.

Răspuns: $(-\infty;\ 8)$.

2) Dispunem de: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Deoarece funcția $y = \sqrt[4]{t}$ este crescătoare şi este definită pe mulțimea $[0;\ +\infty)$, atunci egalitatea dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x-2 < 1, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases}$$

De aici $2 \leqslant x < 3$.

Răspuns: $[2;\ 3)$. ◄

1. Ce se numeşte rădăcină de ordinul n din numărul a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Pentru care valori ale lui a are sens expresia $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
3. Ce se numeşte rădăcină aritmetică de ordinul n dintr-un număr nenegativ a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
4. Pentru care valori ale lui a are sens expresia $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
5. Formulaţi proprietăţile funcţiei $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, şi reprezentaţi schematic graficul ei.
6. Formulaţi proprietăţile funcţiei $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, şi reprezentaţi schematic graficul ei.

EXERCIŢII

4.1.° Are oare sens scrierea:
1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

4.2.° Este oare corectă egalitatea (argumentați răspunsul):
1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

4.3.° Demonstrați, că:
1) Numărul 2 este rădăcina cubică din numărul 8;
2) Numărul 3 este rădăcina aritmetică de ordinul patru din numărul 81;
3) Numărul –3 nu este rădăcina aritmetică de ordinul patru din numărul 81.

4.4.° Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt[3]{216}$; 2) $\sqrt[4]{0,0016}$; 3) $\sqrt[5]{-0,00001}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$.

4.5.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $0,5\sqrt[3]{-64}$; 3) $-\sqrt[5]{-1024}$?

4.6.° Calculați:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 4) $\left(-2\sqrt[7]{-5}\right)^7$.

4.7.° Aflați valoarea expresiei:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$.

4.8.° Rezolvați ecuația:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;
2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x-2)^3 = 125$;
3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x+5)^4 = 10\ 000$.

4.9.° Rezolvați ecuația:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;
2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$.

4.10.° Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$.

4.11.° Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

4.12.• Calculați: $0,3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$.

4.13.• Calculați: $200\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[5]{-0,00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$.

4.14.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x+1}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$.

4.15.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 2) $y = \sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$.

4.16.• Între care două numere consecutive întregi se află numărul pe dreapta de coordonate:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

4.17.• Între care două numere consecutive întregi se află numărul pe dreapta de coordonate:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.18.• Rezolvați inecuația:

1) $\sqrt[5]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x-3} < 2$; 3) $\sqrt[4]{x+1} > 1$.

4.19.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

4.20.•• Rezolvați ecuația:

1) $(x^2 - 4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2 - 2x - 3} = 0$.

4.21.•• Rezolvați ecuația $(x+2)\sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} = 0$.

4.22.•• Construiți graficul funcției $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$.

4.23.•• Construiți graficul funcției $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

4.24. Calculați valoarea expresiei:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$.

4.25. Calculați valoarea expresiei:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 3) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

5. Proprietăţile radicalului de ordinul n

Să cercetăm teoremele, care exprimă proprietățile radicalului de ordinul n.

Teorema 5.1 (prima teoremă despre rădăcina din putere). ***Pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{N}$ sunt adevărate egalitățile:***

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra egalitatea $\sqrt[2k+1]{x} = y$, este suficient de arătat, că $y^{2k+1} = x$. Pentru prima egalitate, ce se demonstrează, $x = a^{2k+1}$, iar $y = a$. De aici egalitatea $y^{2k+1} = x$ este evidentă.

Pentru a demonstra egalitatea $\sqrt[2k]{x} = y$, este suficient de arătat, că $y \geqslant 0$ şi $y^{2k} = x$. Pentru a doua egalitate, ce se demonstrează, avem: $|a| \geqslant 0$ şi $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◀

Teorema 5.2 (rădăcina din produs). ***Dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci***

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra egalitatea $\sqrt[n]{x} = y$, unde $x \geqslant 0$, este suficient de arătat *că* $y \geqslant 0$ şi $y^n = x$.

Dispunem de: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ şi $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Totodată, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ◀

Teorema 5.3 (rădăcina din cât). ***Dacă $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Teorema 5.4 (puterea rădăcinii). ***Dacă $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Demonstrație. Dacă $k = 1$, atunci egalitatea, ce se demonstrează, este evidentă.

Fie $k > 1$.

Avem: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ factori}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ factori}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◀

Teorema 5.5 (rădăcina din radical). ***Dacă $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, atunci***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Demonstrație. Dispunem de: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Totodată, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◀

Teorema 5.6 (a doua teoremă despre rădăcina din putere). ***Dacă $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci***

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Demonstrație. Dacă $k = 1$, atunci egalitatea, ce se demonstrează, este evidentă.

Fie $k > 1$. Avem: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◀

Problema 1. Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Rezolvare. 1) Folosind teorema 5.1, se poate scrie: $\sqrt[4]{(-7,3)^4}=|-7,3|=7,3$.

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}=1,2^2=1,44$.

3) Înlocuind produsul rădăcinilor prin rădăcina din produs, obținem:

$$\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\cdot 2}=\sqrt[5]{32}=2.$$

4) Înlocuind câtul rădăcinilor prin rădăcina câtului, vom avea:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}=\sqrt[3]{\frac{24}{375}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}.\ \blacktriangleleft$$

Problema 2. Simplificați expresia:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, dacă $a\leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$.

Rezolvare. 1) Folosind teorema 5.1 obținem: $\sqrt[4]{a^{28}}=\sqrt[4]{(a^7)^4}=|a^7|$.

2) Avem: $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|$. Deoarece conform condiției $a\leqslant 0$, atunci $a^3\leqslant 0$. Atunci $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|=-2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}}=\sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}=\sqrt[3]{|a|}$. $\blacktriangleleft$

Problema 3. Scoateți factorul de sub semnul radicalului: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$.

Rezolvare. 1) Vom prezenta numărul, care se află sub semnul radicalului, în formă de produs a două numere, unul din care este cubul numărului rațional, şi scoatem factorul de sub semnul rădăcinii:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) Din condiție reiese, că $b\geqslant 0$.

Atunci $\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|b^5|\sqrt[8]{b^3}=b^5\sqrt[8]{b^3}$. $\blacktriangleleft$

Problema 4. Introduceți factorul sub semnul radicalului: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $c\sqrt[10]{c^7}$.

Rezolvare. 1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}$.

2) Din condiție reiese, că $c\geqslant 0$.

Atunci $c\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{17}}$. $\blacktriangleleft$

P r o b l e m a 5. Reduceți fracția $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

R e z o l v a r e. Descompunând numărătorul și numitorul fracției date în factori, obținem:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$ ◄

1. Formulaţi prima teoremă despre rădăcina din putere.
2. Formulaţi teorema despre rădăcina din produs.
3. Formulaţi teorema despre rădăcina din cât.
4. Formulaţi teorema despre ridicarea la putere a radicalului.
5. Formulaţi teorema despre rădăcina din radical.
6. Formulaţi a doua teoremă despre rădăcina din putere.

EXERCIŢII

5.1.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 7^5}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot 11^4}{5^8\cdot 2^{16}}}$.

5.2.° Calculați valoarea expresiei:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot 343}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 3) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24}\cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

5.3.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot 7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$.

5.4.° Simplificați expresia:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot 5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot 5^4}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot 3^4}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$.

5.5.° Simplificați expresia:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8 b^{24}}$.

5.6.° Simplificați expresia:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$.

5.7.• Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[4]{162}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 4) $\sqrt[3]{40a^5}$; 5) $\sqrt[3]{-a^7}$.

5.8.• Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$.

5.9.• Introduceți factorul sub semnul radicalului:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $5\sqrt[3]{0,04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$; 5) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

5.10.• Introduceți factorul sub semnul radicalului

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

5.11.• Schimbați expresia $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$ cu una identic egală cu ea.

5.12.• Simplificați expresia $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$.

5.13.• Simplificați expresia:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

5.14.• Simplificați expresia:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

5.15.• Simplificați expresia:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

5.16.• Simplificați expresia $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

5.17.• Pentru care valori ale lui a este adevărată egalitatea:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

5.18.•• Pentru care valori ale lui a este adevărată egalitatea:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

5.19.•• Pentru care valori ale lui a şi b este adevărată egalitatea:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

5.20.•• Pentru care valori ale lui x este adevărată egalitatea:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

5.21.•• Simplificați expresia:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, dacă $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, dacă $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{256k^8}$, dacă $k \leqslant 0$;
4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
5) $\sqrt{0,25b^{14}}$, dacă $b \leqslant 0$;
6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, dacă $y \geqslant 0$.

5.22.•• Simplificați expresia:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $-5\sqrt{4x^2}$, dacă $x \leqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, dacă $p \geqslant 0$.

5.23.•• Reduceți fracția:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;
2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;
3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

5.24.•• Reduceți fracția:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;
3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

5.25.•• Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$.

5.26.•• Simplificați expresia:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$;
2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;
3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$.

5.27.•• Simplificați expresia:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$;
2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$;
3) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

5.28.•• Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, dacă $a > 0$.

5.29.•• Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, dacă $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$.

5.30.•• Introduceți factorul sub semnul radicalului:

1) $c\sqrt[8]{3}$, dacă $c \leqslant 0$;
2) $b\sqrt[6]{6}$;
3) $a\sqrt[6]{-a}$.

5.31.•• Introduceți factorul sub semnul radicalului:

1) $a\sqrt[6]{a}$;
2) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

5.32.* Rezolvați ecuația $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6} = 2$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

5.33. Prezentați sub formă de putere cu baza a expresia:

1) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$; 5) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;

2) $a^5 \cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3} : a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$.

5.34. Găsiți valoarea expresiei:

1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 3) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$; 5) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

2) $3^{-3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $9^{-4} \cdot 27^2$; 6) $\dfrac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$.

6. Definiţia şi proprietăţile puterii cu exponent raţional

În clasa a 7-a ați aflat, că puterea cu exponent natural are astfel de proprietăți:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Mai târziu ați făcut cunoştință cu definiția puterii cu exponent nul şi a puterii cu exponent întreg negativ:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Aceste definiții sunt foarte reuşite: prin această abordare toate cinci proprietăți ale puterii cu exponent natural au rămas adevărate şi pentru puterea cu exponent întreg.

Să introducem noțiunea de putere cu exponent fracționar, adică a puterii a^r, exponentul căreia este număr rațional $r = \dfrac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Este de dorit de realizat aceasta astfel, ca puterea cu exponent fracționar să posede toate proprietățile puterii cu exponent întreg. Sugestie pentru definirea necesară poate servi astfel de exemplu.

Însemnăm prin $\boldsymbol{x}$ valoarea căutată a puterii $2^{\frac{2}{3}}$, adică $x = 2^{\frac{2}{3}}$.

Ținând cont de proprietatea $(a^m)^n = a^{mn}$, putem nota: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Deci, x este rădăcina cubică din numărul 2^2, adică $x = \sqrt[3]{2^2}$. Astfel, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Aceste raționamente ne vorbesc de faptul, că este rațional de acceptat astfel de definiție.

Definiție. Putere a numărului pozitiv $\boldsymbol{a}$ cu exponent rațional $\boldsymbol{r}$, prezentat sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se numeşte, numărul $\sqrt[n]{a^m}$, adică

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

De exemplu, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Menționăm, că valoarea puterii a^r, unde r – număr rațional, nu depinde de aceea, care-i forma fracției cu care este egal numărul r. Aceasta se poate arăta, folosind egalitățile $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ şi $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Puterea cu baza, care este egală cu zero, se defineşte doar pentru exponent pozitiv rațional.

Definiție. $\boldsymbol{0^{\frac{m}{n}} = 0}$, **unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Atragem atenția, că, de exemplu, notarea $0^{-\frac{1}{2}}$ nu are sens.

Accentuăm, că în definiții nu merge vorba despre puterea $a^{\frac{m}{n}}$ pentru $a < 0$, de exemplu, expresia $(-2)^{\frac{1}{3}}$ rămâne nedeterminată. Totodată expresia $\sqrt[3]{-2}$ are sens. Apare întrebarea: de ce să nu socotim, că $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Vom arăta că o astfel de înțelegere ar duce la contradicție:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Am obține, că numărul negativ $\sqrt[3]{-2}$ ”este egal” cu numărul pozitiv $\sqrt[6]{4}$.

Funcţia, care poate fi definită cu ajutorul formulei $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, se numeşte **funcţie putere cu exponent raţional.**

Dacă fracţia ireductibilă $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, este număr pozitiv, atunci domeniul de definiţie al funcţiei $y = x^{\frac{m}{n}}$ este intervalul $[0; +\infty)$; dar dacă această fracţie este număr negativ, atunci intervalul $(0; +\infty)$.

În figura 6.1 sunt reprezentate graficele funcţiilor $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

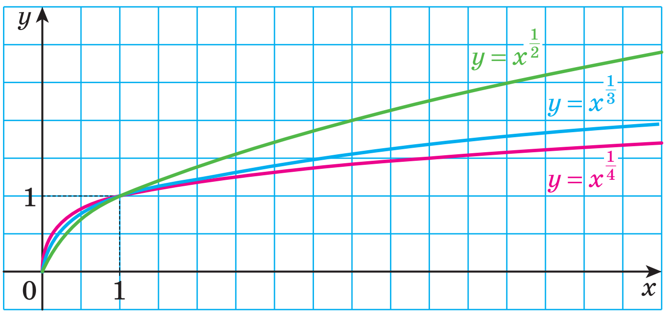


Fig. 6.1

Vom arăta, că proprietăţile puterii cu exponent întreg rămân adevărate şi pentru puterea cu exponent raţional arbitrar.

Teorema 6.1 (produsul puterilor). ***Pentru $a > 0$ arbitrar şi pentru orice numere raţionale p şi q se realizează egalitatea***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Demonstraţie. Scriem numerele raţionale p şi q în formă de fracţii cu acelaşi numitor: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dispunem de:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

Consecinţă. ***Pentru orice $a > 0$ şi orice număr raţional p este adevărată egalitatea***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Demonstrație. Folosind teorema 6.1, scriem: $a^{-p}\cdot a^{p}=$ $=a^{-p+p}=a^{0}=1$. De aici $a^{-p}=\dfrac{1}{a^{p}}$. ◀

Teorema 6.2 (câtul puterilor). ***Pentru orice a > 0 şi orice numere raționale p şi q este adevărată egalitatea***

$$\boxed{a^{p} : a^{q}=a^{p-q}}$$

Demonstrație. Folosind teorema 6.1, notăm: $a^{q}\cdot a^{p-q}=$ $=a^{q+p-q}=a^{p}$. De aici $a^{p-q}=a^{p} : a^{q}$. ◀

Teorema 6.3 (puterea puterii). ***Pentru orice a > 0 şi orice numere raționale p şi q este adevărată egalitatea***

$$\boxed{(a^{p})^{q}=a^{pq}}$$

Demonstrație. Fie $p=\dfrac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, şi $q=\dfrac{s}{k}$, $s\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Avem:

$$(a^{p})^{q}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}}=\sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{s}}=\sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{s}}=\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}}=\sqrt[kn]{a^{ms}}=a^{\frac{ms}{kn}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}}=a^{pq}.$$ ◀

Teorema 6.4 (puterea produsului şi puterea câtului). ***Pentru a > 0 si b > 0 arbitrari şi orice număr rațional p este adevărată egalitatea:***

$$\boxed{(ab)^{p}=a^{p}b^{p}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{p}=\frac{a^{p}}{b^{p}}}$$

Demonstrați această teoremă de sine stătător.

Problema 1. Simplificați expresia

$$(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})\ (a^{0,3}-2b^{0,2}).$$

Rezolvare. Deschidem parantezele, folosind regula înmulțirii polinoamelor şi formula diferenței pătratelor, iar apoi reducem termenii asemenea:

$$(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})=$$
$$=\underline{3a^{0,6}}-\underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}}+\underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}}-4b^{0,4}-\underline{a^{0,6}}+4b^{0,4}=2a^{0,6}-11a^{0,3}b^{0,2}.$$ ◀

Problema 2. Simplificați expresia $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2}-\dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Rezolvare. Efectuăm înlocuirea $x^{\frac{1}{3}} = y$. Atunci expresia dată obține aspectul:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Această expresie este uşor de-o simplificat. Terminați singuri rezolvarea acestei probleme.

Răspuns: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◀

1. Ce se numeşte putere a numărului a cu exponentul $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

2. Ce se numeşte putere a numărului 0 cu exponentul $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?

3. Care funcţie se numeşte funcţie putere cu exponent raţional?

4. Formulaţi proprietăţile puterii cu exponent raţional.

EXERCIŢII

6.1.° Prezentați sub formă de radical puterea cu exponent fracționar:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$.

6.2.° Prezentați sub formă de radical puterea cu exponent fracționar:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$.

6.3.° Prezentați expresia sub formă de putere cu exponent fracționar:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$.

6.4.° Prezentați expresia sub formă de putere cu exponent fracționar:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$.

6.5.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $32^{-0,2}$.

6.6.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

6.7.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}$; 3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1,2^{4,5}$;

2) $(5^{-0,8})^{6} \cdot 5^{4,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 6) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$.

6.8.° Cu este egală valoarea expresiei:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^{8} : 7^{-7,6}$; 3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 4) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

6.9.° Deschideți parantezele:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right) + 8a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(3b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{2}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$;

4) $(b^{0,4} + 3)^{2} - 6b^{0,4}$;

5) $\left(c^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} + 1\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right)$.

6.10.° Deschideți parantezele:

1) $(5a^{0,4} + b^{0,2})(3a^{0,4} - 4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5} + n^{0,5})(m^{0,5} - n^{0,5})$;

3) $\left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

4) $\left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right)$;

5) $(y^{1,5} - 4y^{0,5})^{2} + 8y^{2}$;

6) $\left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)$.

6.11.• Calculați valoarea expresiei:

1) $12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$;

3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{-\frac{5}{6}} \cdot 4^{1,5}$.

6.12.• Găsiți valoarea expresiei:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}} - 0,04^{-\frac{1}{2}} + 0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1,25} \cdot 25^{1,5} \cdot 125^{\frac{2}{3}}$.

6.13.• Reduceți fracția:

1) $\frac{a - 5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 5}$; 2) $\frac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}$; 3) $\frac{a - b}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 5) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$.

6.14.• Reduceți fracția:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$.

6.15.•• Simplificați expresia $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$.

6.16.•• Simplificați expresia $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$.

6.17.•• Demonstrați identitatea $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$.

6.18.•• Demonstrați identitatea $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

6.19. Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{3x-7}=0$; 3) $\sqrt{x^2-64}=6$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;

2) $\sqrt{4x-1}=6$; 4) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$; 6) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$.

7. Ecuaţii iraţionale

În timpul rezolvării ecuațiilor uneori apare necesitatea de a ridica ambele părți ale ecuației la una şi aceiaşi putere. Să clarificăm, cum aceasta influențează asupra mulțimii soluțiilor ecuației date.

Teorema 7.1. ***Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la putere impară, atunci obținem ecuație, echivalentă celei date.***

Problema 1. Rezolvați ecuația $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Rezolvare. Ridicăm ambele părți ale ecuației date la puterea şaptea. Obținem o ecuație echivalentă

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

De aici $x^2-2=x$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$.

Răspuns: –1; 2. ◀

Ecuația, pe care noi am cercetat-o în problema 1, conține variabila sub semnul radicalului. Astfel de ecuații se numesc **iraționale**.

Iată încă câteva exemple de ecuații iraționale:

$$\sqrt{x-3}=2;$$
$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0;$$
$$\sqrt{3-x}=\sqrt[3]{2+x}.$$

În timpul rezolvării problemei 1 noi am fost nevoiți să transformăm ecuația, care conținea rădăcini de ordin impar. Să cercetăm ecuații, ce conțin rădăcini de ordin par.

Problema 2. Rezolvați ecuația $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Rezolvare. Folosind formula $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, înlocuim ecuația dată cu următoarea:

$$3x+4=x-2. \quad (2)$$

De aici $x=-3$.

Însă verificarea indică, că numărul **–3** nu este soluția ecuației inițiale. Se spune, că numărul **–3** este **soluție străină** a ecuației (1).

Deci, ecuația (1) nu are soluții.

Răspuns: soluții nu există. ◀

Cauza apariției rădăcinii străine în timpul rezolvării problemei 2 constă în faptul că, aplicând formula $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, noi nu am ținut cont de considerentul $a\geqslant 0$. Din această cauză ecuația (2) s-a dovedit a fi neechivalentă cu ecuația (1).

Definiție. ***Dacă mulțimea soluțiilor ecuației $f_2(x)=g_2(x)$ conține mulțimea soluțiilor ecuației $f_1(x)=g_1(x)$, atunci ecuația $f_2(x)=g_2(x)$ este numită consecință a ecuației $f_1(x)=g_1(x)$.***

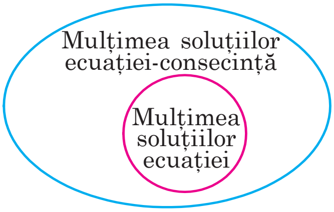


Fig. 7.1

De exemplu, ecuația $x^2=25$ este consecință a ecuației $x^2-\frac{1}{5-x}=25-\frac{1}{5-x}$. Convingeți-vă de aceasta de sine stătător.

Deasemeni se spune, că din ecuația $x^2-\frac{1}{5-x}=25-\frac{1}{5-x}$ **reiese** ecuația $x^2=25$.

În figura 7.1 definirea ecuației-consecință este ilustrată cu ajutorul diagramei lui Euler.

Încă o cauză a apariției soluțiilor străine este faptul, că din egalitatea $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ nu reiese obligatoriu egalitatea $x_1 = x_2$. De exemplu, $(-2)^4 = 2^4$, însă $-2 \neq 2$. În acelaşi timp din egalitatea $x_1 = x_2$ reiese egalitatea $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Justă este următoarea teoremă.

Teorema 7.2. ***La ridicarea ambelor părți ale ecuației la putere pară ecuația obținută este consecință a celei date.***

Problema 3. Rezolvați ecuația $\sqrt{4+3x} = x$.

Rezolvare. Ridicăm ambele părți ale ecuației la pătrat. Obținem o ecuație, care este consecința celei date:

$$4 + 3x = x^2.$$

De aici $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Verificarea arată, că numărul -1 este rădăcină străină, iar numărul **4** satisface ecuația dată.

Răspuns: 4. ◀

Problema 4. Rezolvați ecuația $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Rezolvare. Ridicăm ambele părți ale ecuației date la pătrat:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

De aici $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Trecând la ecuația-consecință, obținem:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0; \quad x_1 = 42,\ x_2 = 2.$$

Verificarea ne arată, că numărul 42 este soluție străină, iar numărul 2 satisface ecuația dată.

Răspuns: 2. ◀

Problema 5. Rezolvați ecuația $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$.

Rezolvare. Fie $\sqrt[4]{x^3+1} = t$. Atunci $\sqrt{x^3+1} = t^2$. Acum ecuația inițială obține aspectul

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

De aici $t = -3$ sau $t = 1$.

În cazul, când $t = -3$, obținem ecuația $\sqrt[4]{x^3+1} = -3$, care nu are soluții.

În cazul, când $t = 1$, obținem ecuația $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$.

Terminați rezolvarea de sine stătător.

Răspuns: 0. ◀

Vă amintim, că metoda, folosită în timpul rezolvării ultimei ecuații, vă este cunoscută încă din cursul de algebră din clasele a 8–9-a. Această metodă se numeşte *metoda substituției variabilei*.

1. Care ecuaţie se numeşte iraţională?
2. Ambele părţi ale ecuaţiei sunt ridicate la putere impară. Oare obligatoriu ecuaţia iniţială o sa fie echivalentă cu cea obţinută?
3. Ambele părţi ale ecuaţii sunt ridicate la putere pară. Oare obligatoriu ecuaţia iniţială o sa fie echivalentă cu cea obţinută?
4. Cum se pot determina soluţiile străine ale ecuaţiei?

EXERCIŢII

7.1.° Explicați, de ce nu are soluții ecuația:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$.

7.2.° Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$.

7.3.° Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[3]{x-3}=4$;
2) $\sqrt[3]{8x^3-x-15}=2x$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

7.4.• Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

7.5.• Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$.

7.6.• Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$.

7.7.• Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
4) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

7.8.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4;$ 2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x.$

7.9.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1.$

7.10.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația, folosind metoda substituției variabilei:

1) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0;$ 4) $2\sqrt{x+1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{x+1}};$

2) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0;$ 5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1} = 2;$

3) $2x - 7\sqrt{x} - 15 = 0;$ 6) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}} = 8.$

7.11.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația, folosind metoda substituției variabilei:

1) $x - \sqrt{x} - 12 = 0;$ 3) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0;$

2) $\sqrt[3]{x^2} + 8 = 9\sqrt[3]{x};$ 4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}} = 2{,}5.$

7.12.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x+1;$ 2) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = x-1.$

7.13.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2;$ 3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1;$

2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1;$ 4) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1.$

7.14.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2;$ 2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2.$

7.15.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3;$ 3) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1;$

2) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4;$ 4) $\sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5.$

7.16.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3;$ 2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3.$

7.17.$^{\bullet\bullet}$ Rezolvați ecuația, folosind metoda substituției variabilei:

1) $x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 0;$

2) $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0;$

3) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7;$

4) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2.$

7.18.•• Rezolvați ecuația, folosind metoda substituției variabilei:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0$;

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2$;

3) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123$.

7.19.* Rezolvați ecuația $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 6$.

7.20.* Rezolvați ecuația $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 6$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

7.21. Construiți graficul funcției $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ dacă } x < 1, \\ x - 1, \text{ dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$ Folosindu-vă de graficul construit, determinați intervalele de creştere şi descreştere ale funcției date.

7.22. Specificați prin formulă funcția liniară f, dacă $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$.

ŞCOALA DE MATEMATICĂ DIN LVOV

Voi studiați capitolul ”Algebra şi elemente de analiză”. În denumire a apărut o nouă îmbinare de cuvinte – ”elemente de analiză”. Ce se ascunde în spatele acestei denumiri? Răspunsul este foarte simplu – analiza matematică studiază funcțiile. Anul acesta voi începeți să faceți cunoştință cu elemente de analiză: o să fiți nevoiți să cercetați clase de funcții tot mai noi şi mai noi, să studiați proprietățile lor, să însuşiți metode de cercetare ale funcțiilor.

În prima jumătate a secolului al XX-lea studierea anumitor clase de funcții a dus la apariția unei discipline matematice noi – analiza funcțională. Un rol important, de fapt principalul rol, în crearea acestei discipline au jucat-o savanții şcolii de matematică din Lvov.

În anii 20-30 ai secolului XX-ci oraşul Lvov a fost adevărata capitală mondială a matematicii. Pe timpul acela în aşezămintele ştiințifice lucrau astfel de matematicieni legendari, ca Kazimir Kuratovschi, Stanislav Mazur, Vladislav Orlici, Vațlav Serpinsky, Stanislav Ulam, Iulii Shauder, Gugo Shteingauz şi mulți alții. Calificarea savanților de la Lvov era atât de înaltă, că savantul cu renume mondial în matematică, autorul multor teoreme remarcabile în logica

Stefan Banah
(1892–1945)

Manualul lui Banah
”Curs de analiză funcţională”

matematică şi teoria mulţimilor Alfred Tarskiy n-a trecut concursul pentru obţinerea locului vacant de profesor al Universităţii din Lvov.

Matematicienii din Lvov au creat un colectiv ştiinţific puternic, cunoscut ca şcoala de matematică din Lvov. Conducătorul ei este socotit genialul matematician Stefan Banah.

În zilele noastre societatea matematicienilor pe drept cuvânt îl consideră pe S. Banah fondatorul analizei funcţionale. Unul din primele manuale din lume, destinate acestei discipline, a fost scris anume de S. Banah. Multe rezultate ale lui Banah şi noţiuni, introduse de el, au devenit clasice. De exemplu, mulţimile cercetate de savant au obţinut denumirea ”spaţiile lui Banah” şi în zilele noastre intră în minimumul necesar pentru toţi care fac studii superioare în domeniile de matematică, fizică, cibernetică etc.

Se povesteşte, că multe teoreme matematicienii din Lvov le demonstrau ... în cafenele. S. Banah cu elevii săi au îndrăgit cafeneaua ”Scoţiană”, unde mesele mici aveau feţele de marmură – foarte comode pentru scrisul formulelor şi teoremelor matematice. Stăpânul cafenelei era nemulţumit de libera purtare a savanţilor, dar situaţia a fost salvată de soţia lui Banah, care a cumpărat un caiet mare pentru notiţe. Aşa a apărut vestita ”Carte Scoţiană” – culegerea de probleme matematice, asupra cărora lucra grupul lui Banah. Ca răsplată pentru rezolvarea problemelor complicate autorii propuneau în glumă ba un bocal de bere, ba o cină în restaurant. De exemplu, una din probleme, autorul căreia a promis un gânsac viu (a. 1936), a fost rezolvată doar în anul 1972, atunci şi a fost înmânată recompensa.

Înmânarea gânsacului

Problemele, ridicate în ”Cartea Scoțiană”, sunt atât de importante şi complicate, că oricine, care reuşeşte să rezolve măcar una din ele, obține imediat recunoaştere mondială. Însăşi ”Cartea Scoțiană” este una din cele mai cunoscute şi de preț relicve ale ştiinței mondiale.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Cea mai mică şi cea mai mare valori ale funcţiei

Dacă pentru toate valorile lui $x \in M$ este satisfăcută inegalitatea $f(x_0) \leqslant f(x)$, unde $x_0 \in M$, atunci numărul $f(x_0)$ se numeşte cea mai mică valoare a funcţiei f pe mulţimea M şi se notează: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Dacă pentru toţi $x \in M$ se satisface inegalitatea $f(x_0) \geqslant f(x)$, unde $x_0 \in M$, atunci numărul $f(x_0)$ se numeşte cea mai mare valoare a funcţiei f pe mulţimea M şi se notează: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Funcţii pare şi impare

Funcţia f se numeşte pară, dacă pentru orice x din domeniul de definiţie $f(-x) = f(x)$.

Funcţia f se numeşte impară, dacă pentru orice x din domeniul de definiţie $f(-x) = -f(x)$.

Axa ordonatelor este axă de simetrie a graficului funcţiei pare.

Originea de coordonate este centrul de simetrie al graficului funcţiei impare.

Rădăcina de ordinul n

Rădăcina de ordinul n din numărul a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se numeşte un astfel de număr, care ridicat la puterea n este egal cu a.

Se numeşte rădăcină aritmetică de ordinul n dintr-un număr nenegativ a, unde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, un astfel de număr nenegativ puterea n a căruia este egală cu a.

Pentru oricare a şi $k \in \mathbb{N}$ sunt adevărate egalităţile: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Pentru oricare $a \geqslant 0$ şi $k \in \mathbb{N}$ este adevărată egalitatea $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$.

Dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Dacă $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Dacă $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Dacă $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, atunci $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Putere cu exponent rațional

Putere a numărului pozitiv a cu exponentul $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se numeşte numărul $\sqrt[n]{a^m}$, adică $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $0^{\frac{m}{n}} = 0$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Funcția, care poate fi definită cu formula $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, se numeşte funcție putere cu exponent rațional.

Pentru orice $a > 0$ şi orice numere raționale p şi q sunt adevărate egalitățile: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Pentru orice $a > 0$ şi $b > 0$ precum şi orice număr rațional p sunt juste egalitățile: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

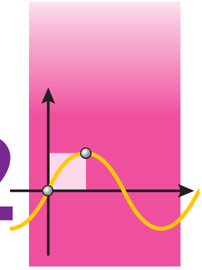
Ecuații iraționale

Ecuațiile, care conțin variabila sub semnul radicalului, se numesc iraționale.

Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la o putere impară, atunci obținem o ecuație, echivalentă celei date.

Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la o putere pară ecuația obținută este consecința celei date.

FUNCŢII TRIGONOMETRICE §2



Studiind materialul acestui paragraf, voi o să extindeţi cunoştinţele voastre despre funcţiile trigonometrice şi proprietăţile lor; o să aflaţi, ce este măsura în radiani a unghiurilor, ce funcţii se numesc periodice.

O să faceţi cunoştinţă cu formulele, care leagă diferite funcţii trigonometrice, o să vă învăţaţi să le aplicaţi pentru executarea calculelor, simplificarea expresiilor, demonstrarea identităţilor.

O să aflaţi care ecuaţii se numesc cele mai simple ecuaţii trigonometrice; o să faceţi cunoştinţă cu formulele soluţiilor celor mai simple ecuaţii trigonometrice.

8. Măsura în radiani a unghiurilor

Până acum pentru măsurarea unghiurilor voi ați folosit gradele sau părți de grade – minutele şi secundele.

În multe cazuri este comod de folosit altă unitate de măsurare a unghiurilor. Ea se numeşte **radian.**

Definiție. Unghi de un radian se numeşte unghiul de la centru al circumferinței, ce se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu raza circumferinței.

În figura 8.1 este prezentat unghiul de la centru AOB, ce se sprijină pe arcul AB, lungimea căruia este egală cu raza circumferinței. Mărimea unghiului AOB este egală cu un radian. Se scrie: $\angle AOB = 1$ rad. De asemenea se spune, că măsura în radiani a arcului AB este egală cu un radian. Se scrie $\cup AB = 1$ rad.

Măsura în radiani a unghiului (arcului) nu depinde de raza circumferinței. Această afirmație este ilustrată în figura 8.2.

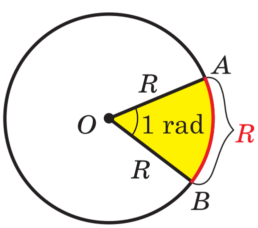


Fig. 8.1

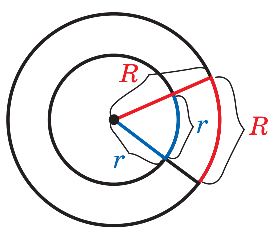


Fig. 8.2

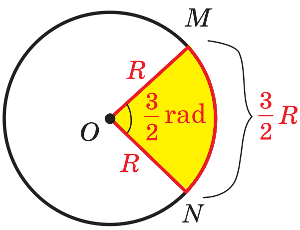


Fig. 8.3

În figura 8.3 este reprezentată circumferința cu raza R şi arcul MN, lungimea căruia este egală cu $\frac{3}{2}R$. Atunci măsura în radiani a unghiului MON (arcului MN) este egală cu $\frac{3}{2}$ rad. În general, dacă unghiul la centru al circumferinței cu raza R se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu αR, atunci se spune, că **măsura în radiani** a unghiului de la centru este egală cu α rad.

Lungimea jumătății de circumferință este egală cu πR. Deci măsura în radiani a unei jumătăți de circumferință este egală cu π rad. Măsura în grade a unei jumătăți de circumferință este egală cu 180°. Cele spuse permit de stabilit legătura între măsurile în radiani şi grade, şi anume:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

De aici

$$\boxed{\mathbf{1\ rad} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Împărțind 180 la 3,14 (vă amintim, că $\pi \approx 3{,}14$), se poate determina: 1 rad $\approx 57°$.

Dacă împărțim ambele părți ale egalității (1) la 180, atunci obținem:

$$\boxed{\mathbf{1°} = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\ \mathbf{rad}} \qquad (2)$$

Din această egalitate este uşor de stabilit, că, de exemplu,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{12}\ \text{rad}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{3\pi}{4}\ \text{rad}.$$

Scriind măsura unghiului în radiani, de regulă, însemnarea ”rad” se omite. De exemplu, se scrie: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

În tabel sunt prezentate măsurile unghiurilor în grade şi radiani, care se întâlnesc cel mai frecvent:

Măsura unghiului în grade	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Măsura unghiului în radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Utilizând măsura în radiani a unghiului, se poate obține o formă comodă de calculare a lungimii arcului circumferinței.

Deoarece unghiul la centru de 1 rad se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu raza R, atunci unghiul de α rad, se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu αR. Dacă lungimea arcului, ce conține α rad de-o însemnat prin l, atunci se poate scrie:

$$\boxed{\boldsymbol{l} = \alpha \boldsymbol{R}}$$

Pe planul de coordonate cercetăm circumferința cu rază unitară şi centrul în originea de coordonate. Astfel de circumferință se numeşte **unitară**.

Fie că punctul P, începând mişcarea de la punctul P_0 (1; 0), se deplasează pe circumferința unitate împotriva mişcării acului de ceasornic. Într-un anumit moment el va ocupa locul, pentru care $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (fig. 8.4). Vom spune, că **punctul P este obținut în rezultatul rotației punctului P_0 în jurul originii de coordonate cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$** (cu unghiul **120°**).

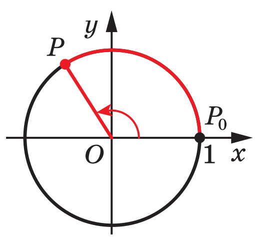


Fig. 8.4

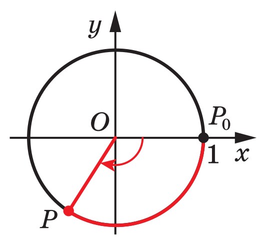


Fig. 8.5

Fie acum, că punctul P s-a deplasat pe circumferința unitate în direcția mişcării acului ceasornicului şi a ocupat poziția, pentru care $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (fig. 8.5). Vom spune, că punctul P este obținut în rezultatul rotației punctului P_0 în jurul originii de coordonate cu unghiul $-\frac{2\pi}{3}$ (cu unghiul –120°).

În genere, când se cercetează mişcarea punctului pe circumferință contra acelor ceasornicului (fig. 8.4), atunci unghiul se consideră pozitiv, iar când după acele ceasornicului (fig. 8.5) – atunci negativ.

Să cercetăm încă câteva exemple. Să ne adresăm la figura 8.6. Se poate spune, că punctul A este obținut în rezultatul rotației punctului P_0 în jurul originii de coordonate cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ (cu un unghi de 90°) sau cu un unghi $-\frac{3\pi}{2}$ (cu un unghi de – 270°). Punctul B este obținut în rezultatul rotației punctului P_0 cu un unghi de π (cu unghiul de 180°) sau cu un unghi de $-\pi$ (cu unghiul de –180°). Punctul C este obținut în rezultatul rotației punctului P_0 cu un unghi de $\frac{3\pi}{2}$ (cu unghiul de 270°) sau cu un unghi de $-\frac{\pi}{2}$ (cu unghiul de –90°).

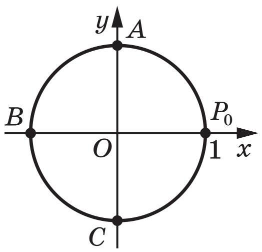


Fig. 8.6

Dacă punctul P, mişcându-se pe circumferința unitate, va executa o rotație întreagă, se poate spune, că unghiul de rotație este egal cu 2π (adică 360°) sau -2π (adică –360°).

Dacă punctul P, va executa o rotație şi jumătate contra acelor ceasornicului, atunci este natural de considerat, că unghiul de rotație este egal cu 3π (adică 540°), dacă după acele ceasornicului – atunci -3π (adică –540°).

Mărimea unghiului de rotație atât în radiani, cât şi în grade se poate exprima prin orice număr real.

Unghiul de rotație determină univoc poziția punctului P pe circumferința unitate. Însă oricărei poziții a punctului P pe circumferință îi corespunde o infinitate de unghiuri de rotație. De exemplu, punctului P (fig. 8.7) îi corespund aşa unghiuri de rotație: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ ş.a.m.d., şi totodată $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ ş.a.m.d. Menționam, că toate aceste unghiuri se pot obține cu ajutorul formulei $\alpha = \frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

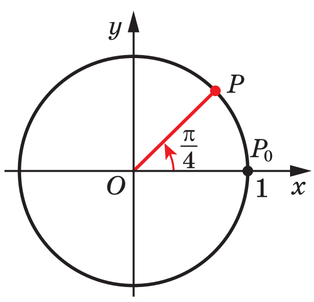


Fig. 8.7

1. Ce se numeşte unghi de un radian?
2. Care este măsura în radiani a unghiului egal cu 1°?
3. Cu ce este egală lungimea arcului circumferinţei cu raza R, care conţine α rad?

EXERCIŢII

8.1.° Aflaţi măsura în radiani a unghiului, care este egal cu
1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

8.2.° Aflaţi măsura unghiului în grade, a cărui măsură in radiani este egală cu:
1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) 1,2π; 5) 3π; 6) 2,5π.

8.3.° Completaţi tabelul:

Măsura unghiului în grade		12°	36°			105°	225°			240°
Măsura unghiului în radiani	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	1,8π	

8.4.° Cu ce este egală lungimea arcului circumferinţei, raza căreia este egală cu 12 cm, dacă măsura în radiani a arcului alcătuieşte:
1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

8.5.° Calculaţi lungimea arcului circumferinţei, dacă este cunoscută măsura lui în radiani α şi raza circumferinţei *R*.
1) $\alpha = 3$, $R = 5$ cm; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ cm; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ cm.

8.6.° Notaţi pe circumferinţa unitate un punct, pe care îl obţinem în rezultatul rotaţiei punctului P_0 (1; 0) cu un unghi de:
1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 150°; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) –45°; 5) –120°; 6) –450°.

8.7.° Notaţi pe circumferinţa unitate un punct, pe care îl obţinem în rezultatul rotaţiei punctului P_0 (1; 0)cu un unghi de:
1) –60°; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 320°; 4) 420°; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$.

8.8.° În ce cadran al planului de coordonate se află punctul circumferinţei unitate, care este obţinut în rezultatul rotaţiei punctului P_0 (1; 0) cu un unghi de:
1) 127°; 4) 400°; 7) –470°; 10) 2,4π;
2) 89°; 5) 600°; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;
3) 276°; 6) –400°; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) –2?

8.9.° În ce cadran al planului de coordonate se află punctul circumferinţei unitate, care este obţinut în rezultatul rotaţiei punctului P_0 (1; 0) cu un unghi de:
1) 94°; 2) 176°; 3) 200°; 4) –100°;

5) $-380°$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 11) 1;

6) $700°$; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$; 12) -3?

8.10.° Găsiți coordonatele punctului de pe circumferința unitate, obținut în rezultatul rotației punctului P_0 (1; 0) cu un unghi de:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) $-90°$; 4) $-180°$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π.

8.11.° Ce coordonate are punctul circumferinței unitate, obținut în rezultatul rotației punctului P_0 (1; 0) cu un unghi de:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$?

8.12.• Indicați unghiurile cel mai mic pozitiv şi cel mai mare negativ, cu care trebuie de rotit punctul P_0 (1; 0), pentru a obține punctul cu coordonatele:

1) (0; 1); 2) (–1; 0).

8.13.• Indicați unghiurile cel mai mic pozitiv şi cel mai mare negativ, cu care trebuie de rotit punctul P_0 (1; 0), pentru a obține punctul cu coordonatele:

1) (0; –1); 2) (1; 0).

8.14.•• Aflați toate unghiurile, cu care trbuie de rotit punctul P_0 (1; 0), pentru a obține punctul:

1) P_1 (0; 1); 2) P_2 (–1; 0); 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

8.15.•• Aflați toate unghiurile, cu care este necesar de rotit punctul P_0 (1; 0), pentru a obține punctul:

1) P_1 (0; –1); 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.16.•• Găsiți coordonatele punctelor de pe circumferința unitate, obținute în rezultatul rotației punctului P_0 (1; 0) cu unghiurile de:

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

8.17.•• Găsiți coordonatele punctelor de pe circumferința unitate, obținute în rezultatul rotației punctului P_0 (1; 0) cu unghiurile de:

1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

8.18.[••] Demonstrați, că aria sectorului, care conține arcul de α rad, se poate calcula după formula $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, unde R – raza circumferinței.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

8.19. Rezolvați ecuația:

1) $\frac{x^2-6}{x-3} = \frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{3x-1}{x} - \frac{4}{x-2} = \frac{10-9x}{x^2-2x}$.

8.20. Într-un oraş oarecare locuiesc 88 200 de locuitori. Câți locuitori au fost în acest oraş doi ani în urmă, dacă creşterea anuală a populației alcătuieşte 5%?

9. Funcţii trigonometrice de argument numeric

În clasa a 9-a, introducând definiția funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la 0° până la 180°, noi ne foloseam de semicircumferința unitate. Să generalizăm aceste definiții pentru un unghi de rotație α arbitrar.

Să cercetăm circumferința unitate (fig. 9.1).

Definiție. Cosinusul şi sinusul unghiului de rotație α **se numeşte corespunzător abscisa** x şi ordonata y **a punctului** $P(x; y)$ **a circumferinței unitate, care a fost obținut în rezultatul rotației punctului** P_0 **(1; 0) în jurul originii de coordonate cu unghiul** α (fig. 9.1).

Se notează: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Punctele P_0, A, B şi C (fig. 9.2) au corespunzător coordonatele (1; 0), (0; 1), (–1; 0), (0; –1). Aceste puncte au fost obținute în rezultatul

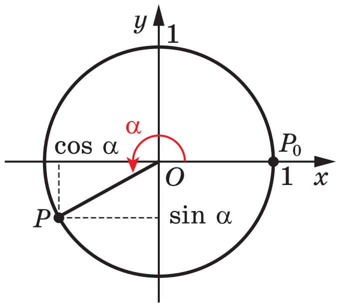


Fig. 9.1

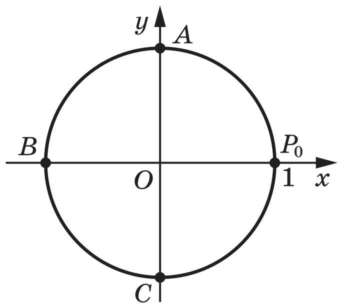


Fig. 9.2

rotației punctului P_0 (1; 0) corespunzător cu unghiurile 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Deci, folosindu-ne de definiția dată, putem alcătui un astfel de tabel[1]:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	–1
$\cos x$	1	0	–1	0

Problema 1. Găsiți toate unghiurile de rotație α, pentru care: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Rezolvare. 1) Ordonata, care este egală cu zero, o posedă numai două puncte ale circumferinței unitate: P_0 și B (fig. 9.2). Aceste puncte sunt obținute în rezultatul rotației punctului P_0 cu astfel de unghiuri:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots\ \text{şi}\ -\pi,\ -2\pi, -3\pi,\ -4\pi,\ \ldots\ .$$

Toate aceste unghiuri se pot scrie cu ajutorul formulei $\alpha = \pi k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Deci, $\sin\alpha = 0$ pentru $\alpha = \pi k$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

2) Abscisă, care este egală cu zero, o posedă numai două puncte ale circumferinței unitate: A și C (fig. 9.2). Aceste puncte sunt obținute în rezultatul rotației punctului P_0 cu astfel de unghiuri:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \ldots\ \text{şi}\ \frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \frac{\pi}{2}-4\pi,\ \ldots\ .$$

Toate aceste unghiuri se pot scrie cu ajutorul formulei $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Deci, $\cos\alpha = 0$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. ◀

Definiție. Tangenta unghiului de rotație α se numeşte raportul sinusului acestui unghi la cosinusul lui:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

De exemplu, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

[1] În forzațul 3 este prezentat tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice a unor unghiuri.

Din definiția tangentei reiese, că tangenta este definită pentru acele unghiuri de rotație α, pentru care $\cos\alpha \neq 0$, adică pentru $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

Voi ştiţi, că fiecărui unghi de rotație α îi corespunde *un singur* punct al circumferinței unitate. Deci, fiecărei valori a unghiului α îi corespunde un singur număr, care este valoarea sinusului (cosinusului, tangentei pentru $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$) a unghiului α. Din această cauză dependența valorii sinusului (cosinusului, tangentei) de mărimea unghiului de rotație este funcțională.

Funcțiile $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ şi $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, care corespund acestor dependențe funcționale, sunt numite **funcții trigonometrice** ale unghiului de rotație α.

Fiecărui număr real α îi punem în corespondență unghiul α rad. Aceasta oferă posibilitatea cercetării funcțiilor trigonometrice de argument numeric.

De exemplu, scrierea ”sin 2” determină ”sinusul unghiului de 2 radiani”.

Din definițiile sinusului şi cosinusului reiese, că domeniul de definiție al funcțiilor $y = \sin x$ şi $y = \cos x$ este mulțimea $\mathbb{R}$.

Deoarece abscisele şi ordonatele punctelor circumferinței unitate obțin valori de la –1 până la 1 inclusiv, rezultă că domeniul de valori al funcțiilor $y = \sin x$ şi $y = \cos x$ este intervalul [–1; 1].

Unghiurilor de rotație α şi $\alpha + 2\pi n$, unde $n \in \mathbb{Z}$, le corespunde unul şi acelaşi punct al circumferinței unitate. De aceea

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{sin}\,\alpha &= \mathbf{sin}\,(\alpha + 2\pi n), \ \ n \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{cos}\,\alpha &= \mathbf{cos}\,(\alpha + 2\pi n), \ \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Domeniul de definiție al funcției $y = \operatorname{tg} x$ este alcătuit din toate numerele reale, în afară de numerele de tipul $\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$. Domeniul de valori ale funcției $y = \operatorname{tg} x$ este mulțimea $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra că este adevărată formula:

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\alpha + \pi n), \ \ n \in \mathbb{Z}}$$

Problema 2. Găsiți cea mia mare şi cea mai mică valori ale expresiei $1 - 4\cos\alpha$.

Rezolvare. Deoarece $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, atunci $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Deci, cea mai mică valoare a expresiei date este egală cu –3; expresia o obține pentru $\cos\alpha = 1$. Cea mai mare valoare a expresiei date este egală cu 5; expresia o obține pentru $\cos\alpha = -1$. ◄

1. Ce se numeşte cosinusul unghiului de rotaţie? sinusul unghiului de rotaţie? tangenta unghiului de rotaţie?
2. Care este domeniul de definiţie al funcţiei $y = \sin x$? $y = \cos x$?
3. Care este domeniul de valori al funcţiei $y = \sin x$? $y = \cos x$?
4. Cu ce este egal $\sin(\alpha + 2\pi n)$, unde $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, unde $n \in \mathbb{Z}$?
5. Care este domeniul de definiţie al funcţiei $y = \operatorname{tg} x$?
6. Care este domeniul de valori al funcţiei $y = \operatorname{tg} x$?
7. Cu ce este egală $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, unde $n \in \mathbb{Z}$?

EXERCIŢII

9.1.° Calculați valoarea expresiei:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

9.2.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

9.3.° Este oare posibilă egalitatea:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
2) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$?

9.4.° Poate oare să fie egală valoarea expresiei cu numărul $\frac{\sqrt{5}}{2}$:

1) $\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$?

9.5.• Indicați cea mai mare şi cea mai mică valori ale expresiei:

1) $3\sin\alpha$;
2) $4 + 2\cos\alpha$;
3) $2 - \sin\alpha$;
4) $\sin^2\alpha$.

9.6.• Indicați cea mai mare şi cea mai mică valori ale expresiei:

1) $-5\cos\alpha$;
2) $3\cos\alpha - 2$;
3) $5 + \sin^2\alpha$.

9.7.• Indicați trei valori oarecare ale lui x, pentru care este justă egalitatea:

1) $\sin x = 1$;
2) $\sin x = -1$.

9.8.• Indicați trei valori arbitrare ale lui x, pentru care se execută egalitatea:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.9.•• Găsiți toate valorile $\boldsymbol{x}$, pentru care se îndeplineşte egalitatea:

1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

9.10.•• Găsiți toate valorile $\boldsymbol{x}$, pentru care se îndeplineşte egalitatea:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.11.•• Folosind figura 9.3, demonstrați, că $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

9.12.•• Demonstrați, că

$$\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

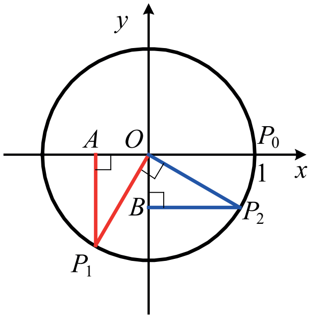


Fig. 9.3

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

9.13. Comparați cu zero coordonatele punctului $A(x;\ y)$, dacă acest punct se află:

1) în cadranul I al planului de coordonate;
2) în cadranul II al planului de coordonate;
3) în cadranul III al planului de coordonate;
4) în cadranul IV al planului de coordonate;

9.14. Funcția dată este pară sau impară:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

10. Semnele valorilor funcţiilor trigonometrice. Paritatea şi imparitatea funcţiilor trigonometrice

Fie că punctul P este obținut în rezultatul rotației punctului $P_0(1;\ 0)$ în jurul originii de coordonate cu un unghi α. Dacă punctul P aparține cadranului I, atunci se spune, că α **este unghi din cadranul I**. Analogic se poate spune despre unghiurile cadranelor II, III şi IV.

De exemplu, $\frac{\pi}{7}$ şi $-300°$ – unghiuri ale cadranului I, $\frac{2\pi}{3}$ şi $-185°$ – unghiurile cadranului II, $\frac{5\pi}{4}$ şi $-96°$ – unghiurile cadranului III, $355°$ şi $-\frac{\pi}{8}$ – unghiurile cadranului IV.

Unghiurile de tipul $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, nu aparțin nici unui cadran.

Punctele, amplasate în cadranul I, au abscisa şi ordonata pozitive. Deci, dacă α este unghi din cadranul I, atunci $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.
Dacă α este unghi din cadranul II, atunci $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.
Dacă α este unghi din cadranul III, atunci $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.
Dacă α este unghi din cadranul IV, atunci $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

Semnele valorilor sinusului şi cosinusului schematic sunt prezentate în figura 10.1.

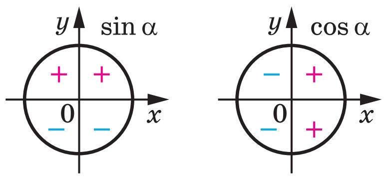


Fig. 10.1

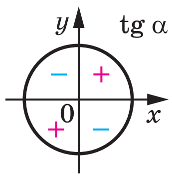


Fig. 10.2

Deoarece $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, atunci tangentele unghiurilor din cadranele I şi III sunt pozitive, iar a unghiurilor din cadranele II şi IV – negative (fig. 10.2).

Fie punctele P_1 şi P_2 sunt obținute prin rotația punctului $P_0(1; 0)$ cu unghiurile α şi $-\alpha$ corespunzător (fig. 10.3).

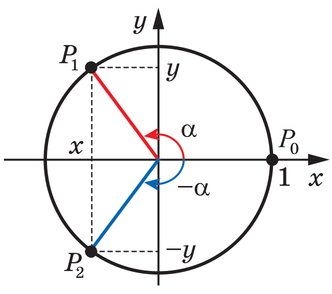


Fig. 10.3

Pentru orice unghi α punctele P_1 şi P_2 au abscise egale şi ordonate opuse. Atunci din definiția sinusului şi cosinusului reiese, că pentru orice număr real α

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{array}}$$

Aceasta înseamnă, că ***funcția cosinus este pară, iar funcția sinus – impară***.

Domeniul de definiție al funcției $y = \operatorname{tg} x$ este simetric față de originea de coordonate (controlați aceasta independent). Totodată:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Deci, ***funcția tangenta este impară***.

Problema 1. Ce semn are: 1) $\sin 280°$; 2) $\operatorname{tg}(-140°)$?

Rezolvare

1) Deoarece 280° este unghi al cadranului IV, atunci $\sin 280° < 0$.

2) Deoarece –140° este unghi al cadranului III, atunci $\operatorname{tg}(-140°) > 0$. ◄

Problema 2. Comparați $\sin 200°$ şi $\sin(-200°)$.

Rezolvare. Deoarece 200° – unghi al cadranului III, –200° – unghi al cadranului II, atunci $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$.

Deci, $\sin 200° < \sin(-200°)$. ◄

Problema 3. Studiați la paritate funcția: 1) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$.

Rezolvare

1) Domeniul de definiție al acestei funcții, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, este simetric față de originea de coordonate. Avem:

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 + \cos x}{x^2} = f(x).$$

Deci, funcția dată este pară.

2) Domeniul de definiție al acestei funcții, $D(f) = (-\infty; +\infty)$, este simetric față de originea de coordonate. Notăm:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Deoarece nici una din egalitățile $f(-x) = f(x)$ şi $f(-x) = -f(x)$ nu se îndeplineşte pentru toți x din domeniul de definiție, rezultă că funcția dată nu este nici pară, nici impară. ◄

1. Când se spune, că unghiul α este unghi al cadranului I? al cadranului II? al cadranului III? al cadranului IV?

2. Ce semne au sinus, cosinus, şi tangenta în fiecare din cadranele planului de coordonate?

3. Care din funcţiile trigonometrice sunt pare, şi care – impare: scrieţi egalităţile corespunzătoare.

EXERCIŢII

10.1.° Unghi al cărui cadran este unghiul:

1) 38°; 2) 196°; 3) –74°; 4) $\frac{3\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{2\pi}{3}$?

10.2.° Valoarea funcției trigonometrice este număr pozitiv sau negativ:

1) sin 110°; 2) cos 200°; 3) sin (–280°); 4) tg (–75°); 5) cos 2; 6) tg 1?

10.3.° Comparați cu zero:

1) tg 104°; 3) sin (–36°); 5) tg (–291°);

2) cos 220°; 4) cos (–78°); 6) sin $\frac{3\pi}{7}$.

10.4.° Aflați valoarea expresiei:

1) sin (–30°); 2) tg (–60°); 3) cos (–45°).

10.5.° Cu ce este egală valoarea expresiei $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$?

10.6.° Aflați valoarea expresiei $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$.

10.7.° Găsiți valoarea expresiei $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$.

10.8.• Cărui cadran al planului de coordonate aparține unghiul α, dacă:

1) $\sin\alpha > 0$ şi $\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ şi $\operatorname{tg}\alpha > 0$?

10.9.• Este cunoscut, că $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Comparați cu zero valoarea expresiei:

1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

10.10.• Se ştie, că $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Comparați cu zero valoarea expresiei:

1) $\sin\beta \cos\beta$; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$.

10.11.• Comparați:

1) tg 130° şi tg (–130°); 2) cos 80° şi sin 330°; 3) tg 6 şi tg 6°.

10.12.•• Se ştie, că α – unghi al cadranului III. Simplificați expresia:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

10.13.•• Se ştie, că β – unghi al cadranului IV. Simplificați expresia:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{tg}\beta| + \operatorname{tg}\beta$.

10.14.•• Cercetați la paritate funcția:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

10.15.•• Cercetați la paritate funcția:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; 2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

10.16. Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}$; 2) $\sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x$.

11. Proprietăţile şi graficele funcţiilor trigonometrice

Voi cunoaşteți, că pentru orice număr x se execută egalitățile

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Aceasta înseamnă că valorile funcțiilor sinus şi cosinus se repetă periodic la schimbarea argumentului cu 2π. Funcțiile $y = \sin x$ şi $y = \cos x$ sunt exemple de **funcții periodice**.

Definiție. Funcția f se numeşte periodică, dacă există un astfel de număr $T \neq 0$, că pentru orice x din domeniul de definiție al funcției f se execută egalitatea

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Numărul T se numeşte perioada funcției f.

Voi ştiți, că pentru orice x din domeniul de definiție al funcției $y = \operatorname{tg} x$ se îndeplinesc egalitățile

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Atunci din definiția funcției periodice reiese, că tangenta este funcție periodică cu perioada π.

Se poate arăta, că dacă *funcția f are perioada T, atunci oricare din numerele $2T$, $3T$, ..., şi de asemenea oricare din numerele $-T$, $-2T$, $-3T$, ... de asemenea este perioada ei.*

Din această proprietate reiese, că fiecare funcție periodică posedă o mulțime de perioade.

De exemplu, orice număr de forma $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ este perioadă a funcțiilor $y = \sin x$ şi $y = \cos x$; iar orice număr de forma πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ este perioadă a funcției $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă printre toate perioadele funcției f există cea mai mică perioadă pozitivă, atunci ea este numită **perioada principală** a funcției f.

Teorema 11.1. ***Perioada principală a funcţiilor*** $y = \sin x$ ***şi*** $y = \cos x$ ***este numărul*** 2π; ***perioada principală al funcţiei*** $y = \mathrm{tg}\, x$ ***este numărul*** π.

Problema 1. Găsiţi valoarea expresiei: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\mathrm{tg}\ 135°$.

Rezolvare

1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360 \cdot 2) =$

$$= \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\mathrm{tg}\ 135° = \mathrm{tg}(-45° + 180°) = \mathrm{tg}(-45°) = -1$. ◄

În figura 11.1 este prezentat graficul unei oarecare funcţiei periodice f cu perioada T, $D(f) = \mathbb{R}$.

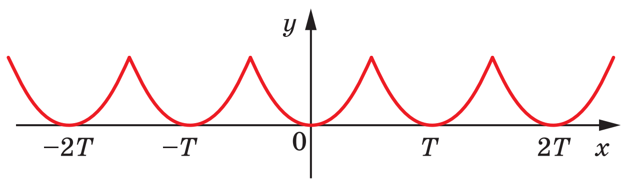


Fig. 11.1

Fragmentele graficului acestei funcţii pe intervalele $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$, ş. a. m. d. , precum şi pe intervalele $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$, ş. a. m. d. sunt figuri egale, totodată oricare din aceste figuri se poate obţine din oricare alta prin translaţie cu vectorul cu coordonatele $(nT; 0)$, unde n – un număr întreg oarecare.

Problema 2. În figura 11.2 este prezentat un fragment al graficului unei funcţii periodice, perioada căreia este egală cu T. Construiţi graficul acestei funcţii pe intervalul $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

Rezolvare. Construim imaginile figurii reprezentate, obţinute în rezultatul translaţiei cu vectorul cu coordonatele $(T; 0)$, $(2T; 0)$ şi $(-T; 0)$. Reuniunea figurii date şi a imaginilor obţinute este graficul căutat (fig. 9.13). ◄

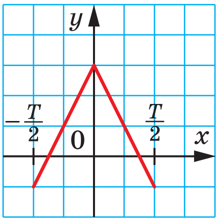


Fig. 11.2

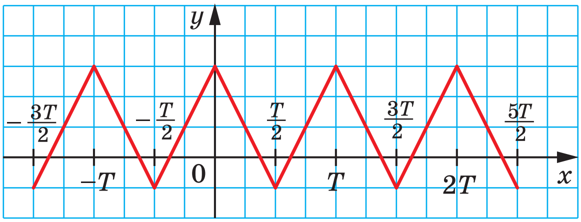


Fig. 11.3

Să cercetăm funcția $y = \sin x$ pe intervalul $[0; 2\pi]$, adică pe intervalul cu lungimea de o perioadă al acestei funcții.

În timpul rotației punctului P_0 (1; 0) în jurul originii coordonatelor cu unghiurile de la 0 până la $\frac{\pi}{2}$ unghiului mai mare de rotație îi corespunde punctul circumferinței unitate cu ordonata mai mare (fig. 11.4). Aceasta înseamnă, că funcția $y = \sin x$ crește pe intervalul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

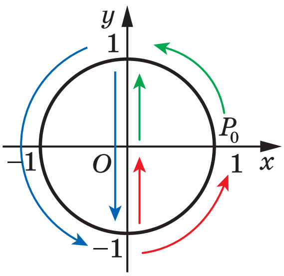


Fig. 11.4

În timpul rotației punctului P_0 (1; 0) cu unghiurile de la $\frac{\pi}{2}$ până la $\frac{3\pi}{2}$ unghiului mai mare de rotație îi corespunde punctul de pe circumferința unitate cu ordonata mai mică (fig. 11.4). Deci, funcția $y = \sin x$ descrește pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

În timpul rotației punctului P_0 (1; 0) cu unghiurile de la $\frac{3\pi}{2}$ până la 2π unghiului de rotație mai mare îi corespunde punctul de pe circumferința unitate cu ordonata mai mare (fig. 11.4). Deci, funcția $y = \sin x$ crește pe intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Funcția $y = \sin x$ pe intervalul $[0; 2\pi]$ are trei zerouri: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Dacă $x \in (0; \pi)$, atunci $\sin x > 0$; dacă $x \in (\pi; 2\pi)$, atunci $\sin x < 0$.

Funcția $y = \sin x$ pe intervalul $[0; 2\pi]$ obține cea mai mare valoare, care este egală cu 1, pentru $x = \frac{\pi}{2}$ şi cea mai mică valoare, care este egală cu -1, pentru $x = \frac{3\pi}{2}$.

Funcția $y = \sin x$ pe intervalul $[0;\ 2\pi]$ obține toate valorile din intervalul $[-1;\ 1]$.

Proprietățile obținute ale funcției $y = \sin x$ oferă posibilitatea de a construi graficul ei pe intervalul $[0;\ 2\pi]$ (fig. 11.5). Graficul se poate construi mai exact, dacă ne-am folosi de datele tabelului valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unele argumente, prezentat în forzațul 3.

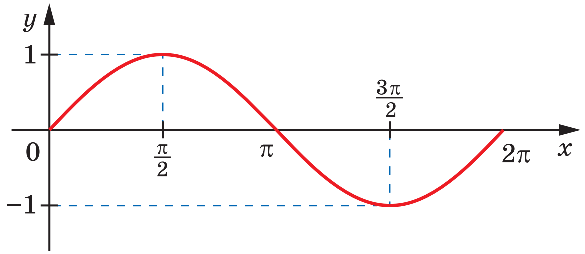


Fig. 11.5

Pe tot domeniul de definiție graficul funcției $y = \sin x$ se poate obține din graficul construit cu ajutorul translațiilor cu vectorii ce au coordonatele $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (fig. 11.6).

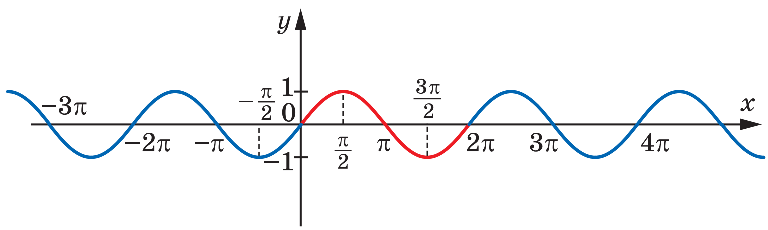


Fig. 11.6

Graficul funcției $y = \sin x$ se numeşte **sinusoidă**.

Să cercetăm funcția $y = \cos x$. Dacă ne folosim de formula $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (vezi exercițiul 9.11), atunci devine clar, că graficul funcției $y = \cos x$ se poate obține în rezultatul translației a graficului $y = \sin x$ cu vectorul ce are coordonatele $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (fig. 11.7). Aceasta înseamnă ca graficele funcțiilor $y = \sin x$ şi $y = \cos x$ sunt figuri egale.

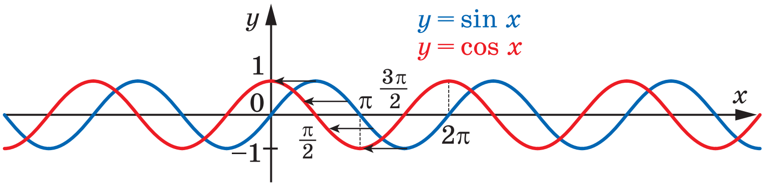


Fig. 11.7

Graficul funcției $y = \cos x$ se numeşte **cosinusoidă** (fig. 11.8).

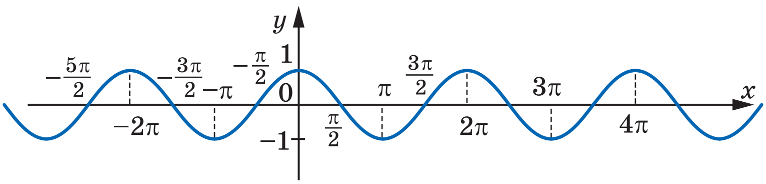


Fig. 11.8

Să cercetăm funcția $y = \operatorname{tg} x$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, adică pe intervalul cu lungimea perioadei acestei funcții (vă amintim că funcția $y = \operatorname{tg} x$ în punctele $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$ nu este determinată).

Se poate arăta, că în timpul variației unghiului de rotație de la $-\frac{\pi}{2}$ până la $\frac{\pi}{2}$ valoarea tangentei se măreşte. Aceasta înseamnă, că funcția $y = \operatorname{tg} x$ creşte pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funcția $y = \operatorname{tg} x$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ are un zero: $x = 0$.

Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, atunci $\operatorname{tg} x < 0$; dacă $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\operatorname{tg} x > 0$.

Proprietățile obținute ale funcției $y = \operatorname{tg} x$ oferă posibilitatea construirii graficului ei pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 11.9). Graficul se poa-

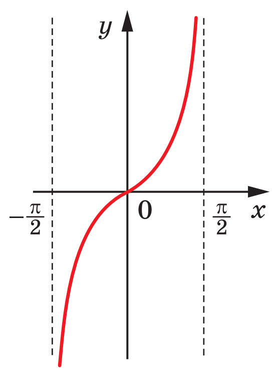


Fig. 11.9

te construi mai exact, dacă folosim datele din tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unele argumente, prezentat în forzațul 3.

Pe tot domeniul de definiție graficul funcției $y = \operatorname{tg} x$ se poate obține din graficul construit cu ajutorul translației cu vectorul ce are coordonatele $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (fig. 11.10).

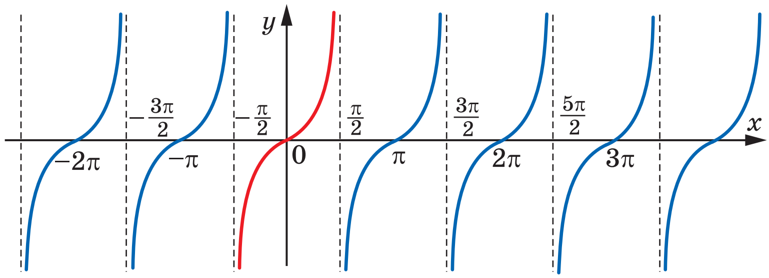


Fig. 11.10

În tabel (vezi pag. 69) sunt prezentate proprietățile principale ale funcțiilor trigonometrice.

Problema 3. Comparați: 1) $\sin 0{,}7\pi$ şi $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ şi $\cos 340°$.

Rezolvare. 1) Deoarece numerele $0{,}7\pi$ şi $0{,}71\pi$ aparțin intervalului $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, pe care funcția $y = \sin x$ descreşte, şi $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, atunci $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Deoarece unghiurile $324°$ şi $340°$ aparțin intervalului $[180°; 360°]$, pe care funcția $y = \cos x$ creşte, şi $324° < 340°$, atunci $\cos 324° < \cos 340°$. ◀

?

1. Care funcţie se numeşte periodică?
2. Care număr se numeşte perioada principală a funcţiei?
3. Reprezentaţi schematic graficul şi formulaţi principalele proprietăţi ale funcţiei $y = \sin x$.
4. Reprezentaţi schematic graficul şi formulaţi principalele proprietăţi ale funcţiei $y = \cos x$.
5. Reprezentaţi schematic graficul şi formulaţi principalele proprietăţi ale funcţiei $y = \operatorname{tg} x$.

Proprietatea	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
Domeniul de valori	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$\mathbb{R}$
Perioada principală	2π	2π	π
Zorourile funcției	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn
Funcția obține valori pozitive pe intervalele	$(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Funcția obține valori negative pe intervalele	$(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$
Paritatea	Impară	Pară	Impară
Intervalele de creştere	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Intervalele de descreştere	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$	—
Cea mai mare valoare	1	1	—
Cea mai mică valoare	–1	–1	—

EXERCIŢII

11.1.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $\sin 390°$; 3) $\sin(-390°)$; 5) $\cos 300°$;

2) $\operatorname{tg} 780°$; 4) $\operatorname{tg}(-210°)$; 6) $\sin\frac{5\pi}{3}$.

11.2.° Găsiți valoarea expresiei:

1) $\sin 420°$; 2) $\operatorname{tg}(-315°)$; 3) $\sin 1110°$; 4) $\cos\frac{7\pi}{3}$.

11.3.° Aparține oare graficului funcției $y = \cos x$ punctul:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C(-4\pi; -1)$?

11.4.° Trece oare graficul funcției $y = \operatorname{tg} x$ prin punctul:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C(\pi; 0)$?

11.5.° Trece oare graficul funcției $y = \sin x$ prin punctul:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B(\pi; -1)$; 3) $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

11.6.° Printre punctele -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 6π, 7π indicați:

1) zerourile funcției $y = \sin x$;
2) valorile argumentului, pentru care funcția $y = \sin x$ obține cea mai mare valoare;
3) valorile argumentului, pentru care funcția $y = \sin x$ obține cea mai mică valoare;

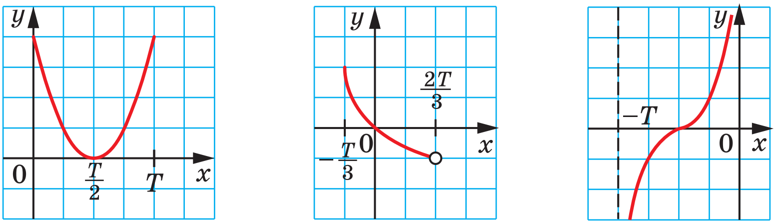
11.7.° Printre punctele $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π indicați:

1) zerourile funcției $y = \cos x$;
2) valorile argumentului, pentru care funcția $y = \cos x$ obține cea mai mare valoare;
3) valorile argumentului, pentru care funcția $y = \cos x$ obține cea mai mică valoare;

11.8.° Care din numere $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) sunt zerourile funcției $y = \operatorname{tg} x$;
2) nu aparțin domeniului de definiție al funcției $y = \operatorname{tg} x$?

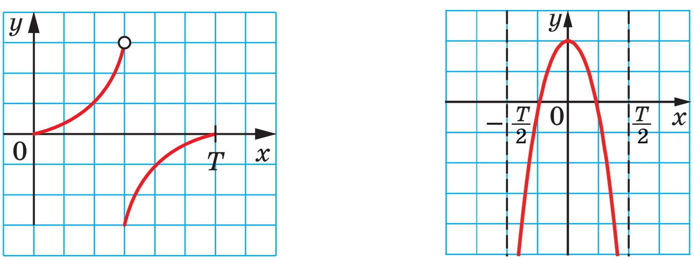
11.9.• În figura 11.11 este reprezentată o parte a graficului a unei funcții periodice, perioada căreia este egală cu T. Construiți graficul acestei funcții pe intervalul $[-2T;\ 3T]$.



a *b* *c*

Fig. 11.11

11.10.• În figura 11.12 este reprezentată o parte a graficului a unei funcții periodice, perioada căreia este egală cu T. Construiți graficul acestei funcții pe intervalul $[-2T;\ 2T]$.



a *b*

Fig. 11.12

11.11.• Pe care din intervalele aduse funcția $y = \sin x$ crește:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

11.12.• Pe care din intervalele indicate funcția $y = \sin x$ descreşte:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi;\ 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

11.13.• Care din intervalele prezentate sunt intervale de descreştere ale funcției $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi;\ 7\pi]$?

11.14.• Care din intervalele prezentate sunt intervale de creştere ale funcției $y = \cos x$:

1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$?

11.15.• Comparați:

1) $\sin 20°$ şi $\sin 21°$; 3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ şi $\sin \frac{25\pi}{18}$;

2) $\cos 20°$ şi $\cos 21°$; 4) $\mathrm{tg}\,(-38°)$ şi $\mathrm{tg}\,(-42°)$.

11.16.• Comparați:

1) $\cos \frac{\pi}{9}$ şi $\cos \frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ şi $\sin \frac{17\pi}{18}$; 3) $\mathrm{tg}\,100°$ şi $\mathrm{tg}\,92°$.

11.17.•• Demonstrați, că numărul T este perioada funcției f:

1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, $T = 8\pi$; 2) $f(x) = \mathrm{tg}\,3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$.

11.18.•• Demonstrați, că numerele $\frac{2\pi}{3}$ şi -4π sunt perioade ale funcției $f(x) = \cos 3x$.

11.19.* Comparați:

1) $\sin 58°$ şi $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ şi $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ şi $\sin 70°$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

11.20. Găsiți zerourile funcției:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; 3) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$.

11.21. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$.

12. Relaţiile fundamentale dintre funcţiile trigonometrice de acelaşi argument

În acest punct vom stabili identitățile, care leagă valorile funcțiilor trigonometrice ale unuia şi aceluiaşi argument.

Coordonatele oricărui punct $P(x; y)$ al circumferinței unitare satisfac ecuația $x^2 + y^2 = 1$. Deoarece $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, unde α – unghiul de rotație, în rezultatul căreia din punctul $P_0(1; 0)$ a fost obținut punctul P, atunci

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \qquad (1)$$

Atragem atenția la faptul, că punctul P pe circumferința unitate este ales arbitrar, de aceea identitatea (1) este adevărată pentru orice α. Ea este numită **identitatea trigonometrică fundamentală**.

Utilizând identitatea trigonometrică fundamentală, să aflăm dependența dintre tangentă şi cosinus.

Admitem că $\cos\alpha \neq 0$. Împărțim ambele părți ale egalității (1) la $\cos^2\alpha$. Obținem:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

De aici

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{\mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}}$$

Problema 1. Simplificați expresia:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$.

Rezolvare. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi =$

$= \cos^2\varphi$. ◀

Problema 2. Se cunoaşte, că $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Calculați $\sin\alpha$.

Rezolvare. Dispunem de: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

De aici $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ sau $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Figura 12.1 ilustrează această problemă. ◀

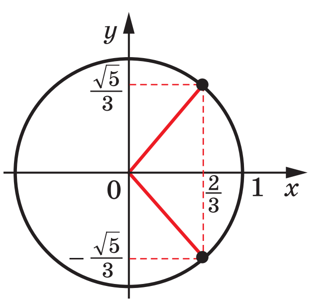


Fig. 12.1

Problema 3. Aflați $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$ şi $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Rezolvare. Avem:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Deoarece $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, atunci $\cos\alpha < 0$; prin urmare, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$. ◀

1. Care egalitate se numeşte identitatea trigonometrică fundamentală?
2. Care identitate leagă tangenta şi cosinusul de acelaşi argument?

EXERCIŢII

12.1.° Simplificați expresia:

1) $1 - \cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\beta - 1$;
3) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1$;
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$;
5) $1 - \sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;
6) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

12.2.° Simplificați expresia:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$;
2) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)$;
3) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;
4) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}$.

12.3.• Se pot oare satisface în acelaşi timp egalitățile $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ şi $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$?

12.4.• Se pot oare satisface în acelaşi timp egalitățile $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ şi $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

12.5.• Simplificați expresia:

1) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;
2) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;
3) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
4) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

12.6.• Simplificați expresia:

1) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\mathrm{tg}\, x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

12.7.• Aflați valorile funcțiilor trigonometrice de argumentul α, dacă:

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$ şi $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ şi $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

12.8.• Găsiți valorile funcțiilor trigonometrice de argumentul α, dacă:1) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ şi $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$ şi $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ şi $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

12.9.•• Demonstrați identitatea:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

12.10.•• Demonstrați identitatea:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

12.11.•• Găsiți valoarea expresiei $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, dacă $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$.

12.12.•• Găsiți valoarea expresiei $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, dacă $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$.

12.13.•• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale expresiei $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

12.14.•• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale expresiei $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

12.15. Găsiți valoarea expresiei:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ pentru $a = 0{,}008$; 2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ pentru $a = 0{,}0625$.

13. Formulele adunării

Formulele adunării se numesc formulele, care exprimă cos $(\alpha \pm \beta)$, sin $(\alpha \pm \beta)$ şi tg $(\alpha \pm \beta)$ prin funcțiile trigonometrice ale unghiurilor α şi β.

Să demonstrăm, că $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Fie că punctele P_1 şi P_2 sunt obținute prin rotația punctului $P_0(1;\ 0)$ cu unghiurile α şi β: respectiv.

Considerăm cazul, când $0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant \pi$. Atunci unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{OP_2}$ este egal cu $\alpha-\beta$ (fig. 13.1). Coordonatele punctelor P_1 şi P_2 sunt corespunzător egale cu $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ şi $(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Atunci vectorul $\overrightarrow{OP_1}$ are coordonatele $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, iar vectorul $\overrightarrow{OP_2}$ are coordonatele $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

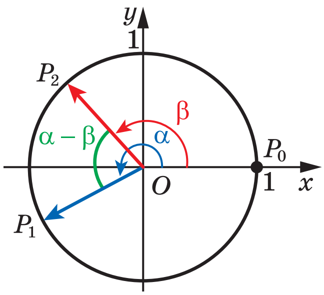


Fig. 13.1

Exprimăm produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{OP_2}$ prin coordonatele lor:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Totodată conform definiției produsului scalar al vectorilor se poate scrie:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\left|\overrightarrow{OP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

De aici obținem formula, care se numeşte **cosinusul diferenței**.

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Formula (1) este adevărată şi în acel caz, când $(\alpha-\beta)\notin[0;\ \pi]$.

Demonstrăm formula **cosinusului sumei:**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Dispunem de: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=$
$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

Formulele **sinusului sumei** şi **sinusului diferenței** au aspectul:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

Formulele **tangentei sumei** şi **tangentei diferenței** au aspectul:

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{tg}\beta}{\mathbf{1}+\mathbf{tg}\alpha\ \mathbf{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Identitatea (2) este justă pentru toate α şi β:, pentru care $\cos(\alpha+\beta)\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0,\ \cos\ \beta\neq 0$.

Identitatea (3) este justă pentru toate α şi β:, pentru care $\cos(\alpha-\beta)\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0,\ \cos\ \beta\neq 0$.

Formulele, care exprimă funcţiile trigonometrice de argumentul 2α prin funcţiile trigonometrice de argumentul α, se numesc **formule de argument dublu**.

În formulele adunării

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

considerăm $\beta=\alpha$. Obţinem:

$$\boxed{\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha=\mathbf{cos}^2\,\alpha-\mathbf{sin}^2\,\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{sin}\ \mathbf{2}\alpha=\mathbf{2}\ \mathbf{sin}\,\alpha\ \ \mathbf{cos}\,\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\ \mathbf{2}\alpha=\frac{\mathbf{2}\ \mathbf{tg}\,\alpha}{\mathbf{1}-\mathbf{tg}^2\,\alpha}}$$

Aceste formule se numesc respectiv **formulele cosinusului, sinusului** şi a **tangentei argumentului dublu**.

Deoarece $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ şi $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, atunci din formula $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ obţinem încă două formule:

$$\boxed{\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha=\mathbf{1}-\mathbf{2}\ \mathbf{sin}^2\,\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha=\mathbf{2}\ \mathbf{cos}^2\,\alpha-\mathbf{1}}$$

Uneori aceste formule este comod de le folosit în astfel de înfăţişare:

$$1-\cos 2\alpha=2\ \sin^2\alpha,$$
$$1+\cos 2\alpha=2\ \cos^2\alpha$$

sau în aspectul următor:

$$\boxed{\mathbf{sin}^2\,\alpha=\frac{\mathbf{1}-\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha}{\mathbf{2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{cos}^2\,\alpha=\frac{\mathbf{1}+\mathbf{cos}\ \mathbf{2}\alpha}{\mathbf{2}}}$$

Ultimele două formule sunt numite **formule de descreştere a puterii**.

Problema 1. Simplificaţi expresia:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$.

Rezolvare. 1) Folosind formulele sinusului sumei şi a sinusului diferenţei, obţinem: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2) Înlocuim expresia dată cu sinusul diferenţei argumentelor $\alpha+45°$ şi $\alpha-45°$. Obţinem:

$$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=$$

$$=\sin((\alpha+45°)-(\alpha-45°))=\sin(\alpha+45°-\alpha+45°)=\sin 90°=1.$$ ◄

Problema 2. Demonstraţi identitatea $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Rezolvare. $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$ ◄

Problema 3. Găsiţi valoarea expresiei $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}$.

Rezolvare. Utilizând formula tangentei sumei unghiurilor 20° şi 25°, obţinem:

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,(20°+25°)}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,45°}=1.$$ ◄

Problema 4. Simplificaţi expresia: 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;
2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$.

Rezolvare

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta$. ◄

1. Scrieţi formula:
1) cosinusului diferenţei;
2) cosinusului sumei;
3) sinusului sumei;
4) sinusului diferenţei;
5) a tangentei sumei;
6) a tangentei diferenţei.

2. Scrieţi formulele cosinusului, sinusului şi tangentei de argument dublu.

3. Scrieţi formulele descreşterii puterii.

EXERCIŢII

13.1.° Simplificați expresia:
1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60°-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

13.2.° Simplificați expresia:
1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

13.3.° Simplificați expresia:
1) $\sin\alpha\cos4\alpha+\cos\alpha\sin4\alpha$;
2) $\cos17°\cos43°-\sin17°\sin43°$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin53°\cos7°-\cos53°\sin(-7°)$;
5) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
6) $\dfrac{\sin20°\cos5°-\cos20°\sin5°}{\cos10°\cos5°-\sin10°\sin5°}$.

13.4.° Simplificați expresia:
1) $\cos6\alpha\cos2\alpha-\sin6\alpha\sin2\alpha$;
2) $\sin12°\cos18°+\sin18°\cos12°$;
3) $\sin(-15°)\cos75°+\cos15°\sin75°$;
4) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

13.5.° Se ştie, că $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Aflați valoarea expresiei $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

13.6.° Se ştie, că $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Găsiți valoarea expresiei $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

13.7.° Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°}$; 2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 33°}{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 33°}$.

13.8.° Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 24° + \operatorname{tg} 36°}{1 - \operatorname{tg} 24° \operatorname{tg} 36°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

13.9.° Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$;

3) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;

4) $\dfrac{\sin 50°}{2 \cos 25°}$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$;

6) $1 - 2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$;

7) $\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} + \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} - \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)$;

8) $\dfrac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$.

13.10.° Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\sin 80°}{\cos 40°}$;

2) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;

3) $\cos 6\alpha + 2 \sin^2 3\alpha$;

4) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$;

5) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;

6) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$;

7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

8) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

13.11.° Calculaţi valoarea expresiei:

1) $2 \sin 75° \cos 75°$;

2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $1 - 2 \sin^2 \dfrac{\pi}{12}$;

4) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 165°}{1 - \operatorname{tg}^2 165°}$.

13.12.° Calculaţi valoarea expresiei:

1) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$; 2) $2 \sin \dfrac{3\pi}{8} \cos \dfrac{3\pi}{8}$; 3) $1 - 2 \cos^2 \dfrac{\pi}{12}$.

13.13.• Demonstraţi identitatea:

1) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45° + \alpha)}{2 \sin(45° + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

13.14.• Demonstraţi identitatea:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1;$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}.$

13.15.• Găsiţi $\cos(\alpha+\beta)$, dacă $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ şi $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.16.• Găsiţi $\sin(\alpha-\beta)$, dacă $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ şi $\cos\beta=\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

13.17.• Se dă: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Aflaţi $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

13.18.• Se cunoaşte că: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$. Aflaţi $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

13.19.• Găsiţi $\sin 2\alpha$, dacă $\sin\alpha=-0{,}6$ şi $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

13.20.• Găsiţi $\operatorname{tg}2\alpha$, dacă $\operatorname{tg}\alpha=4$.

13.21.• Găsiţi $\cos 2\alpha$, dacă $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$.

13.22.• Găsiţi $\sin 15^\circ$.

13.23.• Găsiţi $\cos 75^\circ$.

13.24.• Demonstraţi identitatea $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

13.25.• Simplificaţi expresia $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

13.26.•• Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$.

13.27.•• Simplificaţi expresia:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

13.28.•• Găsiţi cea mai mare valoare a expresiei $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

13.29.•• Găsiţi cea mai mică valoare a expresiei $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$.

13.30.* Găsiţi $\sin 2\alpha$, dacă $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

13.31.* Găsiţi $\sin\alpha$, dacă $\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

13.32. Pentru care valori ale lui x valorile expresiilor $4x+5$, $7x-1$ şi x^2+2 vor fi termeni consecutivi ai progresiei aritmetice? Găsiți aceşti termeni ai progresiei.

13.33. Pentru care valori ale lui x valorile expresiilor $x-1$, $1-2x$ şi $x+7$ vor fi termeni consecutivi ai progresiei geometrice? Găsiți aceşti termeni ai progresiei.

14. Formulele de reducere

Periodicitatea funcțiilor trigonometrice dă posibilitatea de redus calcularea sinusului şi a cosinusului la cazul, când valoarea argumentului aparține intervalului $[0;\ 2\pi]$. În acest punct noi vom examina formulele, care permite de a se mărgini în asemenea calcule doar cu unghiuri din intervalul $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Fiecare unghi din intervalul $[0;\ 2\pi]$ poate fi prezentat in forma $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, sau $\pi\pm\alpha$, sau $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, unde $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. De exemplu, $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Calcularea sinusurilor şi cosinusurilor a unghiurilor cu aspectul $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ se poate reduce la calcularea sinusului sau cosinusului unghiului α. De exemplu:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Folosind formulele adunării, analogic se poate obține:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha
\end{array}}$$

Aceste formule se numesc **formule de reducere pentru sinus**.

Formulele prezentate mai jos se numesc **formule de reducere pentru cosinus**:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

Analizând formulele de reducere scrise, se pot observa anumite legități, datorită cărora nu este obligatoriu de învățat pe de rost aceste formule.

Pentru a scrie oricare din ele, se poate ține cont de aşa reguli.

1. ***În partea dreaptă a egalității se pune acel semn, care are partea stângă cu condiția, că*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. ***Dacă*** în ***partea stângă a formulei argumentul are aspectul*** $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ***sau*** $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, ***atunci sinusul se înlocuieşte cu cosinusul şi invers. Dacă argumentul are aspectul*** $\pi\pm\alpha$, ***atunci schimbarea funcțiilor nu se petrece.***

Vom arăta, cum de folosit aceste reguli pentru expresia $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Acceptând, că $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ajungem la concluzia: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ este unghi al cadranului III al planului de coordonate. Atunci $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. Conform primei reguli în partea dreaptă a egalității trebuie să fie semnul ”–”.

Deoarece, argumentul are înfățişarea $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, atunci conform celei de-a doua regulă trebuie să înlocuim sinusul cu cosinusul.

Deci, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Problema 1. Simplificați expresia $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Rezolvare. Dispunem de:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha. \blacktriangleleft$$

Problema 2. Schimbați valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$.

Rezolvare. 1) $\cos\frac{9\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$. ◄

?

Formulaţi regulile, de care ne putem conduce în timpul aplicării formulelor de reducere.

EXERCIŢII

14.1.° Simplificați expresia:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\cos(-\alpha + 270°)$; 5) $\cos^2(3\pi - \alpha)$;

2) $\sin(\pi - \alpha)$; 4) $\cos(\alpha - 180°)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

14.2.° Simplificați expresia:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\sin(180° + \alpha)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)$; 4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$.

14.3.° Înlocuiți valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

14.4.° Înlocuiți valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit:

1) $\sin(-305°)$; 2) $\sin\frac{14\pi}{15}$; 3) $\cos(-0{,}7\pi)$; 4) $\cos\frac{6\pi}{5}$.

14.5.° Calculați valoarea funcției trigonometrice:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

14.6.° Calculați valoarea funcției trigonometrice: 1) $\cos(-150°)$;

2) $\cos 210°$; 3) $\sin 315°$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

14.7.• Calculați valoarea expresiei:

1) $\frac{\sin^2 315° \cos 300° + \text{tg}\,(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$; 2) $\frac{\cos 66° \cos 6° + \cos 84° \cos 24°}{\cos 65° \cos 5° + \cos 85° \cos 25°}$.

14.8.• Găsiți valoarea expresiei $\frac{\cos 64° \cos 4° - \cos 86° \cos 26°}{\cos 71° \cos 41° - \cos 49° \cos 19°}$.

14.9.•• Simplificați expresia:

1) $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\cos(\pi - \beta)$.

14.10.•• Demonstrați identitatea $\frac{\sin(\pi - \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\text{tg}\,(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos\alpha$.

14.11.* Calculați: $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359° + \sin 360°$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

14.12. Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

14.13. Pentru care valori ale variabilei are sens egalitatea:

1) $\frac{x+4}{x^2-4}$;

2) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

3) $\frac{9}{\sqrt{3x+6}}$;

4) $\sqrt{7x-42} + \frac{1}{x^2-8x}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

6) $\frac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

15. Ecuaţia cos $x = b$

Deoarece domeniul de valori al funcției $y = \cos x$ este intervalul $[-1; 1]$, atunci pentru $|b| > 1$ ecuația $\cos x = b$ nu are soluții. O dată cu aceasta pentru orice b astfel, că $|b| \leqslant 1$, această ecuație are rădăcini, totodată ele-s o infinitate.

Este uşor de înțeles cele spuse, adresându-se la interpretarea grafică: graficele funcțiilor $y = \cos x$ şi $y = b$, unde $|b| \leqslant 1$, au o infinitate de puncte comune (fig. 15.1).

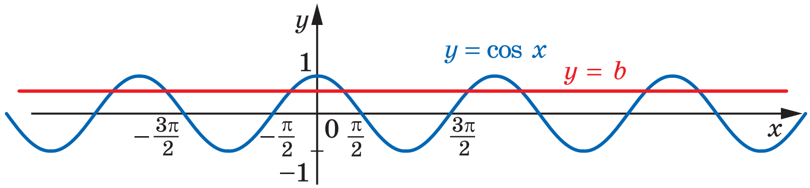


Fig. 15.1

Pentru a înțelege, cum se poate de rezolvat ecuația $\cos x = b$ în caz general, vă poate ajuta cercetarea unui caz particular. De exemplu, să rezolvăm ecuația $\cos x = \frac{1}{2}$.

În figura 15.2 sunt reprezentate graficele funcțiilor $y = \cos x$ şi $y = \frac{1}{2}$.

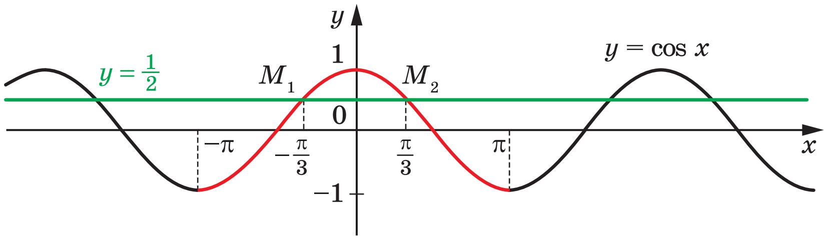


Fig. 15.2

Să examinăm funcția $y = \cos x$ pe intervalul $[-\pi; \pi]$ (partea roşie a curbei din figura 15.2), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Dreapta $y = \frac{1}{2}$ intersectează graficul funcției $y = \cos x$ pe intervalul $[-\pi; \pi]$ în două puncte M_1 şi M_2, abscisele cărora sunt numere opuse. Deci, ecuația $\cos x = \frac{1}{2}$ pe intervalul $[-\pi; \pi]$ are două rădăcini. Deoarece $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, rezultă că aceste soluții sunt numerele $-\frac{\pi}{3}$ şi $\frac{\pi}{3}$.

Funcția $y = \cos x$ este periodică cu perioada 2π. De aceea fiecare din altele rădăcini ale ecuației $\cos x = \frac{1}{2}$ se deosebeşte de una din rădăcinile cele găsite $-\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{\pi}{3}$ cu numărul $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Deci, soluțiile ecuației cercetate se pot da prin formulele $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ şi $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

De regulă, aceste două formule se înlocuiesc printr-o singură îscriere:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Să ne întoarcem la ecuația $\cos x = b$, unde $|b| \leqslant 1$. În figura 15.3 este arătat, că pe intervalul $[-\pi; \pi]$ această ecuație are două soluții α şi $-\alpha$, unde $\alpha \in [0; \pi]$ (pentru $b = 1$ aceste soluții coincid si sunt egale cu zero).

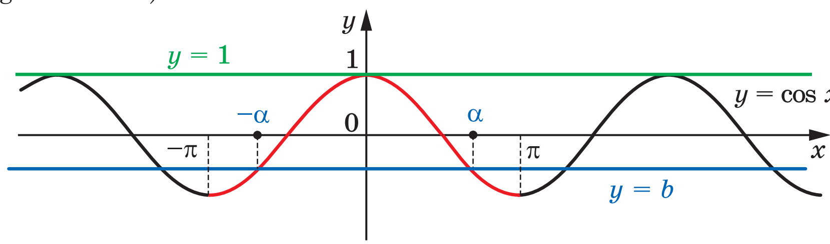


Fig. 15.3

Atunci toate soluțiile ecuației $\cos x = b$ au forma

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Această formulă demonstrează, că rădăcina α joacă un rol deosebit: cunoscând-o, se pot găsi toate celelalte rădăcini ale ecuației $\cos x = b$. Rădăcina α are o denumire specială – **arccosinus**.

Definiție. Arccosinusul numărului b, unde $|b| \leqslant 1$, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $[0; \pi]$, cosinusul căruia este egal cu b.

Pentru arccosinusul numărului b se foloseşte însemnarea $\arccos b$. De exemplu,

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, deoarece $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ şi $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, deoarece $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$ şi $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

În general, **$\arccos b = \alpha$, dacă $\alpha \in [0; \pi]$ şi $\cos \alpha = b$.**

Acum formula rădăcinilor ale ecuației $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, se poate scrie în aşa mod:

$$\boxed{x = \pm \arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Menționăm, că cazurile particulare ale ecuației $\cos x = b$ (pentru $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) au fost cercetate mai înainte (vezi p. 9). Vă amintim rezultatele obținute:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Aceleaşi răspunsuri pot fi obținute, folosind formula (1).

Are loc egalitatea

$$\mathbf{arccos}\ (-b) = \pi - \mathbf{arccos}\ b.$$

Problemă. Rezolvați ecuația:

1) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$.

Rezolvare. 1) Folosind formula (1), scriem:

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

În continuare obținem: $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

Răspuns: $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

2) Dispunem de: $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

Răspuns: $\pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

3) Transcriem ecuația dată astfel: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$. De aici

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Atunci $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

Răspuns: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

1. Pentru care valori ale lui b ecuaţia $\cos x = b$ are soluţii?
2. Câte soluţii are ecuaţia $\cos x = b$ pentru $|b| \leqslant 1$?
3. Ce se numeşte arccosinusul numărului b?
4. Ce aspect are formula soluţiilor ecuaţiei $\cos x = b$ pentru $|b| \leqslant 1$?
5. Ce înfăţişare are formula soluţiilor ecuaţiei $\cos x = 1$? $\cos x = 0$? $\cos x = -1$?

EXERCIŢII

15.1.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$.

15.2.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

15.3.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;

2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.4.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

15.5.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

15.6.° Rezolvați ecuația:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

15.7.• Găsiți cea mai mare rădăcină negativă a ecuației

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

15.8.• Găsiți o rădăcină negativă oarecare a ecuației

$$\cos\frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15.9.•• Câte soluții ale ecuației $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ aparțin intervalului $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$?

15.10.•• Aflați toate soluțiile ecuației $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{2}$, care satisfac inecuația $-\dfrac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

15.11. Simplificați expresia $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$.

15.12. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}$.

16. Ecuaţiile $\sin x = b$ şi $\operatorname{tg} x = b$

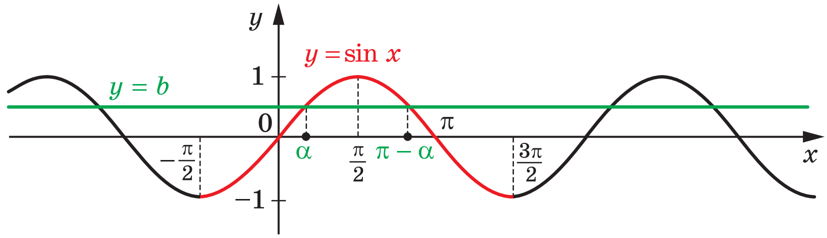
Deoarece domeniul de valori al funcției $y = \sin x$ este intervalul $[-1; 1]$, atunci pentru $|b| > 1$ ecuația $\sin x = b$ nu are soluții. În același timp pentru oricare b astfel, că $|b| \leqslant 1$, această ecuație are soluții, totodată ele sunt infiinit de multe.

Menționăm, că cazurile particulare ale ecuației $\sin x = b$ (pentru $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) au fost cercetate anterior (vezi p. 9). Vă amintim rezultatele obținute:

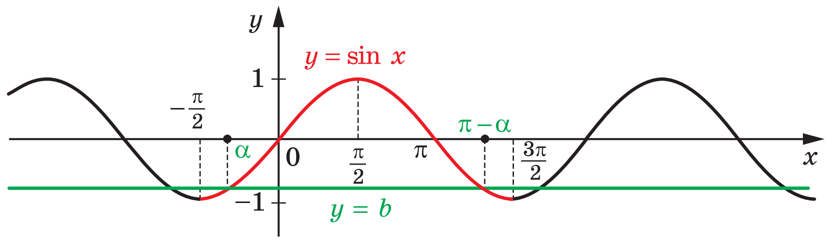
$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Pentru a obține formula generală a soluțiilor ecuației $\sin x = b$, unde $|b| \leqslant 1$, ne adresă la interpretarea grafică.

În figura 16.1 sunt reprezentate graficele funcțiilor $y = \sin x$ şi $y = b$, $|b| \leqslant 1$.



a



b

Fig. 16.1

Să studiem funcția $y = \sin x$ pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (partea roşie a curbei din figura 16.1), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Pe acest interval ecuația $\sin x = b$ are două soluții α şi $\pi - \alpha$, unde $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{pentru } b = 1 \text{ aceste soluții coincid şi sunt egale cu } \frac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece funcția $y = \sin x$ este periodică, cu perioada 2π, atunci fiecare din altele soluții ale ecuației $\sin x = b$ se deosebesc de una din soluțiile aflate cu numărul $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Atunci soluțiile ecuației $\sin x = b$ pot fi date cu formulele

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ şi } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Aceste două formule pot si înlocuite cu o sigură scriere:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă k – număr par, adică $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, atunci obținem $x = \alpha + 2\pi n$; dacă k – număr impar, adică $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, atunci obținem $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Formula (1) demonstrează, că rădăcina α joacă un rol deosebit: cunoscând-o, se pot găsi toate celelalte rădăcini ale ecuației $\sin x = b$. Rădăcina α are o denumire specială – **arcsinus**.

Definiție. Arcsinusul numărului b, unde $|b| \leqslant 1$, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, sinusul căruia este egal cu b.

Pentru arcsinusul numărului b se foloseşte însemnarea arcsin b.

De exemplu, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, deoarece $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, deoarece $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

În general, **arcsin $b = \alpha$, dacă** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ **şi $\sin\alpha = b$.**

Acum formula rădăcinilor ecuației $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, se poate scrie în aşa o formă:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Are loc egalitatea

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

Problema 1. Rezolvați ecuația:

1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;   2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare. 1) Utilizând formula (2), scriem:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

În continuare obținem:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Răspuns: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Transcriem ecuația dată astfel: $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Atunci $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Răspuns: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ ◄

Deoarece domeniul de valori al funcției $y = \operatorname{tg} x$ este mulțimea $\mathbb{R}$, atunci ecuația $\operatorname{tg} x = b$ are soluții pentru orice valoare b.

Pentru a obține formula soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = b$, să ne adresăm la interpretarea grafică.

În figura 16.2 sunt reprezentate graficele funcțiilor $y = \operatorname{tg} x$ şi $y = b$.

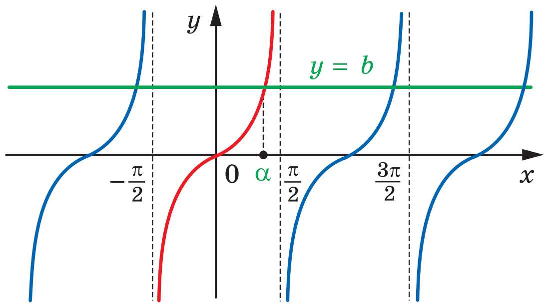


Fig. 16.2

Să studiem funcția $y = \operatorname{tg} x$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (curba roşie din figura 16.2), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Pe acest interval ecuația $\operatorname{tg} x = b$ pentru b arbitrar are o singură soluție α.

Deoarece funcția $y = \operatorname{tg} x$ este periodică, cu perioada π, atunci fiecare din altele soluții ale ecuației $\operatorname{tg} x = b$ se deosebeşte de soluția aflată cu numărul de forma $\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Atunci soluțiile ecuației $\operatorname{tg} x = b$ se pot da cu formula

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Formula obținută arată, că rădăcina α joacă un rol deosebit: cunoscând-o, se pot găsi toate celelalte rădăcini ale ecuației $\operatorname{tg} x = b$. Rădăcina α are o denumire specială – **arctangenta**.

Definiție. Arctangenta numărului *b*, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tangenta căruia este egală cu *b*.

Pentru arctangenta numărului b se foloseşte însemnarea arctg b. De exemplu, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, deoarece $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, deoarece $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

În general, **arctg $b = \alpha$, dacă** $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ **şi tg $\alpha = b$.**

Acum formula rădăcinilor ecuaţiei tg $x = b$ se poate scrie aşa:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Are loc egalitatea

$$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b.$$

Problema 2. Rezolvaţi ecuaţia $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$.

Rezolvare. Avem la dispoziţie: $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Răspuns: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ◄

1. Pentru care valori ale lui b ecuaţia sin $x = b$ are soluţii?
2. Ce se numeşte arcsinusul numărului b?
3. Scrieţi formula rădăcinilor ecuaţiei sin $x = b$ pentru $|b| \leqslant 1$.
4. Scrieţi formula rădăcinilor ecuaţiei sin $x = 1$; sin $x = 0$; sin $x = -1$.
5. Pentru care valori b ecuaţia tg $x = b$ are soluţii?
6. Ce se numeşte arctangenta numărului b?
7. Scrieţi formula rădăcinilor ecuaţiei tg $x = b$.

EXERCIŢII

16.1.° Rezolvaţi ecuaţia:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$.

16.2.° Rezolvaţi ecuaţia:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

16.3.° Rezolvați ecuația:

1) $\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x = 1$; 3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

16.4.° Rezolvați ecuația:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin\frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.5.° Rezolvați ecuația:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = 5$.

16.6.° Rezolvați ecuația:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$.

16.7.° Rezolvați ecuația:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

16.8.° Rezolvați ecuația $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x = 0$.

16.9.° Rezolvați ecuația:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

16.10.° Rezolvați ecuația:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

16.11.° Rezolvați ecuația:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$.

16.12.° Rezolvați ecuația:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

16.13.• Găsiți cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.14.• Găsiți cea mai mare rădăcină negativă a ecuației

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1.$$

16.15.$^{\bullet\bullet}$ Găsiți toate soluțiile ecuației $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, care aparțin intervalului $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

16.16.$^{\bullet\bullet}$ Câte rădăcini ale ecuației $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ aparțin intervalului $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

16.17.$^{\bullet\bullet}$ Câte rădăcini ale ecuației $\operatorname{tg} 4x=1$ aparțin intervalului $[0; \pi]$?

16.18.$^{\bullet\bullet}$ Aflați suma rădăcinilor ecuației $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$, care aparțin intervalului $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

16.19. Rezolvați ecuația:

1) $x-\sqrt{x-1}=3$;
2) $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$;
3) $\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x-5}=2x+1$;
4) $\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$.

17. Ecuaţii trigonometrice, care se reduc la cele algebrice

În punctele 15, 16 noi am obținut formule pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul $\cos x=a$, $\sin x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. Aceste ecuații se numesc **cele mai simple ecuații trigonometrice**. Cu ajutorul diferitelor metode şi procedee multe ecuații trigonometrice se pot reduce la cele mai simple.

Problema 1. Rezolvați ecuația $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$.

Rezolvare. Folosim substituția $\cos x=t$. Atunci ecuația dată obține forma $2t^2-5t+2=0$. De aici $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Deoarece $|\cos x|\leqslant 1$, atunci $\cos x = 2$ nu are soluții. Deci, ecuația inițială este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{1}{2}$. Definitiv obținem: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

Problema 2. Rezolvați ecuația $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Rezolvare. Folosind formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, transformăm ecuația dată:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Admitem $\sin x = t$. Obținem ecuație pătrată $6t^2 + t - 5 = 0$. De aici $t_1 = -1,\ t_2 = \frac{5}{6}$.

Deci, ecuația dată este echivalentă cu totalitatea a două ecuații:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \frac{5}{6}.\end{array}\right.$$

Dispunem de: $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Răspuns: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$. ◀

Problema 3. Rezolvați ecuația $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

Rezolvare. Deoarece $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, atunci ecuația dată se poate transcrie în așa un mod:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

De aici $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Fie $\operatorname{tg} x = t$. Avem: $t^2 + t - 2 = 0$. Atunci $t_1 = 1,\ t_2 = -2$.

Obținem, că ecuația dată este echivalentă cu totalitatea a două ecuații:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = -2.\end{array}\right.$$

De aici $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Răspuns: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

EXERCIŢII

17.1.° Rezolvați ecuația:

1) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

17.2.° Rezolvați ecuația:

1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3 \cos^2 \dfrac{x}{4} + 5 \cos \dfrac{x}{4} - 2 = 0$.

17.3.• Rezolvați ecuația:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
3) $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$.

17.4.• Rezolvați ecuația:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;
3) $\cos 4x - 3 \sin 4x = 0$.

17.5.• Rezolvați ecuația:

1) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$;
2) $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4 \cos x$;
4) $2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos \dfrac{2x}{3} - 5 \cos \dfrac{x}{3} - 2 = 0$;
7) $\cos \dfrac{x}{2} + \cos x = 0$;
8) $\cos 2x - 4\sqrt{2} \cos x + 4 = 0$.

17.6.• Rezolvați ecuația:

1) $4 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8 \sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5 \sin \dfrac{x}{6} - \cos \dfrac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin \dfrac{x}{2} = 0$.

17.7.•• Rezolvați ecuația:

1) $8 \sin^2 3x + 4 \sin^2 6x = 5$;
2) $2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$.

17.8.•• Rezolvați ecuația:

1) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 3 = \dfrac{3}{\cos^2 x}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

17.9. Comparați numerele:

1) $\sqrt[5]{7}$ şi $\sqrt[10]{47}$; 2) $\sqrt{2}$ şi $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 3) $\sqrt[3]{15}$ şi $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{25}$ şi $\sqrt[3]{5}$.

17.10. Rezolvați ecuația:

1) $6x^3 - 24x = 0$;
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0$;
3) $x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0$;
4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

FII CA OSTROGRADSKII!

Ilustrul matematician ucrainean Mihail Vasilievici Ostrogradskii s-a născut în satul Paşenivka gubernia Poltava. În anii 1816 – 1820 el a învățat la universitatea din Harcov, iar apoi şi-a perfecționat studiile matematice, studiind în Franța sub tutela a aşa savanți vestiți, ca Pierre-Simeon Laplace (1749 – 1827), Simeon Denis Poisoon (1781 – 1840), Augustin Lois Caochy (1789 – 1857), Jean–Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830).

În marea moştenire ştiințifică, pe care ne-a lăsat-o Mihail Ostrograskii, un rol important îl joacă lucrările, legate de cercetarea şirurilor trigonometrice şi a oscilațiilor. Multe teoreme matematice importante poartă numele lui Ostrogradskii.

În afară de lucrările ştiințifice, Ostrogradskii a scris un şir de manuale ilustre pentru tineret, în particular, ”Programa şi conspectul trigonometriei”. Însuşi Ostrogradskii acorda o mare atenție întrebării predării trigonometriei, ceea ce a devenit obiectul unui raport în Academia de ştiințe .

Autoritatea ştiințifică a lui Ostrogradskii era atât de mare, că pe atunci, trimițând tineretul la studii, spuneau ”Fii ca Ostrogradskii!”. Această urare este actuală şi astăzi, de aceea

”Fii ca Ostrogradskii!”

Mihail Vasilievici Ostrogradski
(1801–1862)

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Măsura în radiani a unghiului

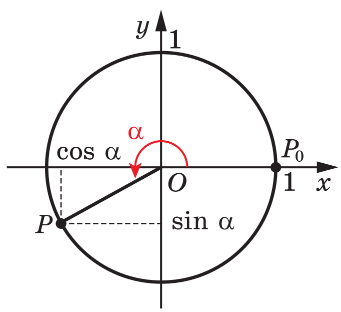
Unghi de un radian se numeşte unghiul de la centru al circumferinței, ce se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu raza circumferinței.

Măsurile în grade şi radiani sunt legate prin formulele

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \quad 1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad}.$$

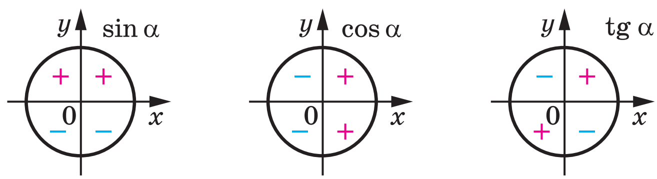
Cosinusul, sinusul şi tangenta unghiului de rotație

Cosinusul şi sinusul unghiului de rotație α se numeşte corespunzător abscisa x şi ordonata y a punctului P $(x; y)$ a circumferinței unitate, care a fost obținut în rezultatul rotației punctului P_0 $(1; 0)$ în jurul originii de coordonate cu unghiul α



Tangenta unghiului de rotație α se numeşte raportul sinusului acestui unghi la cosinusul lui: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice



Funcții periodice

Funcția f se numeşte periodică, dacă există un astfel de număr $T \neq 0$, că pentru orice $\boldsymbol{x}$ din domeniul de definiție al funcției f se execută egalitatea $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Numărul T se numeşte perioada funcției f.

Dacă printre toate perioadele funcției f există cea mai mică perioadă pozitivă, atunci ea este numită perioada principală a funcției f.

Relațiile dintre funcțiile trigonometrice ale unuia şi aceluiaşi argument

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Formulele adunării

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Formulele de reducere

Pentru a scrie oricare din formulele de reducere, se poate ține cont de aşa reguli:

1) în partea dreaptă a egalității se pune acel semn, care are partea stângă cu condiția, că $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) dacă partea stângă a formulei argumentul are aspectul $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ sau $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, atunci sinusul se înlocuieşte cu cosinusul şi invers.

   Dacă argumentul are aspectul $\pi\pm\alpha$, atunci înlocuirea funcțiilor nu se petrece.

Formulele de argument dublu

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Arccosunusul, arcsinusul şi arctangenta

Arccosinusul numărului b, unde $|b| \leqslant 1$, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $[0; \pi]$, cosinusul căruia este egal cu b.

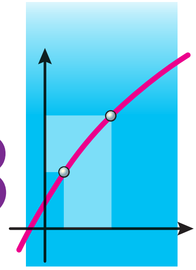
Arcsinusul numărului b, unde $|b| \leqslant 1$, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, sinusul căruia este egal cu b.

Arctangenta numărului b, se numeşte un astfel de număr α din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tangenta căruia este egală cu b.

Rezolvarea celor mai simple ecuații trigonometrice

Ecuaţia	Formulele rădăcinilor ecuaţiei
$\cos x = b, \quad |b| \leqslant 1$	$x = \pm\arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b, \quad |b| \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

DERIVATA ŞI APLICĂRILE EI §3



În acest paragraf veţi face cunoştinţă cu noţiunea de derivată a funcţiei într-un punct; o să vă învăţaţi a folosi derivata la cercetarea proprietăţilor funcţiei şi construirea graficelor funcţiei.

18. Probleme despre viteza instantanee şi tangenta la graficul funcţiei

Dacă funcția este modelul matematic al unui proces real, atunci frecvent apare necesitatea aflării diferenței valorilor acestei funcții în două puncte. De exemplu, însemnăm prin $f(t)$ şi $f(t_0)$ sumele fondurilor care s-au acumulat pe un depozit[1] al deponentului până la momentele de timp t şi t_0. Atunci diferența $f(t)-f(t_0)$, unde $t > t_0$, indică venitul, pe care îl obține deponentul în timpul $t-t_0$.

Să studiem funcția $y=f(x)$. Fie x_0 – punct fixat din domeniul de definiție al funcției f.

Dacă x este un aşa punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției f, că $x \neq x_0$, atunci diferența $x-x_0$ se numeşte **creşterea argumentului funcției *f* în punctul** x_0 şi se înseamnă Δx (se citeşte: ”delta ics”)[2]. Avem:

$$\Delta x = x - x_0.$$

De unde

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Se spune că argumentul **a obținut creşterea Δx în punctul x_0**.

Menționăm că creşterea poate fi atât pozitivă cât şi negativă: dacă $x > x_0$, atunci $\Delta x > 0$; dacă $x < x_0$, atunci $\Delta x < 0$.

Dacă argumentul în punctul x_0 a obținut creşterea Δx, atunci valoarea funcției f s-a modificat cu mărimea

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Această diferență se numeşte **creşterea funcției *f* în punctul** x_0 şi se înseamnă Δf (se citeşte: ”delta ef”)

Avem:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \text{ sau } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

---

[1] Depozit – fonduri (sume de bani), pe care deponentul le transmite băncii pe un termen oarecare, pentru care banca plăteşte deponentului procente.

[2] Vorbind despre creşterea argumentului funcției f în punctul x_0, aici şi mai departe, vom admite, că în orice interval de tipul $(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)$ sunt puncte ale domeniului de definiție al funcției f, diferite de x_0.

Pentru creşterea funcţiei $y = f(x)$ este acceptată de asemenea însemnarea Δy adică

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ sau } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Creşterea Δx a argumentului în punctul x_0 şi creşterea corespunzătoare Δf a funcţiei sunt ilustrate în figura 18.1.

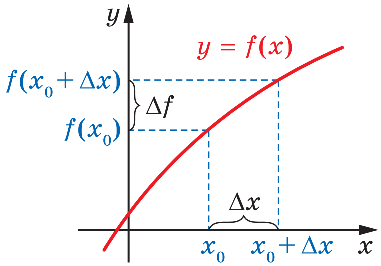


Fig. 18.1

Menţionăm, că pentru un punct fixat x_0 creşterea funcţiei f în punctul x_0 este funcţie de argumentul Δx.

Problemă. Găsiţi creşterea funcţiei $y = x^2$ în punctul x_0, care corespunde creşterii Δx al argumentului.

Rezolvare. Avem:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Răspuns: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◀

Problema despre viteza instantanee

Fie că un automobil, mişcându-se rectiliniu pe o porţiune de drum într-o direcţie, în două ore a parcurs drumul de 120 km. Atunci viteza medie de mişcare a lui este egală: $v_{med} = \frac{120}{2} = 60$ (km/год).

Mărimea aflată ne dă o imagine incompletă despre caracterul mişcării automobilului: pe unele porţiuni ale drumului automobilul se putea deplasa mai repede, pe altele – mai încet, uneori se putea opri. În acelaşi timp în orice moment vitezometrul automobilului arăta o mărime oarecare – viteza în momentul dat. Valoarea vitezei în diferite momente mai deplin caracterizează mişcarea automobilului.

Să studiem problema căutării vitezei în momentul dat pe baza exemplului mişcării uniform accelerate.

Fie că punctul material se mişcă pe dreapta de coordonate şi peste timpul t de la începutul mişcării are coordonata $s(t)$. Astfel se specifică funcţia $y = s(t)$, care oferă posibilitatea determinării poziţiei punctului în orice moment de timp. De aceea această funcție se numeşte **legea mişcării** punctului.

Din cursul de fizică se cunoaşte, că legea mişcării uniform accelerate se dă cu formula $s(t)=s_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$, unde s_0 – coordonata punctului la începutul mişcării (pentru $t=0$), v_0 – viteza inițială, a – accelerația.

Admitem, de exemplu, $s_0=0$, $v_0=1$ м/c, $a=2$ м/c^2. Atunci $s(t)=t^2+t$.

Fixăm un moment oarecare t_0 şi dăm argumentului în punctul t_0 creşterea Δt, adică studiem intervalul de timp de la t_0 până la $t_0+\Delta t$. In acest interval de timp punctul material a efectuat deplasarea Δs. Acum avem:

$$\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\underbrace{(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)}-\underbrace{\left(t_0^2+t_0\right)}_{s(t_0)}=$$

$$=t_0^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2+t_0+\Delta t-t_0^2-t_0=2t_0\Delta t+\Delta t+\Delta t^2.$$

Viteza medie $v_{med}(\Delta t)$ de mişcare a punctului în intervalul de timp de la t_0 până la $t_0+\Delta t$ este egală cu raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Obținem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2t_0\Delta t+\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=2t_0+1+\Delta t,\ \text{adică}\ v_{med}(\Delta t)=2t_0+1+\Delta t.$$

Însemnarea pentru viteza medie $v_{med}(\Delta t)$ accentuează, că pentru legea deplasării date $y=s(t)$ şi momentul de timp fixat t_0 valoarea vitezei medii depinde numai de Δt.

Dacă vom considera intervalele de timp destul de mici de la t_0 până la $t_0+\Delta t$, atunci din considerente practice este clar, că vitezele medii $v_{med}(\Delta t)$ în astfel de intervale mici de timp puțin se vor deosebi una de alta, adică mărimea $v_{med}(\Delta t)$ practic nu se schimbă. Cu cât este mai mic Δt, cu atât mai aproape este valoarea vitezei medii de un număr oarecare, care determină viteza în momentul t_0. Cu alte cuvinte, dacă Δt tinde spre zero (se înseamnă $\Delta t\to 0$), atunci valoarea $v_{med}(\Delta t)$ tinde spre numărul $v(t_0)$. Numărul $v(t_0)$ se numeşte **viteza instantanee** în momentul t_0. Aceasta se scrie astfel: $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{med}(\Delta t)$. Se spune, că numărul $v(t_0)$ este **limita** funcției $v_{med}(\Delta t)$ când $\Delta t\to 0$.

Dacă în exemplul prezentat $\Delta t\to 0$, atunci valoarea expresiei $2t_0+1+\Delta t$ tinde către numărul $2t_0+1$, care este valoarea vitezei instantanee $v(t_0)$, adică

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}(2t_0+1+\Delta t)=2t_0+1.$$

Acest exemplu arată, că dacă punctul material se mişcă conform legii $y = s(t)$, atunci viteza instantanee în momentul t_0 se determină cu ajutorul formulei

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{med}(\Delta t), \text{ adică}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Problema despre tangenta la graficul funcţiei

Cunoscuta definiție a tangentei la circumferință ca a unei drepte ce are cu circumferința numai un punct comun, este inaplicabilă în cazul unei curbe arbitrare.

De exemplu, axa ordonatelor are cu parabola $y = x^2$ numai un punct comun (fig. 18.2). Însă intuiția ne spune, că nu este natural de socotit această dreaptă tangentă la parabola dată. Totodată în cursul de algebră noi frecvent vorbeam, că parabola $y = x^2$ se atinge de axa absciselor în punctul $x_0 = 0$.

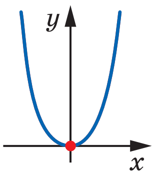


Fig. 18.2

Să precizăm imaginea intuitivă despre tangenta la graficul funcției.

Fie M – un punct oarecare, ce se află pe parabola $y = x^2$. Ducem dreapta OM, pe care o numim secantă (fig. 18.3). Să ne închipuim, că punctul M, mişcându-se pe parabolă, se apropie de punctul O. În acelaşi timp secanta OM se va roti în jurul punctului O. Atunci unghiul dintre dreapta OM şi axa absciselor va deveni tot mai mic şi mai mic, iar secanta OM va tinde să ocupe poziția axei absciselor. De aceea axa absciselor este considerată tangentă la parabola $y = x^2$ în punctul O.

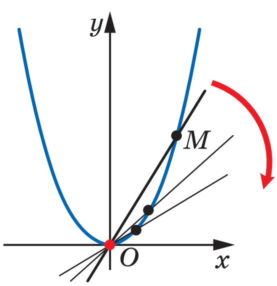


Fig. 18.3

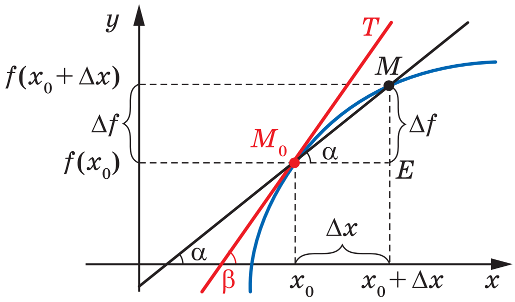


Fig. 18.4

Să examinăm graficul unei oarecare funcții f şi punctul $M_0(x_0; f(x_0))$. În punctul x_0 aplicăm argumentului creşterea Δx şi examinăm pe grafic punctul $M(x; f(x))$, unde $x = x_0 + \Delta x$ (fig. 18.4).

Din figură se vede, că dacă Δx devine din ce în ce tot mai mic, atunci punctul M, mişcându-se pe grafic, se apropie de punctul M_0. Dacă pentru $\Delta x \to 0$ secanta MM_0 tinde să ocupe poziția unei oarecare drepte (în figura 18.4 aceasta este dreapta M_0T), atunci aşa o dreaptă se numeşte **tangentă la graficul funcției f în punctul M_0**.

Fie că secanta MM_0 are ecuația $y = kx + b$ şi creează cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul α. După cum se ştie, coeficientul unghiular k al dreptei MM_0 este egal cu $\operatorname{tg}\alpha$, adică $k = \operatorname{tg}\alpha$. Evident, că $\angle MM_0E = \alpha$ (fig. 18.4). Atunci din triunghiul MM_0E obținem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Introducem însemnarea $k_{\text{sec}}(\Delta x)$ pentru coeficientul unghiular al secantei MM_0, subliniind prin aceasta, că pentru funcția dată f şi punctul fixat x_0 coeficientul unghiular al secantei MM_0 depinde numai de creşterea Δx al argumentului.

Avem: $k_{\text{sec}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}.$

Fie că tangenta M_0T face cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul β ($\beta \neq 90°$). Atunci coeficientul ei unghiular $k(x_0)$ este egal cu $\operatorname{tg}\beta$.

Este natural de considerat, cu cât este mai mic Δx, cu atât mai puțin se va deosebi valoarea coeficientului unghiular al secantei de valoarea coeficientului unghiular al tangentei. Cu alte cuvinte, dacă $\Delta x \to 0$, atunci $k_{\text{sec}}(\Delta x) \to k(x_0)$. În general, coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0 se determină cu ajutorul formulei

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{sec}}(\Delta x), \quad \text{adică}$$

$$\boxed{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

?

1. Ce este creşterea funcţiei în punctul dat?
2. Cu ce formulă se determină viteza instantanee?
3. Cu ce formulă se determină coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcţiei?

EXERCIŢII

18.1.° Găsiţi creşterea funcţiei f în punctul x_0, dacă:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

18.2.° Determinaţi creşterea funcţiei f în punctul x_0, dacă:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

18.3.° Pentru funcţia $f(x) = x^2 - 3x$ exprimaţi creşterea Δf a funcţiei f în punctul x_0 prin x_0 şi x. Aflaţi Δf, dacă:
1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

18.4.° Pentru funcţia $f(x) = x^3$ exprimaţi creşterea Δf a funcţiei f în punctul x_0 prin x_0 şi x. Aflaţi Δf, dacă $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

18.5.• Pentru funcţia $f(x) = x^2 - x$ şi punctul x_0 găsiţi $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ şi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.6.• Pentru funcţia $f(x) = 5x + 1$ şi punctul x_0 găsiţi $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ şi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.7.• Punctul material se mişcă pe dreapta de coordonate conform legii $s(t) = 2t^2 + 3$ (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflaţi viteza instantanee a punctului material în momentul $t_0 = 2$ s.

18.8.• Corpul se mişcă pe dreapta de coordonate după legea $s(t) = 5t^2$ (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Determinaţi:
1) viteza medie a corpului pentru variaţia timpului de la $t_0 = 1$ s, până la $t_1 = 3$ s;
2) viteza instantanee a corpului în momentul $t_0 = 1$ s.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

18.9. Se cunoaşte, că $\operatorname{tg} \alpha = 1$ şi $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Aflaţi unghiul α.

18.10. Se cunoaşte, că $\operatorname{tg} \alpha = -1$ şi $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Aflaţi unghiul α.

19. Noţiune de derivată

În punctul precedent, rezolvând două probleme diferite despre viteza instantanee a punctului material şi despre coeficientul unghiular al tangentei, noi am ajuns la unul şi acelaşi model matematic – limita raportului creşterii funcţiei la creşterea argumentului cu condiţia, că creşterea argumentului tinde spre zero:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1}$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{2}$$

La asemenea formule aduce rezolvarea multor probleme din fizică, chimie, biologie, economie etc. Aceasta mărturiseşte despre faptul, că modelul cercetat merită o atenție deosebită. El merită să i se dea nume, să se introducă însemnarea lui, să fie studiate proprietățile lui şi de a se învăța a le aplica.

Definiție. Derivată a funcției f în punctul **x_0 se numeşte numărul, care este egal cu limita raportului creşterii funcției f în punctul x_0 la creşterea corespunzătoare a argumentului cu condiția, că creşterea argumentului tinde spre zero.**

Derivata funcției $y = f(x)$ în punctul x_0 se înseamnă astfel: $f'(x_0)$ (se citeşte: ”ef prim de ics zero”) sau $y'(x_0)$. Se poate scrie:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

sau

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Ținând cont de definiția vitezei instantanee (1), se poate face concluzia: *dacă $y = s(t)$ este legea mişcării punctului material pe dreapta de coordonate, atunci viteza instantanee a lui în momentul de timp t_0 este egală cu derivata funcției $y = s(t)$ în punctul t_0*, adică

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Această egalitate exprimă **conținutul mecanic al derivatei**.

Cu privire la formula pentru coeficientul unghiular al tangentei (2) se poate concluziona astfel: *coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0, este egal cu valoarea derivatei funcției f în punctul x_0*, adică

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Această egalitate exprimă **conținutul geometric al derivatei**.

Dacă funcția f are derivată în punctul x_0, atunci această funcție se numeşte **derivabilă în punctul** x_0.

Dacă funcția f este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiție, atunci ea este numită **diferențiabilă**.

Aflarea derivatei funcției f se numeşte **derivarea funcției** f.

Problema 1. Derivați (aflați derivata) funcția (funcției) $f(x) = kx + b$.

Rezolvare. Să aflăm derivata funcției f în punctul x_0, unde x_0 – un punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) Conform definiției derivatei $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Deci, $f'(x_0) = k$.

Deoarece x_0 – un punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției f, atunci ultima egalitate stabileşte, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată egalitatea $f'(x) = k$. ◀

Concluzia despre faptul, că derivata funcției liniare $f(x) = kx + b$ este egală cu k, se scrie de-asemeni şi astfel:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (3)$$

Dacă în formula (3) substituim $k = 1$ şi $b = 0$, atunci obținem:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Dacă în formula (3) să punem $k = 0$, atunci obținem:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Ultima egalitate înseamnă, că *derivata funcției, care este constantă, în fiecare punct este egală cu zero.*

Problema 2. Găsiți derivata funcției $f(x) = x^2$.

Rezolvare. Să aflăm derivata funcției f în punctul x_0, unde x_0 – punct arbitrar din domeniu de definiție al funcției f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) dacă $\Delta x \to 0$, atunci pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ valoarea expresiei $2x_0 + \Delta x$ tinde către numărul $2x_0$. Deci, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Deoarece x_0 – punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției $f(x) = x^2$, atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se execută egalitatea

$$f'(x) = 2x. \text{ ◀}$$

Ultima egalitate se mai scrie astfel

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (4)$$

Formula (4) este un caz particular a unei formula mai generale

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (5)$$

De exemplu, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Formula (5) rămâne adevărată pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi $x \neq 0$, adică

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (6)$$

De exemplu, folosim formula (6) pentru aflarea derivatei funcției $f(x) = \frac{1}{x}$. Dispunem de:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Deci pentru orice $x \neq 0$ se îndeplineşte egalitatea $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sau

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Formula (6) de asemenea se poate generaliza pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ şi $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \qquad (7)$$

De exemplu, să găsim derivata funcției $f(x) = \sqrt{x}$, folosind formula (7). Avem, $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Deci, pentru $x > 0$ se poate scrie: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sau

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

În general, derivata funcției $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se poate afla cu formula

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (8)$$

Dacă n – număr impar natural, atunci formula (8) oferă posibilitatea aflării derivatei funcției f în toate astfel de puncte x, pentru care $x \neq 0$.

Dacă n – număr natural par, atunci formula (8) oferă posibilitatea aflării derivatei funcției f pentru toate valorile pozitive ale lui x.

Să ne adresăm la funcțiile trigonometrice $y = \sin x$ şi $y = \cos x$. Aceste funcții sunt derivabile, şi derivatele lor se află conform formulelor:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

În timpul calculării derivatei este comod de folosit tabelul derivatelor, amplasat în forzațul 2.

EXERCIȚII

19.1.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = 9$; 3) $y = 8 - 3x$.

19.2.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

19.3.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = x^{10}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$.

19.4.° Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = x^{-2},\ x_0 = -2$.

19.5.° Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 9$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

19.6.• Derivați funcția:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

19.7.• Derivați funcția:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

19.8.• Găsiți coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0:

1) $f(x) = x^3,\ x_0 = -1$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$.

19.9.• Găsiţi coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcţiei f în punctul cu abscisa x_0:

1) $f(x) = x^4,\ x_0 = -2;$ 3) $f(x) = \frac{1}{x^3},\ x_0 = -3;$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 27;$ 4) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{2}.$

19.10.• Aflaţi cu ajutorul graficului funcţiei f (fig. 19.1) valoarea $f'(x_1)$ şi $f'(x_2)$.

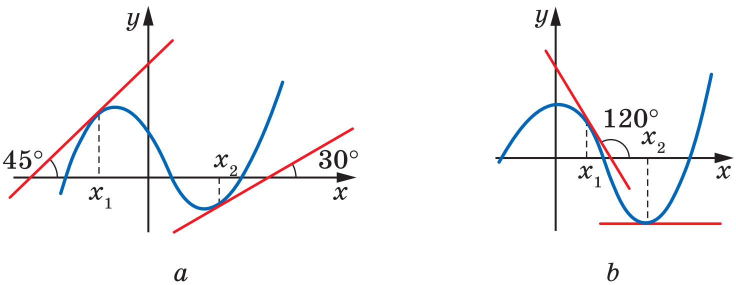


Fig. 19.1

19.11.• Aflaţi cu ajutorul graficului funcţiei f (fig. 19.2) valoarea $f'(x_1)$ şi $f'(x_2)$.

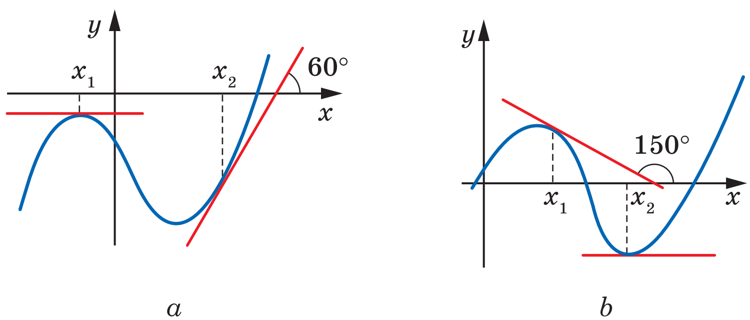


Fig. 19.2

19.12.•• Calculaţi valoarea derivatei funcţiei f în punctul x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81;$ 3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16;$

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1;$ 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64.$

19.13.•• Calculaţi valoarea derivatei funcţiei f în punctul x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256;$ 2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1.$

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

19.14. Simplificați expresia $\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\dfrac{a-9}{a+3}\right)^2+\dfrac{7+a}{9+a}$.

19.15. Rezolvați ecuația $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=0$.

20. Regulile de calculare ale derivatelor

În timpul calculării derivatelor este comod de folosit astfel de teoreme[1].

Teorema 20.1 (derivata sumei). ***În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile $y=f(x)$ şi $y=g(x)$, de asemenea este derivabilă şi funcția $y=f(x)+g(x)$, totodată pentru toate astfel de puncte se realizează egalitatea***

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

Pe scurt se poate spune astfel: *derivata sumei este egală cu suma derivatelor.*

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$\boxed{(f+g)'=f'+g'}$$

Teorema 20.1 se poate generaliza pentru orice număr finit de termeni:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'.$$

Teorema 20.2 (derivata produsului). ***În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile $y=f(x)$ şi $y=g(x)$, de asemenea este derivabilă şi funcția $y=f(x)\,g(x)$, totodată pentru toate astfel de puncte se execută egalitatea***

$$(f(x)\,g(x))'=f'(x)\,g(x)+g'(x)\,f(x).$$

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$\boxed{(fg)'=f'g+g'f}$$

---

[1] Condițiile teoremelor 20.1 – 20.3 prevăd următoarele: dacă funcțiile f şi g sunt derivabile în punctul x_0, atunci corespunzător funcțiile $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)\,g(x)$ şi $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sunt definite pe un interval oarecare, care conține punctul x_0.

Consecința 1. ***În acele puncte, în care este derivabilă funcția $y = f(x)$, de asemenea este derivabilă funcția $y = kf(x)$, unde k – un număr oarecare, totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Pe scurt se spune: *factorul constant se poate scoate de sub semnul derivatei.*

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Demonstrație. Deoarece funcția $y = kx$ este derivabilă în orice punct, atunci, folosind teorema despre derivata produsului, se poate scrie:

$$(kf(x))' = (k)'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Consecința 2. ***În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile $y = f(x)$ și $y = g(x)$, deasemenea este derivabilă funcția $y = f(x) - g(x)$, totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Demonstrație. Avem:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

Teorema 20.3 (*derivata câtului*). ***În acele puncte, în care funcțiile $y = f(x)$ și $y = g(x)$ sunt derivabile, deasemenea este derivabilă și funcția $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Deasemenea este acceptată scriereă simplificată:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

Problemă. Găsiți derivata funcției: 1) $y = \dfrac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Rezolvare. 1) Utilizând formula despre derivata sumei şi consecinţele din teoremele despre derivata produsului, obţinem:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) Conform teoremei despre derivata produsului obţinem:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x-3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x-3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Avem:

$$y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$$
$$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

4) În virtutea teoremei despre derivata câtului obţinem:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}.$$

Folosind teorema despre derivata câtului, se poate uşor de demonstrat, că

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Într-adevăr, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Formulaţi teorema despre derivata: 1) sumei; 2) produsului; 3) câtului.

EXERCIŢII

20.1.° Aflaţi derivata funcţiei:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10;$ 2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x};$

3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

20.2.° Aflați derivata funcției:
1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = -3\sin x + 2\cos x$;
4) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

20.3.• Aflați derivata funcției:
1) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
2) $y = x^2 \sin x$;
3) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt{x}\cos x$.

20.4.• Găsiți derivata funcției:
1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

20.5.• Aflați derivata funcției:
1) $y = \frac{x-1}{x+1}$;
2) $y = \frac{5}{3x-2}$;
3) $y = \frac{x}{x^2-1}$;
4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;
5) $y = \frac{3-x^2}{4+2x}$;
6) $y = \frac{x^2-5x}{x-7}$.

20.6.• Găsiți derivata funcției:
1) $y = \frac{3x+5}{x-8}$;
2) $y = \frac{7}{10x-3}$;
3) $y = \frac{2x^2}{1-6x}$;
4) $y = \frac{\sin x}{x}$;
5) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
6) $y = \frac{x^2+6x}{x+2}$.

20.7.• Cu ce este egală valoarea derivatei funcției f în punctul x_0, dacă:
1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2,\ x_0 = 2$;
2) $f(x) = \frac{2-3x}{x+2},\ x_0 = -3$;
3) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} - 2\sin x,\ x_0 = 0$;
4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x},\ x_0 = 9$;
5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x},\ x_0 = 1$;
6) $f(x) = x \sin x,\ x_0 = 0$?

20.8.• Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0:
1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x,\ x_0 = \frac{1}{4}$;
2) $f(x) = \frac{\cos x}{1-x},\ x_0 = 0$;
3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3},\ x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+1},\ x_0 = 1$.

20.9.•• Punctul material cu masa de 4 kg se mişcă pe dreapta de coordonate conform legii $s(t) = t^2 + 4$ (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflați impulsul $P(t) = mv(t)$ a punctului material în momentul $t_0 = 2$ s.

20.10.•• Un corp cu masa de 2 kg se mişcă pe dreapta de coordonate conform legii $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflați energia cinetică $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ a corpului în momentul $t_0 = 4$ s.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

20.11. Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul $M(-2; -3)$ şi este paralelă cu axa absciselor.

20.12. Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul $M(1; -4)$, dacă coeficientul unghiular al acestei drepte este egal cu: 1) 4; 2) 0; 3) –1.

21. Ecuaţia tangentei

Admitem că funcția f este derivabilă în punctul x_0. Atunci la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0 se poate duce o tangentă neverticală (fig. 21.1).

Din cursul de geometrie clasa a 9-a cunoaşteți, că ecuația dreptei neverticale are înfățişarea $y = kx + b$, unde k – coeficientul unghiular al acestei drepte.

Ținând cont de conținutul geometric al derivatei, obținem:

$$k = f'(x_0).$$

Atunci ecuația tangentei se poate scrie astefel:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Această dreaptă trece prin punctul $M(x_0; f(x_0))$. Aşadar, coordonatele acestui punct satisfac ecuația (1). Atunci avem:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

De aici $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Atunci ecuația (1) se poate transcrie astfel:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Deci, dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0, atunci **ecuația tangentei, duse la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0**, are aspectul:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

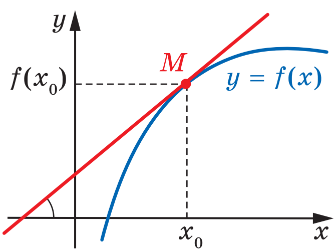


Fig. 21.1

Problemă. Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ în punctul cu abscisa $x_0 = -2$.

Rezolvare. Avem următoarele:

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2;$$

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Înlocuind valorile numerice aflate în ecuația tangentei obținem: $y = 8\ (x + 2) - 2$, adică $y = 8x + 14$.

Răspuns: $y = 8x + 14$. ◀

Scrieţi ecuaţia tangentei, duse la graficul funcţiei f în punctul cu abscisa x_0.

EXERCIŢII

21.1.° Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0, dacă:

1) $f(x) = x^2 + 3x,\ x_0 = -1;$
2) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2};$
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3,\ x_0 = 9;$
4) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0;$
5) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \pi;$
6) $f(x) = \frac{x}{x+1},\ x_0 = -2.$

21.2.° Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0, dacă:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x,\ x_0 = 1;$
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2,\ x_0 = 0;$
3) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2};$
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2},\ x_0 = 3.$

21.3.• Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției $f(x) = x^2 - 3x - 3$ în punctul de intersecție a lui cu axa ordonatelor.

21.4.• Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ în punctul de intersecție a lui cu axa ordonatelor.

21.5.• Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției f în punctul de intersecție a lui cu axa absciselor:

1) $f(x) = 8x^3 - 1;$
2) $f(x) = x - \frac{1}{x}.$

21.6.• Scrieţi ecuaţia tangentei, duse la graficul funcţiei f în punctul de intersecţie a lui cu axa absciselor:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = 3x - x^2$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

21.7. Rezolvaţi inecuaţia:

1) $x^2 + x - 12 > 0$; 3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$.

22. Criteriile de creştere şi descreştere ale funcţiei

Cunoaşteţi, că dacă funcţia este constantă, derivata ei este egală cu zero. Apare întrebarea: dacă funcţia f este astfel, că pentru toate valorile ei x din intervalul I se îndeplineşte egalitatea $f'(x) = 0$, atunci este oare funcţia f constantă pe intervalul I?

Teorema 22.1 (criteriul de constanţă al funcţiei). ***Dacă pentru toţi x din intervalul I este adevărată egalitatea $f'(x) = 0$, atunci funcţia f este constantă pe acest interval.***

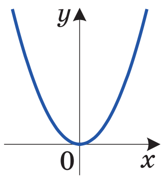


Fig. 22.1

În figura 22.1 este reprezentat graficul funcţiei $f(x) = x^2$. Această funcţie are astfel de proprietăţi: pe intervalul $(-\infty; 0)$ ea descreşte, iar pe intervalul $(0; +\infty)$ creşte. Totodată pe intervalul $(-\infty; 0)$ derivata $f'(x) = 2x$ obţine valori negative, dar pe intervalul $(0; +\infty)$ – valori pozitive.

Acest exemplu demonstrează, că semnul derivatei funcţiei pe un interval oarecare I este legat cu aceea, dacă este această funcţie crescătoare sau (descrescătoare) pe intervalul I.

Legătura dintre semnul derivatei şi creşterea (descreşteres) funcţiei stabilesc aşa două teoreme.

Teorema 22.2 (criteriul de creştere al funcţiei). ***Dacă pentru toate valorile lui x din intervalul I este adevărată inegalitatea $f'(x) > 0$, atunci funcţia f creşte pe acest interval.***

Teorema 22.3 (criteriul de descreştere al funcţiei). ***Dacă pentru toate valorile lui x din intervalul I este adevărată inegalitatea $f'(x) < 0$, atunci funcţia f descreşte pe acest interval.***

Problema 1. Găsiţi intervalele de creştere (descreştere) ale funcţiei $f(x) = x^2 - 2x$.

Rezolvare. Avem: $f'(x) = 2x - 2$. Rezolvând inecuaţiile $2x - 2 > 0$ şi $2x - 2 < 0$, ajungem la concluzia: $f'(x) > 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ pe intervalul $(-\infty; 1)$. Deci, funcţia f creşte pe intervalul $(1; +\infty)$ şi descreşte pe intervalul $(-\infty; 1)$.

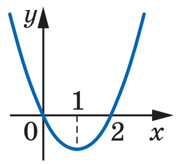


Fig. 22.2

În figura 22.2. este prezentat graficul funcţiei $f(x) = x^2 - 2x$. Din figură se vede, că într-adevăr funcţia f creşte pe intervalul $[1; +\infty)$ şi descreşte pe intervalul $(-\infty; 1]$, inclusiv în punctul $x = 1$.

Scriind răspunsul, vom ţinea cont de următoarea regulă: dacă funcţia este derivabilă în una din extremităţile intervalului de creştere (descreştere), atunci acest punct îl adăugăm la acest interval. În exemplul reprezentat funcţia $f(x) = x^2 - 2x$ este derivabilă în punctul $x = 1$, de acea acest punct l-am adăugat la intervalele $(1; +\infty)$ şi $(-\infty; 1)$.

Răspuns: creşte pe $[1; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; 1]$. ◀

Problema 2. Găsiţi intervalele de creştere (descreştere) ale funcţiei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Rezolvare. Avem: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

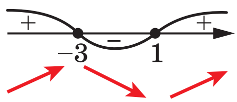


Fig. 22.3

Cercetăm semnul derivatei (fig. 22.3) şi ţinem cont de deriviabilitatea funcţiei f în punctele $x = -3$ şi $x = 1$. Obţinem, că funcţia f creşte pe fiecare din intervalele $(-\infty; -3]$ şi $[1; +\infty)$ şi descreşte pe intervalul $[-3; 1]$. ◀

1. Formulaţi criteriul de constanţă al funcţiei.
2. Formulaţi criteriul de creştere al funcţiei.
3. Formulaţi criteriul de descreştere al funcţiei.

EXERCIŢII

22.1.° Găsiţi intervalele de creştere şi descreştere ale funcţiei:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

22.2.° Găsiți intervalele de creştere şi descreştere ale funcției:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = x^4 + 4x - 20$;
4) $f(x) = 8 - 4x - x^3$.

22.3.• Găsiți intervalele de creştere şi descreştere ale funcției:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

22.4.• Găsiți intervalele de creştere şi descreştere ale funcției:

1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
2) $f(x) = \frac{2x-9}{x-5}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$.

22.5.• În figura 22.4 este prezentat graficul derivatei funcției f, derivabilă pe mulțimea numerelor reale. Indicați intervalele de descreştere ale funcției f.

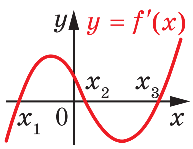


Fig. 22.4

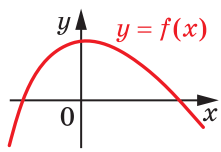
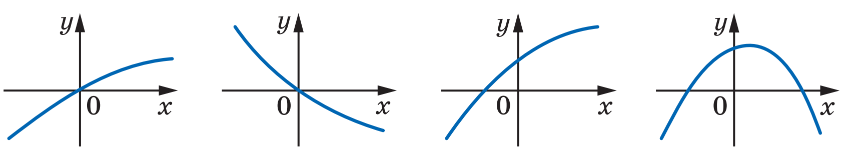


Fig. 22.5

22.6.•• În figura 22.5 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$, definită pe mulțimea numerelor reale. Printre graficele reprezentate în figura 22.6 indicați acela din ele, care poate fi graficul funcției $y = f'(x)$.



a *b* *c* *d*

Fig. 22.6

22.7.•• Demonstrați, că funcția $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ este descrescătoare.

22.8.•• Demonstrați, că funcția $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$ este crescătoare.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

22.9. Rezolvați ecuația $1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$.

22.10. Rezolvați inecuația $x\sqrt{7-x}>0$.

23. Punctele de extremum ale funcţiei

Făcând cunoştinţă cu noțiunea de funcție derivabilă într-un punct, noi am examinat comportarea funcției în apropierea acestui punct sau, cum este primit de spus, în **vecinătatea lui**.

Definiție. Intervalul $(a;\, b)$, care conține punctul x_0, se numeşte vecinătatea punctului x_0.

De exemplu, intervalul (–1; 3) – una din vecinătățile punctului 2,5. Totodată acest interval nu este vecinătatea punctului 3.

În figura 23.1 sunt reprezentate graficele a două funcții. Aceste funcții au o particularitate comună: există aşa o vecinătate a punctului x_0 că pentru toate valorile lui x din această vecinătate este adevărată inegalitatea $f(x_0) \geqslant f(x)$.

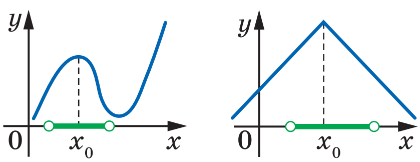


Fig. 23.1

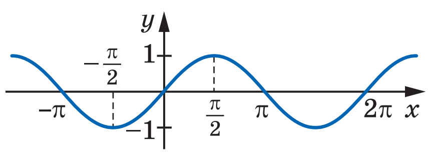


Fig. 23.2

Definiție. Punctul x_0 este numit punct de maximum al funcției, dacă există aşa o vecinătate a punctului x_0, că pentru toate valorile lui x din această vecinătate este adevărată inegalitatea $f(x_0) \geqslant f(x)$.

De exemplu, punctul $x_0=\frac{\pi}{2}$ este punct de maximum al funcției $y=\sin x$ (рис. 23.2). Se scrie astfel: $x_{\max}=\frac{\pi}{2}$.

În figura 23.1 $x_{\max}=x_0$.

Definiție. Punctul x_0 este numit punct de minimum al funcției, dacă există aşa o vecinătate a punctului x_0, că pentru toate valorile lui x din această vecinătate este adevărată inegalitatea $f(x_0) \leqslant f(x)$.

De exemplu, punctul $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ este punct de minimum al funcției $y = \sin x$ (fig. 23.2). Se scrie astfel: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

În figura 23.3 sunt reprezentate graficele funcțiilor, pentru care x_0 este punct de minimum, adică $x_{\min} = x_0$.

Fig. 23.3

Punctele de minimum şi de maximum au denumire comună: ele sunt numite **puncte de extremum** ale funcției (de la latinescul *extremum* – margine, sfârşit).

În figura 23.4 punctele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sunt puncte de extremum.

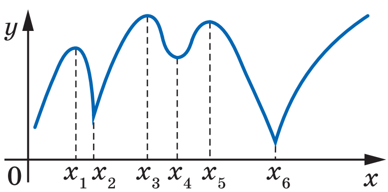


Fig. 23.4

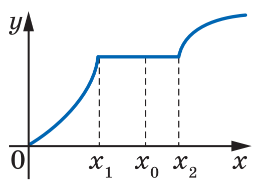


Fig. 23.5

În figura 23.5 este reprezentat graficul funcției *f*, care pe intervalul $[x_1; x_2]$ este constantă. Punctul x_1 este punct de maximum, punctul x_2 – de minimum, iar oricare punct al intervalului $(x_1; x_2)$ este în acelaşi timp cum punct de maximum, atât şi punct de minimum al funcției *f*.

a *b*

Fig. 23.6

Prezența extremumului în punctul x_0 este legată de comportarea funcției în vecinătatea acestui punct. Astfel, pentru funcțiile, graficele cărora sunt reprezentate în figura 23.6, avem: în figura 23.6, *a* funcția creşte pe intervalul $(a;\ x_0]$ şi descreşte pe intervalul $[x_0;\ b)$; în figura 26, *b* funcția descreşte pe intervalul $(a;\ x_0]$ şi creşte pe intervalul $[x_0;\ b)$.

Voi ştiți că, cu ajutorul derivatei se pot găsi intervalele de creştere (descreştere) ale funcției derivabile. Două teoreme ce sunt aduse mai jos, arată, cum cu ajutorul derivatei se pot afla punctele de extremum ale funcției derivabile.

Teorema 23.1 (criteriul punctului de maximum al funcției). ***Fie că funcția f este derivabilă pe intervalul $(a;\ b)$ şi x_0 – un oarecare punct al acestui interval. Dacă pentru toate valorile lui $x \in (a;\ x_0]$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \geqslant 0$, iar pentru toți $x \in [x_0;\ b)$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \leqslant 0$, atunci punctul x_0 este punct de maximum al funcției f*** (fig. 23.6, *a*).

Teorema 23.2 (criteriul punctului de minimum al funcției). ***Fie că funcția f este derivabilă pe intervalul $(a;\ b)$ şi x_0 – un oarecare punct al acestui interval. Dacă pentru toate valorile lui $x \in (a;\ x_0]$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \leqslant 0$, iar pentru toți $x \in [x_0;\ b)$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \geqslant 0$, atunci punctul x_0 este punct de minimum al funcției f*** (fig. 23.6, *b*).

Uneori este îndemână de se folosit de formularea simplificată a acestor două teoreme: *dacă la trecerea peste punctul x_0 derivata îşi schimbă semnul plus* în *minus, atunci x_0 este punct de maximum; dacă derivata îşi schimbă semnul minus în plus atunci x_0 este punct de minimum.*

Deci, pentru funcția *f* punctele de extremum se pot căuta conform următoarei scheme.

1) De găsit $f'(x)$.

2) De cercetat semnul derivatei.

3) Folosindu-se de teoremele respective, de găsit punctele de extremum.

Problemă. Găsiți punctele de extremum ale funcției:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

Rezolvare. 1) Avem:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2).$$

Cercetăm semnul derivatei în vecinătățile punctelor $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ (fig. 23.7). Obținem: $x_{max} = -1,\ x_{min} = 2$.

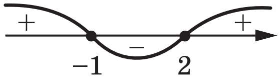


Fig. 23.7

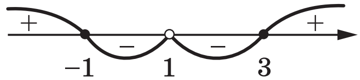


Fig. 23.8

2) Avem: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$

Rezolvând inecuația $x^2 - 2x - 3 > 0$ şi având în vedere, că $(x-1)^2 > 0$ pentru $x \neq 1$, obținem, că $f'(x) > 0$ pe intervalele $(-\infty; -1)$ şi $(3; +\infty)$. Raționând analogic, se poate stabili, că $f'(x) < 0$ pe intervalele $(-1; 1)$ şi $(1; 3)$. Figura 23.8 ilustrează rezultatele obținute.

Acum se pot face astfel de concluzii: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$. ◄

?

1. Care interval se numeşte vecinătatea punctului x_0?
2. Care punct se numeşte punct de maximum al funcţiei? punct de minimum al funcţiei?
3. Formulaţi criteriul punctului de maximum; al punctului de minimum.

EXERCIŢII

23.1.° În figura 23.9 este ilustrat graficul funcției $y = f(x)$, determinată pe intervalul $[-10; 9]$. Indicați:
1) punctele de minimum;
2) punctele de maximum.

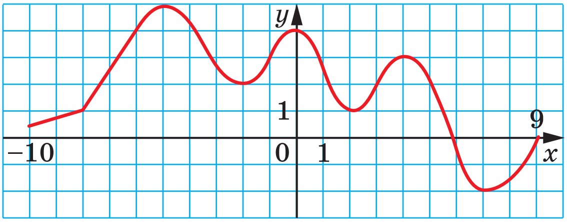


Fig. 23.9

23.2.° În figura 23.9 este ilustrat graficul funcției $y = f(x)$, determinată pe intervalul $[-7; 7]$. Indicați:
1) punctele de minimum;
2) punctele de maximum.

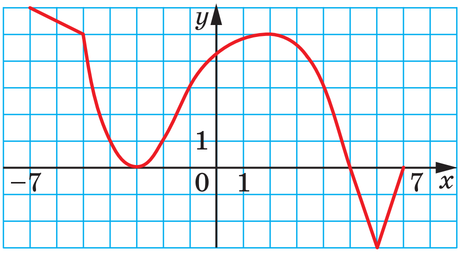


Fig. 23.10

23.3.° Aflaţi punctele de minimum şi maximum ale funcţiei:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

23.4.° Aflaţi punctele de minimum şi maximum ale funcţiei:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
4) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$.

23.5.• Funcţia $y = f(x)$ este derivabilă pe mulţimea numerelor reale. În figura 23.11 este prezentat graficul derivatei ei. Indicaţi punctele de minimum şi maximum ale funcţiei $y = f(x)$.

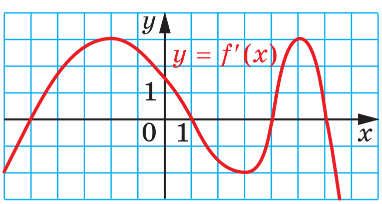


Fig. 23.11

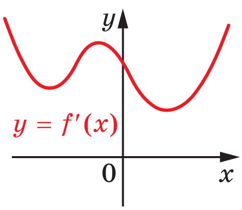


Fig. 23.12

23.6.• Funcţia $y = f(x)$ este definită pe mulţimea numerelor reale şi are derivată în fiecare punct al domeniului de definiţie. În figura 23.12 este prezentat graficul funcţiei $y = f'(x)$. Câte puncte de extremum are funcţia $y = f(x)$?

23.7.•• Găsiţi intervalele de creştere şi descreştere, precum şi punctele de extremum ale funcţiei:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$.

23.8.•• Găsiţi intervalele de creştere şi descreştere, precum şi punctele de extremum ale funcţiei:

1) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

23.9. Aflaţi cea mai mică valoare a funcţiei $y = 3x^2 - 18x + 2$ pe intervalul:

1) $[-1;\ 4]$; 2) $[-4;\ 1]$; 3) $[4;\ 5]$.

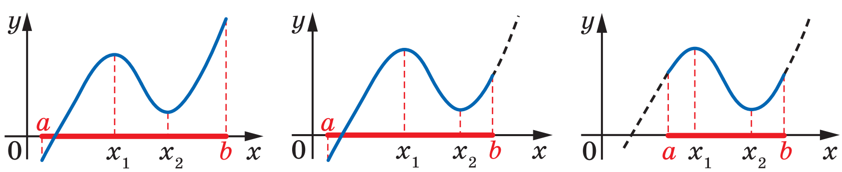
23.10. Aflaţi cea mai mare valoare a funcţiei $y = -x^2 - 8x + 10$ pe intervalul:

1) $[-5;\ -3]$; 2) $[-1;\ 0]$; 3) $[-11;\ -10]$.

24. Cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcţiei

Ce cantitate de producţie trebuie să producă o întreprindere, pentru a obţine cel mai mare venit? Cum, dispunând de resurse mărginite, să realizezi volumul dat de producţie în cel mai scurt timp? Cum să organizezi livrarea mărfurilor în punctele de vânzare astfel, ca consumul de carburanţi să fie minimal? Probleme de aşa fel şi analogice, pentru căutarea soluţiilor optimale, ocupă un loc important în activitatea practică a omului.

În acest punct noi vom clarifica, cum se poate afla cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcţiei pe intervalul $[a;\ b]$. Ne vom mărgini doar cu cercetarea funcţiilor derivabile.



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

a *b* *c*

Fig. 24.1

Se poate arăta, că funcţia derivabilă pe intervalul $[a;\ b]$ obţine pe acest interval valorile cea mai mare şi cea mai mică în extremităţile segmentelor, sau în punctele de extremum (fig. 24.1).

Ținând cont de aceasta, căutarea a celei mai mari şi a celei mai mici valori ale funcției derivabile pe intervalul $[a; b]$ se poate efectua, folosind o astfel de schemă.

1. De găsit punctele funcției f, în care derivata ei este egală cu zero.
2. De calculat valorile funcției în acele puncte găsite, care aparțin intervalului examinat, şi în extremitățile acestui interval.
3. Din toate valorile găsite de ales cea mai mare şi cea mai mică.

Problema 1. Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ pe intervalul $[-2; 0]$.

Rezolvare. Să aflăm derivata funcției date. Avem:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Acum rezolvăm ecuația $12x^2 - 18x - 12 = 0$. De aici

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ sau } x = -\frac{1}{2}.$$

Intervalului $[-2; 0]$ îi aparține numai punctul $x = -\frac{1}{2}$.

Avem: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Deci, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Răspuns: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

Problema 2. Reprezentați numărul 8 în formă de sumă a două numere nenegative astfel, ca suma primului număr şi a pătratului celui de-al doilea număr să fie cea mai mică.

Rezolvare. Admitem că primul număr este egal cu x, atunci al doilea este egal cu $8 - x$. Din condiție reiese, că $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Cercetăm funcția $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$, definită pe intervalul $[0; 8]$, şi aflăm, pentru care valori x ea obține cea mai mică valoare.

Avem: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$. Rezolvăm ecuația $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Obținem: $x = 2$ sau $x = -\frac{8}{3}$.

Din rădăcinile găsite intervalului $[0; 8]$ aparține numai numărul 2. Avem:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Deci, funcția f obține cea mai mică valoare pentru $x = 2$.

Răspuns: $8 = 2 + 6$. ◄

Descrieţi, cum se găseşte cea mai mare şi cea maică valori ale funcţiei derivabile pe intervalul $[a;\ b]$.

EXERCIŢII

24.1.• Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției f pe intervalul indicat:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3,\ [-1;\ 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ [0;\ 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3,\ [-1;\ 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1},\ [-3;\ 0]$.

24.2.• Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției f pe intervalul indicat:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x,\ [0;\ 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2,\ [-2;\ 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x,\ [-2;\ 1]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2,\ [-1;\ 2]$.

24.3.•• Prezentați numărul 8 în formă de sumă a două astfel de numere nenegative, ca produsul unuia din aceste numere și cubul celui de-al doilea număr să fie cel mai mare.

24.4.•• Prezentați numărul 12 în formă de sumă a două astfel de numere nenegative, ca produsul pătratului unuia din aceste numere și îndoitul celui de-al doilea număr să fie cel mai mare.

24.5.•• Prezentați numărul 180 în formă de sumă a teri numere nenegative, ca două din ele să se rapoarte ca 1 : 2, iar produsul tuturor termenilor să fie cel mai mic.

24.6.•• Prezentați numărul 18 în formă de sumă a trei numere nenegative astfel, ca două din ele să se rapoarte ca 8 : 3, iar suma cuburilor acestor trei numere să fie cea mai mică.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

24.7. Desenați graficul unei oarecare funcții, care are astfel de proprietăți: domeniul de definiție este intervalul $[-3;\ 4]$; domeniul de valori este intervalul $[-2;\ 3]$; zerourile funcției sunt egale cu -1 și 2; $f'(x) > 0$ pentru orice x din intervalele $[-3;\ 0)$ și $(2;\ 4]$; $f'(x) < 0$ pentru orice x din intervalul $(0;\ 2)$.

25. Construirea graficelor funcţiilor

Când în clasele anterioare trebuia de construit grafice voi, de regulă, procedați astfel: Depuneați pe planul de coordonate un număr oarecare de puncte, care aparţineau graficului, apoi le uneați. Exactitatea construcției depindea de numărul de puncte.

În figura 25.1 sunt prezentate câteva puncte care aparțin graficului funcției $y = f(x)$. Aceste puncte se pot uni în mod diferit, de exemplu astfel, cum este arătat în figurile 25.2 şi 25.3.

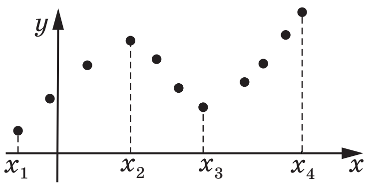


Fig. 25.1

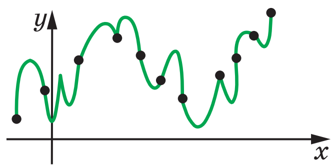


Fig. 25.2

În acelaşi timp dacă se cunoaşte, că funcția f creşte pe fiecare din intervalele $[x_1; x_2]$ şi $[x_3; x_4]$, descreşte pe intervalul $[x_2; x_3]$ şi este derivabilă, atunci cel mai probabil va fi construit graficul, reprezentat în figura 25.4.

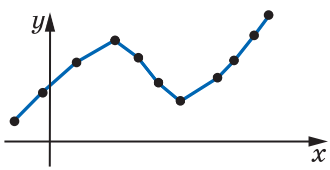


Fig. 25.3

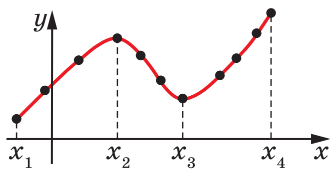


Fig. 25.4

Voi ştiți, ce proprietăți sunt caracteristice graficelor funcțiilor pare, impare, funcției periodice etc. În general, cu cât mai multe proprietăți ale funcției reuşim să determinăm, cu atât mai exact se poate construi graficul ei.

Examinarea proprietăților funcției o vom realiza conform planului următor.

1. *De găsit domeniul de definiție al funcției.*
2. *De cercetat funcția la paritate.*
3. *De găsit zerourile funcției.*
4. *De găsit intervalele de creştere şi descreştere.*
5. *De găsit punctele de extremum şi valorile funcției în punctele de extremum.*

6. *De depistat alte particularități ale funcției* (*neperiodicitatea funcției, comportarea funcției în vecinătățile unor puncte importante etc.*).

Menționam, că planul prezentat de cercetare poartă caracter de recomandare şi nu este ceva fixat şi inepuizabil. În timpul studierii funcțiilor este important de determinat aşa proprietăți, care vor da posibilitatea de a construi corect graficul funcției.

Problemă. Cercetați funcția $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ şi construiți graficul ei.

Rezolvare. 1. Funcția este determinată pe mulțimea numerelor reale, adică $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Avem: $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. De aici $f(-x)\neq f(x)$ şi $f(-x)\neq -f(x)$, adică funcția $y=f(-x)$ nu coincide nici cu funcția $y=f(x)$, nici cu funcția $y=-f(x)$. Astfel, funcția dată nu este nici pară, nici impară.

3. Avem: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Numerele 0 şi 6 sunt zerourile funcției f.

4–5. Avem: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Cercetând semnul derivatei (fig. 25.5), ajungem la concluzia, că funcția f creşte pe intervalul $[0;\ 4]$, descreşte pe fiecare din intervalele $(-\infty;\ 0]$ şi $[4;\ +\infty)$. Deci, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Dispunem de: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

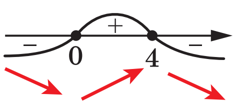


Fig. 25.5

Ținând cont de toate rezultatele obținute, construim graficul funcției (fig. 25.6). ◀

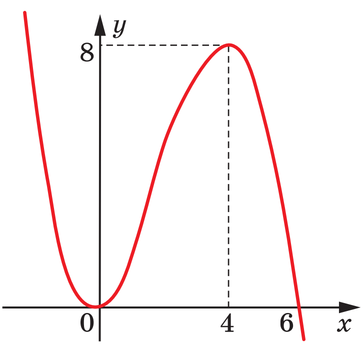


Fig. 25.6

Descrieţi planul cercetării proprietăţilor funcţiei.

EXERCIŢII

25.1.•• Cercetaţi funcţia dată şi construiţi graficul ei:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$.

25.2.•• Examinaţi funcţia dată şi construiţi graficul ei:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Creşterea argumentului x în punctul x_0

$\Delta x = x - x_0$

Creşterea funcţiei f în punctul x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sau $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Derivata funcţiei

Derivată a funcţiei f în punctul x_0 se numeşte numărul, care este egal cu limita raportului creşterii funcţiei f în punctul x_0 la creşterea corespunzătoare a argumentului cu condiţia, că creşterea argumentului tinde spre zero.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Conţinutul geometric al derivatei

Coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcţiei f în punctul cu abscisa x_0, este egal cu valoarea derivatei funcţiei f în punctul x_0.

Conţinutul mecanic al derivatei

Dacă $y = s(t)$ este legea mişcării punctului material pe dreapta de coordonate, atunci viteza instantanee în momentul t_0 este egală cu derivata funcţiei $y = s(t)$ în punctul t_0.

Derivabilitatea funcţiei

Dacă funcţia are derivată într-un punct oarecare, atunci această funcţie se numeşte derivabilă în acest punct.
Dacă funcţia f este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiţie, atunci se spune că ea este derivabilă.

Ecuaţia tangentei, duse la graficul funcţiei în punctul cu abscisa x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Regulile de calculare ale derivatelor

Derivata sumei	$(f+g)' = f' + g'$
Derivata produsului	$(fg)' = f'g + g'f$
Derivata câtului	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Criteriul de constanță al funcției

Dacă pentru x arbitrar din intervalul I este adevărată egalitatea $f'(x) = 0$, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Criteriul de creştere al funcției

Dacă pentru toți x din intervalul I este adevărată inegalitatea $f'(x) > 0$, atunci funcția f creşte pe acest interval.

Criteriul de descreştere al funcției

Dacă pentru toți x din intervalul I este adevărată inegalitatea $f'(x) < 0$, atunci funcția f descreşte pe acest interval.

Vecinătatea punctului

Intervalul $(a; b)$, care conține punctul x_0, se numeşte vecinătatea punctului x_0.

Punctele de extremum ale funcției

Punctul x_0 este numit punct de maximum al funcției, dacă există aşa o vecinătate a punctului x_0, că pentru toate punctele x din această vecinătate este adevărată inegalitatea $f(x_0) \geqslant f(x)$.
Punctul x_0 este numit punct de minimum al funcției, dacă există aşa o vecinătate a punctului x_0, că pentru toate punctele x din această vecinătate este adevărată inegalitatea $f(x_0) \leqslant f(x)$.
Punctele de minimum şi de maximum au denumire comună: ele sunt numite puncte de extremum (extremitate) ale funcției.

Criteriile ale punctelor de maximum şi minimum

Fie că funcția f este derivabilă pe intervalul $(a; b)$ şi x_0 – un punct oarecare al acestui interval.
Dacă pentru toate valorile lui $x \in (a; x_0]$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \geqslant 0$, iar pentru toate valorile lui $x \in [x_0; b)$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \leqslant 0$, atunci punctul x_0 este maximumul funcției f
Dacă pentru toate valorile lui $x \in (a; x_0]$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \leqslant 0$, iar pentru toate valorile lei $x \in [x_0; b)$ este adevărată inegalitatea $f'(x) \geqslant 0$, atunci punctul x_0 este minimumul funcției f.

Planul de cercetare al proprietăților funcției

1. De găsit domeniul de definiție al funcției.
2. De cercetat funcția la paritate.
3. De găsit zerourile funcției.
4. De găsit intervalele de creştere şi descreştere.
5. De găsit punctele de extremum şi valorile funcției în punctele de extremum.
6. De depistat alte particularități ale funcției (neperiodicitatea funcției, comportarea funcției în vecinătățile unor puncte importante etc.).

26. Exerciţii pentru repetarea cursului de algebră şi elemente de analiză clasa a 10-a

1. Funcții, proprietățile şi graficele lor

26.1. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;
3) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-5}$;
4) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+4}$;
5) $f(x)=\dfrac{7x+13}{x^2-7x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$.

26.2. Găsiți domeniul de valori al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x}+1$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-2$;
3) $g(x)=3-x^2$;
4) $f(x)=x^2+2$.

26.3. Găsiți domeniul de definiție şi construiți graficul funcției:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$.

26.4. Aflați zerourile funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x+7}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-4}$.

26.5. Cercetați la paritate funcția:

1) $f(x)=7x^6$;
2) $f(x)=3x^5-2x^7$;
3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;
4) $f(x)=x^2-x+1$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$.

26.6. Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}+\left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3$;
2) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$.

26.7. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y=\sqrt[4]{3x-5}$; 2) $y=\sqrt[6]{-x}$; 3) $y=\sqrt[5]{x-4}$; 4) $y=\sqrt[8]{6x-x^2}$.

26.8. Simplificați expresia:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, dacă $a\geqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{b^4}$, dacă $b\leqslant 0$; 3) $\sqrt[7]{c^7}$.

26.9. Construiți graficul funcției:

1) $y=\left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7$; 2) $y=\sqrt[7]{(x-2)^7}$; 3) $y=\left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8$; 4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$.

26.10. Simplificaţi expresia:

1) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5}-\sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}$.

26.11. Scoateţi factorul de sub semnul derivatei:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$; 3) $\sqrt[4]{-243y^5}$.

26.12. Comparaţi numerele:

1) $\sqrt[6]{80}$ şi $\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{6}$ şi $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[4]{15}$ şi $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[4]{27}$ şi $\sqrt[3]{9}$.

26.13. Reduceţi fracţia:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$; 3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$.

26.14. Calculaţi valoarea expresiei:

1) $3^{1,2}\cdot 3^{-0,7}\cdot 3^{1,5}$; 4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;

2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot 11^{-\frac{3}{4}}\cdot 11^{\frac{1}{12}}$; 5) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}$.

3) $36^{0,7}\cdot 6^{-0,4}$;

26.15. Demonstraţi identitatea:

1) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$.

26.16. Rezolvaţi ecuaţia:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$; 5) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;

2) $\sqrt{6-x}=3x-4$; 6) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$;

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 7) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-5=0$;

4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$; 8) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$.

2. Funcţii trigonometrice

26.17. Comparaţi cu zero valoarea expresiei:

1) $\sin 168°\cos 126°$; 2) $\operatorname{tg} 206°\cos(-223°)$.

26.18. Aflaţi valoarea expresiei:

1) $\sin 780°$; 2) $\cos 1200°$; 3) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$.

26.19. Calculați $\sin\alpha$, dacă $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.20. Aflați cea mai mare şi cea mai mică valori ale expresiei $2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha$.

26.21. Simplificați expresia

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi - \alpha).$$

26.22. Se dă: $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Aflați $\cos(\alpha + \beta)$.

26.23. Demonstrați identitatea:

1) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

26.24. Simplificați expresia:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

2) $\sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2\cos^2 3\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$.

26.25. Rezolvați ecuația:

1) $2\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0$;

2) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$;

3) $3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1$.

26.26. Găsiți cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

26.27. Găsiți cea mai mare rădăcină negativă a ecuației

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

26.28. Câte soluții ale ecuației $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$ aparțin intervalului $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$?

26.29. Rezolvați ecuația:

1) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$;
2) $\cos 2x + \sin x = 0$;
3) $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;
4) $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$;
5) $\sin x + 2\cos x = 0$;
6) $\sin x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

3. Derivata şi aplicația ei

26.30. Găsiți derivata funcției:

1) $y = 3x^4 - 2x^2 + 5$;
2) $y = 4x^3 - \frac{2}{x}$;
3) $y = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + 7$;
4) $y = 5\sin x - 7\cos x$.

26.31. Găsiți derivata funcției:

1) $y = (x^2 - 1)(x^5 + 2)$;
2) $y = x^3\sin x$;
3) $y = \sqrt[3]{x}\cos x$;
4) $y = \frac{2x+3}{3x-2}$;
5) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$;
6) $y = \frac{x^2 - 3x}{\cos x}$.

26.32. Aflați abscisa punctului graficului funcției $f(x) = x^2 - 5x$, în care tangenta la acest grafic creează cu direcția pozitivă a axei absciselor un unghi de 45°.

26.33. Aflați coeficientul unghiular al tangentei duse la graficul funcției $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ în punctul de intersecție al lui cu axa ordonatelor.

26.34. Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0, dacă:

1) $f(x) = x^3 + x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$.

26.35. Aflați ecuațiile tangentelor duse la graficul funcției $f(x) = x^2 - 4x$ în punctele de intersecție ale lui cu axa absciselor.

26.36. Un corp se mişcă pe dreapta de coordonate conform legii $s(t) = t^2 + 3t - 2$ (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). În care moment t viteza de mişcare a corpului va alcătui 10 m/s?

26.37. Demonstrați, că funcția $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ este crescătoare.

26.38. Găsiți intervalele de creştere şi descreştere şi punctele de extremum ale funcției:

1) $y = 3x - x^3$; 3) $y = x + \frac{16}{x}$; 5) $y = x^2(x - 3)$;

2) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 3$; 4) $y = x + \frac{4}{x^2}$; 6) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

26.39. Aflați cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției f pe intervalul indicat:

1) $f(x) = x^3 - 3x$, $[-2;\ 0]$; 2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2;\ 4]$.

26.40. Reprezentați numărul 64 în formă de sumă a astfel de doi termeni pozitivi, ca suma pătratelor lor să fie cea mai mică.

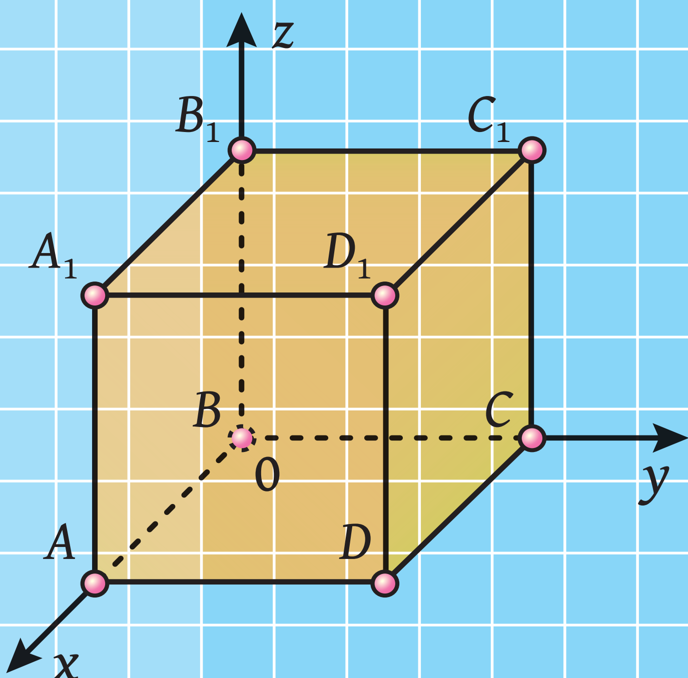
26.41. Găsiți un astfel de număr pozitiv, pentru care diferența dintre pătratul lui întreit şi a cubului lui este cea mai mare.

Capitolul 2.
Stereometrie

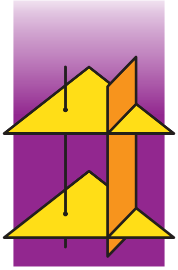
§ 4. Paralelismul în spaţiu

§ 5. Perpendicularitatea în spaţiu

§ 6. Coordonate şi vectori în spaţiu



PARALELISMUL ÎN SPAŢIU §4



În acest paragraf veţi face cunoştinţă cu noţiunile fundamentale ale stereometriei, axiomele stereometriei şi consecinţele lor. Veţi obţine cunoştinţe iniţiale despre poliedre. Veţi afla despre amplasarea reciprocă a două drepte, a dreptei şi a planului, a două plane în spaţiu. Veţi face cunoştinţă cu regulile conform cărora se reprezintă figurile spaţiale pe plan.

27. Noţiunile fundamentale ale stereometriei. Axiomele stereometriei

Studiind matematica, voi aţi făcut cunoştinţă cu majoritatea noţiunilor cu ajutorul definiţiilor. Deci, din cursul de planimetrie vă sunt bine cunoscute definiţiile de patrulater, trapez, circumferinţă etc.

Definiţia oricărei noţiuni se bazează pe alte noţiuni, conţinutul cărora vă este deja cunoscut. De exemplu, analizăm definiţia trapezului: „Trapez se numeşte patrulaterul la care două laturi sunt paralele, iar celelalte două nu sunt paralele”. Vedem că definiţia trapezului se bazează pe noţiuni deja introduse, ca patrulater, latura patrulaterului, laturi paralele şi neparalele etc. Deci, definiţiile se introduc pe principiul „nou bazat pe vechi”. Atunci este clar că trebuie să existe noţiuni primare a căror definiţii nu sunt date. Ele sunt numite **noţiuni fundamentale** (fig. 27.1).

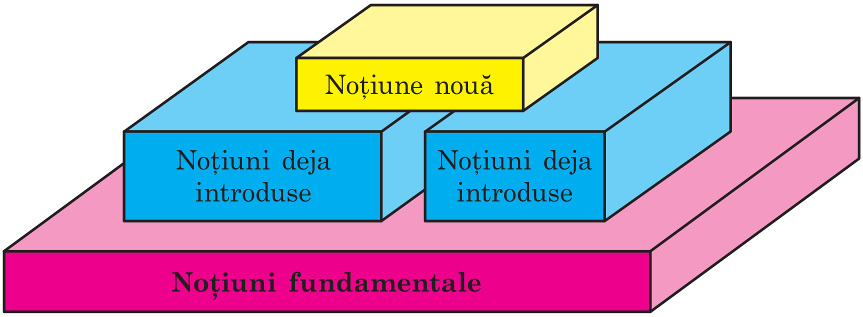


Fig. 27.1

În cursul de planimetrie, pe care l-ați studiat, nu au fost date definițiile la aşa figuri ca punctul şi dreapta. În stereometrie, pe lângă acestea, la noțiuni fundamentale vom referi încă o figură – **planul.**

Ca imagine intuitivă a planului poate servi suprafața unui bazin de apă în lipsa vântului, suprafața oglinzii, suprafața mesei lustruite, continuate în gând în toate direcțiile.

Folosind noțiunea de plan, putem considera că în planimetrie noi am cercetat un singur plan şi toate figurile studiate aparţineau acestui plan. În stereometrie se consideră o mulțime de plane, situate în **spațiu.**

De regulă, planele se notează cu litere mici greceşti α, β, γ, ... Pe desen planele se reprezintă în forma unui paralelogram (fig. 27.2) sau a altor părți limitate ale planului (fig. 27.3).

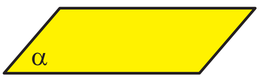


Fig. 27.2

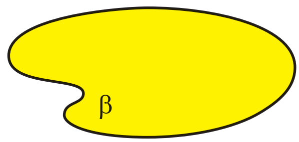


Fig. 27.3

Planul, tot aşa ca şi dreapta, constă din puncte, adică planul este o mulțime de puncte.

Există câteva cazuri de amplasare reciprocă a punctelor, a dreptelor şi planelor în spațiu. Să dăm exemple.

În figura 27.4 este prezentat punctul A, care aparține planului α. De asemenea se spune, că *punctul A se află în planul* α *sau planul* α *trece prin punctul A*. Pe scurt aceasta se poate scrie astfel: $A \in \alpha$.

În figura 27.5 este ilustrat punctul B, care nu aparține planului β. Pe scurt această se poate scrie astfel: $B \notin \beta$.

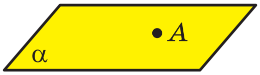


Fig. 27.4

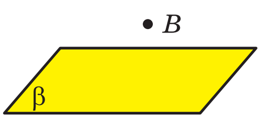


Fig. 27.5

Fig. 27.6

În figura 27.6 este prezentată dreapta a, care aparține planului α. De asemenea se spune că *dreapta a se află în planul* α sau *planul* α *trece prin dreapta a*. Pe scurt această se poate scrie astfel: $a \subset \alpha$.

Dacă dreapta şi planul au doar un singur punct comun, atunci se spune că **dreapta intersectează planul.** În figura 27.7 este reprezentată dreapta a, care intersectează planul α în punctul A. Se scrie: $a \cap \alpha = A$.

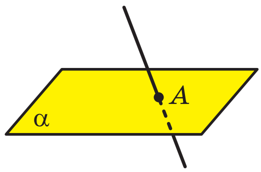


Fig. 27.7

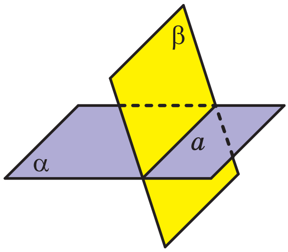


Fig. 27.8

Mai departe vorbind „două puncte”, „trei drepte”, „două plane” etc., vom considera că acestea sunt puncte diferite, drepte diferite şi diferite plane.

Dacă două plane au un punct comun, se spune că aceste plane **se intersectează.**

În figura 27.8 sunt desenate planele α şi β, care se intersectează după dreapta a. Se scrie: $\alpha \cap \beta = a$.

La etapa începătoare de studiu a stereometriei este imposibil să se demonstreze teoremele, bazându-se pe alte afirmații, deoarece aceste afirmații încă nu sunt disponibile. Din această cauză, primele proprietăți care se referă la puncte, drepte şi plane în spațiu sunt acceptate fără demonstrație şi se numesc **axiome.**

Menționam, că unele axiome din stereometrie după formulare cuvânt cu cuvânt coincid cu axiomele bine cunoscute ale planimetriei. De exemplu:

- *oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparțin acestei drepte şi puncte care nu-i aparțin;*
- *prin orice două puncte se poate duce o dreaptă şi numai una singură.*

Noi nu vom face cunoştință cu construcția axiomatică strictă a stereometriei. Vom analiza doar câteva afirmații care exprimă proprietățile fundamentale ale planelor în spațiu, pe baza cărora se construieşte, de obicei, cursul de stereometrie în şcoală.

Axioma A1. În orice plan al spațiului sunt adevărate axiomele planimetriei.

Dacă în orice plan al spațiului sunt adevărate axiomele planimetriei, atunci sunt juste şi consecințele acestor axiome, adică teoremele planimetriei. Deci, în stereometrie, ne putem folosi de toate proprietățile figurilor plate pe care le cunoaştem.

Axioma A2. Prin orice trei puncte ale spațiului, care nu sunt situate pe o dreaptă, trece un plan şi doar unul singur.

Figurile 27.9–27.11 reprezintă această axiomă.

Fig. 27.9

Fig. 27.10

Fig. 27.11

Din axioma menționată mai sus rezultă, că trei puncte ale spațiului care nu se află pe o dreaptă, definesc un singur plan, care trece prin aceste puncte. Deci, pentru a nota planul se pot indica orice trei puncte, care nu se află pe o dreaptă. De exemplu, în figura 27.12 este desenat planul ABC.

Notarea $M \in ABC$ înseamnă că punctul M aparține planului ABC. Scrierea $MN \subset ABC$ înseamnă că dreapta MN aparține planului ABC (fig. 27.12).

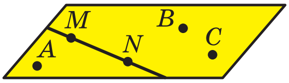


Fig. 27.12

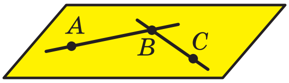


Fig. 27.13

Axioma A3. Dacă două puncte ale dreptei aparțin planului, atunci şi toată dreapta aparține acestui plan.

De exemplu, în figura 27.13 punctele A, B şi C aparțin planului ABC. Atunci putem scrie: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Din această axiomă rezultă, că atunci când dreapta nu aparține planului, ea are cu planul dat nu mai mult decât un singur punct comun.

Afirmația formulată în axioma **A3**, se foloseşte des în practică, atunci când se verifică dacă această suprafață este netedă (plată).

Pentru aceasta pe suprafață în locuri diferite se pune o şipcă dreaptă şi se verifică dacă există spații între șipcă și suprafață (fig. 27.14).

Axioma A4. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă.

Această axiomă poate fi ilustrată cu ajutorul unei foi de hârtie îndoită sau cu ajutorul manualului vostru (fig. 27.15).

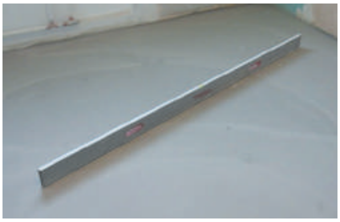


Fig. 27.14

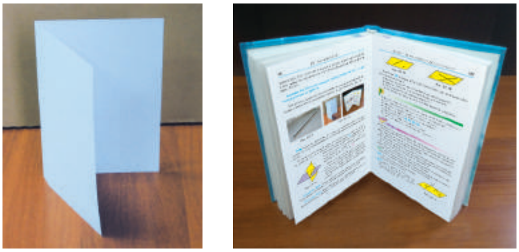


Fig. 27.15

Problemă. Demonstrați, că dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acest punct.

Rezolvare. Fie că punctul A este comun pentru două plane α şi β, adică $A \in \alpha$ şi $A \in \beta$ (fig. 27.16). După axioma A4 planele α şi β se intersectează după o dreaptă. Fie $\alpha \cap \beta = a$. Atunci toate punctele comune ale planelor α şi β aparțin dreptei a. Punctul A este comun pentru planele α şi β. Deci, $A \in a$. ◄

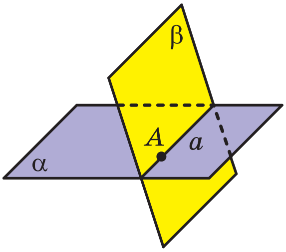


Fig. 27.16

Pe lângă axiome, există și alte proprietăți, care descriu plasarea reciprocă a punctelor, dreptelor și planelor în spațiu. Bazându-se pe axiome, se poate demonstra, de exemplu, astfel de afirmații (consecințe din axiomele stereometriei).

Teorema 27.1. ***Printr-o dreaptă şi un punct, care nu îi aparține, trece un plan şi numai unul singur*** (fig. 27.17).

Teorema 27.2. ***Prin două drepte, care se intersectează, trece un plan şi numai unul singur*** (fig. 27.18).

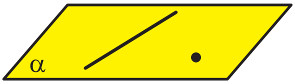


Fig. 27.17

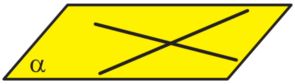


Fig. 27.18

Din axioma **A2** şi teoremele 27.1 şi 27.2 rezultă, că *planul este determinat în mod unic:*

1) *de trei puncte, care nu se află pe o dreaptă;*
2) *de o dreaptă şi un punct, care nu aparține acestei drepte;*
3) *de două drepte, care se intersectează.*

Astfel, noi am indicat trei moduri de a defini un plan.

1. Cum în matematică se numesc noţiunile primare, care nu se definesc?
2. Care figuri sunt în lista de bază a noţiunilor din stereometrie?
3. În ce caz se spune că dreapta intersectează planul?
4. În ce caz se spune că planele se intersectează?
5. Formulaţi axiomele **A1**, **A2**, **A3**, **A4**.
6. Ce consecinţe din axiomele stereometriei voi ştiţi?
7. Indicaţi modurile de definire a planului.

EXERCIŢII

27.1.° Desenați planul α, punctul M care aparține lui şi punctul K, care nu-i aparține lui. Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.

27.2.° Desenați planul γ, care trece prin dreapta a. Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.

27.3.° Desenați planul α şi dreapta b, care intersectează planul dat în punctul A. Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare. Câte puncte ale dreptei b aparțin planului α?

27.4.° Desenați planele β şi γ, care se intersectează după dreapta c. Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.

27.5.° Scrieți cu ajutorul simbolurilor repartizarea reciprocă a punctelor, dreptelor şi a planului, reprezentate în figură 27.19.

27.6.• Câte plane pot fi duse prin dreapta dată şi punctul dat?

27.7.• Se dau punctele A, B şi C astfel, că $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 7$ cm. Câte plane pot fi duse prin punctele A, B şi C?

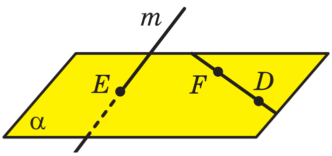


Fig. 27.19

27.8.• Se dau punctele D, E şi F astfel, că $DE = 2$ cm, $EF = 4$ cm, $DF = 6$ cm. Câte plane se pot duce prin punctele D, E şi F?

27.9.•• Dreptele AB şi AC intersectează planul α în punctele B şi C, punctele D şi E aparțin acestui plan (fig. 27.20). Construiți punctul de intersecție al dreptei DE cu planul ABC.

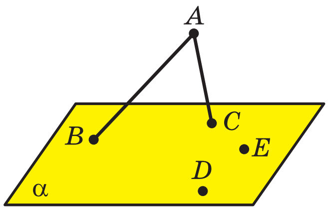


Fig. 27.20

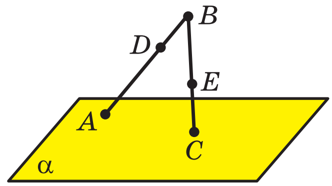


Fig. 27.21

27.10.•• Dreapta BA intersectează planul α în punctul A, dreapta BC – în punctul C (fig. 27.21). Pe segmentul AB notăm punctul D, pe segmentul BC – punctul E. Construiți punctul de intersecție al dreptei DE cu planul α.

27.11.•• Dreapta m – linia de intersecție a planelor α şi β (fig. 27.22). Punctele A şi B aparțin planului α, iar punctul C – planului β. Construiți liniile de intersecție a planului ABC cu planul α şi cu planul β.

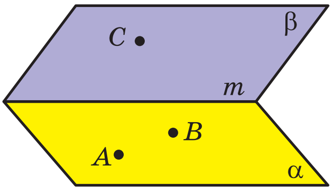


Fig. 27.22

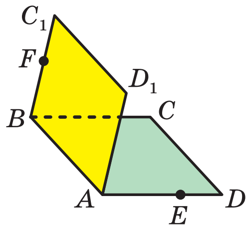


Fig. 27.23

27.12.•• Pătratele $ABCD$ şi ABC_1D_1 nu sunt situate într-un plan (fig. 27.23). Pe segmentul AD este notat punctul E, iar pe segmentul BC_1 – punctul F. Construiți punctul de intersecție:

1) al dreptei CE cu planul ABC_1;

2) al dreptei FD_1 cu planul ABC.

27.13.•• Cum cu ajutorul a două fire tâmplarul poate verifica dacă sunt situate capetele celor patru picioare ale scaunului în același plan?

27.14.•• Punctul M – punctul comun a două plane ABC şi BCD. Găsiți segmentul BC, dacă $BM = 4$ cm, $MC = 7$ cm.

27.15.•• Punctul K – punctul comun al două plane MNF şi MNE. Găsiți segmentul MN, dacă $MK = KN = 5$ cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

27.16. Pe înălțimea BD a triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) s-a notat punctul M. Găsiți raportul dintre aria triunghiului AMC şi aria triunghiului ABC, dacă $BD = 12$ cm, $BM = 8$ cm.

28. Figuri spaţiale. Noţiuni iniţiale despre poliedre

În stereometrie în afară de puncte, drepte şi plane se cercetează figuri în spațiu, adică figuri la care nu toate punctele sunt situate într-un plan. Cu unele din figurile spațiale voi deja sunteți cunoscuți. Astfel, în figura 28.1 sunt desenate cilindrul, conul şi sfera. Aceste figuri le veți studia detaliat în clasa 11.

Fig. 28.1

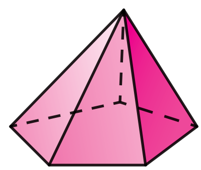


Fig. 28.2

În figura 28.2 este reprezentată încă o figură spațială bine cunoscută – piramida. Această figură este un tip aparte a **poliedrului.**

Exemple de poliedre sunt reprezentate în figura 28.3.

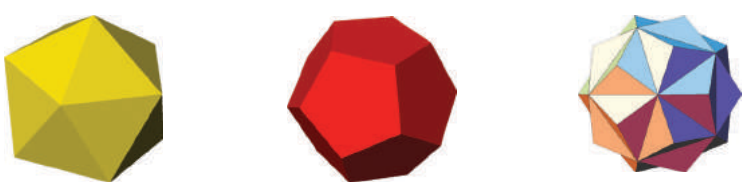


Fig. 28.3

Suprafața poliedrului se compune din poligoane. Ele se numesc **fețele poliedrului.** Laturile poligoanelor se numesc **muchiile poliedrului,** iar vârfurile – **vârfurile poliedrului** (fig. 28.4).

În figura 28.5 este reprezentată piramida pentagonală *FABCDE*. Suprafața acestui poliedru constă din cinci triunghiuri, care se numesc **fețele laterale ale piramidei** şi un pentagon care se numeşte **baza piramidei.** Vârful *F*, care este comun pentru toate fețele laterale se numeşte **vârful piramidei.** Muchiile *FA*, *FB*, *FC*, *FD* şi *FE* se numesc **muchii laterale ale piramidei,** iar muchiile *AB*, *BC*, *CD*, *DE* și *EA* – **muchiile bazei piramidei.**

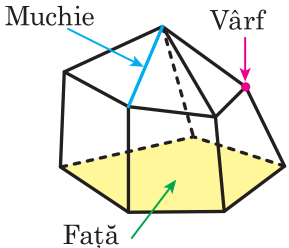


Fig. 28.4

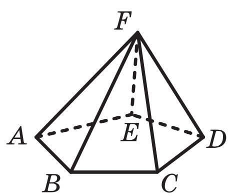


Fig. 28.5

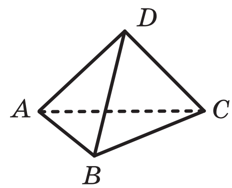


Fig. 28.6

În figura 28.6 este reprezentată piramida triunghiulară *DABC*. Piramida triunghiulară este numită de asemenea **tetraedru.**

Încă un tip aparte a poliedrului este **prisma.** În figura 28.7 este desenată prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$. Acest poliedru, are cinci fețe, două din care sunt triunghiurile egale *ABC* şi $A_1B_1C_1$. Ele se numesc **bazele prismei.** Celelalte fețe ale prismei sunt paralelograme. Ele sunt numite **fețe laterale ale prismei.** Muchiile AA_1, BB_1 şi CC_1 se numesc **muchiile laterale ale prismei.**

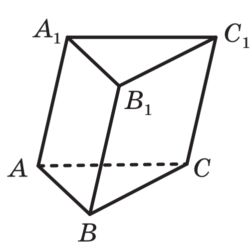


Fig. 28.7

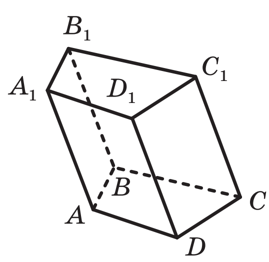


Fig. 28.8

În figura 28.8 este reprezentată prisma patrulateră $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Suprafața ei constă din două patrulatere egale *ABCD* şi $A_1B_1C_1D_1$ (bazele prismei) şi patru paralelograme (fețele laterale ale prismei).

Voi, sunteți cunoscuți de asemenea cu un tip aparte a prismei patrulatere – **paralelipipedul dreptunghiular.** În figura 28.9 este reprezentat paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Toate fețele paralelipipedul dreptunghiular sunt dreptunghiuri.

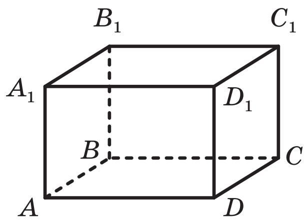


Fig. 28.9

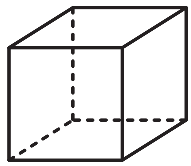


Fig. 28.10

La rândul său, un tip aparte a paralelipipedul dreptunghiular este **cubul.** Toate fețele cubului sunt pătrate (fig. 28.10).

Prisma patrulateră, baza căreia este un paralelogram, se numeşte **paralelipiped.**

În cursul de geometrie clasa 11 voi mai detailat veți face cunoştință cu poliedrele şi cu tipuri particulare ale lor.

Problemă. Pe muchiile AA_1 și DD_1 ale cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ s-au notat corespunzător punctele M şi N astfel încât $AM \neq DN$ (fig. 28.11). Construiți punctul de intersecție al dreptei MN cu planul ABC.

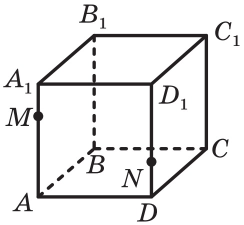


Fig. 28.11

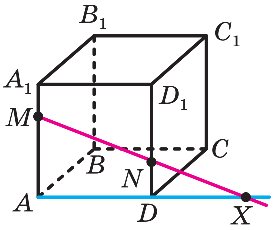


Fig. 28.12

Rezolvare. Punctele M şi N aparțin planului AA_1D_1. Atunci după axioma **A3** dreapta MN aparține acestui plan. Analogic dreapta AD de asemenea aparține planului AA_1D_1. Din planimetrie este cunoscut, că dreptele care sunt situate într-un plan sau sunt paralele, sau se intersectează. Deoarece $AM \neq DN$, rezultă că dreptele AD şi MN se intersectează. Fie X – punctul de intersecție al lor (fig. 28.12).

Punctele A şi D aparțin planului ABC. Atunci după axioma **A3** dreapta AD aparține aceluiaşi plan. Punctul X aparține dreptei AD. Deci, punctul X aparține planului ABC. Deoarece punctul X tot aparține dreptei MN, atunci dreapta MN intersectează planul ABC în punctul X. ◀

1. Numiţi figurile spaţiale cunoscute de voi.
2. Din ce figuri este alcătuită suprafaţa poliedrului? Cum ele se numesc?
3. Ce se numeşte muchia poliedrului? vârfurile poliedrului?
4. Ce tipuri de poliedre ştiţi? Descrieţi aceste poliedre.

EXERCIŢII

28.1.° În figura 28.13 este dat paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indicați:
1) bazele paralelipipedului;
2) fețele laterale ale paralelipipedului;
3) muchiile laterale ale paralelipipedului;
4) muchiile bazei de jos ale paralelipipedului.

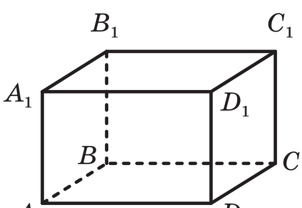


Fig. 28.13

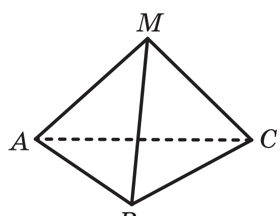


Fig. 28.14

28.2.° În figura 28.14 este desenată piramida $MABC$. Indicați:
1) baza piramidei;
2) vârful piramidei;
3) fețele laterale ale piramidei;
4) muchiile laterale ale piramidei;
5) muchiile bazei piramidei.

28.3.• Pe muchia BC a tetraedrului $SABC$ s-a notat punctul D. Care dreaptă este linia de intersecție a planelor: 1) ASD şi ABC; 2) ASD şi BSC; 3) ASD şi ASC?

28.4.• Punctul M aparține feței ASC a tetraedrului $SABC$, punctul D – muchiei BC (fig. 28.15). Construiți linia de intersecție a planului ABC şi a planului, care trece prin dreapta SD şi punctul M.

28.5.• Pe muchiile laterale SA şi SB ale piramidei $SABCD$ s-au notat corespunzător punctele M şi K. Construiți punctul de intersecție al dreptei MK cu planul ABC, dacă dreptele MK şi AB nu sunt paralele.

28.6.• Pe muchiile laterale SA şi SC ale piramidei $SABCD$ s-au notat corespunzător punctele M şi K. Construiți punctul de intersecție al dreptei MK cu planul ABC, dacă dreptele MK şi AC nu sunt paralele.

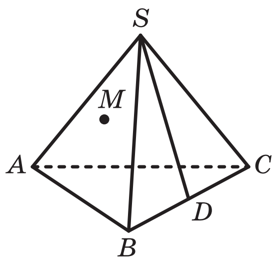


Fig. 28.15

28.7.• Este dat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Construiți dreptele, după care planul, ce trece prin punctele A, C şi B_1, intersectează fețele cubului.

28.8.• Este dată prisma $ABCA_1B_1C_1$ şi planul, care trece prin dreptele AC_1 şi AB. Construiți dreptele, după care planul intersectează fețele prismei.

28.9.•• Punctul M aparține feței ASB a tetraedrului $SABC$, punctul K – feței BSC (fig. 28.16). Construiți punctul de intersecție al dreptei MK cu planul ABC.

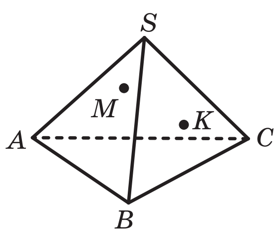


Fig. 28.16

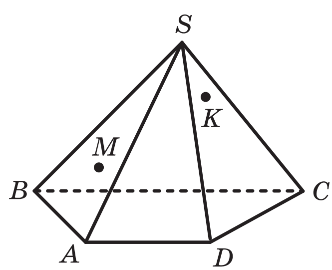


Fig. 28.17

28.10.•• Punctul M aparține feței ASB a piramidei $SABCD$, punctul K – feței CSD (fig. 28.17). Construiți punctul de intersecție al dreptei MK cu planul ABC.

28.11.•• Se dă piramida *SABCD* (fig. 28.18). Construiți linia de intersecție a planelor *ASB* şi *CSD*.

28.12.•• Se dă piramida *SABCDE* (fig. 28.19). Construiți linia de intersecție a planelor *ASE* şi *BSC*.

28.13.•• Pe muchiile *AB* şi *CD* ale tetraedrului *DABC* sunt notate corespunzător punctele *E* şi *F*. Construiți linia de intersecție a planelor *AFB* şi *CED*.

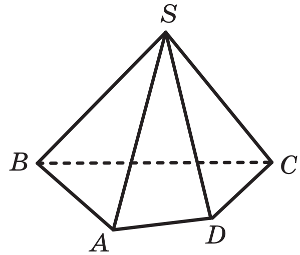


Fig. 28.18

28.14.••Se dă piramida *MABCD,* punctul *K* aparține segmentului *BD* (fig. 28.20). Construiți linia de intersecție a planelor *MCK* şi *MAB*.

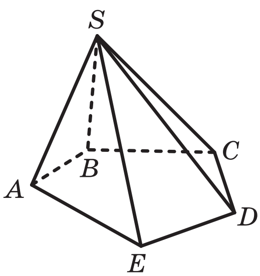


Fig. 28.19

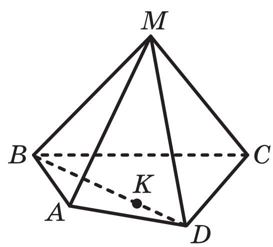


Fig. 28.20

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

28.15. Diagonala trapezului isoscel îl împarte în două triunghiuri isoscele. Găsiți unghiurile trapezului.

29. Amplasarea reciprocă a două drepte în spaţiu

Din cursul de planimetrie ştiți că două drepte se consideră că se intersectează, dacă ele au un singur punct comun. O asemenea definiție se dă dreptelor ce se intersectează şi în stereometrie.

Ştiți de asemenea, că două drepte sunt numite paralele, dacă ele nu se intersectează. Se poate această definiție să fie transferată şi în stereometrie?

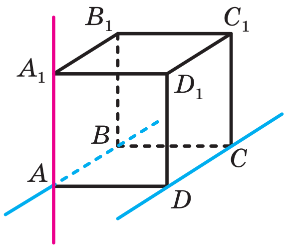


Fig. 29.1

Să ne adresăm la figura 29.1 pe care este prezentat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nici una din dreptele AB şi AA_1 nu au cu dreapta DC puncte comune. În acest caz dreptele AB şi DC sunt situate în acelaşi plan – în planul ABC, iar dreptele AA_1 şi DC nu sunt situate în acelaşi plan, adică nu există plan care trece prin aceste drepte.

Exemplul dat arată că în stereometrie pentru două drepte care nu au un punct comun, există două cazuri de amplasare reciprocă: dreptele se află în acelaşi plan şi dreptele nu se află în acelaşi plan. Pentru fiecare din aceste cazuri vom introduce definiția corespunzătoare.

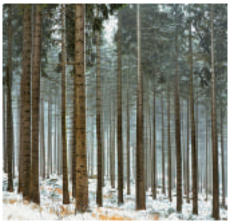
Definiție. Două drepte în spațiu se numesc paralele dacă ele se află într-un plan şi nu se intersectează.

Dacă dreptele a şi b sunt paralele, atunci se scrie: $a \parallel b$.

Definiție. Două drepte în spațiu se numesc neconcurente dacă ele nu se află într-un singur plan.

De exemplu, în figura 29.1 dreptele AB şi DC – paralele, iar dreptele AA_1 şi DC – neconcurente.

Centrul mondial de cultură şi arte, or. Kiev



Lemnul de pădure pentru construirea corăbiilor

Casă din buşteni

Fig. 29.2

O imagine intuitivă a dreptelor paralele o dau coloanele clădirii, lemnul de pădure pentru construirea corăbiilor, o casă din buşteni (figura 29.2).

Fig. 29.3

O închipuire despre dreptele neconcurente oferă firele liniilor de transmisie electrică, diferite elemente ale construcțiilor (figura 29.3).

Deci, există trei cazuri posibile de amplasare reciprocă a două drepte în spațiu (figura 29.4):

1) drepte ce se intersectează;
2) drepte paralele;
3) drepte neconcurente.

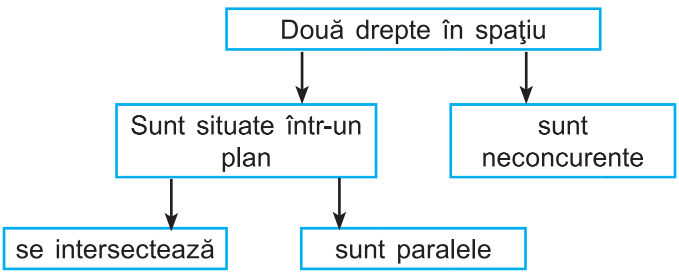


Fig. 29.4

Două segmente se numesc **paralele (neconcurente),** dacă ele sunt situate pe drepte paralele (neconcurente).

De exemplu, muchiile AA_1 şi BB_1 ale prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 29.5) sunt paralele, iar muchiile AC şi BB_1 – neconcurente.

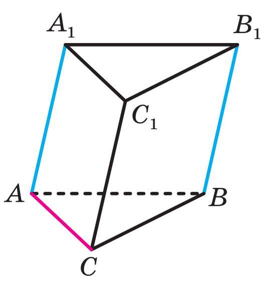


Fig. 29.5

Teorema 29.1. ***Prin două drepte paralele trece un plan şi numai unul singur.***

Demonstrație. Fie date dreptele paralele a şi b. Demonstrați, că există aşa un plan unic α, încât $a \subset \alpha$ şi $b \subset \alpha$.

Existența unui plan α, care trece prin dreptele *a* şi *b*, rezultă din definiția dreptelor paralele.

Dacă admitem, că există un alt plan, care trece prin dreptele *a* şi *b*, atunci prin dreapta *a* şi un punct al dreptei *b* vor trece două plane diferite, cea ce contrazice teoremei 27.1. ◄

În punctul 27 erau indicate trei moduri de definire a planului. Teorema 29.1 poate fi considerată ca încă un mod de a determina planul – cu ajutorul a două drepte paralele.

A stabili paralelismul a două drepte, care se află într-un plan, se poate cu ajutorul a bine cunoscutelor criterii de paralelism a două drepte din cursul de planimetrie. Dar cum de stabilit dacă două drepte sunt neconcurente? Răspunsul la această întrebare dă următoarea teoremă.

Teorema 29.2 (criteriul dreptelor neconcurente). ***Dacă una din două drepte se află într-un plan, iar cea de-a doua intersectează acest plan într-un punct, care nu aparține primei drepte, atunci dreptele date sunt neconcurente*** (fig. 29.6).

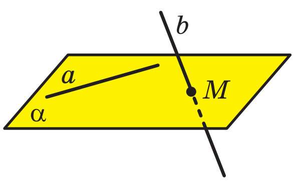


Fig. 29.6

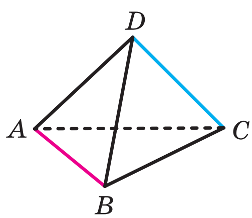


Fig. 29.7

În figura 29.7 muchiile *AB* şi *DC* ale tetraedrului *DABC* sunt neconcurente. Într-adevăr, dreapta *DC* intersectează planul *ABC* în punctul *C*, care nu aparține dreptei *AB*. Deci, conform criteriului dreptelor neconcurente, dreptele *AB* şi *DC* sunt neconcurente.

?

1. Care două drepte în spaţiu se numesc paralele? neconcurente?
2. Care sunt cazurile de amplasare reciprocă a două drepte în spaţiu?
3. Care două segmente sunt numite paralele? neconcurente?
4. Formulaţi teorema despre planul, care este dat de două drepte paralele.
5. Formulaţi criteriul dreptelor neconcurente.

EXERCIŢII

29.1.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 29.8). Numiți muchiile lui: 1) paralele cu muchia CD; 2) neconcurente cu muchia CD.

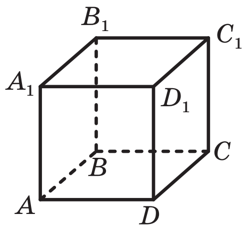


Fig. 29.8

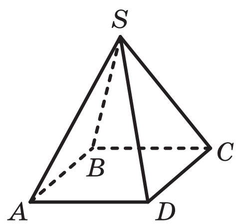


Fig. 29.9

29.2.° Indicați modele de drepte neconcurente, folosind obiecte din clasă.

29.3.° Se dă piramida $SABCD$ (fig. 29.9). Numiți muchiile piramidei care sunt neconcurente cu muchia SA.

29.4.° Este dat paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 29.10). Indicați amplasarea reciprocă a dreptelor:

1) BC şi A_1C;
2) AB şi C_1D_1;
3) BD şi CC_1;
4) AB_1 şi DC_1;
5) DC_1 şi BB_1;
6) AA_1 şi CC_1.

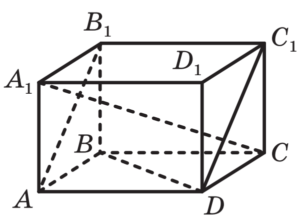


Fig. 29.10

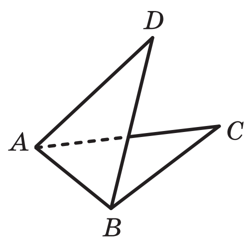


Fig. 29.11

29.5.° Este oare corectă afirmația:

1) două drepte, care nu sunt paralele, au un punct comun;
2) două drepte, care nu sunt neconcurente sunt situate într-un plan;
3) două drepte sunt neconcurente, dacă ele nu se intersectează şi nu sunt paralele?

29.6.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 29.8). Demonstrați, că dreptele AA_1 şi BC sunt neconcurente.

29.7.° Triunghiurile ABC şi ADB sunt situate în plane diferite (fig. 29.11). Care este amplasarea reciprocă a dreptelor AD şi BC? Argumentaţi răspunsul.

29.8.• Cum poate fi amplasarea reciprocă a dreptelor b şi c, dacă:
1) dreptele a şi b se intersectează, iar dreptele a şi c sunt paralele;
2) dreptele a şi b sunt paralele, iar dreptele a şi c sunt neconcurente?

29.9.• Câte plane pot fi date cu trei perechi de drepte paralele două câte două? Faceţi un desen.

29.10.• Capătul A al segmentului AB aparţine planului α. Prin punctul B şi punctul C care aparţin segmentului AB, sunt duse drepte paralele, care intersectează planul α corespunzător în punctele B_1 şi C_1.
1) Găsiţi segmentul BB_1, dacă punctul C este mijlocul segmentului AB şi $CC_1 = 5$ cm.
2) Găsiţi segmentul CC_1, dacă $AC : BC = 3 : 4$ şi $BB_1 = 28$ cm.

29.11.• Capătul C al segmentului CD aparţine planului β. Pe segmentul CD este notat punctul E astfel, că $CE = 6$ cm, $DE = 9$ cm. Prin punctele D şi E sunt duse drepte paralele, care intersectează planul β în punctele D_1 şi E_1 corespunzător. Găsiţi segmentul DD_1, dacă $EE_1 = 12$ cm.

29.12.•• Pe segmentul AB, care nu intersectează planul α, este notat punctul C astfel,că $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm. Prin punctele A, B şi C sunt duse drepte paralele, care intersectează planul α în punctele A_1, B_1 şi C_1 corespunzător. Găsiţi segmentul A_1C_1, dacă $B_1C_1 = 10$ cm.

29.13.•• Punctul C – mijlocul segmentului AB, care nu intersectează planul β. Prin punctele A, B şi C sunt duse dreptele paralele, care intersectează planul β corespunzător în punctele A_1, B_1 şi C_1. Găsiţi segmentul AA_1, dacă $BB_1 = 18$ cm, $CC_1 = 15$ cm.

29.14.* Prin capetele segmentului AB, care intersectează planul α, şi mijlocul segmentului C sunt duse drepte paralele, care intersectează planul α în punctele A_1, B_1 şi C_1 corespunzător (fig. 29.12). Găsiţi segmentul CC_1, dacă $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 8$ cm.

29.15.* Triunghiul ABC nu are puncte comune cu planul α. Segmentul BM – mediana triunghiului ABC, punctul O – mijlocul segmentului BM. Prin punctele A, B, C, M şi O sunt duse dreptele paralele, care intersectează planul α respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, M_1 şi O_1. Găsiţi segmentul BB_1, dacă $AA_1 = 17$ cm, $CC_1 = 13$ cm, $OO_1 = 12$ cm.

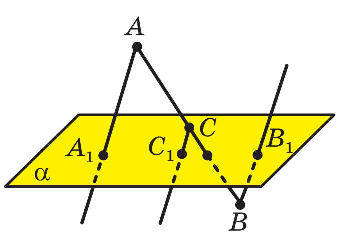


Fig. 29.12

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

29.16. Punctul E – mijlocul medianei BM al triunghiului ABC. Dreapta AE intersectează latura BC în punctul K. Aflați raportul în care punctul K împarte segmentul BC, socotind de la vârful B.

30. Paralelismul dreptei şi a planului

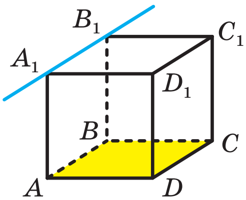


Fig. 30.1

Ştiți deja două cazuri posibile de amplasare reciprocă a dreptei și a planului:

1) dreapta aparține planului, adică toate punctele dreptei aparțin planului;
2) dreapta intersectează planul, adică dreapta are un singur punct comun cu planul.

Este clar că este posibil şi al treilea caz, atunci când dreapta şi planul nu au puncte comune. De exemplu dreapta care conține muchia A_1B_1 a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$, nu are puncte comune cu planul ABC (fig. 30.1).

Definiție. Dreapta şi planul se numesc paralele dacă ele nu au puncte comune.

Dacă dreapta a şi planul α sunt paralele, atunci se scrie: $a \parallel \alpha$. De asemenea se spune că dreapta a este paralelă cu planul α, iar planul α paralel cu dreapta a.

O imagine intuitivă a unei drepte paralele cu un plan, dau unele echipamente sportive, de exemplu, paralele sunt paralele la planul podelii (fig. 30.2). Un alt exemplu este burlanul: el este paralel cu planul peretelui (fig. 30.3).


Fig. 30.2


Fig. 30.3

Este dificil să se determine dacă dreapta şi planul sunt paralele, cu ajutorul definiției. Este mult mai efectiv să ne folosim de o astfel de teoremă.

Teorema 30.1 (criteriul de paralelism al dreptei şi a planului). ***Dacă dreapta, care nu aparține planului dat este paralelă cu orice dreaptă care aparține planului dat, atunci dreapta dată este paralelă cu însuşi planul.***

De exemplu, în figura 30.1 dreptele A_1B_1 şi AB conțin laturile opuse ale pătratului ABB_1A_1. Aceste drepte sunt paralele. Deoarece $AB \subset ABC$, atunci în virtutea criteriului de paralelism al dreptei şi a planului $A_1B_1 \parallel ABC$.

Segmentul se numeşte **paralel la plan,** dacă el aparține dreptei, paralele cu acest plan. De exemplu, muchia AB a cubului este paralelă cu planului CDD_1 (fig. 30.1).

Voi puteți stabili paralelismul a două drepte cu ajutorul teoremelor-criterii cunoscute din planimetrie. Să examinăm teoremele care descriu condițiile suficiente pentru paralelismul a două drepte în spațiu.

Teorema 30.2. ***Dacă planul trece prin dreapta dată, paralelă cu alt plan şi intersecterază acest plan, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu acestă dreaptă.***

În figura 30.4, dreapta a este paralelă cu planul α. Planul β trece prin dreapta a și intersectează planul α printr-o dreaptă b. Atunci $b \parallel a$.

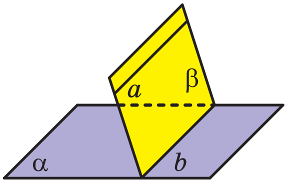


Fig. 30.4

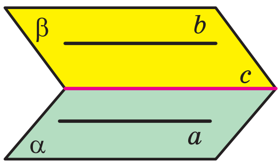


Fig. 30.5

Teorema 30.3. ***Dacă prin fiecare din cele două drepte paralele este dus câte un plan, totodată aceste plane se intersectează după o dreaptă diferită de cele două, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu fiecăre din cele două drepte date.***

În figura 30.5 dreptele a şi b sunt paralele, planul α trece prin dreapta a, iar planul β – prin dreapta b, $\alpha \cap \beta = c$. Atunci $c \parallel a$ şi $c \parallel b$.

Teorema 30.4. ***Două drepte paralele cu a treia dreaptă sunt paralele între ele.***

Problemă. Demonstrați, că dacă dreapta este paralelă cu fiecare din două plane care se intersectează, atunci ea este paralelă cu dreapta de intersecție a lor.

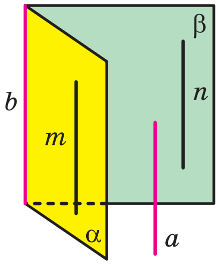


Fig. 30.6

Rezolvare. Fie că se dă dreapta a şi planele α şi β astfel, că $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (fig. 30.6). Să demonstrăm, că $a \parallel b$.

În planele α şi β se vor găsi corespunzător astfel de drepte m şi n, că $m \parallel a$ şi $n \parallel a$. Dacă cel puțin una din dreptele m şi n coincide cu dreapta b, atunci afirmația problemei este demonstrată. Dacă fiecare din dreptele m şi n diferă de dreapta b, atunci conform teoremei 30.4 obținem, că $m \parallel n$.

Folosind teorema 30.3, ajungem la cocluzia, că $b \parallel n$. Dar $n \parallel a$, deci $a \parallel b$. ◀

1. În ce caz dreapta şi planul sunt numite paralele?
2. Formulaţi criteriul de paralelism al dreptei şi a planului.
3. Care segment se numeşte paralel cu planul?
4. Formulaţi teorema care descrie condiţia suficientă a paralelismului a două drepte în spaţiu.

EXERCIŢII

30.1.° Indicați între obiectele care vă încojoară, modele de plan şi dreaptă care îi este paralelă.

30.2.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 30.7). Cu planurile căror fețe ale cubului sunt paralele muchiile: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

30.3.° Se dă paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 30.8), punctele E şi F – mijlocurile muchiilor CC_1 şi DD_1 corespuzător. Scrieți fețele paralelipipedului cărora le este paralelă dreapta: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

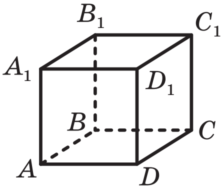


Fig. 30.7

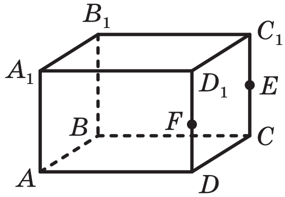


Fig. 30.8

30.4.° Dreapta a este paralelă cu planul α. Este corectă afirmația, că dreapta a este paralelă oricărei drepte care aparține planului α?

30.5.° Se dau dreptele a şi b şi planul α. Este oare corectă afirmația:
1) dacă $a \parallel \alpha$ şi $b \parallel \alpha$, atunci $a \parallel b$;
2) dacă $a \parallel b$ şi $b \subset \alpha$, atunci $a \parallel \alpha$?

30.6.° Dreapta a şi planul α sunt paralele cu dreapta b. Care poate fi amplasarea reciprocă a dreptei a şi a planului α?

30.7.° Dreptele a şi b se intersectează, iar planul α este paralel cu dreapta a. Care poate fi amplasarea reciprocă a dreptei b şi a planului α?

30.8.• Punctele M şi K – mijlocurile corespunzătoare ale laturilor AB şi BC ale triunghiului ABC. Punctul D nu aparține planului ABC. Demonstrați, că $MK \parallel ADC$.

30.9.• Punctele E şi F – mijlocurile corespunzătoare ale laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$. Dreapta EF este situată pe planul α, diferit de planul trapezului. Demonstrați, că dreptele AD şi BC sunt paralele cu planul α.

30.10.• Segmentele BC şi AD – bazele trapezului $ABCD$. Triunghiul BMC şi trapezul $ABCD$ nu sunt situate pe un plan (fig. 30.9). Punctul E – mijlocul segmentului BM, punctul F – mijlocul segmentului CM. Demostrați, că $EF \parallel AD$.

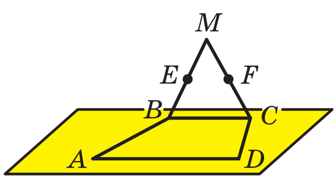


Fig. 30.9

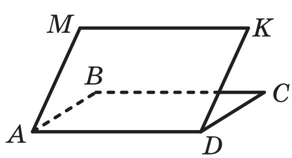


Fig. 30.10

30.11.• Paralelogeramele $ABCD$ şi $AMKD$ nu sunt situate pe un plan (fig. 30.10). Demonstrați, că patrulaterul $BMKC$ este paralelogram.

30.12.• Planul α este paralel cu latura AC a triunghiului ABC, intersectează laturile AB şi BC în punctele A_1 şi C_1 corespunzător (fig. 30.11). Aflați segmentul A_1C_1, dacă $AC = 18$ cm şi $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

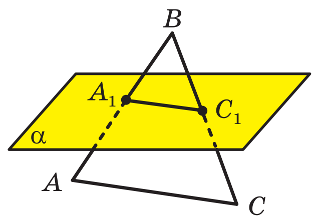


Fig. 30.11

30.13.• Planul α care este paralel cu latura AB a triunghiului ABC, intersectează laturile AC şi BC în punnctele E şi F corespunzător. Găsiți raportul $AE : EC$, dacă $CF : CB = 3 : 11$.

30.14.•• Vârfurile A şi C ale triunghiului ABC aparțin planului α, iar vârful B nu aparține acestui plan. Pe laturile AB şi BC sunt notate corespunzător punctele E şi F astfel, că $BA : BE = BC : BF$. Demonstrați, că dreapta EF este paralelă cu planul α.

30.15.•• Punctul M – mijlocul laturii AB a triunghiului ABC. Planul α trece prin punctul M paralel la dreapta AC şi intersectează latura BC în punctul K. Demonstrați, că punctul K – mijlocul laturii BC. Aflați aria patrulaterului $AMKC$, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 28 cm^2.

30.16.•• Pe muchia CC_1 a paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este notat punctul M (fig. 30.12). Construiți linia de intersecție a planelor: 1) ADM şi BB_1C_1; 2) AA_1M şi DCC_1.

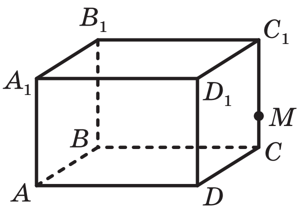


Fig. 30.12

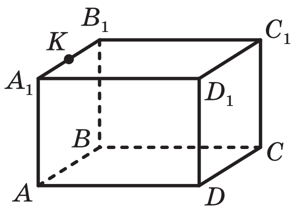


Fig. 30.13

30.17.•• Pe muchia A_1B_1 a paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este notat punctul K (fig. 30.13). Construiți linia de intersecție a planelor: 1) CC_1K şi ABB_1; 2) CDK şi ABB_1.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

30.18. Laturile latarale ale trapezului dreptunghiular se raportă ca 3 : 5, iar diferența bazelor este egală cu 16 cm. Aflați aria trapezului, dacă diagonala cea mai mică este egală cu 13 cm.

31. Paralelismul planelor

Analizăm variantele posibile pentru amplasarea reciprocă a două plane.

Voi ştiți, că două plane pot avea puncte comune, adică să se intersecteaze. Este clar că două plane ar putea să nu aibă puncte comune. De exemplu, planele ABC şi $A_1B_1C_1$, care conţin bazele prizmei, nu au puncte comune (fig. 31.1).

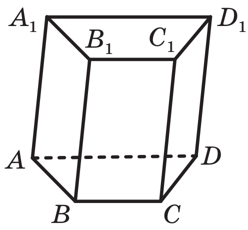


Fig. 31.1

Definiţie. Două plane se numesc paralele, dacă ele nu au puncte comune.

Dacă planele α şi β sunt paralele, atunci se scrie: $\alpha \parallel \beta$. De asemenea, este primit să spunem că planul α este paralel cu planul β sau planul β este paralel cu planul α.

O imagine intuitivă a planelor paralele este dată de podul și podeaua camerei; suprafața apei turnată în acvariu și fundul lui (figura 31.2).

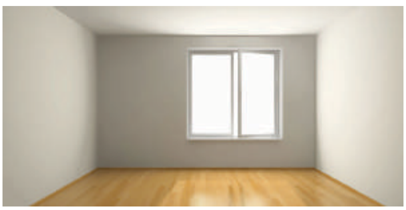


Fig. 31.2

Din definiția planelor paralele rezultă, că *orice dreaptă care se află în unul din cele două plane paralele este paralelă* şi *cu cel de-al doilea plan.*

În cazurile, cînd este necesar să se determine dacă două plane sunt paralele, este convenabil să folosim o astfel de teoremă.

Teorema 31.1 (criteriul de paralelism a două plane). ***Dacă două drepte care se intersectează ale unui plan sunt paralele corespunzător cu două drepte din alt plan, atunci aceste plane sunt paralele.***

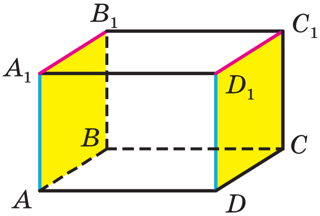


Fig. 31.3

De exemplu, în figura 31.3 este reprezentat paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Avem: $AA_1 \parallel DD_1$ şi $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Atunci după criteriul de paralelism a două plane $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Vom spune, că **două poligoane sunt paralele,** dacă ele sunt situate în două plane paralele. De exemplu, fețele AA_1B_1B şi DD_1C_1C ale paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt paralele (fig. 31.3).

Să analizăm câteva proprietăți ale planelor paralele.

Teorema 31.2. ***Printr-un punct în spaţiu, care nu aparţine planului dat, trece un plan paralel cu planul dat, şi numai unul singur*** (fig. 31.4).

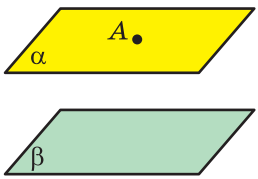


Fig. 31.4

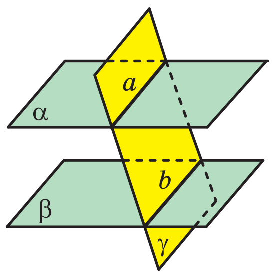


Fig. 31.5

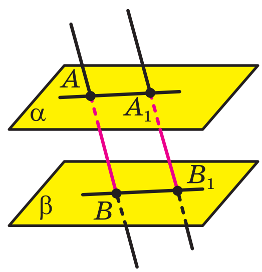


Fig. 31.6

Teorema 31.3. ***Dreptele de intersecţie a două plane paralele cu al treilea plan sunt paralele*** (fig. 31.5).

Problemă. Demonstaţi, că segmentele dreptelor paralele, care se conţin între planele paralele, sunt egale.

Rezolvare. Fie că se dau planele paralele α şi β şi dreptele paralele AB şi A_1B_1 astfel, că $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (fig. 31.6). Să demonstrăm, că $AB = A_1B_1$.

Dreptele paralele AB şi A_1B_1 specifică un plan γ, totodată $\alpha \cap \gamma = AA_1$ şi $\beta \cap \gamma = BB_1$.

După teorema 31.3 obţinem, că $AA_1 \parallel BB_1$. Deci, patrulaterul AA_1B_1B – paralelogram. De aici $AB = A_1B_1$. ◄

1. Care plane se umesc paralele?
2. Formulaţi criteriul de paralelism al planelor.
3. În ce caz se spune, că două poligoane sunt paralele?
4. Formulaţi proprietăţile planelor paralele.

EXERCIŢII

31.1.° Este oare corectă afirmația:
1) dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă a unui plan este paralelă oricărei drepte a celui de-al doilea plan.
2) dacă dreapta care se află într-un plan este paralelă cu dreapta din cel de-al doilea plan, atunci planele date sunt paralele?

31.2.° Paralelogramele $ABCD$ şi $AEFD$ nu sunt situate într-un plan (fig. 31.7). Demonstrați, că planele ABE şi DCF sunt paralele.

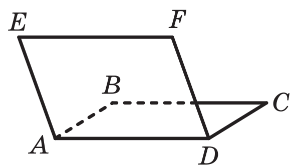


Fig. 31.7

31.3.° Se poate oare de afirmat, că planul α este paralel cu planul trapezului, dacă planul α este paralel:
1) cu bazele trapezului;
2) cu laturile laterale ale trapezului?

31.4.° Este oare corectă afirmația: dacă dreptele de intersecție a două plane cu al treilea plan sunt paralele, atunci planele date sunt paralele?

31.5.° Planele α şi β sunt paralele. În planul α sunt luate punctele C şi D, iar în planul β – punctele C_1 şi D_1 astfel, că dreptele CC_1 şi DD_1 sunt paralele. Aflați segmentele DD_1 şi C_1D_1, dacă $CD = 12$ cm, $CC_1 = 4$ cm.

31.6.° Triunghiul ABC se află în planul α. Prin vârfurile lui sunt duse drepte paralele, care intersectează planul β, paralel cu planul α, în punctele A_1, B_1 şi C_1. Aflați perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu 20 cm.

31.7.• Punctele M, N şi K – mijlocurile muchiilor AB , AC şi AD ale tetraedrului $DABC$. Demonstrați, că planele MNK şi BCD sunt paralele.

31.8.• Pe muchiile DA, DB şi DC ale tetraedrului $DABC$ sunt notate corespunzător punctele E, F şi K astfel, că $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Demonstați, că panele EFK şi ABC sunt paralele.

31.9.$^{\bullet}$ Se dau planele paralele α şi β. Segmentul AB şi punctul C sunt situate în planul α, punctul D – în planul β (fig. 31.8). Construiţi linia de intersecţie: 1) a planului β cu planul ABD; 2) a planului β cu planul BCD.

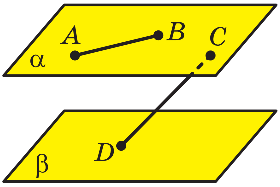


Fig. 31.8

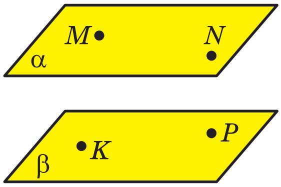


Fig. 31.9

31.10.$^{\bullet}$ Se dau planele paralele α şi β. Punctele M şi N sunt situate în planul α, punctele K şi P – în planul β (fig. 31.9). Construiţi linia de intersecţie:
1) a planului α cu planul MKP;
2) a planului β cu planul MNK.

31.11.$^{\bullet\bullet}$ Planele paralele α şi β intersectează latura BA a unghiului ABC în punctele A_1 şi A_2 corespunzător, iar latura BC – în punctele C_1 şi C_2 corespunzător. Aflaţi
1) segmentul A_1C_1, dacă $A_2C_2 = 36$ cm, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) segmentul C_1C_2, dacă $A_1C_1 = 14$ cm, $A_2C_2 = 21$ cm, $BC_1 = 12$ cm.

31.12.$^{\bullet\bullet}$ Planele α şi β sunt paralele. Punctele A şi B sunt situate în planul α, punctele C şi D – în planul β. Segmentele AC şi BD se intersectează în punctul O.
1) Demonstraţi, că $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$.
2) Aflaţi segmentul AB, dacă $CD = 32$ cm, $AC : AO = 7 : 3$.

31.13.$^{\bullet\bullet}$ Punctul M aparţine muchiei A_1D_1 a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Construiţi linia de intersecţie a planelor BDD_1 şi CC_1M.

31.14.$^{\bullet\bullet}$ Punctul E aparţine muchiei B_1C_1 a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Construiţi linia de intersecţie a planelor ACC_1 şi BED.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

31.15. Diagonalele pătratului $ABCD$ se intersectrează în punctul O. Pe segmenntul OC este notat punctul M astfel, că $CM : MO = 1 : 2$. Aflaţi tg $\angle BMO$.

32. Proiectarea paralelă

Numeroase fenomene și procese, pe care le întâlnim în viața zi de zi, servesc ca exemple de transformări, în care imaginea unei figuri din spațiu este o figură plată. Unul dintre aceste fenomene poate fi văzut în vremea însorită când obiectul aruncă umbra pe o suprafață plată (figura 32.1). Acest exemplu reprezintă **transformarea unei figuri,** numită **proiectare paralelă.** Cu ajutorul acestei transformări pe plan se creează imaginile figurilor spațiale.

Fig. 32.1

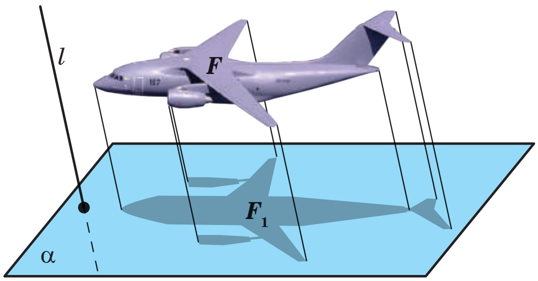


Fig. 32.2

Multe desene din manualul vostru, în care sunt reprezentate figuri spațiale, pot fi considerate ca umbre pe care le aruncă pe planul paginii obiectele iluminate cu raze paralele.

Să aflăm mai multe despre proiectarea paralelă.

Fie că se dă planul α, dreapta l, care intersectează acest plan şi figura F (fig. 32.2). Prin fiecare punct al figurii F ducem o dreaptă paralelă cu dreapta l (dacă punctul figurii F aparține dreptei l, atunci o considerăm pe însăşi dreapta l). Punctele de intersecție ale tuturor dreptelor duse cu planul α formează o oarecare figură F_1. Transformarea descrisă a figurii F se numește proiectare paralelă. Figura F_1 se numește **proiecția paralelă a figurei F pe planul α în direcția dreptei l.** Figura F_1 se numește de asemenea și **imaginea figurii F pe planul α în direcția dreptei l.**

Alegând poziții favorabile ale planului α şi a dreptei l, se poate obține o imagine intuitivă a acestei figuri F. Acest lucru este legat cu faptul că proiectarea paralelă are o serie de proprietăți minunate (vezi teoremele 32.1-32.3). Datorită acestor proprietăți imaginea figurii se asemănă cu însăşi figura.

Fie că se dă planul α şi dreapta l, care intersectează acest plan.

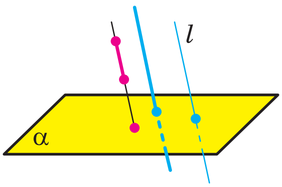


Fig. 32.3

Dacă dreapta este paralelă cu dreapta l, atunci proiecția ei pe planul α este un punct (fig. 32.3). Proiecția dreptei l de asemenea este un punct.

Dacă segmentul este paralel cu dreapta l sau se află pe dreapta l, atunci proiecția lui pe planul α este un punct (fig. 32.3).

În teoremele aduse mai jos vom cerceta drepte şi segmente, care nu sunt paralele cu dreapta l şi nu se află pe ea.

Teorema 32.1. ***Proiecț**ia **paralelă a dreptei este o dreaptă; proiecția paralelă a segmentului este segment*** (fig. 32.4).

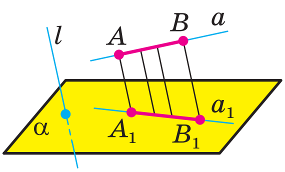


Fig. 32.4

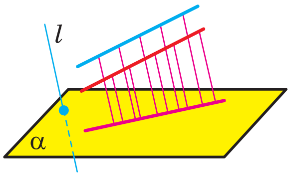


Fig. 32.5

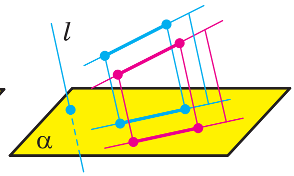


Fig. 32.6

Teorema 32.2. ***Proiecția paralelă a două drepte paralele este sau o dreaptă*** (fig. 32.5), ***sau două drepte paralele*** (fig. 32.6)**.** ***Proiecția paralelă a două segmente paralele se află pe o dreaptă s-au pe drepte paralele*** (fig. 32.6).

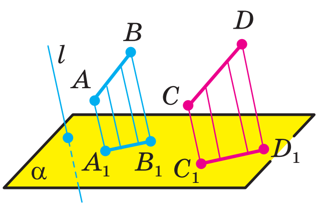
Teorema 32.3. ***Raportul proiecțiilor paralele ale segmentelor care se află pe o dreaptă sau pe drepte paralele, este egal cu raportul a înseşi segmentelor date*** (fig. 32.7).

Să cercetăm imaginile unor poligoane pe planul α în direcția dreptei l.

Dacă dreapta l este paralelă cu planul poligonului sau aparține planului dat, atunci imaginea poligonului este un segment.

Acum, să analizăm cazul când dreapta l intersectează planul poligonului.

Din proprietățile proiectării paralele, rezultă că proiecția paralelă a triunghiul este triunghi (figura 32.8).



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Fig. 32.7

Deoarece la proiectarea paralelă se păstrează paralelismul segmentelor, rezultă că imaginea paralelogramului (în particular a dreptunghiului, rombului, pătratului) este paralelogram (fig.32.9).

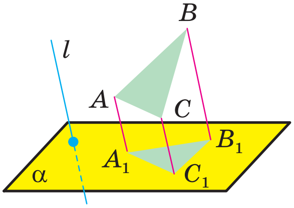


Fig. 32.8

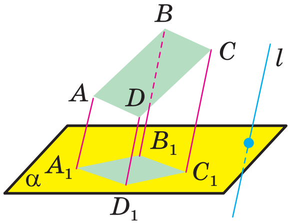


Fig. 32.9

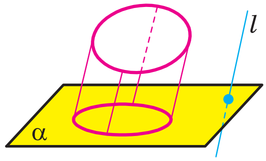


Fig. 32.10

De asemenea din proprietățile proiectării paralele rezultă, că imaginea trapezului este trapez.

Proecția paralelă a unei circumferințe este o figură, numită **elipsă** (fig. 32.10).

Reprezentarea obiectelor cu ajutorul proiectării paralele pe larg se foloseşte în diferite ramuri ale industriei, de exemplu, în construcția de automobile (fig. 32.11).

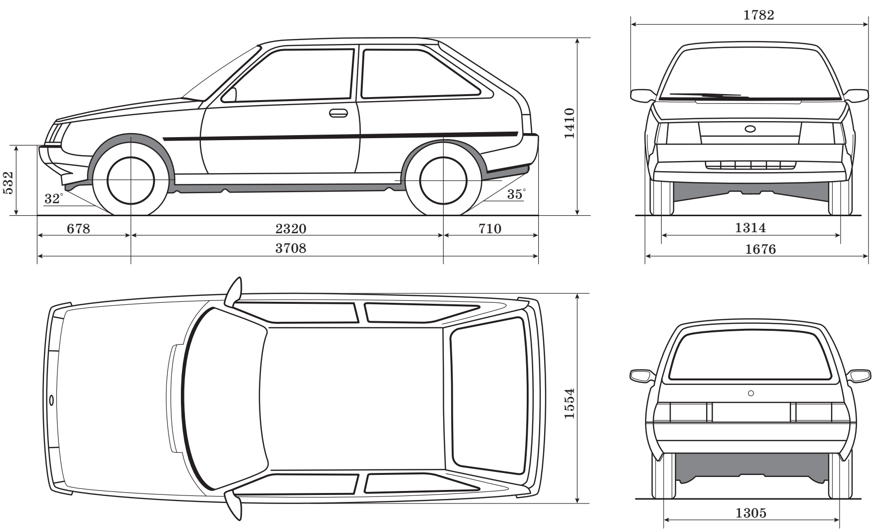


Fig. 32.11

1. Descrieţi transformarea figurii, care se numeşte proiectare paralelă.
2. Formulaţi proprietăţile proiectării paralele.

EXERCIŢII

32.1.° Figura este compusă din trei puncte. Din ce număr de puncte poate fi formată proiecția paralelă a acestei figuri?

32.2.° Poate fi oare proiecția paralelă a două drepte, care se intersectează:
1) două drepte care se intersectează;
2) două drepte paralele;
3) o dreaptă;
4) o dreaptă și un punct în afara ei?

32.3.° Care figură geometrică nu poate fi proiecție paralelă a două drepte neconcurente:
1) două drepte paralele;
2) două drepte, care se intersectează;
3) o dreaptă;
4) o dreaptă și un punct în afara ei?

32.4.° 1) Pot oare segmentele egale sa fie proiecția paralelă a segmentelor neegale?
2) Pot oare segmetele neegale sa fie proecții paralele a segmentelor egale?
3) Poate oare proiecția paralelă a segmentului să fie mai mare decât segmentul dat?
4) Poate oare proiecția paralelă a dreptei să fie paralelă cu drepta dată?

32.5.° Poate oare figura reprezentată în figura 32.12 să fie proecția paralelă a triunghiului?

32.6.° Poate oare proiecția paralelă a trapezului să fie patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, unghiurile căruia A_1, B_1, C_1 şi D_1 corespunzător sunt egale cu:
1) 10°, 40°, 140°, 170°; 2) 50°, 130°, 50°, 130°?

32.7.° Poate oare proiecția paralelă a paralelogramului să fie patrulaterul cu laturile 6 cm, 8 cm, 6 cm, 9 cm?

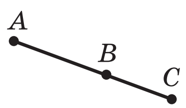


Fig. 32.12

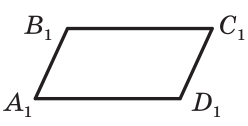


Fig. 32.13

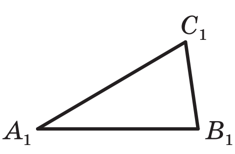


Fig. 32.14

32.8.• Punctele A_1,B_1 şi C_1 sunt proiecţii paralele ale punctelor A, B şi C, care sunt situate pe o dreaptă (punctul B este situat între punctele A şi C). Găsiţi segmentul B_1C_1 , dacă $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm.

32.9.• Punctele A_1,B_1 şi C_1 sunt proiecţiile paralele ale punctelor A, B şi C, care sunt situate pe o dreaptă (punctul B_1 este situat între punctele A_1 şi C_1). Găsiţi segmentul A_1C_1 , dacă $AB = 10$ cm, $AC = 16$ cm, $B_1C_1 = 3$ cm.

32.10.•• Paralelogramul $A_1B_1C_1D_1$ este imaginea dreptunghiului $ABCD$ (fig. 32.13). Construiţi imaginea perpendicularei, duse din punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului pe latura BC.

32.11.•• Triunghiul $A_1B_1C_1$ este imaginea triunghiului dreptunghic ABC cu ipotenuza AB (fig. 32.14). Construiţi imaginea perpendicularei duse din mijlocul ipotenuzei pe cateta AC.

32.12.•• Triunghiul $A_1B_1C_1$ – imaginea triunghiului ABC. Construiţi imaginea bisectoarei a triughiului ABC, dusă din vârful B, dacă $AB : BC = 1 : 2$.

32.13.•• Triunghiul $A_1B_1C_1$ – imaginea triunghiului isoscel ABC cu baza AC. Construiţi imaginea centrului circumferinţei înscrise în triunghiul ABC, dacă $AB : AC = 5 : 4$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

32.14. În dreptughiul $ABCD$ este cunoscut, că $AB = 6$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Aflaţi unghiul făcut de dreptele AC şi BD.

UCRAINA ARE TALENTE!

Cum trebuie de clădit portocalele într-o cutie mare, pentru ca să încapă în ea că mai multe? Această întrebare, care la prima vedere este simplă şi neserioasă, are o istorie veche. În a. 1611, astronomul, matematicianul şi filozoful german Iohannes Kepler, cunoscut prin descoperirea legilor mişcării planetelor ale sistemul Solar, a formulat problema despre împachetarea optimală a bilelor în spaţiu. Keprler a înaintat ipoteza, conform căreia optimală va fi amplasarea bilelelor astfel, precum sunt expuse portocalele în magazine sau pieţe (fig. 32.15).

Pe parcursul a 400 de ani cei mai de vază matematicieni au încercat să argumenteze această presupunere. Ultimul cuvânt în această întrebare a fost spus abia în a. 2017. Demonstrarea ipotezei lui Kepler, care conținea o alegere computațională colosală de variante şi care s-a controlat cu multă migală 19 ani, în sfârşit a fost recunoscută corectă.

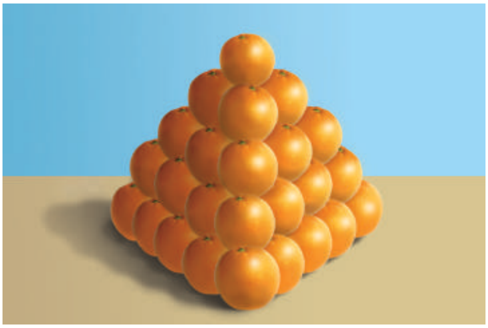


Fig. 32.15

Un rol important în această istorie multiseculară l-au jucat tinerii savanți ucraineni în domeniul matematicii A. Bondarenko, M. Viazovsika şi D. Radcenko, care au învățat la universitatea de stat din Kiev Taras Şevcenko. În anul 2016 au apărut articolele cu rezolvarea problemei lui Kepler pentru cazurile spațiului cu dimensionalitățile 8 şi 24. Marina Viazovsika, autoarea acestor articole, a fost premiată cu premiul Salem. Acest premiu este deosebit de prestigios. Mai presus este doar premiul lui Fields – analogic premiului Nobel pentru matematicieni.

Acesta este un succes strălucitor al savanților ucraineni!

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Principalele axiome ale stereometriei

A1. În oricare punct al spațiului sunt adevărate axiomele planimetriei.
A2. Prin oricare trei puncte arbitrare ale spațiului, ce nu aparțin unei drepte, trece un plan, şi numai unul singur.
A3. Dacă două puncte ale dreptei aparțin planului, atunci şi toată dreapta aparține acestui plan.
A4. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă.

Planul se defineşte univoc de:

1) trei puncte, ce nu se află pe o dreaptă;
2) o dreaptă şi un punct, care nu-i aparține acestei drepte;
3) două drepte, ce se intersectează;
4) două drepte paralele.

Amplasarea reciprocă a două drepte în spațiu

Două drepte se numesc, că se intersectează, dacă ele au numai un singur punct comun.
Două drepte în spațiu se numesc paralele, dacă ele se află într-un plan, şi nu se intersectează.
Două drepte în spațiu se numesc neconcurente, dacă ele nu se află într-un plan.

Proprietățile dreptelor paralele

Prin două drepte paralele trece un plan, şi numai unul singur.

Criteriul dreptelor neconcurente

Dacă una din două drepte se află în plan, iar a doua intersectează acest plan într-un punct, care nu aparține primei drepte, atunci aceste drepte sunt neconcurente.

Paralelismul în spațiu

O dreaptă şi un plan se numesc paralele, dacă ele nu au puncte comune.
Două plane se numesc paralele, dacă ele nu au puncte comune.

Criteriul de paralelism al dreptei şi al planului

Dacă dreapta, ce nu aparține planului dat, este paralelă cu o oarecare dreaptă, ce aparține acestui plan, atunci dreapta dată este paralelă cu însuşi planul.

Condițiile de paralelism a două drepte în spațiu

Dacă planul trece prin dreapta dată, care este paralelă altui plan, şi intersectează acest plan, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu această dreaptă.
Dacă prin fiecare din două drepte paralele se duce un plan, şi totodată aceste plane se intersectează după o dreaptă, diferită de cele două date, atunci această dreaptă este paralelă cu fiecare din cele două drepte date.
Două drepte, paralele cu a treia dreaptă, sunt paralele între ele.

Criteriile de paralelism a două plane

Dacă două drepte, ce se intersectează ale unui plan sunt paralele corespunzător cu două drepte ale altui plan, atunci acest plane sunt paralele.

Proprietățile planelor paralele

Printr-un punct al spațiului, care nu aparține acestui plan, trece un plan, paralel cu planul dat, şi numai unul singur.
Dreptele de intersecție a două plane paralele cu al treilea plan sunt paralele.
Segmentele dreptelor paralele, care se află între planele paralele, sunt egale.

PERPENDICULARITATEA ÎN SPAŢIU §5

În acest paragraf veţi face cunoştinţă cu noţiunea de unghi format de două drepte în spaţiu, de unghi făcut de dreaptă şi plan, a unghiului dintre două plane; veţi afla, ce este proiecţia ortogonală, veţi studia proprietăţile proiecţiei ortogonale a poligonului.

33. Unghiul dintre drepte în spaţiu

Deoarece două drepte arbitrare ale spațiului, ce se intersectează, se află într-un plan, atunci unghiul dintre ele îl vom defini tot aşa, ca şi în planimetrie.

Definiție. Unghi dintre două drepte, ce se intersectează, se numeşte mărimea aceluia din unghiuri, creat la intersecția lor, care nu este mai mare decât 90° (fig. 33.1).

Se consideră că unghiul dintre două drepte paralele este egal cu 0°. Deci, dacă φ este unghiul dintre două drepte, care se află într-un plan, atunci $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Să introducem noțiunea de unghi dintre dreptele neconcurente.

Definiție. Unghi dintre două drepte neconcurente se numeşte unghiul dintre dreptele, care se intersectează şi sunt corespunzător paralele cu dreptele neconcurente date.

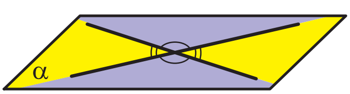


Fig. 33.1

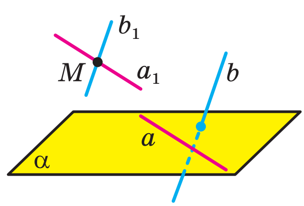


Fig. 33.2

Fie că dreptele a şi b sunt neconcurente. Prin punctul M al spațiului ducem două drepte a_1 şi b_1 astfel, că $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (fig. 33.2). Conform definiției, unghiul dintre dreptele neconcurente a şi b este egal cu unghiul dintre dreptele a_1 şi b_1, ce se intersectează.

Apare întrebarea naturală: depinde oare unghiul dintre dreptele neconcurente a şi b de alegerea punctului M? Să dăm răspuns la această întrebare ne ajută aşa o teoremă.

Teorema 33.1. ***Unghiul dintre două drepte ce se intersectează, este egal cu unghiul dintre altele două drepte, ce se intersectează şi sunt corespunzător paralele cu cele date.***

Folosindu-vă de teorema 33.1, se poate arăta, că *unghiul dintre dreptele neconcurente* a *şi* b *este egal cu unghiul dintre dreptele* a *şi* b_1 *ce se intersectează , unde* $b_1 \parallel b$.

De exemplu, în figura 33.3. este reprezentată prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$. Unghiul dintre dreptele neconcurente AA_1 şi BC este egal cu unghiul dintre dreptele BB_1 şi BC, ce se intersectează.

Definiţie. Două drepte în spaţiu se numesc perpendiculare, dacă unghiul dintre ele este egal cu 90°.

Menţionam, că dreptele perpendiculare se pot ori intersecta, sau să fie neconcurente.

Dacă dreptele a şi b sunt perpendiculare, atunci se scrie: $a \perp b$.

Două segmente în spaţiu se numesc **perpendiculare**, dacă ele se află pe drepte perpendiculare.

De exemplu, muchiile AD şi CC_1 ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt perpendiculare (fig. 33.4). Într-adevăr, deoarece $DD_1 \parallel CC_1$, atunci unghiul dintre dreptele AD şi CC_1 este egal cu unghiul dintre dreptele AD şi DD_1. Dar $\angle ADD_1 = 90°$, de aceea $AD \perp CC_1$.

Problemă. În figura 33.5 este reprezentat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflaţi unghiul dintre dreptele A_1D şi D_1C.

Rezolvare. Să unim punctele A_1 şi B. Deoarece $A_1D_1 \parallel BC$, de aceea punctele A_1, D_1, C şi B se află într-un plan. Acest plan intersectează planele paralele AA_1B şi DD_1C după dreptele paralele A_1B şi D_1C. Deci, unghiul dintre dreptele A_1D şi D_1C este egal cu unghiul DA_1B.

Unim punctele B şi D. Segmentele A_1D, A_1B şi BD sunt egale ca diagonale ale pătratelor egale. De aici, triunghiul A_1BD este echilateral. Atunci $\angle DA_1B = 60°$.

Răspuns: 60°. ◀

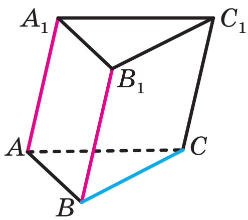


Fig. 33.3

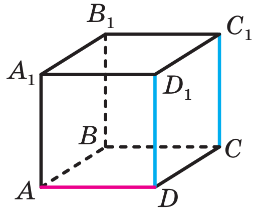


Fig. 33.4

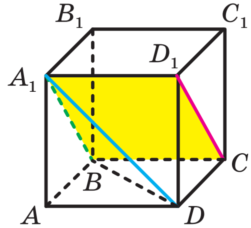


Fig. 33.5

1. Ce se numeşte unghi dintre două drepte, ce se intersectează?
2. Cu ce este egal unghiul dintre două drepte paralele?
3. Ce se numeşte unghi dintre două drepte neconcurente?
4. Care două drepte în spaţiu se numesc perpendiculare?
5. Care două segmente în spaţiu se numesc perpendiculare?

EXERCIŢII

33.1.° Câte drepte în spațiu se pot duce perpendicular la dreapta dată prin punctul: 1) care aparține dreptei date; 2) care nu aparține dreptei date?

33.2.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 33.6). Aflați unghiul dintre dreptele: 1) CD şi BC; 2) AA_1 şi C_1D_1; 3) AA_1 şi D_1C; 4) AC şi B_1D_1; 5) A_1C_1 şi AC.

33.3.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 33.6). Aflați unghiul dintre dreptele: 1) AB şi BB_1; 2) AB şi B_1D_1; 3) A_1D şi B_1C; 4) B_1D_1 şi C_1C.

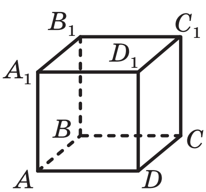


Fig. 33.6

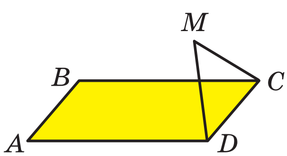


Fig. 33.7

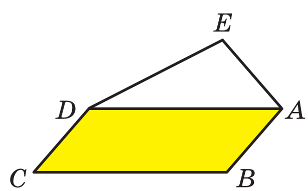


Fig. 33.8

33.4.° Punctul M care nu aparține planului dreptunghiului $ABCD$, este astfel, că triunghiul CMD este echilateral (fig. 33.7). Aflați unghiul dintre dreptele AB şi MC.

33.5.° Punctul M nu aparține planului pătratului $ABCD$, $\angle MBA = 40°$, $\angle MBC = 90°$. Aflați ughiul dintre dreptele: 1) MB şi AD; 2) MB şi CD.

33.6.• Trapezul $ABCD$ cu bazele AD şi BC şi triunghiul MEF nu se află într-un plan, punctul E – mijlocul segmentului AB, punctul F – mijlocul segmentului CD, $ME = FE$, $\angle MEF = 110°$. Găsiți unghiul dintre dreptele: 1) AD şi EF; 2) AD şi ME; 3) BC şi MF.

33.7.• Paralelogramul $ABCD$ şi triunghiul AED nu se află într-un plan (fig. 33.8). Aflați unghiul dintre dreptele: 1) BC şi AE, dacă $\angle AED = = 70°$, $\angle ADE = 30°$.

33.8.• Se ştie, că $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (fig. 33.9). Aflați segmentul CD, dacă $BC = 17$ cm, $AB = 15$ cm, $BD = 3\sqrt{29}$ cm.

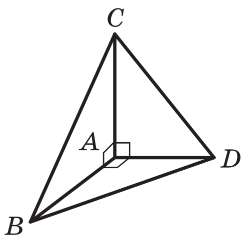


Fig. 33.9

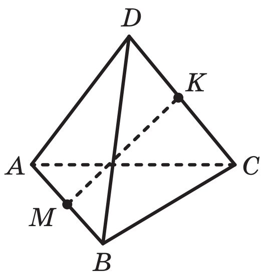


Fig. 33.10

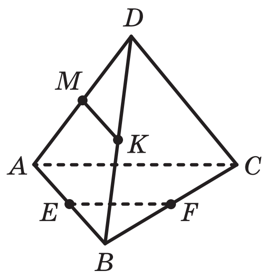


Fig. 33.11

33.9.• Se ştie, că $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (fig. 33.9). Aflați segmentul BC, dacă $CD = 2\sqrt{43}$ cm, $BD = 12$ cm, $\angle ABD = 60°$.

33.10.•• Fiecare muchie a tetraedrului $DABC$ este egală cu a, punctele M şi K – mijlocurile muchiilor AB şi CD corespunzător (fig. 33.10). Găsiți segmentul MK.

33.11.•• Punctele E, F, M şi K sunt corespunzător mijlocurile muchiilor AB, BC, AD şi BD ale tetraedrului $DABC$ (fig. 33.11). Găsiți unghiul dintre dreptele EF şi MK, dacă $\angle BAC = \alpha$.

33.12.•• Diagonalele feței $ABCD$ ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se intersectează în punctul O. Aflați unghiul dintre dreptele OB_1 şi A_1C_1.

33.13.•• Baza paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este un pătrat, latura căruia este egală cu a. Aflați unghiul dintre dreptele AD_1 şi B_1C, dacă muchia laterală a paralelipipedului este egală cu $a\sqrt{3}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

33.14. Diagonalele AC şi BD ale paralelogramului $ABCD$ sunt egale corespunzător cu 24 cm şi 10 cm, $AD = 13$ cm. Aflați perimetrul paralelogramului.

34. Perpendicularitatea dreptei şi a planului

În viața de toate zilele noi vorbim: bățul steagului este perpendicular pe suprafața pământului (fig. 34.1), catargele sunt perpendiculare la suprafața punții (fig. 34.2), şurubul se suceşte în scândură perpendicular la suprafață ei (fig. 34.3) etc.

Fig. 34.1

Fig. 34.2

Fig. 34.3

Aceste exemple dau o închipuire despre dreapta, perpendiculară pe plan.

Definiţie. Dreapta se numeşte perpendiculară pe plan, dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă, ce se află în acest plan (fig. 34.4).

Dacă dreapta a este perpendiculară pe planul α, atunci se scrie: $a \perp \alpha$. De asemenea este primit de spus, că planul α este perpendicular pe dreapta a sau dreapta a şi planul α sunt perpendiculare.

Din definiție reiese, că dacă dreapta a este perpendiculară pe planul α, atunci ea intersectează acest plan.

Segmentul se numeşte **perpendicular pe plan**, dacă el aparține dreptei, perpendiculare pe acest plan.

De exemplu, intuitiv se înțelege, că muchia AA_1 a paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este perpendiculară pe planul $ABCD$ (fig. 34.5). De demonstrat acest fapt nu este complicat, folosindu-ne de aşa o teoremă.

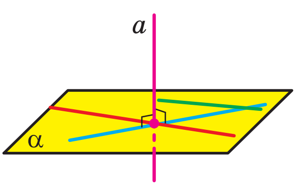


Fig. 34.4

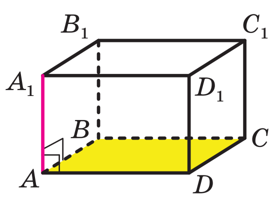


Fig. 34.5

Teorema 34.1 (criteriul de perpendicularitate a dreptei şi a planului). ***Dacă dreapta este perpendiculară pe două drepte, ce se află în plan şi se intersectează, atunci ea este perpendiculară şi pe acest plan.***

Fig. 34.6

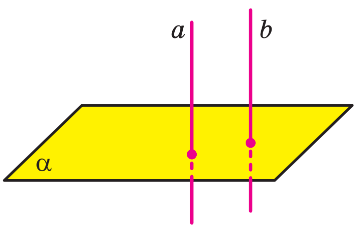
În figura 34.5 dreapta AA_1 este perpendiculară pe două drepte ce se intersectează AB şi AD ale planului ABC. Atunci conform criteriului de perpendicularitate a dreptei şi a planului $AA_1 \perp ABC$, deci, şi muchia AA_1 de asemenea este perpendiculară pe planul ABC.

Teorema 34.1 deseori este folosită în practică. De exemplu, suportul pentru bradul de Anul Nou are forma unei cruci. Dacă bradul se stabileşte astfel, ca tulpina bradului să fie perpendiculară pe componentele crucii, atunci bradul este perpendicular pe planul podelei (fig. 34.6).

Să prezentăm încă o teoremă, care poate fi considerată ca încă un criteriu de perpendicularitate al dreptei şi a planului.

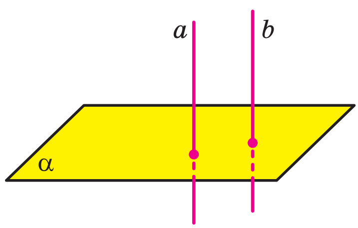
Teorema 34.2. ***Dacă una din două drepte paralele este perpendiculară pe plan, atunci şi a doua dreaptă este perpendiculară pe acest plan*** (fig. 34.7).

De exemplu, în figura 34.5 dreapta AA_1 este perpendiculară pe planul ABC, iar dreapta CC_1 este paralelă la dreapta AA_1. Deci, conform teoremei 34.2 dreapta CC_1 de asemenea este perpendiculară pe planul ABC.



Dacă $a \parallel b$ şi $a \perp \alpha$, atunci $b \perp \alpha$

Fig. 34.7



Dacă $a \perp \alpha$ şi $b \perp \alpha$, atunci $a \parallel b$

Fig. 34.8

Să formulăm teorema care este criteriul de paralelism a două drepte.

Teorema 34.3. ***Dacă două drepte sunt perpendiculare pe unul şi acelaşi plan, atunci ele sunt paralele.*** (fig. 34.8).

Este adevărată şi aşa o teoremă.

Teorema 34.4. ***Prin punctul dat se poate duce o singură dreaptă, perpendiculară pe planul dat, şi numai una.***

Problemă. Planul α, perpendicular pe cateta AC a triunghiului dreptunghic ABC, intersectează cateta AC în punctul E, iar ipotenuza AB – în punctul F (fig. 34.9). Aflaţi segmentul EF, dacă $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ cm.

Rezolvare. Deoarece dreapta AC este perpendiculară pe planul α, atunci dreapta AC este perpendiculară pe orice dreaptă a acestui plan, în particular, pe dreapta EF. Dreptele EF şi BC se află într-un plan şi sunt perpendiculare pe dreapta AC, de aceea $EF \parallel BC$. Din aceasta reiese, că triunghiurile AEF şi ACB sunt *asemenea*. Deci, se poate scrie: $EF : CB = AE : AC$. De aici $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ cm.

Răspuns: 9 cm. ◀

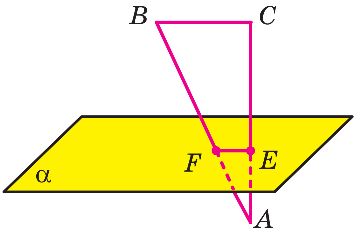


Fig. 34.9

1. Care dreaptă se numeşte perpendiculară pe plan?
2. Care segment se numeşte perpendicular pe plan?
3. Formulaţi criteriul de perpendicularitate a dreptei şi a planului.
4. Formulaţi teorema despre două drepte paralele, una din care este perpendiculară pe plan.
5. Formulaţi teorema despre două drepte, perpendiculare pe unul şi acelaşi plan.

EXERCIŢII

34.1.° Dreapta a este perpendiculară pe planul α. Există oare în planul α drepte, neperpendiculare pe dreapta a?

34.2.° Dreapta m este perpendiculară pe dreptele a şi b ale planul α. Reiese oare din aceasta, că dreapta m este perpendiculară pe planul α?

34.3.° Este oare corectă afirmația, că dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan, atunci ea nu este perpendiculară pe nici o dreaptă a acestui plan?

34.4.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 34.10). Numiți fețele cubului, pe care este perpendiculară dreapta: 1) AA_1; 2) AD.

34.5.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 34.10). Numiți muchiile cubului, care sunt perpendiculare pe planul feței: 1) AA_1B_1B; 2) $A_1B_1C_1D_1$.

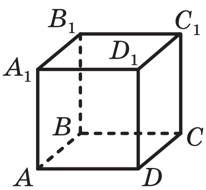


Fig. 34.10

34.6.° Este oare corectă afirmația, că dreapta este perpendiculară pe plan, dacă ea este perpendiculară:

1) pe o latură şi mediana triunghiului, care se află în acest plan;
2) pe o latură şi linia medie a triunghiului, care se află în acest plan;
3) pe două laturi ale trapezului, care se află în acest plan;
4) pe două diametre ale circumferinței, care se află în acest plan?

34.7.° Prin centrul O al triunghiului regulat ABC s-a dus dreapta DO, perpendiculară pe planul ABC (fig. 34.11). Aflați segmentul DO, dacă $AB = 6$ cm, $DA = 4$ cm.

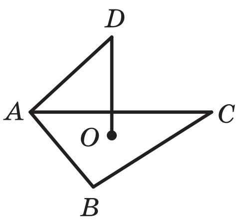


Fig. 34.11

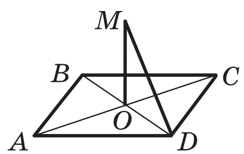


Fig. 34.12

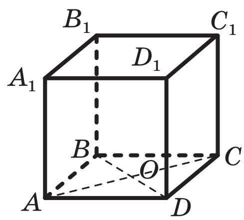


Fig. 34.13

34.8.° Prin centrul O al pătratului $ABCD$ s-a dus dreapta MO, perpendiculară pe planul pătratului (fig. 34.12). Aflați distanța de la punctul M până la vârful D, dacă $AD = 4\sqrt{2}$ cm, $MO = 2$ cm.

34.9.• Punctul O – centrul feței $ABCD$ a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$, muchia căruia este egală cu a (fig. 34.13), Aflați:

1) distanța de la punctul O până la vârful B al cubului;
2) tangenta unghiului dintre dreptele B_1O şi DD_1.

34.10.• Diagonala B_1D a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este egală cu 17 cm, iar diagonala AB_1 a feței laterale AA_1B_1B este egală cu 15 cm (fig. 34.14). Aflați muchia AD a paralelipipedului.

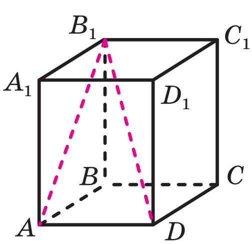


Fig. 34.14

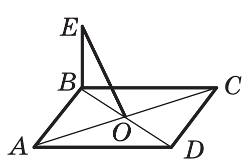


Fig. 34.15

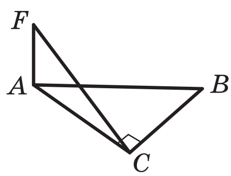


Fig. 34.16

34.11.• Prin vârful B al rombului $ABCD$ s-a dus dreapta BE, perpendiculară pe planul rombului (fig. 34.15). Demonstrați, că dreapta AC este perpendiculară pe planul BEO.

34.12.• Prin vârful A al triunghiului dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$) s-a dus dreapta AF, perpendiculară pe planul ABC (fig. 34.16). Demonstrați, că dreapta BC este perpendiculară pe planul AFC.

34.13.•• Segmentul AB nu intersectează planul α. Prin punctele A şi B s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul α şi-l intersectează în punctele C şi D corespunzător. Aflați segmentul CD, dacă $AC = 34$ cm, $BD = 18$ cm, $AB = 20$ cm.

34.14.•• Segmentul AB nu intersectează planul α. Prin punctele A şi B s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul α şi-l intersectează în punctele A_1 şi B_1 corespunzător. Aflați segmentul AB, dacă $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 12$ cm, $AB_1 = 10$ cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

34.15. De la un punct până la o dreaptă sunt duse două oblice, proiecțiile cărora pe dreaptă sunt egale cu 5 cm şi 9 cm. Găsii distanța de la punctul dat până la această dreaptă, dacă una din oblice este cu 2 cm mai mare decât alta.

35. Perpendiculara şi oblica

Fie că figura F_1 este proiecției paralelă a figurii F pe planul α în direcția dreptei l. Dacă $l \perp \alpha$, atunci figura F_1 se numeşte **proiecția ortogonală** a figurii F pe planul α.

De exemplu, baza $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este proiecția ortogonală a bazei $A_1B_1C_1D_1$ pe planul ABC în direcția AA_1. (fig. 35.1).

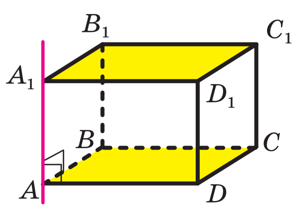


Fig. 35.1

În cele ce urmează, vorbind despre proiecția figurii, dacă nu este condiționat altceva, vom avea în vedere proiecția ortogonală.

Fie că este dat planul α şi punctul A, care nu-i aparține. Prin punctul A s-a dus dreapta a, perpendiculară pe planul α**.** Fie că $a \cap \alpha = B$ (fig. 35.2). Segmentul AB se numeşte **perpendiculara** dusă din punctul A pe planul α, punctul B – **baza perpendicularei**. Baza B a perpendicularei AB este proiecția punctului A pe planul α.

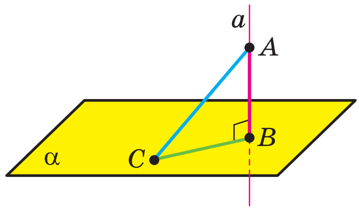


Fig. 35.2

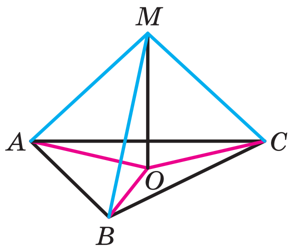


Fig. 35.3

Notăm pe planul α **un** oarecare punct C, diferit de puctul B. Ducem segmentul AC (fig. 35.2). Segmentul AC se numeşte **oblică**, dusă din punctul A la planul α, punctul C – **baza oblicei.** Segmentul BC este **proiecția oblicei** AC.

Teorema 35.1. ***Dacă dint-un punct sunt duse la plan o perpendiculară şi o oblică, atunci oblica este mai mare decât perpendiculara.***

Problemă 1. Demonstrați, că dacă un punct, ce nu aparține planului poligonului, este egal depărtat de la vârfurile lui, atunci proecția acestui punct pe planul pologonului este centrul circumferinței circumscrise lui.

Rezolvare. Să facem demonstrarea pentru un triunghi. Pentru alte poligoane demonstrarea va fi analogică.

Fie, că punctul M nu aparține planului ABC, totodată $MA = MB = MC$. Coborâm din punctul M perpendiculara MO pe planul ABC (fig. 35.3). Să demonstrăm, că punctul O – centrul circumferinței circumscrise triunghiului ABC.

Deoarece $MO \perp ABC$, atunci $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$. În triunghiurile dreptunghce MOA, MOB, MOC cateta MO este comună, ipotenuzele sunt egale, deci, aceste triunghiuri sunt egale după catetă şi ipotenuză. Din egalitatea acestor tiunghiuri rezultă, că $OA = OB = OC$, adică punctul O – centrul circumferinței circumscrise triunghiului ABC. ◄

Menționăm, că dacă trebuie să determinăm distanța dintre două figuri geometrice, încercăm să găsim distanța dintre cele mai apropiate puncte ale lor. De exemplu, din cursul de planimetriei este cunoscut, că distanța de la un punct, care nu aparține dreptei, până la această dreaptă se numeşte distanța de la punctul dat până la punctul cel mai apropiat al dreptei, adică lungimea perpendicularei, coborâte din punct pe dreaptă.

Teorema 35.1 arată, că este rațional de primit aşa o definiție.

Definiție. Dacă punctul nu aparține planului, atunci distanța de la punct până la plan se numeşte lungimea perpendicularei coborâte din punct pe plan. Dacă punctul aparține planului se consideră, că distanța de la punct până la plan este eglă cu zero.

Problemă 2. Demonstrați, că dacă dreapta este paralelă cu planul, atunci toate punctele dreptei sunt egal depărtate de la plan.

Rezolvare. Fie A şi B – două puncte arbitrare ale dreptei a care este paralelă cu planul α. Punctele A_1 şi B_1 – bazele perpendicularelor, coborâte corespunzător din punctele A şi B pe planul α (fig. 35.4). Să demonstram, că $AA_1 = BB_1$.

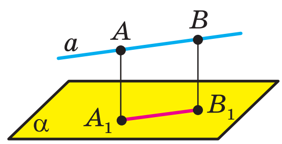


Fig. 35.4

Conform teoremei 34.3 $AA_1 \parallel BB_1$. Deci, punctele A, A_1, B_1, B sunt situate într-un plan. Planul ABB_1 trece prin dreapta a, paralelă cu planul α şi intersectează planul α după dreapta A_1B_1. Atunci după teorema 30.2 obținem: $AB \parallel A_1B_1$. Astfel în patrulaterul AA_1B_1B fiecare două laturi opuse sunt paralele. Deci, patrulaterul AA_1B_1B – paralelogram. De aici $AA_1 = BB_1$.

Deoarece punctele A şi B sunt alese arbitrar pe dreapta a, atunci afirmația problemei este demonstrată. ◄

Proprietatea demonstrată dă posibilitatea de acceptat aşa definiții.

Definiție. Distanța de la dreaptă până la planul paralel ei se numeşte distanța de la orice punct al acestei drepte până la plan.

Folosind rezultatul, obținut în problema cheie 2 se poate rezolva astfel de problemă.

Problemă 3. Demonstrați, că dacă două plane sunt paralele, atunci toate punctele unui plan sunt egal depărtate de la alt plan.

Definiție. Distanța dintre două plane paralele se numeşte distanța de la orice punct al unui plan până la alt plan.

Rezultatele obținute în problemele – cheie 2 şi 3, se folosesc des în practică, de exemplu, în construcții (fig. 35.5).

Fig. 35.5

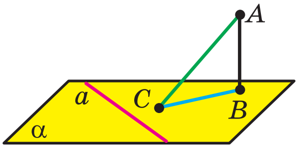


Fig. 35.6

Teorema 35.2 (teorema celor trei perpendiculare) ***Dacă dreapta, care aparține planului, este perpendiculară pe proiecția oblicei pe acest plan, atunci ea este perpendiculară şi pe însăşi oblică. Şi invers, dacă dreapta, care aparține planului este perpendiculară pe oblica ducă la acest plan, atunci ea este perpendiculară şi pe proiecția oblicei pe acest plan.***

Demonstrație. Demonstrăm prima parte a teoremei.

Fie că dreapta a, care aparține planului α este perpendiculară pe proiecția BC a oblicei AC (fig. 35.6). Să demonstrăm, că $a \perp AC$.

Avem: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, , deci $AB \perp a$. Am obținut, că dreapta a este perpendiculară pe două drepte AB şi BC ale planului ABC, care se intersectează; deci, $a \perp ABC$. Deoarece $AC \subset ABC$, atunci $a \perp AC$.

Demonstrarea părții a doua a teoremei este analogică cu demonstrarea primei părți. ◄

Problemă 4. Punctul M nu aparține planului poligonului convex şi este egal depărtat de la toate dreptele, care conțin laturile lui. Proecția punctului M pe planul poligonului este punctul O, care aparține poligonului. Demonstrați, că punctul O – centrul circumferinței înscrise în poligon.

Rezolvare. Să facem demonstrarea pentru triunghi. Pentru altele poligoane demonstrarea va fi analogică.

Coborâm din punctul O perpendicularele ON, OK şi OE corespunzător pe dreptele AB, BC şi CA (fig. 35.7). Unim punctul M cu punctele E, K şi N.

Segmentul ON este proiecția oblicei MN pe planul ABC. Conform construcției $ON \perp AB$. Atunci conform teoremei celor trei perpendiculare obținem: $MN \perp AB$.

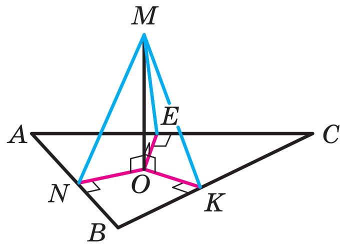


Fig. 35.7

Analogic se poate demonstra, că $MK \perp BC$ şi $ME \perp CA$. Deci, lungimea segmentelor MN, MK şi ME sunt distanțele de la punctul M până la dreptele AB, BC şi CA corespunzător. Conform condiției $MN = MK = ME$.

În triunghiurile dreptunghice MON, MOK, MOE cateta MO este comună, ipotenuzele egale; deci, aceste triunghiuri sunt egale după catetă şi ipotenuză. Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă, că $ON = OK = OE$.

Lungimea segmentelor ON, OK şi OE sunt distanțele de la punctul O până la dreptele, care conțin laturile triunghiului ABC. Noi am arătat, că aceste distanțe sunt egale. Deoarece punctul O aparține triunghiului ABC, atunci punctul O – centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC.

1. În ce caz se spune, că figura F_1 este proiecţia ortogonală a figurii F?
2. Descrieţi, care segment se numeşte: 1) perpendiculara, coborâtă din punct pe plan; 2) oblica, dusă din punct pe plan.
3. Formulaţi teorema despre perpendiculara şi oblica, duse pe plan dintr-un punct.
4. Ce se numeşte distanţă de la punct până la plan? distanţă de la dreaptă până la planul paralel ei? distanţă dintre două plane paralele?
5. Formulaţi teorema despre cele trei perpendiculare.

EXERCIŢII

35.1.° În figura 35.8 este desenat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indicați proiecția segmentului C_1D pe planul:
1) ABC;
2) BB_1C;
3) AA_1B_1.

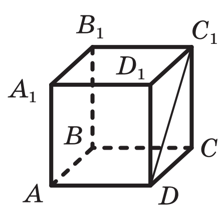


Fig. 35.8

35.2.° În figura 35.9 este desenat paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indicați proiecția segmentului DB_1 pe planul:
1) $A_1B_1C_1$; 2) CDD_1; 3) AA_1D_1.

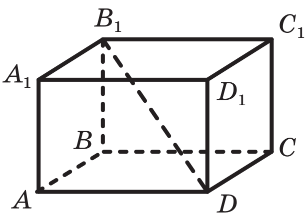


Fig. 35.9

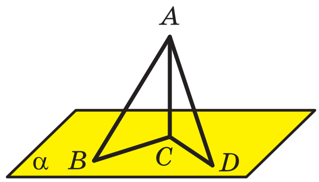


Fig. 35.10

35.3.° Dintr-un punct la plan sunt duse perpendiculara cu lungimea de 12 cm şi oblica cu lungimea 13 cm. Aflați proiecția acestei oblice pe planul dat.

35.4.° Din punctul A pe planul α sunt duse perpendiculara şi oblica cu lungimea de $\sqrt{7}$ cm. Proiecția oblicei date pe plan este egală cu $\sqrt{3}$ cm. Găsiți distanța de la punctul A până la planul α.

35.5.° Din punctul A s-au dus pe planul α perpendiculara AC şi oblicele AB şi AD (fig. 35.10). Găsiți proiecția oblicei AD pe planul α, dacă $\angle BAC = 45°$, $AB = 8$ cm, $AD = 9$ cm.

35.6.° Din punctul M s-au dus pe planul α perpendiculara MH şi oblicele MA şi MB (fig. 35.11). Găsiți oblica MA, dacă $BH = 6\sqrt{6}$ cm, $MB = 18$ cm, $\angle MAH = 60°$.

35.7.• Demonstrați, că oblicele egale, duse la plan dintr-un punct, au proiecții egale.

35.8.• Demonstrați, că dacă proiecțiile a două oblice, duse la plan dintr-un punct sunt egale, atunci sunt egale şi oblicele.

35.9.• Distanța dintre dreptele paralele, care aparțin corespunzător planelor paralele α şi β, este egală cu 7 cm. Este oare corectă afirmația, că distanța dintre planele α şi β este egală cu 7 cm?

35.10.• Din punctul M s-au dus la planul α oblicele egale MA, MB, MC şi MD. Pot oare punctele A, B, C şi D să fie vârfurile:
1) dreptunghiului; 3) trapezului dreptunghic;
2) rombului; 4) trapezului isoscel?

35.11.• În figura 35.12 este desenat pătratul $ABCD$, dreapta NC este perpendiculară pe plan lui. Demonstrați, că dreptele BD şi NO sunt perpendiculare.

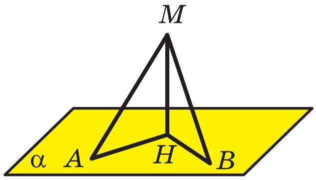


Fig. 35.11

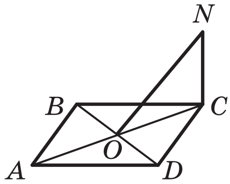


Fig. 35.12

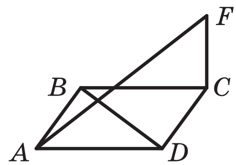


Fig. 35.13

35.12.• În figura 35.13 este desenat rombul $ABCD$. Dreapta FC este perpendiculară la planul lui. Demonstraţi, că dreptele AF şi BD sunt perpendiculare.

35.13.• În figura 35.14 este reprezentat triunghiul echilateral ABC, punctul D – mijlocul laturii BC. Drepta AM este perpendiculară la planul ABC. Demonstraţi, că $MD \perp BC$.

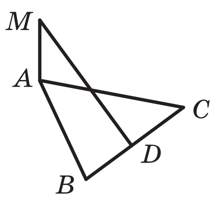


Fig. 35.14

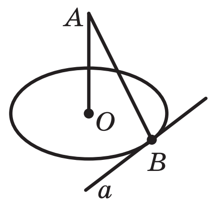


Fig. 35.15

35.14.• Dreapta AO este perpendiculară pe planul circumferinţei cu centrul O (fig. 35.15). Dreapta a aparţine planului circumferinţei şi se atinge de circumferinţa dată în punctul B. Demonstraţi, că $AB \perp a$.

35.15.• Demonstraţi, că dacă punctul aparţine dreptei, care este perpendiculară pe planul poligonului şi trece prin centrul circumferinţei circumscrise poligonului, atunci acest punct este egal depărtat de la vârfurile poligonului.

35.16.• Din punctul A s-au dus la planul α oblicele AB şi AC cu lungimea de 25 cm şi 17 cm respectiv. Găsiţi distanţa de la punctul A până la planul α, dacă proecţiile oblicelor date pe acest plan se raportă ca 5 : 2.

35.17.• Din punctul D s-au dus la planul α oblicele DA şi DB suma cărora este egală cu 28 cm. Găsiţi aceste oblice, dacă proecţiile lor pe planul α sunt egale corespunzător cu 9 cm şi 5 cm.

35.18.• Punctul M este situat la distanţa de 6 cm de la fiecare vârf al triunghiului regulat ABC, latura căruia este egală cu 9 cm. Găsiţi distanţa de la punctul M până la planul ABC.

35.19.• Catetele triunghiului dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$) sunt egale cu 6 cm şi 8 cm. Punctul D este îndepărtat de la fiecare vârf al triunghiului dat cu 13 cm. Aflați distanța de la punctul D până la planul ABC.

35.20.• Segmentul BD este perpendicular pe planul triunghiului isoscel ABC cu baza AC (fig. 35.16). Construiți perpendiculara, coborâtă din punctul D pe dreapta AC.

35.21.• Segmentul BD este perpendicular pe planul triunghiului dreptunghiular ABC cu unghiul drept la vârful C (fig. 35.17). Construiți perpendiculara, coborâtă din punctul D pe dreapta AC.

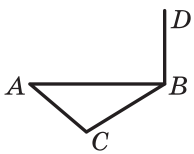


Fig. 35.16

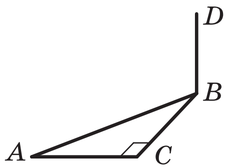


Fig. 35.17

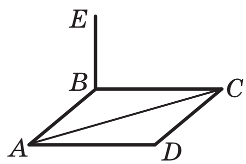


Fig. 35.18

35.22.• Segmentul BE este perpendicular pe planul rombului $ABCD$ (fig. 35.18). Construiți perpendiculara, coborâtă din punctul E pe dreapta AC.

35.23.• Punctul M este egal depărtat de la toate dreptele, care conțin laturile triunghiului regulat ABC. Proiecția punctului M pe planul ABC este punctul O, care aparține triunghiului. Găsiți distanța de la punctul M până la latura AB, dacă distanța de la acest punct până la planul ABC este egală cu $3\sqrt{2}$ cm, $AB = 18$ cm.

35.24.• Latura rombului este egală cu 10 cm, iar o diagonală – 16 cm. Punctul M este situat la distanța de 5,2 cm de la fiecare dreaptă, care conține latura rombului. Găsiți distanța de la punctul M până la planul rombului.

35.25.•• Din punctul M pe planul α sunt duse oblicele MN şi MK, care formează cu proiecțiile sale pe planul dat unghiuri de 60°. Găsiți distanța dintre bazele oblicelor date, dacă unghiul dintre oblice este de 90°, iar distanța de la punctul M până la planul α este egală cu $\sqrt{3}$ cm.

35.26.•• Din punctul A pe planul α sunt duse oblicele AB şi AC care formează cu proiecțiile sale pe planul dat unghiuri de 30°. Găsiți oblicele date şi distanța de la punctul A până la planul α, dacă unghiul dintre proiecțiile oblicelor este de 90°, iar distanța dintre bazele oblicelor este egală cu 6 cm.

35.27.•• Segmentul DA – perpendicular pe planul triunghiului ABC, $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 21$ cm. Găsiţi distanţa de la punctul D până la dreapta BC, dacă distanţa de la punctul D până la planul ABC este egală cu 15 cm.

35.28.•• Segmentul AB – diametrul circumferinţei cu centrul O, segmentul BC – coarda ei, $AB = 12$ cm, $\angle ABC = 30°$. Segmentul AE este perpendicular la planul circumferinţei date. Găsiţi distanţa de la punctul E până pe planul circumferinţei, dacă distanţa de la punctul E până la dreapta BC este egală cu 10 cm.

35.29.•• Segmentul MA – perpendicular la planul rombului $ABCD$. Găsiţi distanţa de la punctul M până la dreapta CD, dacă $\angle BAD = 30°$, $AD = 10$ cm, $MA = 5\sqrt{3}$ cm.

35.30.•• Segmentul DA – perpendicular pe planul triunghiului ABC, $\angle ABC = 120°$, $AB = 14$ cm. Găsiţi distanţa de la punctul D până la planul ABC, dacă acest punct este îndepărtat de la dreapta BC cu $2\sqrt{43}$ cm.

35.31.•• Punctul M nu aparţine planului triunghiului ABC ($\angle ACB = 90°$) şi este situat la distanţa de $2\sqrt{5}$ cm de la fiecare dreaptă, care conţine laturile lui. Proiecţia punctului M pe planul ABC este punctul O, care aparţine triunghiului dat. Punctul de tangenţă al ipotenuzei AB cu circumferinţa, înscrisă în triunghiului ABC, o împarte în segmentele cu lungimile de 3 cm şi 10 cm. Găsiţi distanţa de la punctul M până la planul ABC.

35.32.•• Punctul M nu aparţine planului poligonului, iar proiecţia lui pe planul poligonului este centrul circumferinţei înscrise în poligon. Demonstraţi, că punctul M este egal depărtat de la laturile poligonului dat.

35.33.•• Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 16 cm şi 36 cm. Prin centrul O al circumferinţei înscrise în acest trapez la planul lui este dusă perpendiculara MO. Punctul M este situat la distanţa de 16 cm de la planul trapezului. Găsiţţi distanţa de la punctul M până la laturile trapezului.

35.34.•• Punctul O – centrul circumferinţei înscrise în trapezul $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ cm, $\angle ADC = 45°$. Segmentul MO – perpendicular la planul trapezului. Punctul M este îndepărtat de la planul trapezului cu $6\sqrt{2}$ cm. Găsiţi distanţa de la punctul M până la laturile trapezului.

35.35.* Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Demonstraţi, că $CD_1 \perp AB_1C_1$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

35.36. Latura triunghiului regulat, circumscris unei circumferințe, este egală cu 12 cm. Găsiți latura pătratului, circumsris circumferinței date.

36. Unghiul dintre dreaptă şi plan

Ştiți că în vremurile străvechi călătorii se orientau după stele. Ei măsurau unghiul care forma cu planul orizontului semidreapta, dusă din punctul dat până la corpul ceresc.

Astăzi, este de asemenea important ca omul în activitatea sa să poată determina unghiurile sub care unele obiecte sunt înclinate față de planul dat (Fig. 36.1).

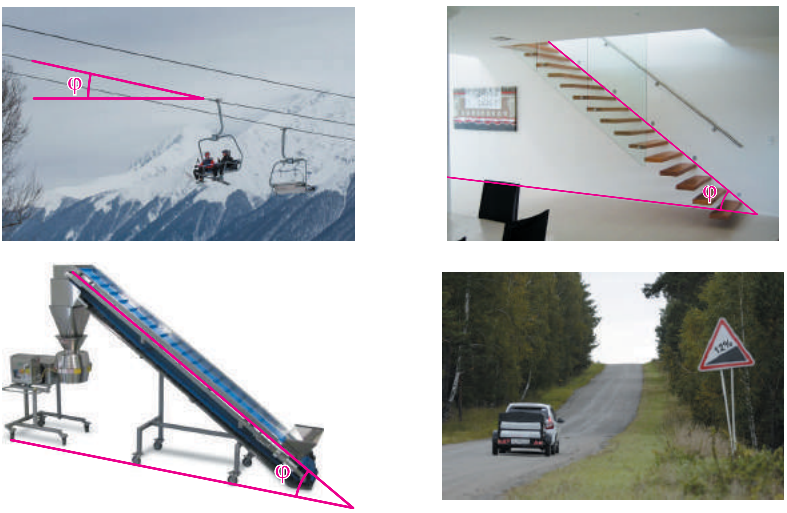


Fig. 36.1

Aceste exemple arată că este rațional de introdus noțiunea de unghi dintre dreaptă şi plan.

Definiție. **Dacă dreapta este paralelă cu planul sau aparține lui, atunci se consideră că** ***unghiul dintre*** **aşa o** ***dreaptă şi plan*** **este egal cu 0°.**

Dacă drepta este perpendiculară pe plan, se consideră, că ***unghiul dintre*** **aşa o** ***dreaptă şi plan*** **este egal cu 90°.**

Dacă drepta intersectează planul şi nu este perpendiculară pe el, atunci unghiul dintre aşa o dreaptă şi plan se numeşte unghiul dintre dreaptă şi proecţia ei pe plan (fig. 6.2).

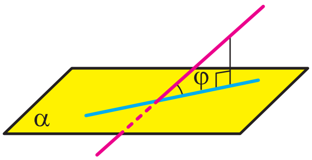


Fig. 36.2

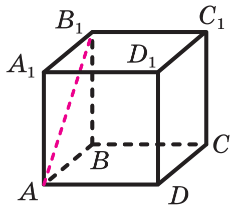


Fig. 36.3

Din definiţie rezultă, că dacă φ – unghi dintre dreaptă şi plan, atunci **$0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.**

De asemenea se spune, că dreapta formează unghiul φ cu planul.

Unghiul dintre segment şi plan se numeşte unghiul dintre dreapta care conţine acest segment şi plan.

De exemplu, considerăm cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 36.3). Unghiul dintre diagonala AB_1 al feţei AA_1B_1B şi planul ABC este egal cu 45°. Într-adevăr, dreapta AB – proiecţia dreptei AB_1 pe planul ABC. Atunci unghiul dintre dreapta AB_1 şi planul ABC este egal cu mărimea unghiului B_1AB. Deoarece patrulaterul AA_1B_1B – pătrat, atunci $\angle B_1AB = 45°$.

Problemă. Demonstraţi, că dacă dintr-un punct sunt duse pe plan oblici, care formează unghiuri egale cu planul, atunci proiecţia punctului dat pe plan este egal depărtată de la bazele oblicelor.

Rezolvare. Fie că MA şi MB – oblice, care formează cu planul α unghiuri egale, segmentele OA şi OB – proiecţiile acestor oblice (fig. 36.4). Să demonstrăm, că $OA = OB$.

Dreapta OA este proiecţia dreptei MA pe planul α. Deoarece unghiul MAO este ascuţit, atunci el este egal cu unghiul dintre dreptele OA şi MA. Deci, mărimea unghiului MAO este egală cu unghiul dintre oblica MA şi planul α. Analogic, se poate demonstra, că mărimea unghiului MBO este egală cu unghiul dintre oblica MB şi planul α. Reieşind din condiţie $\angle MAO = \angle MBO$.

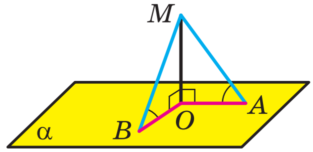


Fig. 36.4

Deoarece $MO \perp \alpha$, atunci $\angle MOA = \angle MOB = 90°$. Obţinem, că triunghiurile dreptunghice MOA şi MOB sunt egale după catetă şi unghiul ascuţit opus. De aici $OA = OB$. ◀

1. Cu ce este egal unghiul făcut de dreaptă şi plan, dacă dreapta este paralelă cu planul? dreapta aparţine planului? dreapta este perpendiculară pe plan?
2. Ce se numeşte unghi dintre o dreaptă şi plan, dacă dreapta intersectează planul şi nu este perpendiculară pe el?

EXERCIŢII

36.1.° Este dat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punctul O – centrul feței $ABCD$ (fig. 36.5). Indicați unghiul dintre:
1) dreapta AB_1 şi planul $A_1B_1C_1$;
2) dreapta AC_1 şi planul ABC;
3) dreapta AC_1 şi planul CDD_1;
4) dreapta OA_1 şi planul ABC;
5) dreapta AC şi planul ADD_1.

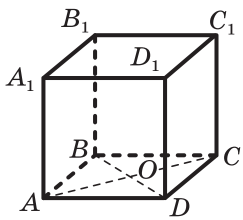


Fig. 36.5

36.2.° Dintrr-un punct la plan sunt duse o perpendiculară şi o oblică, care formează cu planul dat unghiul de 50°. Cu ce este egal unghiul dintre oblica dată şi perpendiculară?

36.3.° Din punctul M la planul α sunt duse o perpendiculara MA şi oblica MB, care formează cu planul α unghiul φ. Aflați: 1) proiecția oblicei MB pe planul α, dacă diistanța de la punctul M până la acest plan este egală cu d; 2) oblica MB, dacă proiecția ei pe planul α este egală cu a.

36.4.° Din punctul A la planul α este dusă o oblică. Cu ce este egal unghiul dintre oblică şi planul α, dacă distanța de la punctul A până la planul α: 1) este egal cu proiecția oblicei pe planul α; 2) este de două ori mai mică decât oblica dată?

36.5.° Câte oblici, care formează cu planul α un unghi de 40°, se pot duce din punctul A, care nu aparține acestui plan?

36.6.° Dreapta MA este perpendiculară la planul ABC (fig. 36.6), $AB = AM = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Găsiți unghiul, care formează cu planul ABC dreapta: 1) MB; 2) MC.

36.7.° Punctul O – centrul triunghiului regulat ABC (fig. 36.7), latura căruia este egală cu 6 cm. Dreapta MA este perpendiculară pe planul ABC. Găsiți unghiul dintre dreapta MO şi planul ABC, dacă $MA = 2$ cm.

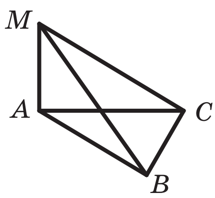


Fig. 36.6

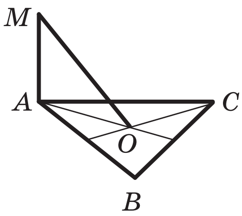


Fig. 36.7

36.8.• Demonstraţi că oblicele egale, duse la plan dintr-un punct, formează cu acest plan unghiuri egale.

36.9.• Demonstraţi, că dacă unghiurile formate cu planul de oblicele, duse la el dintr-un punct, sunt egale, atunci sunt egale şi înseşi oblicele.

36.10.• Din punctul M la planul α sunt duse perpendiculara MB şi oblicele MA şi MC. Găsiţi unghiul dintre dreapta MC şi planul α, dacă $MA = 5\sqrt{2}$ cm, $MC = 10$ cm, iar unghiul dintre dreapta MA şi planul α este egal cu 45°.

36.11.• Din punctul A la planul α sunt duse perpendiculara AH şi oblicele AB şi AC, care formează cu planul unghiuri egale, corespunzător, cu 45° şi 60°. Găsiţi segmentul AB, dacă $AC = 4\sqrt{3}$ cm.

36.12.• Din punctul D la planul α sunt duse oblicele DA şi DB, care formează cu planul dat unghiuri egale cu 30°. Unghiul dintre proiecţiile oblicelor date şi planul α este egal cu 120°.Găsiţi dinstanţa dintre bazele oblicelor, dacă $DA = 2$ cm.

36.13.• Din punctul B la planul α sunt duse oblice BA şi BC, care formează cu planul dat unghiuri a câte 45°.Distanţa dintre bazele oblicelor este egală cu 16 cm. Găsiţi distanţa de la punctul B până la planul α, dacă unghiul dintre oblice este de 60°.

36.14.•• Punctul A esge situat la distanţa de $3\sqrt{3}$ cm de la planul α. Oblicele AB şi AC formează cu planul unghiuri de 60° şi 45° corespunzător, iar unghiul dintre oblice este egal cu 90°. Găsiţi distanţa dintre bazele oblicelor.

36.15.•• Din punctul M la planul α sunt duse oblicele MA şi MB. Oblica MA formează cu planul α unghi de 45°, iar oblica MB – unghi de 30°. Găsiţi distanţa dintre bazele oblicelor, dacă $MA = 6$ cm, iar unghiul dintre oblice este egal cu 45°.

36.16.•• Punctul M este situat la distanţa de 12 cm de la fiecare vârf al pătratului $ABCD$, unghiul dintre dreapta MA şi planul pătratului este egal cu 60°.Găsiţi distanţa de la punctul M până la latura pătratului.

36.17.•• Punctul M este egal depărtat de la laturile pătratului $ABCD$, latura căruia este egală cu $9\sqrt{6}$ cm şi este situat la distanța de 9 cm de la planul pătratului. Găsiți unghiul dintre dreapta MA şi planul pătratului.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

36.18. Laturile triunghiului sunt egale cu 2 cm, $2\sqrt{7}$ cm şi $4\sqrt{3}$ cm. Găsiți unghiul triunghiului opus laturii mijlocii a lui.

37. Unghi diedru. Unghi dintre plane

În figura 37.1 este reprezentată figura, care constă din două semiplane, care au graniță comună. Această figură împarte spațiul în două părți, care sunt marcate în figura 37.2 cu culori diferite. Fiecare din aceste părți împreună cu semiplanele se numeşte **unghi diedru.** Semiplanele se numesc **fețe ale unghiului diedru,** iar granița comună – **muchia unghiului diedru.**

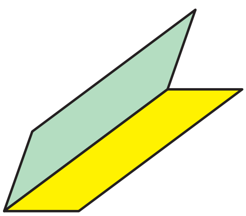


Fig. 37.1

După cum vedem unghiurile diedre «galben» şi «albastru», desenate în figura 37.2, sunt esențial diferite. Această deosebire se exprimă prin aşa o proprietate. Pe fețele unghiului diedru alegem punctele arbitrare M şi N (fig. 37.3). Segmentul MN aparține unghiului diedru «galben», iar unghiului diedru «albastru» îi aparțin numai extremitățile segmentului.

Mai departe spunând «unghi diedru», vom avea în vedere aşa un unghi diedru, care conține orice segment cu extremitățile pe fețele lui (unghiul diedru «galben»).

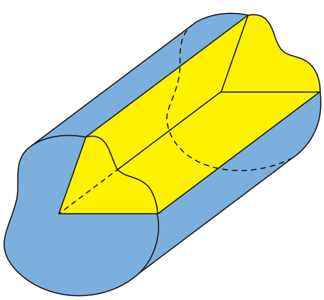


Fig. 37.2

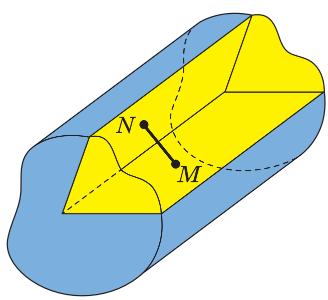


Fig. 37.3

Fig. 37.4

O imagine intuitivă a unghiului diedru este tabla din clasă semideschisă, acoperişul în două ape, notebook-ul deschis (fig. 37.4).

Unghiul diedru se consideră analogul spațial a unghiului de pe plan.

Voi deja ştiți cum de determinat mărimea unghiului pe plan. Să ne învățăm să determinăm mărimea unghiului diedru.

Notăm pe muchia MN a unghiului diedru un punct arbitrar O. Prin punctul O în fețele unghiului diedru ducem semidreptele OA şi OB, perpendiculare la muchia MN (fig. 37.5). Unghiul AOB, format de aceste semidrepte, se numeşte **unghi liniar al unghiului diedru.** Deoarece $MN \perp OA$ şi $MN \perp OB$, atunci $MN \perp AOB$. Astfel, *dacă printr-un punct arbitrar al muchiei unghiului diedru se duce un plan perpendicular la muchie, atunci acest plan intersectează unghiul diedru după unghiul liniar al lui.*

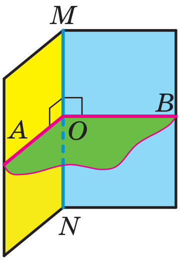


Fig. 37.5

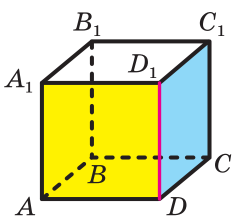


Fig. 37.6

Definiție. Mărimea unghiului diedru se numeşte mărimea unghiului liniar a lui.

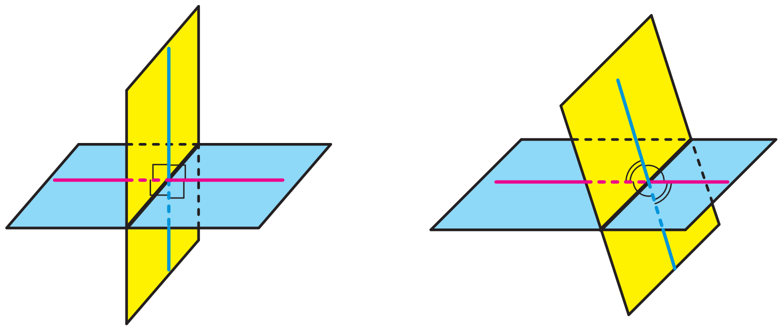
Unghiul diedru se numeşte ascuțit, drept, obtuz sau desfăşurat, dacă unghiul liniar a lui respectiv este ascuțit, drept, obtuz sau desfăşurat.

De exemplu, să cercetăm cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 37.6). Unghiul diedru cu muchia DD_1, fețele căruia aparțin planelor ADD_1 şi CDD_1, este drept. Într-adevăr, deoarece $AD \perp DD_1$ şi $CD \perp DD_1$, atunci unghiul ADC – unghi liniar a unghiului diedru cu muchia DD_1. Unghiul ADC este drept.

În urma intersecției a două plane se formează patru unghiuri diedre diferite de cel desfăşurat (fig. 37.7). Aici sunt posibile două cazuri:

1) toate cele patru unghiuri diedre sunt drepte (fig. 37.7, *a*);

2) din patru unghiuri diedre două unghiuri egale sunt ascuțite şi două unghiuri egale sunt obtuze (fig. 37.7, *b*).



a *b*

Fig. 37.7

În ambele cazuri din patru unghiuri diedre se va găsi aşa un unghi, că mărimea lui nu este mai mare de 90°.

Definiție. Unghi dintre două plane ce se intersectează se numeşte mărimea aceluia din unghiurile diedre formate, care nu este mai mare de 90°. . Unghiul dintre două plane paralele este egal cu 0°.

Unghiul dintre un poligon şi planul, care nu conține acest poligon, se numeşte unghiul dintre planul, ce conține poligonul şi planul dat.

Unghi dintre două poligoane, care se află în plane diferite, se numeşte unghiul dintre planele, în care se află aceste poligoane.

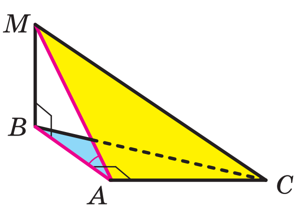


Fig. 37.8

Problemă. Triunghiurile dreptunghice ABC ($\angle A = 90°$) şi ABM ($\angle B = 90°$) au cateta comună AB (fig. 37.8). Segmentul MB este perpendicular pe planul ABC. Este cunoscut, că $MB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $MC = 10$ cm. Găsiți unghiul dintre planele ABC şi AMC.

Rezolvare. Segmentul BA este proiecția oblicei MA pe planul ABC. Deoarece $BA \perp AC$, în virtutea teoremei despre trei perpendiculare $MA \perp AC$. Deci, unghiul MAB – unghi liniar al unghiului diedru cu muchia AC, fețele căruia aparțin planelor ABC şi AMC. Deoarece unghiul MAB este ascuțit, atunci unghiul dintre planele ABC şi AMC este egal cu mărimea unghiului MAB.

Pentru latura AM a triunghiului dreptunghic AMC se poate scrie: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. De aici $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (cm).

Pentru unghiul MAB a triunghiului dreptunghic MAB se poate scrie: $\sin\angle MAB = \frac{MB}{MA}$. De aici $\sin\angle MAB = \frac{1}{2}$ şi $\angle MAB = 30°$.

Răspuns: 30°. ◀

Are loc teorema, care stabileşte legătura dintre aria poligonului dat şi aria proiecției lui.

Teorema 37.1 (aria proiecției ortogonale a poligonului). ***Aria proecției poligonuli convex este egală cu produsul ariei lui şi a cosinusului unghiului α făcut de poligon şi proiecția lui, unde $0° \leqslant \alpha < 90°$.***

Definiție. Două plane se numesc perpendiculare, dacă unghiul dintre ele este egal cu 90°.

Dacă planele α şi β sunt perpendiculare, atunci se scrie: $\alpha \perp \beta$. De asemenea este primit de spus, că planul α este perpendicular pe planul β, sau planul β este perpendicular pe planul α.

O reprezentare intuitivă despre planele perpendiculare este dată de planul peretelui şi al podului camerei, planul uşii şi al podelei, planul plasei şi a terenului de tenis (figura 37.9).

Fig. 37.9

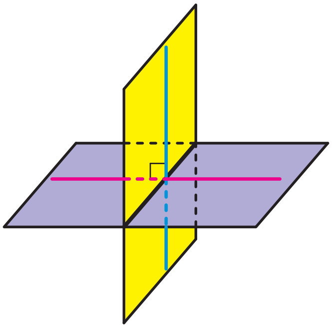


Fig. 37.10

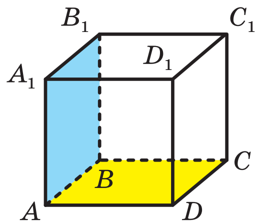


Fig. 37.11

Evident, că plane perpendiculare în urma intersecției formează patru unghiuri diedre drepte (fig. 37.10).

Teorema 37.2 (criteriul de perpendicularitate al planelor). ***Dacă unul din două plane trece prin dreapta, care este perpendiculară pe cel de-al doilea plan, atunci aceste plane sunt perpendiculare.***

De exemplu, planul feței AA_1B_1B al paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 37.11) este perpendicular pe planul feței $ABCD$. Într-adevăr, planul AA_1B_1 trece prin dreapta AA_1 care este perpendiculară pe planul ABC.

?

1. Care figură se numeşte unghi liniar al unghiului diedru?
2. Ce se numeşte mărime a unghiului diedru?
3. Ce se numeşte unghi dintre două plane, care se intersectează?
4. Cu ce este egal unghiul dintre două plane paralele?
5. Formulaţi teorema despre aria proiecţiei ortogonale a poligonului.
6. Care plane se numesc perpendiculare?
7. Formulaţi criteriul de perpendicularitate al planelor.

EXERCIŢII

37.1.° Arătați pe obiectele care vă înconjoară, modele de unghiuri diedre.

37.2.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 37.12).

1) Dintre unghiurile date indicați unghiul liniar al unghiului diedru, fețele căruia aparțin planelor ABC şi AB_1C_1:
   a) $\angle A_1AB$; b) $\angle A_1AB_1$; c) $\angle B_1DA$; d) $\angle B_1AB$; e) $\angle B_1DB$.
2) Găsiți mărimea unghiului diedru dat.

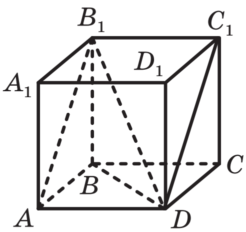


Fig. 37.12

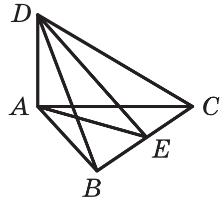


Fig. 37.13

37.3.° Segmentul AD – perpendiculara pe planul triunghiului regulat ABC (fig. 37.13), punctul E – mijlocul laturii BC. Dintre unghiurile date indicați unghiul liniar al unghiului diedru, fețele căruia aparțin planelor ABC şi BCD:

1) $\angle ABD$; 2) $\angle AED$; 3) $\angle BAD$; 4) $\angle ACD$.

37.4.° Pe una dintre fețele unghiului diedru, mărimea căruia este egală cu 30°, este notat punctul A (fig. 37.14). Distanța de la punctul A până la muchia unghiului diedru este egală cu 18 cm. Cu ce este egală distanța de la punctul A până la a doua față a unghiului diedru?

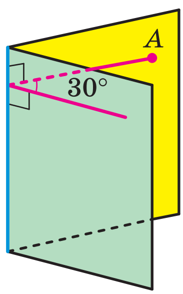


Fig. 37.14

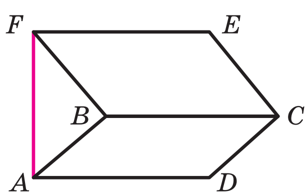


Fig. 37.15

37.5.° Pe una din fețele unghiului diedru ascuțit este notat un punct, distanța de la care până la altă față este egală cu $4\sqrt{3}$ cm, iar până la muchia unghiului diedru – cu 8 cm. Care este mărimea unghiului diedru dat?

37.6.° Dreptunghiurile $ABCD$ şi $BCEF$ sunt situate în plane diferite (fig. 37.15), totodată dreapta AF este perpendiculară pe planul ABC. Găsiți unghiul diedru fețele căruia conțin dreptunghiurile date, dacă $AF = \sqrt{15}$ cm, $CD = \sqrt{5}$ cm.

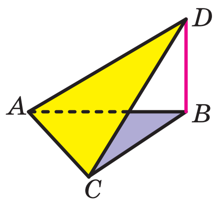


Fig. 37.16

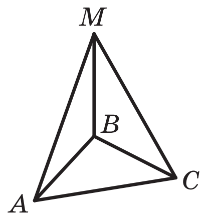


Fig. 37.17

37.7.° Triunghiurile ABC şi ACD sunt situate în plane diferite (fig. 37.16), totodată dreapta BD este perpendiculară pe planul ABC. Găsiţi unghiul diedru a cărui feţe conţin triunghiurile date, dacă $\angle ACD = 90°$, $BC = 6$ cm, $CD = 12$ cm.

37.8.° Se dă planul α şi dreapta a, paralelă lui. Câte astfel de plane se pot duce prin dreapta a, ca unghiul φ dintre planul α şi planul dus să satisfacă condiţia:
1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

37.9.° Segmentul MB – perpendicular pe planul triunghiului echilateral ABC (fig. 37.17). Găsiţi unghiul dintre planele ABM şi CBM.

37.10.° °Segmentul CE – perpendicular pe planul pătratului $ABCD$ (fig. 37.18). Găsiţi unghiul dintre planele BCE şi DCE.

37.11.° Segmentul BK – perpendicular pe planul rombului $ABCD$ (fig. 37.19), $\angle ABC = 100°$. Găsiţi unghiul dintre planele ABK şi CBK.

37.12.° Găsiţi aria proiecţiei poligonului pe un oarecare plan, dacă aria poligonului este egală cu $18\sqrt{2}$ cm^2, iar unghiul dintre planul poligonului şi planul de proiecţie alcătuieşte 45°.

37.13.° Găsiţi aria poligonului, dacă aria proiecţiei sale pe un oarecaret plan este egală cu 24 cm^2, iar unghiul dintre planul poligonului şi planul de proiecţie este de 30°.

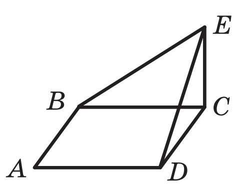


Fig. 37.18

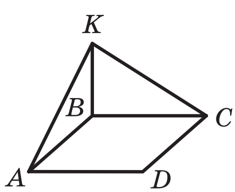


Fig. 37.19

37.14.° Arătați pe obiectele care vă înconjoară, modele de plane perpendiculare.

37.15.° În figura 37.20 este desenat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Determinați, dacă sunt oare perpendiculare planele:

1) $A_1B_1C_1$ şi CDD_1;
2) ABC şi $A_1B_1C_1$;
3) AA_1C_1 şi ABC;
4) ACC_1 şi BDD_1.

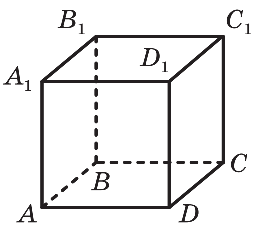


Fig. 37.20

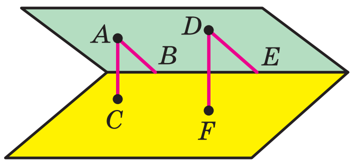


Fig. 37.21

37.16.• Pe o față a unghiului diedru ascuțit sunt notate punctele A şi D (fig. 37.21). Din punctul A au coborât perpendicularele AB şi AC corespunzător pe muchie şi pe a doua față a unghiului diedru. Din punctul D, sunt coborâte perpendicularele DE şi DF corespunzător, pe muchie şi pe a doua față a unghiului diedru. Găsiți segmentul DE, dacă $AB = 21$ cm, $AC = 12$ cm, $DF = 20$ cm.

37.17.• Pe o față a unghiului diedru ascuțit sunt notate punctele A şi B, depărtate de la cea de-a doua față cu 14 cm şi 8 cm corespunzător. Distanța de la punctul A până la muchia unghiului diedru este egală cu 42 cm. Găsiți distanța de la punctul B până la muchia unghiului diedru.

37.18.• Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 10 cm şi 18 cm, iar latura laterală – 8 cm. Găsiți aria proiecției trapezului dat pe planul α, dacă unghiul dintre planul trapezului şi planul α este egal cu $30°$.

37.19.• Prin una din laturile rombului, diagonalele căruia sunt egale cu 6 cm şi 12 cm, este dus planul α, care formează cu planul rombului un unghi de $30°$. Aflați aria proiecției rombului dat pe planul α.

37.20.•• Punctul B este situat în interiorul unghiului diedru şi este depărtat de la fețele lui cu $\sqrt{2}$ cm şi $\sqrt{3}$ cm, iar de la muchie – cu 2 cm. Găsiți unghiul diedru dat.

37.21.•• Punctul C este situat în interiorul unghiului diedru. Unghiul dintre perpendicularele coborâte din punctul C pe fețele unghiului diedru este egal cu $110°$. Găsiți unghiul diedru dat.

37.22.•• Pe fețele unghiului diedru, care este egal cu 45°, sunt duse drepte, paralele cu muchia lui şi îndepărtate de la muchie cu $2\sqrt{2}$ cm şi 3 cm corespunzător. Găsiți distanța dintre dreptele paralele date.

37.23.•• Planul α intersectează fețele unghiului diedru după dreptele paralele m şi n. Distanța de la muchia unghiului diedru până la dreapta m este egală cu 3 cm, până la dreapta n – 5 cm, iar distanța dintre dreptele m şi n este de 7 cm. Găsiți unghiul diedru dat.

37.24.•• Planele dreptunghiurilor $ABCD$ şi $CBFE$ sunt perpendiculare (fig. 37.22). Găsiți distanța de la punctul E până la dreapta AD şi distanța de la punctul D până la dreapta BF, dacă $AB = BF = 5$ cm, $BC = 12$ cm.

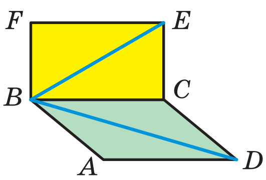


Fig. 37.22

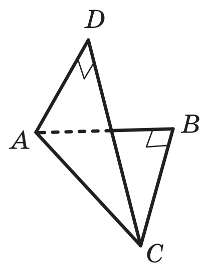


Fig. 37.23

37.25.•• Planele triunghiurilor regulate ABC şi ADC sunt perpendiculare. Găsiți unghiul dintre dreapta BD şi planul ABC.

37.26.•• Triunghiurile isoscele dreptunghice ABC şi ADC au ipotenuza AC comună cu lungimea de 6 cm, iar planele lor sunt perpendiculare (fig. 37.23). Aflați distanța dintre punctele B şi D.

37.27.•• Capetele segmentului aparțin la două plane perpendiculare, iar distanțele de la capetele segmentului până la linia de intersecție a planelor sunt egale cu 15 cm şi 16 cm. Distanța dintre bazele perpendicularelor, duse din capetele segmentului pe linia de intersecție a acestor plane, este egală cu 12 cm. Găsiți segmentul dat.

37.28.•• Punctele A şi B sunt situate în planele perpendiculare α şi β corespunzător. Din punctele A şi B sunt coborâte perpendicularele AC şi BD pe linia de intersecție a planelor α şi β. Găsiți distanța de la punctul B până la linia de intersecție a planelor α şi β, dacă distanța de la punctul A până la această linie este egală cu 9 cm, $AB = 17$ cm, $CD = 12$ cm.

37.29.•• Planele α şi β sunt perpendiculare. Punctul A este situat în planul α, iar punctul B – în planul β. Punctul A este depărtat de la linia de intersecție a planelor α şi β cu 5 cm, iar punctul B – cu $5\sqrt{2}$ cm. Găsiți unghiul dintre dreapta AB şi planul α, dacă unghiul dintre dreapta AB şi planul β este egal cu 30°.

37.30.•• Capetele segmentului cu lungimea de 6 cm aparțin la două plane perpendiculare, iar distanțele de la capetele segmentului până la linia de intersecție a planelor sunt egale cu 3 cm şi $3\sqrt{3}$ cm. Aflați unghiurile, pe care le face acest segment cu planele date.

37.31.•• Planele trapezelor $ABCD$ şi $AEFD$ cu baza comună AD sunt perpendiculare, $\angle BAD = \angle EAD = 90°$, $\angle ADC = \angle ADF = 60°$, $CD = 4$ cm, $DF = 8$ cm. Aflați distanța dintre: 1) dreptele BC şi EF; 2) punctele C şi F.

37.32.•• Planul pătratului $ABCD$ şi planul dreptunghiului $AEFD$ sunt perpendiculare. Aflați distanța dintre dreptele BC şi EF, dacă aria pătratului este egală cu 25 cm^2, iar aria dreptunghiului – 60 cm^2.

37.33.•• Muchia DA a tetraedrului $DABC$ este perpendiculară pe planul ABC (fig. 37.24), $AB = BC = AC = 8$ cm, $BD = 4\sqrt{7}$ cm. Găsiți unghiul diedru, fețele căruia conțin triunghiurile ABC şi BCD.

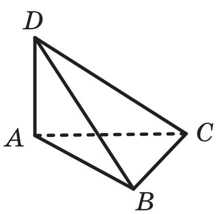


Fig. 37.24

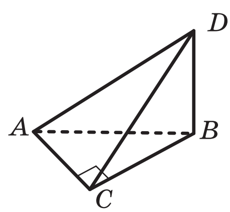


Fig. 37.25

37.34.•• Muchia DB a tetraedrului $DABC$ este perpendiculară pe planul ABC (fig. 37.25), $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 7$ cm, $AD = 7\sqrt{5}$ cm. Găsiți unghiul diedru, fețele căruia conțin triunghiurile ABC şi ACD.

37.35.* Punctul M este mijlocul muchiei CC_1 a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflați unghiul dintre planele BMD şi A_1BD.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

37.36. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 15 cm şi 25 cm, iar mediana, dusă la a treia latură este egală cu 16 cm. Aflați a treia latură a triunghiului.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 5

Unghiul dintre drepte în spaţiu

Unghiul dintre dreptele, ce se intersectează, se numeşte mărimea aceluia din unghiurile, create la intersecția lor, care nu este mai mare de 90°.

Se consideră, că unghiul dintre două drepte paralele este egal cu 0°.

Unghiul dintre două drepte neconcurente se numeşte unghiul dintre dreptele, care se intersectează şi respectiv sunt paralele cu dreptele neconcurente date.

Două drepte în spaţiu se numesc perpendiculare, dacă unghiul dintre ele este egal cu 90°.

Perpendicularitatea dreptei şi a planului

Dreapta se numeşte perpendiculară pe plan, dacă ea este perpendiculară la orice dreaptă, ce aparține acestui plan.

Dacă dreapta este perpendiculară pe două drepte, ce se află într-un plan şi se intersectează, atunci ea este perpendiculară şi pe acest plan.

Dacă una din două drepte paralele este perpendiculară pe un plan, atunci şi a doua dreaptă este perpendiculară pe acest plan.

Dacă două drepte sunt perpendiculare pe unul şi acelaşi plan, atunci ele sunt paralele.

Printr-un punct dat se poate duce o dreaptă, perpendiculară la planul dat, şi numai una singură.

Proiecția ortogonală a figurii

Fie că figura F_1 este proiecția paralelă a figurii F pe planul α în direcția l. Dacă $l \perp \alpha$, atunci figura F_1 este numită proiecția ortogonală a figurii F pe planul α.

Distanța de la punct până la plan

Dacă punctul nu aparține planului, atunci distanța de la punctul dat până la plan se numeşte lungimea perpendicularei, coborâte din acest punct pe plan. Dacă punctul aparține planului, atunci se consideră ca distanța de la punct până la plan este egală cu zero.

Distanța de la dreaptă până la planul, paralel ei

Distanța de la o dreaptă până la planul, paralel ei, se numeşte distanța de la orice punct al acestei drepte până la plan.

Distanța dintre două plane paralele

Distanța dintre două plane paralele se numeşte distanța de la orice punct al unui plan până la alt plan

Teorema celor trei perpendiculare

Dacă dreapta care aparține unui plan, este perpendiculară pe proiecția unei oblice pe acest plan, atunci ea este perpendiculară şi pe însăşi oblica dată. Şi invers, dacă dreapta, care aparține planului, este perpendiculară pe oblica dusă la acest plan, atunci ea este perpendiculară şi pe proiecția ei pe acest plan.

Unghiul dintre o dreaptă şi plan

Dacă dreapta este paralelă cu planul sau îi aparține lui, atunci se consideră ca unghiul dintre o astfel de dreaptă şi plan este egal cu $0°$.

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, atunci se consideră că unghiul făcut de o astfel de dreaptă şi plan este egal cu $90°$.

Dacă dreapta intersectează planul şi nu este perpendiculară pe el, atunci unghiul dintre o astfel de dreaptă şi plan se numeşte unghiul dintre dreaptă şi proiecția ei pe acest plan.

Mărimea unghiului diedru

Mărimea unghiului diedru se numeşte mărimea unghiului liniar al lui.

Unghiul dintre două plane, ce se intersectează

Unghiul dintre două plane, ce se intersectează, se numeşte mărimea acelui unghi din unghiurile diedre create, care nu este mai mare de $90°$.

Aria proiecției ortogonale a poligonului

Aria proiecției ortogonale a poligonului convex este egală cu produsul ariei lui şi a cosinusului unghiului α dintre poligon şi proiecția lui, unde $0° \leqslant \alpha° \leqslant 90°$.

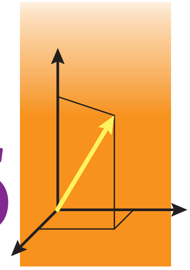
Plane perpendiculare

Două plane se numesc perpendiculare dacă unghiul dintre ele este egal cu $90°$.

Criteriul de perpendicularitate al planelor

Dacă unul din plane trece printr-o dreaptă, perpendiculară pe alt plan, atunci aceste plane sunt perpendiculare.

COORDONATE ŞI VECTORI ÎN SPAŢIU §6



În acest paragraf voi o să face cunoştinţă cu sistemul cartezian de coordonate în spaţiu, o să vă învăţaţi a afla coordonatele punctelor în spaţiu, lungimea segmentului şi coordonatele mijlocului lui.

O să generalizaţi şi extindeţi cunoştinţele voastre despre vectori.

38. Sistemul cartezian de coordonate în spaţiu

În clasele anterioare ați făcut cunoştință cu sistemul rectangular de coordonate pe plan – acestea-s două drepte de coordonate perpendiculare cu origine comună de referință (fig. 38.1).

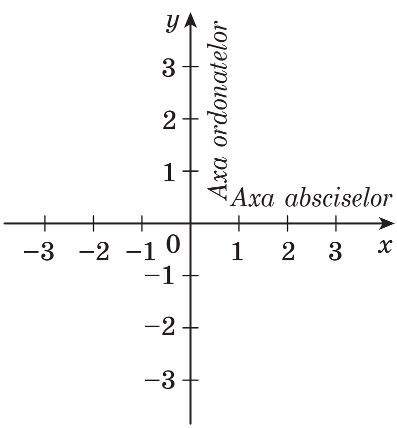


Fig. 38.1

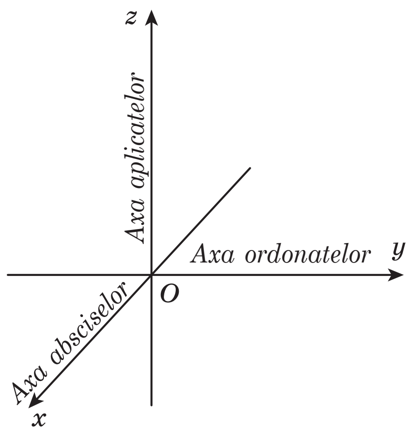


Fig. 38.2

Sistemul de coordonate se poate introduce şi în spațiu.

Sistem rectangular de coordonate în spațiu se numeşte trei drepte de coordonate reciproc perpendiculare două câte două cu origine comună de referință (fig. 38.2). Punctul, în care se intersectează cele trei drepte de coordonate, se înseamnă cu litera *O*. El se numeşte **originea de coordonate**. Dreptele de coordonate se înseamnă cu literele *x, y* şi *z*, ele se numesc respectiv **axa absciselor, axa ordonatelor** şi **axa aplicatelor**.

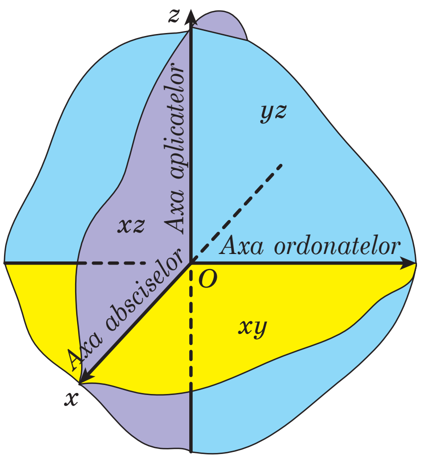


Fig. 38.3

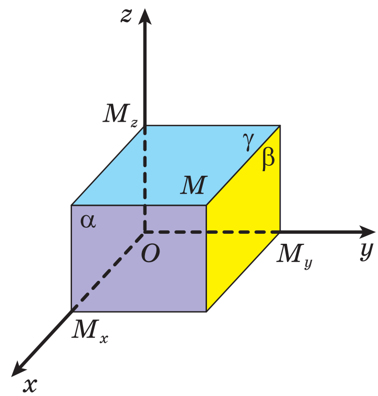


Fig. 38.4

Planele, care trec prin perechile dreptelor de coordonate x şi y, x şi z, y şi z, se numesc **plane de coordonate**, ele se înseamnă corespunzător xy, xz, yz (fig. 38.3).

Spaţiul în care este dat sistemul de coordonate, se numeşte **spaţiu de coordonate**. Daca axele de coordonate sunt însemnate cu literele x, y, z, atunci spaţiul de coordonate se înseamnă xyz.

Din cursul de planimetrie cunoaşteţi, că fiecărui punct M al planului de coordonate xy i se pun în corespondenţă două numere ordonate $(x, y;)$, care sunt numite coordonatele punctului M. Se înseamnă astfel: $M\ (x;\ y)$.

Analogic fiecărui punct M al spaţiului de coordonate i se pune în corespondenţă tripletul de numere ordonate (x, y, z), care este determinat astfel. Ducem prin punctul M trei plane α, β şi γ perpendiculare pe axele de coordonate x, y şi z corespunzător. Punctele de intersecţie ale planelor cu axele de coordonate le însemnăm M_x, M_y şi M_z (fig. 38.4). Coordonata punctului M_x pe axa x se numeşte **abscisa** punctului M şi se înseamnă cu litera x. Coordonata punctului M_y pe axa y se numeşte **ordonata** punctului M şi se înseamnă cu litera y. Coordonata punctului M_z pe axa z se numeşte **aplicata** punctului M şi se înseamnă cu litera z.

Aceste trei numere ordonate obţinute $(x;\ y;\ z)$ în aşa un mod se numesc **coordonatele punctului** M în spaţiu. Se scrie astfel: $M\ (x;\ y;\ z)$.

Dacă punctul M are coordonatele $M\ (x;\ y;\ z)$, atunci numerele $|\ x\ |$, $|\ y\ |$, $|\ z\ |$, sunt egale cu distanţa de la punctul M până la planele yz, xz, xy. Folosind acest fapt, se poate demonstra, de exemplu, că punctele cu coordonatele $M\ (x;\ y;\ z)$ şi $N\ (x;\ y;\ –z)$ se află pe dreapta,

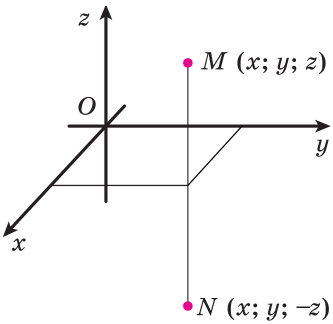


Fig. 38.5

perpendiculară la planul xy, şi sunt egal depărtate de la acest plan (fig.38.5). În asemenea caz se spune, că punctele M şi N sunt **simetrice faţă de planul** xy.

Dacă punctul aparține unui plan de coordonate sau unei axe de coordonate, atunci unele coordonate ale lui sunt egale cu zero. De exemplu, punctul A $(x;\ y;\ 0)$ aparține planului de coordonate xy, iar punctul $B\ (0,\ 0;\ z)$ – axei aplicatelor.

Este adevărată afirmația.

Teorema 38.1. ***Distanța dintre două puncte*** $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***şi*** $B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***se poate afla cu formula***

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Teorema 38.2. ***Fiecare coordonată a mijlocului unui segment este egală cu semisuma coordonatelor corespunzătoare ale extremităților lui, adică mijlocul segmentului cu capetele în punctele*** $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***şi*** $B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***este punctul***

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2};\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Demonstrarea teoremelor 38.1 şi 38.2 este analogică, cu demonstrările teoremelor corespunzătoare din cursul de planimetrie.

De exemplu, mijlocul segmentului cu capetele în punctele $A\ (x;\ y;\ z)$ şi $B\ (-x;\ -y;\ -z)$ este originea de coordonate – punctul $O\ (0;\ 0;\ 0)$. În asemenea caz se spune, că punctele A şi B sunt **simetrice față de originea de coordonate**.

?

1. Cum se numesc trei drepte de coordonate perpendiculare două câte două cu originea comună de referinţă?
2. Cum se numeşte dreapta de coordonate însemnată prin litera x? litera y? litera z?
3. Descrieţi în ce mod fiecărui punct M al spaţiului de coordonate i se pune în corespondenţă tripletul ordonat de numere $(x;\ y;\ z)$.
4. În care caz se spune, că două puncte sunt simetrice faţă de planul de coordonate xy? planul xz? planul yz?
5. Cum de găsit distanţa dintre două puncte, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?

6. Cum de găsit coordonatele mijlocului unui segment, dacă sunt cunoscute coordonatele extremităţilor lui?
7. În care caz se spune că două puncte sunt simetrice faţă de originea de coordonate?

EXERCIŢII

38.1.° Determinaţi, dacă se află oare punctul dat pe axa de coordonate, şi în cazul răspunsului afirmativ, indicaţi această axă:

1) $A\,(4; -3; 0)$; 3) $C\,(-6; 0; 0)$; 5) $E\,(0; 0; -2)$;
2) $B\,(1; 0; -5)$; 4) $D\,(0; 7; 0)$; 6) $F\,(3; 0; 0)$.

38.2.° Determinaţi, dacă se află oare punctul dat pe planul de coordonate, şi în cazul răspunsului afirmativ, indicaţi acest plan:

1) $A\,(4; -3; 5)$; 3) $C\,(3; 3; 0)$; 5) $E\,(0; 4; 0)$;
2) $B\,(0; -2; 6)$; 4) $D\,(2; 0; 8)$; 6) $F\,(-1; 1; 2)$.

38.3.° Care este distanţa de la punctul $M\,(4; -5; 2)$ până la planul de coordonate:

1) xy; 2) xz; 3) yz?

38.4.° Ce coordonate are proiecţia punctului $M\,(-3; 2; 4)$ pe planul de coordonate:

1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.5.° Aflaţi distanţa dintre punctele A şi B, dacă:

1) $A\,(3; -4; 2)$, $B\,(5; -6; 1)$; 2) $A\,(-2; 3; 1)$, $B\,(-3; 2; 0)$.

38.6.° Aflaţi distanţa dintre punctele $C\,(6; -5; -1)$ şi $D\,(8; -7; 1)$.

38.7.° Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului CD, dacă $C\,(-2; 6; -7)$, $D\,(4; -10; -3)$.

38.8.° Găsiţi coordonatele mijlocului segmentului EF, dacă $E\,(3; -3; 10)$, $F\,(1; -4; -8)$.

38.9.• Care din punctele $A\,(-1; 6; 2)$, $B\,(-1; -6; 2)$, $C\,(1; 6; -2)$, $D\,(1; -6; 2)$ se află într-un plan, paralel cu planul xz?

38.10.• Care din punctele $M\,(5; 10; -3)$, $N\,(5; 9; 3)$, $K\,(4; -9; 3)$, $P\,(4; -9; 2)$ se află într-un plan, paralel cu planul xy?

38.11.• Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul $M\,(1; -5; 2)$ faţă de planele:

1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.12.• Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul $N\,(-7; 1; 0)$ faţă de originea de coordonate:

38.13.• Care din punctele $A\,(5; -8; 1)$, $B\,(5; 8; 1)$, $C\,(-5; 7; 1)$, $D\,(5; -7; -1)$ se află pe o dreaptă, paralelă cu axa ordonatelor?

38.14.• Care din punctele D (2; 3; 4), E (–2; 3; 4), K (2; 3; –4), M (–2; –3; 4) se află pe o dreaptă, paralelă cu axa aplicatelor?

38.15.• Cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este amplasat în sistemul rectangular de coordonate, aşa cum este prezentat în figura 38.6. Punctul A are coordonatele (1; –1; 0). Aflați coordonatelor celorlalte vârfuri ale cubului.

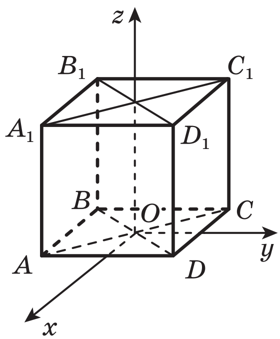


Fig. 38.6

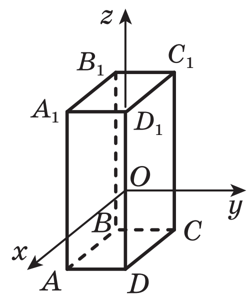


Fig. 38.7

38.16.• Muchiile laterale ale paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt paralele cu axa aplicatelor (fig. 38.7), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Originea de coordonate, punctul O, este mijlocul muchiei DD_1. Aflați coordonatele vârfurilor paralelipipedului.

38.17.• Punctele A (3; –2; 6) şi C (–1; 2; –4) sunt vârfurile unui pătrat $ABCD$. Găsiți aria acestui pătrat.

38.18.• Punctele A (5; –5; 4) şi B (8; –3; 3) sunt vârfurile unui triunghi echilateral ABC. Găsiți perimetrul acestui triunghi.

38.19.• Punctul S – mijlocul segmentului AD, A (–1; –2; –3), S (5; –1; 0). Aflați coordonatele punctului D.

38.20.• Distanța dintre punctele A (1; y; 3) şi B (3; –6; 5) este egală cu $2\sqrt{6}$. Aflați valoarea lui y.

38.21.• Punctul A se află pe axa absciselor. Distanța de la punctul A până la punctul C (1; –1; –2) este egală cu 3. Aflați coordonatele punctului A.

38.22.•• Găsiți distanța de la punctul M (–3; 4; 9) până la axa aplicatelor.

38.23.•• Găsiți distanța de la punctul K (12; 10; –5) până la axa ordonatelor.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

38.24. Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 13 cm şi 37 cm, iar diagonalele lui sunt perpendiculare. Aflați aria trapezului.

39. Vectorii în spaţiu

În cursul de planimetrie voi ați studiat vectorii pe plan. Acum voi începeți studierea vectorilor în spațiu. Multe noțiuni şi proprietăți, legate cu vectorii pe plan, se pot aproape cuvânt cu cuvânt de le atribuit vectorilor în spațiu. Demonstrarea a astfel de afirmații despre vectorii în spațiu este în totalitate analogică cu demonstrările afirmațiilor corespunzătoare despre vectorii din plan.

Să examinăm segmentul AB. Dacă noi convenim ca punctul A să-l considerăm începutul **(originea)** segmentului, iar punctul B – **sfârşitul (extremitatea)** lui, atunci astfel de segment se va caracteriza nu numai cu lungimea, dar şi cu direcția de la punctul A până la punctul B. Dacă este indicat, care punct este originea segmentului, şi care punct – extremitatea lui, atunci astfel de segment se numeşte **segment orientat** sau **vector**.

Vectorul cu originea în punctul A şi extremitatea în punctul B se înseamnă astfel $\overrightarrow{AB}$ (se citeşte: ”vectorul AB”). Pentru însemnarea vectorilor de asemenea se folosesc literele mici ale alfabetului latin cu săgeți deasupra.

În figura 39.1.sunt prezentați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ şi $\vec{p}$.

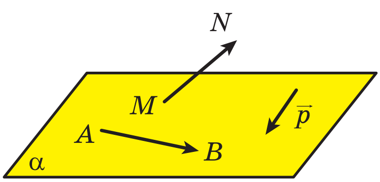


Fig. 39.1

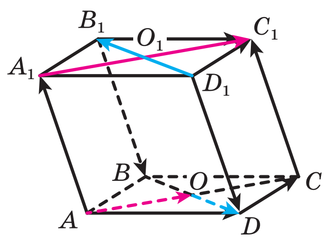


Fig. 39.2

În comparație cu segmentul, la care capetele sunt puncte diferite, la vector originea şi extremitatea pot să coincidă.

Au convenit de numit vectorul, la care originea şi extremitatea este unul şi acelaşi punct, **vector nul** sau **nul-vector** şi să-l inseme $\vec{0}$.

Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se numeşte lungimea segmentului AB. Se înseamnă: $|\overrightarrow{AB}|$. Modulul vectorului $\vec{a}$ se înseamnă astfel: $|\vec{a}|$. Se consideră că modulul vectorului nul este egal cu zero. Se scrie $|\vec{0}| = 0$.

Definiție. Doi vectori nenuli se numesc coliniari, dacă ei se află pe drepte paralele sau pe aceeaşi dreaptă. Vectorul nul este considerat coliniar oricărui vector.

În figura 39.2 este reprezentată prisma patrulateră $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Vectorii $\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{A_1C_1}$ sunt coliniari. Se scrie: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Vectorii nenuli coliniari pot fi **coorientaţi** şi **orientaţi opus**. De exemplu, în figura 39.2 vectorii $\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{A_1C_1}$ sunt coorientaţi. Se scrie $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Vectorii $\overrightarrow{OD}$ şi $\overrightarrow{D_1B_1}$ sunt orientaţi opus. Se scrie: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Definiţie. Doi vectorii nenuli se numesc egali, dacă modulii lor sunt egali şi ei sunt coorientaţi. Oricare doi vectori nuli sunt egali.

În figura 39.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Frecvent vorbind despre vectori, noi nu concretizăm, care punct este originea vectorului. Astfel în figura 39.3, *a* este prezentat vectorul $\vec{a}$. În figura 39.3, *b* sunt prezentaţi vectorii, egali cu vectorul $\vec{a}$. Fiecare din ei de asemenea este primit să fie numit vectorul $\vec{a}$.

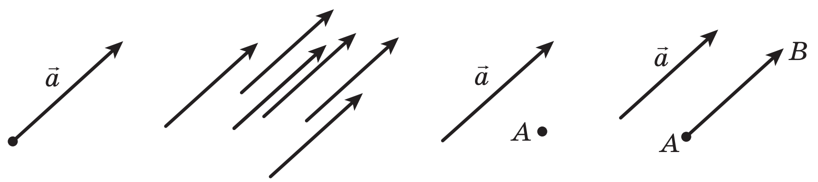


Fig. 39.3

În figura 39.3, *c* este prezentat vectorul $\vec{a}$ şi punctul *A*. Să construim vectorul $\overrightarrow{AB}$, care este egal cu vectorul $\vec{a}$. În acest caz se spune, că vectorul $\vec{a}$ **este depus de la punctul** *A* (fig. 39.3, *d*).

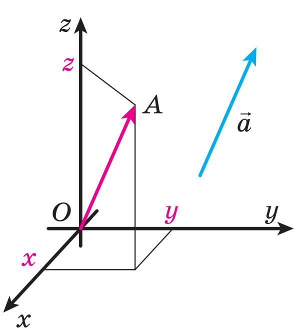


Fig. 39.4

Să examinăm în spaţiul de coordonate vectorul $\vec{a}$. De la originea de coordonate depunem vectorul $\overrightarrow{OA}$, egal cu vectorul $\vec{a}$ (fig. 39.4). **Coordonatele vectorului** $\vec{a}$ se numesc coordonatele punctului *A*. Scrierea $\vec{a}$ **(***x*; *y*; *z***)** înseamnă, că vectorul $\vec{a}$ are coordonatele (*x*; *y*; *z*).

Vectorii egali au coordonatele corespunzătoare egale, şi invers, dacă coordonatele corespunzătoare ale vectorilor sunt egale, atunci şi înşişi vectorii sunt egali.

Teorema 39.1. ***Dacă punctele*** $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ și $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***sunt corespunzător coordonatele originii şi extremităţii vectorului*** $\vec{a}$, ***atunci numerele*** $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ ***şi*** $z_2 - z_1$ ***sunt egale corespunzător cu prima, cu a doua, şi cu a treia coordonate ale vectorului*** $\vec{a}$.

Din formula distanței dintre două puncte reiese, că ***dacă vectorul*** $\vec{a}$ ***are coordonatele*** $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, ***atunci***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

1. Cum se înseamnă vectorul cu originea în punctul A şi extremitatea în punctul B?
2. Care vector se numeşte nul?
3. Ce se numeşte modulul vectorului?
4. Care vectori sunt numiţi coliniari?
5. Care doi vectori nenuli se numesc egali?
6. Ce se poate spune despre coordonatele vectorilor egali?
7. Ce se poate spune despre vectorii, coordonatele corespunzătoare ale cărora sunt egale?
8. Cum de găsit coordonatele vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele originii şi a extremităţii lui?
9. Cum de găsit modulul vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele lui?

EXERCIŢII

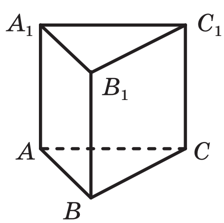


Fig. 39.5

39.1.° În figura 39.5. este reprezentată prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$, baza căreia este un triunghi regulat. Sunt oare egali vectorii:

1) $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{A_1C_1}$;

2) $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{A_1B_1}$;

3) $\overrightarrow{BB_1}$ și $\overrightarrow{C_1C}$;

4) $\overrightarrow{BB_1}$ și $\overrightarrow{AA_1}$?

39.2.° Punctele E şi F sunt corespunzător mijlocurile muchiilor AA_1 şi AD ale paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 39.6), $AB \neq AD$. Indicați vectorii cu originea și extremitatea în vârfurile paralelipipedului, care:

1) sunt coorientați cu vectorul $\overrightarrow{EF}$;

2) sunt orientați opus cu vectorul $\overrightarrow{AB_1}$;

3) au modulii egali cu vectorul $\overrightarrow{BC_1}$.

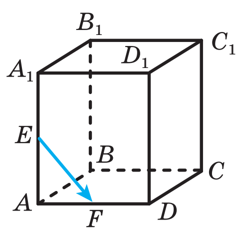


Fig. 39.6

39.3.° Punctele M şi K sunt mijlocurile corespunzătoare ale muchiilor CC_1 şi CD ale paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Indicaţi vectorii cu originea şi extremitatea în vârfurile paralelipipedului, care:

1) sunt coorientaţi cu vectorul $\overrightarrow{AD}$;

2) sunt orientaţi opus cu vectorul $\overrightarrow{MK}$;

3) au moduli egali cu vectorul $\overrightarrow{AC_1}$.

39.4.° Desenaţi tetraedrul $DABC$. Depuneţi:

1) de la punctul A vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{CA}$;

2) de la punctul B vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{AC}$;

3) de la punctul D vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{BC}$.

39.5.° Desenaţi cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Depuneţi:

1) de la punctul A vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{A_1A}$;

2) de la punctul C vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{A_1C_1}$;

3) de la punctul D_1 vectorul, egal cu vectorul $\overrightarrow{B_1D}$.

39.6.° Ce coordonate are vectorul nul?

39.7.° Aflaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:

1) A (3; 4; 2), B (1; –4; 5); 2) A (–6; 7; –1), B (2; 9; 8).

39.8.° Aflaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{CD}$, dacă C (–1; 10; 4), D (–1; 0; 2).

39.9.° Găsiţi modulul vectorului $\vec{m}\left(2; -5; \sqrt{7}\right)$.

39.10.° Găsiţi modulul vectorului $\overrightarrow{MK}$, dacă M (10; –4; 20), K (8; –2; 19).

39.11.• Găsiţi coordonatele extremităţii vectorului $\overrightarrow{PF}\,(2; -3; 6)$, dacă P (3; 5; –1).

39.12.• Găsiţi coordonatele originii vectorului $\overrightarrow{ST}\,(-3; 4; -2)$, dacă T (4; 2; 0).

39.13.• Sunt date punctele A (–2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; –3; 6). Găsiţi coordonatele unui aşa punct D, ca $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

39.14.• Se dau punctele A (5; –12; 7), B (0; y; 3), C (x; 17; –14), D (15; 0; z). Pentru care valori x, y şi z este adevărată egalitatea $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

39.15.• Modulul vectorului $\vec{a}\,(-4; y; 12)$ este egal cu 13. Aflaţi valoarea lui y.

39.16. Pentru care valori ale lui k vectorii $\vec{a}\,(4;\,k+3;\,10)$ şi $\vec{b}\,(k;\,4;\,k+9)$ au moduli egali?

39.17. Folosind vectorii, demonstraţi că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A\,(-4;\,2;\,5)$, $B\,(-6;\,3;\,0)$, $C\,(12;\,-8;\,1)$ şi $D\,(14;\,-9;\,6)$ este paralelogram.

39.18. Sunt date coordonatele a trei vârfuri ale paralelogramului $A\,(10;\,-8;\,-1)$, $C\,(-2;\,4;\,4)$ şi $D\,(11;\,-20;\,10)$. Folosind vectorii, aflaţi coordonatele punctului B.

39.19. Modulul vectorului $\vec{m}$ este egal cu $4\sqrt{3}$, coordonatele lui sunt egale. Găsiţi coordonatele vectorului $\vec{m}$.

39.20. Modulul vectorului $\vec{c}\,(x;\,y;\,z)$ este egal cu 9, coordonatele x şi z sunt egale, iar coordonatele x şi y sunt numere opuse. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{c}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

39.21. Pe o parte de centrul circumferinţei sunt duse două coarde cu lungimile de 30 cm şi 48 cm. Aflaţi distanţa dintre coarde, dacă raza circumferinţei este egală cu 25 cm.

40. Adunarea şi scăderea vectorilor

Admitem că în spaţiu se dau vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Depunem de la un punct arbitrar oarecare A al spaţiului vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal ci vectorul $\vec{a}$. Mai departe de la punctul B depunem vectorul $\overrightarrow{BC}$, egal cu vectorul $\vec{b}$. Vectorul $\overrightarrow{AC}$ se va numi **suma vectorilor** $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 40.1) şi se scrie: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Algoritmul descris de adunare a doi vectori este numit **regula triunghiului**.

Se poate demonstra, că suma vectorilor $\vec{a}+\vec{b}$ nu depinde de alegerea punctului A.

Menţionăm, că *pentru orice trei puncte A, B şi C este adevărată egalitatea* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Ea exprimă regula triunghiului.

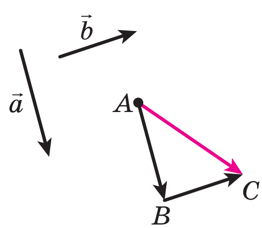


Fig. 40.1

Proprietățile adunării vectorilor sunt analogice cu proprietățile de adunare a numerelor.

Pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt juste egalitățile:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ***(legea comutativă);***

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ***(legea asociativă).***

Suma a trei şi a unui număr mai mare de vectori se află astfel: de la început se adună primul şi al doilea vectori, apoi la suma obținută se adună al treilea vector ş.a.m.d. De exemplu, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Pentru tetraedrul $DABC$, reprezentat în figura 40.2, se poate scrie: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

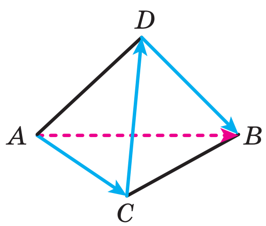


Fig. 40.2

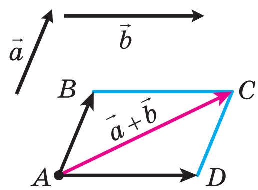


Fig. 40.3

Pentru adunarea a doi vectori necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este comod de folosit **regula paralelogramului**.

Depunem de la un punct arbitrar oarecare A vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal cu vectorul $\vec{a}$, şi vectorul $\overrightarrow{AD}$, egal cu vectorul $\vec{b}$ (fig. 40.3). Construim paralelogramul $ABCD$. Atunci suma căutată $\vec{a}+\vec{b}$ este egală cu vectorul $\overrightarrow{AC}$.

Să cercetăm vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$, care nu se află într-un plan (fig. 40.4). Să aflăm suma acestor vectori.

Construim paralelipipedul astfel, ca segmentele OA, OB şi OC să fie muchiile lui (fig. 40.5). Segmentul OD este diagonala acestui paralelipiped. Vom demonstra, că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

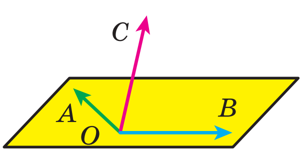


Fig. 40.4

Deoarece patrulaterul $OBKA$ – paralelogram, atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$. Avem: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Deoarece patrulaterul $OCDK$ – paralelogram, atunci $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

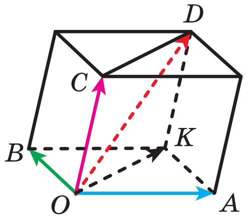


Fig. 40.5

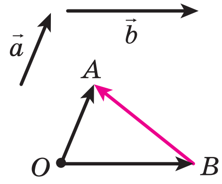


Fig. 40.6

Modalitatea descrisă de adunare a trei vectori, care sunt depuşi de la un punct şi nu se află într-un plan, se numeşte **regula paralelipipedului**.

Definiţie. Diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numeşte un astfel de vector $\vec{c}$, suma căruia cu vectorul $\vec{b}$ este egală cu vectorul $\vec{a}$.

Se scrie: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Vom arăta, cum de construit vectorul, care este egal cu diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

De la un punct arbitrar O depunem vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$, corespunzător egali cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 40.6). Atunci $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Conform definiţiei diferenţei a doi vectori $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, adică $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, deci, vectorul $\overrightarrow{BA}$ este egal cu diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Menţionăm, că pentru oricare trei puncte O. A şi B *este adevărată egalitatea* $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Ea exprimă regula aflării diferenţei a doi vectori, depuşi de la un punct.

Teorema 40.1. ***Dacă coordonatele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt egale corespunzător cu $(a_1; a_2; a_3)$ şi $(b_1; b_2; b_3)$, atunci coordonatele vectorului $\vec{a} + \vec{b}$ sunt egale cu $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, iar coordonatele vectorului $\vec{a} - \vec{b}$ sunt egale cu $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.***

?

1. Descrieţi regula triunghiului pentru aflarea sumei vectorilor.
2. Descrieţi regula paralelogramului pentru aflarea sumei a doi vectori.
3. Descrieţi regula paralelipipedului pentru aflarea sumei a trei vectori.
4. Care vector este numit diferenţă a doi vectori?
5. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, care este egal cu suma a doi vectori daţi?
6. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, care este egal cu diferenţa a doi vectori daţi?

EXERCIŢII

40.1.° Se dă prisma $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 40.7). Aflaţi suma vectorilor:
1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1C_1}$.

40.2.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflaţi suma vectorilor:
1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

40.3.° Se dă paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 40.8). Aflaţi suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

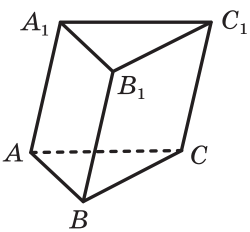


Fig. 40.7

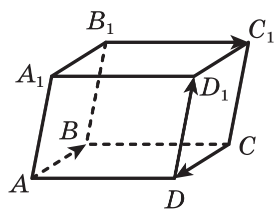


Fig. 40.8

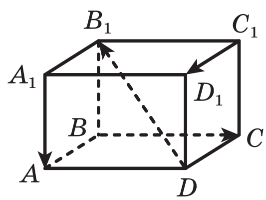


Fig. 40.9

40.4.° Se dă paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 40.9). Aflaţi suma $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

40.5.° Se dau vectorii $\vec{a}\,(3; -6; 4)$ şi $\vec{b}\,(-2; 4; -5)$. Aflaţi:
1) coordonatele vectorului $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

40.6.° Se dau vectorii $\vec{m}\,(-7; -1; 8)$ şi $\vec{n}\,(-3; 2; -4)$. Aflaţi:
1) coordonatele vectorului $\vec{m} + \vec{n}$; 2) $|\vec{m} + \vec{n}|$.

40.7.° Se dau vectorii $\vec{a}\,(-10; 15; -20)$ şi $\vec{b}\,(2; 6; -12)$. Găsiţi:
1) coordonatele vectorului $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

40.8.° Se dau vectorii $\vec{m}\,(3; -1; 2)$ şi $\vec{n}\,(4; -2; -3)$. Aflaţi:
1) coordonatele vectorului $\vec{m} - \vec{n}$; 2) $|\vec{m} - \vec{n}|$.

40.9.° Se dă prisma $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 40.7). Aflaţi diferenţa vectorilor:
1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{B_1C_1}$.

40.10.° Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflaţi diferenţa vectorilor:
1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$.

40.11.• Simplificați expresia $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NK}$.

40.12.• Simplificați expresia $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BM}$.

40.13.•• Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflați vectorul, care este egal cu $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{C_1D_1}$.

40.14.•• Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Aflați vectorul, care este egal cu $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{BC}$.

40.15.•• Aflați coordonatele unui astfel de punct A, că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, dacă $B\,(4;\ -2;\ 12)$, $C\,(3;\ -1;\ 4)$.

40.16.•• Aflați coordonatele unui astfel de punct M, că $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, dacă $C\,(1;\ -5;\ 3)$, $D\,(-2;\ 0;\ 6)$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

40.17. Coardele AB şi AC ale circumferinței sunt perpendiculare, AB = 12 cm, AC = 16 cm. Găsiți distanța de la punctul A până la dreapta BC.

41. Înmulţirea vectorului cu un număr

Definiție. Produsul vectorului nenul $\vec{a}$ şi a numărului k, diferit de zero, se numeşte un astfel de vector $\vec{b}$, că:

1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;

2) dacă $k>0$, atunci $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; dacă $k<0$, atunci $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Se scrie: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Dacă $\vec{a}=\vec{0}$ sau $k=0$, se consideră, că $k\vec{a}=\vec{0}$.

În figura 41.1. este reprezentat paralelogramul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Avem: $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=-2\,\overrightarrow{OA}$.

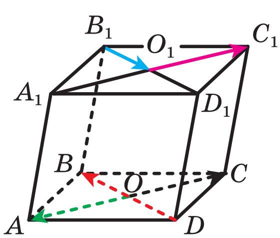


Fig. 41.1

Din definiție reiese, că

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}.$$

Teorema 41.1. ***Pentru oricare vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se îndeplineşte egalitatea $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$.***

Această teoremă oferă posibilitatea de-a reduce scăderea vectorilor la adunarea lor; pentru ca din vectorul $\vec{a}$ de scăzut vectorul $\vec{b}$, se poate la vectorul $\vec{a}$ de adunat vectorul $(-1)\cdot\vec{b}$.

Produsul $-1\cdot\vec{a}$ se înseamnă $-\vec{a}$ şi este numit vectorul, **opus** vectorului $\vec{a}$. De exemplu, se scrie:

$$\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Din definiția înmulțirii vectorului cu un număr reiese, că *dacă* $\vec{b}=k\vec{a}$, *atunci vectorii* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt coliniari.*

Deci, din egalitatea $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ *obținem, că punctele O, A* şi *B se află pe o dreaptă.*

Teorema 41.2. ***Dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari şi $\vec{a}\neq\vec{0}$, atunci există un aşa număr k, că $\vec{b}=k\vec{a}$.***

Teorema 41.3. ***Dacă coordonatele vectorului $\vec{a}$ sunt egale cu $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, atunci coordonatele vectorului $k\vec{a}$ sunt egale cu $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$.***

Înmulțirea vectorului cu un număr are astfel de proprietăți.

Pentru oricare numere k, m şi pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt adevărate egalitățile:

$(km)\vec{a}=k\left(m\vec{a}\right)$ **(*proprietatea asociativă*);**

$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ **(*prima proprietate distributivă*);**

$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ **(*a doua proprietate distributivă*).**

Aceste proprietăți permit de transformat expresiile, care conțin suma vectorilor, diferența lor şi produsul cu un număr, analogic cum noi transformam expresiile algebrice. De exemplu,

$$2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}-6\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{b}.$$

1. Ce se numeşte produsul vectorului nenul $\vec{a}$ şi a numărului k, diferit de zero?
2. Care vector se numeşte opus vectorului dat?
3. Ce se poate spune despre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă $\vec{b}=k\vec{a}$, unde k – un număr oarecare?
4. Este cunoscut, că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari, totodată $\vec{a}\neq\vec{0}$. Cum se poate exprima vectorul $\vec{b}$ prin vectorul $\vec{a}$?
5. Vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului $k\vec{a}$?

6. Ce se poate spune despre vectorii, coordonatele cărora sunt egale cu $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ şi $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$?

7. Scrieţi proprietatea asociativă şi proprietăţile distributive ale înmulţirii vectorului cu un număr.

EXERCIŢII

41.1.° Modulul vectorului $\vec{m}$ este egal cu 4. Cu ce este egal modulul vectorului $\vec{n}$, dacă:

1) $\vec{n} = 3\vec{m}$; 2) $\vec{n} = -5\vec{m}$?

41.2.° Ce fel de vectori – coliniari sau orientați opus sunt vectorii nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

41.3.° Se dă vectorul $\vec{a}\,(4; -8; -20)$. Care sunt coordonatele vectorului $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{b} = 5\vec{a}$; 2) $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$?

41.4.° Se dau vectorii $\vec{a}\,(-3; 2; 5)$ şi $\vec{b}\,(-2; -4; 1)$. Aflați coordonatele vectorului $\vec{c}$, dacă:

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

41.5.° Se dau vectorii $\vec{m}\,(1; 7; -8)$ şi $\vec{n}\,(3; -1; 6)$. Aflați coordonatele vectorului $\vec{a}$, dacă:

1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$; 2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$.

41.6.° Se dă paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 41.2). Indicați toți vectorii, originea şi extremitatea a fiecăruia din ei să fie vârfuri ale paralelipipedului, şi să fie opuşi vectorului:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{B_1D}$; 3) $\overrightarrow{AC}$.

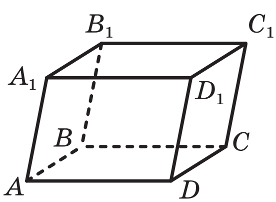


Fig. 41.2

41.7.° Se dă paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 41.2). Indicați toți vectorii, originea şi extremitatea fiecăruia din ei să fie vârfuri ale paralelipipedului, şi să fie opuşi vectorului:

1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$.

41.8.° Care sunt coordonatele vectorului, opus vectorului $\vec{a}\,(13; -10; 9)$?

41.9.$^{\bullet}$ Aflaţi modulul vectorului $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, dacă $\vec{a}\,(-1; 1; 1)$, $\vec{b}\,(2; 2; -2)$.

41.10.$^{\bullet}$ Aflaţi modulul vectorului $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$, dacă $\vec{a}\,(0,5; -0,5; 1,5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

41.11.$^{\bullet}$ Sunt oare coliniari vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, dacă $A\,(4; -1; -4)$, $B\,(0; 5; 6)$, $C\,(0; 2; 7)$, $D\,(2; -1; 2)$?

41.12.$^{\bullet}$ Sunt oare coliniari vectorii $\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{FK}$, dacă $D\,(2; -3; 4)$, $E\,(-1; 6; 2)$, $F\,(-2; 8; 6)$, $K\,(-3; 11; 7)$?

41.13.$^{\bullet}$ Găsiţi valorile ale lui x şi y pentru care vectorii $\vec{a}\,(x; y; 2)$ şi $\vec{b}\,(-2; 3; 1)$ vor fi coliniari.

41.14.$^{\bullet}$ Găsiţi valorile ale lui x şi z pentru care vectorii $\vec{m}\,(-1; 7; z)$ şi $\vec{n}\,(x; 4; 5)$ vor fi coliniari.

41.15.$^{\bullet\bullet}$ Se dă vectorul $\vec{a}\,(3; 2; 1)$. Găsiţi vectorul $\overrightarrow{AB}$, coliniar lui, dacă $A\,(1; 1; 1)$, iar punctul B aparţine planului yz.

41.16.$^{\bullet\bullet}$ Sunt date punctele $A\,(-3; 6; 4)$, $B\,(6; -1; 2)$, $C\,(0; 3; -2)$. Găsiţi un astfel de punct D, care aparţine planului xz, că $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

41.17.$^{\bullet\bullet}$ Se dă vectorul $\vec{a}\,(-2; 6; 3)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{b}$, dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt orientaţi opus, iar modulul vectorului $\vec{b}$ este egal cu 1.

41.18.$^{\bullet\bullet}$ Este dat: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}\,(1; -1; 2)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{m}$.

41.19.$^{\bullet\bullet}$ Se află oare pe o dreaptă punctele:

1) $A\,(5; 6; -4)$, $B\,(7; 8; 2)$ şi $C\,(3; 4; 14)$;

2) $D\,(-1; -7; -8)$, $E\,(0; -4; -4)$ şi $F\,(2; 2; 4)$?

41.20.$^{\bullet\bullet}$ Punctele A, B şi C sunt astfel, că $\overrightarrow{AB}\,(10; 15; -5)$ şi $\overrightarrow{AC}\,(-6; y; z)$. Pentru care valori ale lui y şi z punctele A, B şi C se află pe o dreaptă?

41.21.$^{\bullet\bullet}$ Punctul E – mijlocul muchiei CC_1 al cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{AE}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$.

41.22.$^{\bullet\bullet}$ Se dă paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punctul M – mijlocul muchiei A_1B_1, punctul K – mijlocul muchiei CC_1. Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{MK}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$.

41.23.•• Se dă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punctul E– mijlocul muchiei CC_1, punctul F – mijlocul muchiei AD. Exprimați vectorul $\overrightarrow{EF}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

41.24. Baza triunghiului isoscel este egală cu 48 cm, iar aria lui – 432 cm^2. Aflați raza circumferinței, înscrise în triunghi.

42. Produsul scalar al vectorilor

Fie vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ – doi vectori nenuli şi necoliniari. De la un punct arbitrar O depunem vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$, care sunt egali corespunzător cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 42.1). Mărimea unghiului AOB o vom numi **unghiul dintre vectorii** $\vec{a}$ **şi** $\vec{b}$.

Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se înseamnă astfel: $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Evident, că dacă $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, atunci $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180°$ (fig. 42.2).

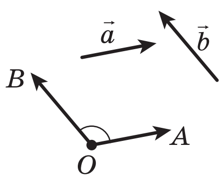


Fig. 42.1

Fig. 42.2

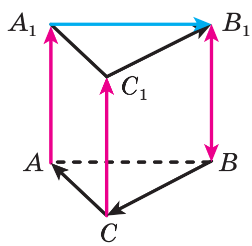


Fig. 42.3

Dacă $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, atunci se consideră, că $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0°$. Dacă măcar unul din vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este nul, atunci de asemenea se consideră, că $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0°$.

Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numesc **perpendiculari**, dacă unghiul dintre ei este egal cu 90°. Se scrie: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

În figura 42.3 este reprezentată prisma triunghiulară, baza căreia este un triunghi regulat, iar muchia laterală este perpendiculară la planul bazei.

Avem: $\angle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C_1B_1}\right)=60°$, $\angle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{A_1B_1}\right)=120°$, $\angle\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1}\right)=0°$, $\angle\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BC}\right)=90°$, $\angle\left(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{B_1B}\right)=180°$.

Definiție. Produsul scalar a doi vectori este numit produsul modulilor lor şi a cosinusului unghiului dintre ei.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se înseamnă astfel: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Avem: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Dacă măcar unul din vectorii $\vec{a}$ sau $\vec{b}$ este nul, atunci evident că $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{a}$ se numeşte **pătratul scalar** al vectorului $\vec{a}$ şi se înseamnă $\vec{a}^2$.

Pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui, adică $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Teorema 42.1. ***Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci şi numai atunci, când aceşti vectori sunt perpendiculari.***

De exemplu, pentru vectorii prezentați în figura 42.3, avem: $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{C_1C}=0$.

Teorema 42.2. ***Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ şi $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ se poate calcula după formula***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

Teorema 42.3. ***Cosinusul unghiului dintre doi vectori nenuli $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ şi $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ se poate calcula după formula***

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

Unele proprietăți ale produsului scalar al vectorilor sunt analogice cu proprietățile corespunzătoare ale produsului numerelor. De exemplu,

pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ şi oricare număr k sunt adevărate egalitățile:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Aceste proprietăți odată cu proprietățile adunării şi înmulțirii vectorilor cu un număr oferă posibilitatea transformării expresiilor, care conțin produsul scalar al vectorilor, după regulile transformării expresiilor algebrice. De exemplu,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=$$
$$=\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}.$$

Problemă. Baza unei prisme este un triunghi isoscel ABC ($AB=AC$). Muchia laterală AA_1 creează unghiuri egale cu muchiile AB şi AC (fig. 42.4). Demonstrați, că $AA_1\perp BC$.

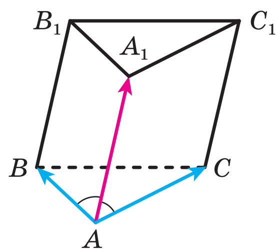


Fig. 42.4

Rezolvare. Fie $\angle BAA_1=\alpha$. Ținând cont de condiție se poate scrie: $\angle CAA_1=\alpha$.

Vom afla produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AA_1}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

Avem: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Să scriem:

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=$$
$$=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha-\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha.$$

Deoarece $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, atunci produsul scalar examinat este egal cu 0. Deci, $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BC}$. ◀

?

1. Cu ce este egal unghiul dintre doi vectori orientaţi opus? Doi vectori coliniari?
2. Cu ce este egal unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă măcar unul din ei este nul?
3. Care vectori sunt numiţi perpendiculari?
4. Ce se numeşte produsul scalar a doi vectori?
5. Ce se numeşte pătratul scalar al vectorului? cu ce este egal el?
6. Formulaţi condiţia perpendicularităţii a doi vectori nenuli.
7. Cum se poate găsi produsul scalar al vectorilor, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?
8. Scrieţi proprietăţile produsului scalar al vectorilor.

EXERCIŢII

42.1.° Este dat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig.42.5), punctul O – centrul feței $ABCD$ Cu ce este egal unghiul dintre vectorii:

1) $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ şi $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ şi $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ şi $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ şi $\overrightarrow{CD}$?

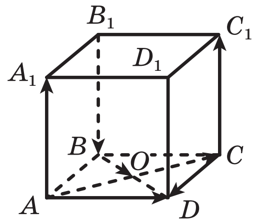


Fig. 42.5

42.2.° Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu 40°. Cu ce este egal unghiul dintre vectorii:

1) $2\vec{a}$ şi $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ şi $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ şi $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ şi $10\vec{b}$?

42.3.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.4.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{m}$ şi $\vec{n}$, dacă $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

42.5.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{a}\,(1; -2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$.

42.6.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{a}\,(4; -1; 6)$, $\vec{b}\,(-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a}\,(1; -3; 9)$, $\vec{b}\,(-1; 3; 0)$.

42.7.° Se dau vectorii $\vec{m}\,(3; -2; 4)$ şi $\vec{n}\,(2; 2; z)$. Pentru care valoare z se îndeplineşte egalitatea $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$?

42.8.° Se dau vectorii $\vec{a}\,(9; c; -1)$ şi $\vec{b}\,(-2; 3; c)$. Pentru care valoare c se îndeplineşte egalitatea $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$?

42.9.° Printre vectorii $\vec{a}\,(1; 1; 2)$, $\vec{b}\,(1; 2; 1)$ şi $\vec{c}\,(-5; 3; 1)$ indicați perechea vectorilor ce sunt perpendiculari.

42.10.• Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu 45°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Aflați:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

42.11.• Unghiul dintre vectorii $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ este egal cu 150°, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Aflați:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$.

42.12.• Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Calculați produsul scalar $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$.

42.13.• Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu 60°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Calculați produsul scalar $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$.

42.14.• Pentru care valoare a lui x vectorii $\vec{a}\,(x; -x; 1)$ şi $\vec{b}\,(x; 2; 1)$ sunt perpendiculari?

42.15.• Pentru care valoare a lui p vectorii $\vec{a}\,(p; -2; 1)$ şi $\vec{b}\,(p; 1; -p)$ sunt perpendiculari?

42.16.• Aflați produsul scalar al vectorilor $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, dacă $\vec{a}\,(2; -1; -2)$, $\vec{b}\,(4; -3; 2)$.

42.17.• Aflați pătratul scalar $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$, dacă $\vec{m}\,(2; 1; -3)$, $\vec{n}\,(4; -2; 0)$.

42.18.•• Fiecare muchie a tetraedrului $DABC$ este egală cu a, punctul M – mijlocul muchiei AB. Aflați produsul scalar al vectorilor:

1) $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$.

42.19.•• Baza piramidei $MABCD$ este un pătrat, iar fiecare muchie a ei este egală cu a. Aflați produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

42.20.•• Aflați unghiul dintre vectorii $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ şi $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, dacă $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.21.•• Aflați unghiul dintre vectorii $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ şi $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, dacă $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.

42.22.•• Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, dacă $A\,(3; -2; 1)$, $B\,(-1; 2; 1)$, $C\,(4; -1; 5)$, $D\,(1; 3; 0)$.

42.23.•• Vârfurile triunghiului sunt punctele $A\,(1; 0; 1)$, $B\,(-5; 4; 3)$ şi $C\,(0; 3; -1)$. Aflați unghiul A al triunghiului.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

42.24. Latura laterală a unui trapez este egală cu 10 cm, iar raza circumferinței înscrise în el este egală cu 4 cm. Aflați aria trapezului.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 6

Distanța dintre puncte

Distanța dintre două puncte $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ şi $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ se poate găsi conform formulei $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Coordonatele mijlocului segmentului

Fiecare coordonată a mijlocului unui segment este egală cu semisuma coordonatelor respective ale capetelor lui.

Amplasarea reciprocă a doi vectori

Doi vectori nenuli se numesc coliniari, dacă ei se află pe drepte paralele sau pe o dreaptă. Vectorul nul se consideră coliniar oricărui vector.

Egalitatea vectorilor

Doi vectori nenuli se numesc egali, dacă modulii lor sunt egali şi ei sunt coorientați. Oricare doi vectori nuli sunt egali.

Coordonatele vectorului

Dacă punctele $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ şi $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ sunt corespunzător originea şi extremitatea vectorului $\vec{a}$, atunci numere $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ şi $z_2 - z_1$ sunt egale corespunzător cu prima, cu a doua şi cu a treia coordonate ale vectorului $\vec{a}$.

Modulul vectorului

Dacă vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, atunci $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Operații cu vectori

Pentru oricare trei puncte A, B şi C este adevărată egalitatea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Diferența vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numeşte un astfel de vector $\vec{c}$, suma căruia cu vectorul $\vec{b}$ este egală cu vectorul $\vec{a}$.

Pentru oricare trei puncte A, B şi C este adevărată egalitatea $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Produsul vectorului nenul $\vec{a}$ şi a numărului k, diferit de zero, se numeşte un astfel de vector $\vec{b}$, că 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) dacă $k > 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; dacă $k < 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari şi $\vec{a} \neq \vec{0}$, atunci există un aşa număr k, că $\vec{b} = k\vec{a}$.

Produsul $-1 \cdot \vec{a}$ se înseamnă $-\vec{a}$ şi este numit vector opus vectorului $\vec{a}$.

Produsul scalar a doi vectori se numeşte produsul modulilor lor şi a cosinusului ughiului dintre ei.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci şi numai atunci, când aceşti vectori sunt perpendiculari.

Dacă coordonatele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt corespunzător egale cu $(a_1; a_2; a_3)$ şi $(b_1; b_2; b_3)$, atunci:

- coordonatele vectorului $\vec{a} + \vec{b}$ sunt egale cu $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$;
- coordonatele vectorului $\vec{a} - \vec{b}$ sunt egale cu $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$;
- coordonatele vectorului $k\vec{a}$ sunt egale cu $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$;
- produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (unde vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt nenuli).

43. Exerciţii pentru repetarea cursului de geometrie clasa a 10-a

Paralelismul în spaţiu

43.1. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Punctul M nu se află în planul ABC. Se poate oare duce planul prin:
1) dreapta AM şi punctele O şi C;
2) dreapta AC şi punctele B şi M?

43.2. Punctul M aparţine feţei BB_1C_1C a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punctul K aparţine muchiei AD (fig. 43.1). Construiţi punctul de intersecţie al dreptei MK cu planul ABB_1.

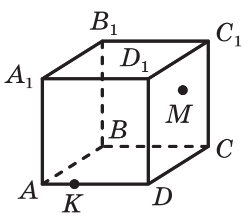


Fig. 43.1

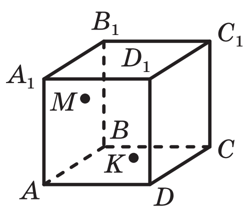


Fig. 43.2

43.3. Punctul M aparţine feţei AA_1B_1B a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punctul K –feţei AA_1D_1D (fig. 43.2). Construiţi punctul de intersecţie al dreptei MK cu planul $A_1B_1C_1$.

43.4. Pe muchiile BB_1, CC_1 şi DD_1 ale prismei $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt notate corespunzător punctele M, N şi K, totodată $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ şi $CN \neq DK$. Construiţi linia de intersecţie a planelor ABC şi MNK.

43.5. Punctul M – mijlocul muchiei A_1B_1 al prismei $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punctul K – mijlocul muchiei CD. Construiţi linia de intersecţie a planelor AMK şi BB_1C_1.

43.6. Pe muchiile AB, AD, AC, şi BC ale tetraedrului $DABC$ sunt notate respectiv punctele E, F, M şi K. Construiţi linia de intersecţie a planelor EFM şi DAK.

43.7. Pe muchiile DA şi DB ale tetraedrului $DABC$ sunt notate respectiv punctele M şi K. Construiţi linia de intersecţie a planelor ABC şi MKC.

43.8. Dreapta MK, care nu se află în planul paralelogramului $ABCD$, este paralelă cu dreapta AD. Care este amplasarea reciprocă a dreptelor: 1) MK şi BC; 2) MK şi AB?

43.9. Se cunoaşte că dreptele a şi b sunt paralele, iar dreapta c intersectează dreapta b şi nu intersectează dreapta a. Demonstrați. că dreptele a şi c sunt neconcurente.

43.10. Segmentele AB şi CD – diametre ale unei circumferințe. Planul α nu are puncte comune cu circumferința dată. Prin punctele A, B, C şi D s-au dus drepte paralele, care se intersectează cu planul α corespunzător în punctele A_1, B_1, C_1 şi D_1. Găsiți segmentul CC_1, dacă $AA_1 = 5$ cm, $BB_1 = 9$ cm, $DD_1 = 3$ cm.

43.11. Punctul M nu se află în planul paralelogramului $ABCD$. Demonstrați, că $AB \parallel CMD$.

43.12. Triunghiurile ABC şi ABD nu se află într-un plan. Punctul M – mijlocul segmentului AC, punctul N – mijlocul segmentului BC. Pe segmentul AD s-a notat punctul K, iar pe segmentul BD – punctul E astfel, că $KE \parallel ABC$. Demonstrați, că $KE \parallel MN$.

43.13. Pe muchiile DA, DB şi DC ale tetraedrului $DABC$ s-au notat corespunzător punctele E, F şi M astfel, că $\angle ABE = \angle FEB$, $\angle CBM = \angle FMB$. Demonstrați, că planele ABC şi EFM sunt paralele.

43.14. Se cunoaşte, că $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Dreapta a intersectează planul α în punctul A, planul β – în punctul B, iar dreapta b intersectează planul β în punctul C (fig. 43.3). Construiți punctul de intersecție al dreptei b cu planul α.

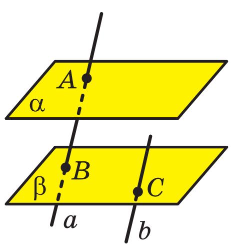


Fig. 43.3

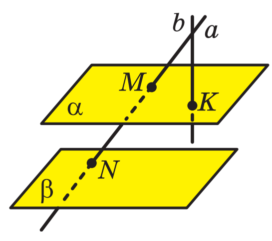


Fig. 43.4

43.15. Se dau planele paralele α şi β şi dreptele a şi b, ce se intersectează. Dreapta a intersectează planul α în punctul M, planul β – în punctul N, iar dreapta b intersectează planul α în punctul K (fig. 43.4). Construiți punctul de intersecție al dreptei b şi a planului β.

43.16. Medianele feței ADB a tetraedrului se intersectează în punctul E, iar medianele feței BDC – în punctul F. Demonstrați, că dreapta EF este paralelă planului ABC.

43.17. Este oare corectă afirmația:

1) dacă proiecțiile paralele ale două drepte pe un plan sunt paralele, atunci aceste drepte sunt paralele;
2) dacă figura plană este egală cu proiecția sa paralelă, atunci planul, în care se află figura dată, şi planul, în care se află proiecția ei, sunt paralele?

43.18. Punctele A_1, B_1 şi C_1 sunt proiecțiile vârfurilor A, B şi C ale paralelogramului $ABCD$ (fig. 43.5). Construiți imaginea paralelogramului $ABCD$.

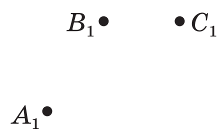


Fig. 43.5

43.19. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este imaginea triunghiului isoscel ABC cu ipotenuza AB. Construiți imaginea pătratului, care are cu triunghiul ABC un unghi comun şi toate vârfurile lui se află pe laturile acestui triunghi.

Perpendicularitatea în spațiu

43.20. Dreapta m este paralelă cu latura AC a triunghiului ABC şi nu se află în planul ABC, $\angle ABC = \angle BAC = 30°$.

1) Demonstrați, că dreptele m şi BC sunt neconcurente.
2) Găsiți unghiul dintre dreptele m şi BC.

43.21. Fața $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este pătrat, iar muchia AA_1 este de două ori mai mare decât muchia AB. Aflați unghiul dintre dreptele: 1) AB_1 şi CD; 2) AB_1 şi CD_1; 3) AB_1 şi A_1C_1.

43.22. Prin vârful B al triunghiului ABC s-a dus o dreaptă BD, perpendiculară la planul ABC (fig. 43.6). Punctul M – mijlocul segmentului AC. Aflați segmentele DA şi DM, dacă $AB = BC = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $DB = 24$ cm.

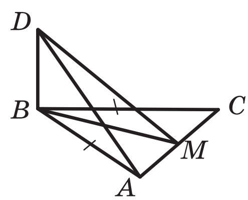


Fig. 43.6

43.23. Prin centrul O al pătratului $ABCD$ s-a dus dreapta MO, perpendiculară la planul pătratului. Punctul K este mijlocul segmentului CD, $MC = 6$ cm, $\angle MCK = 60°$.

1) Demonstrați, c dreapta CD este perpendiculară pe planul MOK.
2) Aflați segmentul MO.

43.24. Segmentul AB nu intersectează planul α, iar dreapta AB intersectează planul α în punctul C. Prin punctele A şi B s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul α şi îl intersectează în punctele A_1 şi B_1 corespunzător. Aflaţi segmentul B_1C, dacă $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 6$ cm, $A_1B_1 = 4$ cm.

43.25. Segmentul AB intersectează planul α. Prin punctele A şi B şi mijlocul C al segmentului AB s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul α şi îl intersectează în punctele A_1, B_1 şi C_1 corespunzător. Aflaţi segmentul CC_1, dacă $AA_1 = 18$ cm, $BB_1 = 9$ cm.

43.26. Din punctul M s-a dus perpendiculara MH pe planul α şi oblicele egale MA şi MB (fig. 43.7). Găsiţi distanţa dintre bazele oblicelor, dacă $\angle MAH = 30°$, $\angle AMB = 60°$, $MH = 5$ cm.

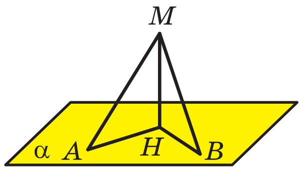


Fig. 43.7

43.27. Unghiul dintre diagonala dreptunghiului şi una din laturile lui este egală cu 30°. Punctul M este depărtat de la fiecare vârf al dreptunghiului cu $5\sqrt{3}$ cm, iar de la planul lui – cu $5\sqrt{2}$ cm. Aflaţi aria dreptunghiului.

43.28. Segmentul MC – perpendicular pe planul triunghiului ABC. $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 6$ cm. Distanţa de la punctul M până la dreapta AB este egală cu $3\sqrt{6}$ cm. Aflaţi distanţa de la punctul M până la planul ABC.

43.29. Segmentul MB este perpendicular pe planul dreptunghiului $ABCD$, $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm. Aflaţi distanţa de la punctul M până la dreapta AD, dacă distanţa de la punctul M până la dreapta CD este egală cu 20 cm.

43.30. Prin centrul circumferinţei O, înscrisă în triunghiul ABC cu laturile 6 cm, 25 cm şi 29 cm, s-a dus perpendiculara DO la planul ABC. Distanţa de la punctul D până la planul ABC este egală cu $2\sqrt{15}$ cm. Aflaţi distanţa de la punctul D până la laturile triunghiului.

43.31. Punctul M, egal depărtat de la vârfurile unui triunghi regulat ABC, este amplasat la distanţa de 5 cm de la planul triunghiului. Aflaţi aria triunghiului ABC, dacă unghiul dintre dreapta MA şi planul ABC este egal cu 60°.

43.32. Segmentul DC – perpendicular pe planul triunghiului dreptunghic ABC. ($\angle ACB = 90°$), $DC = 9$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. Segmentul DE este perpendiculara coborâtă din punctul D pe dreapta AB. Aflaţi unghiul dintre dreapta DE şi planul ABC.

43.33. Segmentul MK nu intersectează planul α. Aflaţi unghiul dintre dreapta MK şi planul α, dacă $MK = 6$ cm, iar capetele segmentului MK sunt depărtate de la planul α cu $8\sqrt{3}$ cm şi cu $5\sqrt{3}$ cm.

43.34. Latura BC a triunghiului regulat ABC se află în planul α, înălțimea AH a triunghiului creează cu planul α unghiul φ. Aflați unghiul dintre dreapta AB şi planul α.

43.35. Punctul A se află în interiorul unghiului diedru, mărimea căruia este egală cu α. Distanța de la punctul A până la fiecare față a acestui unghi este egală cu h, Aflați distanța de la punctul A, până la muchia unghiului diedru.

43.36. Segmentul MC – perpendiculara pe planul triunghiului dreptunghic ABC. ($\angle ACB = 90°$). Aflați unghiul dintre planele ABC şi ABM, dacă $AC = 8$ cm, $\angle BAC = 30°$, iar distanța de la punctul M până la dreapta AB este egală cu 12 cm.

43.37. Prin latura AB a triunghiului ABC s-a dus planul α. Unghiul dintre planele ABC şi α este egal cu $60°$. Aflați distanța de la punctul C până la planul α, dacă $AC = 7$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = 13$ cm.

43.38. Unghiul dintre pătratul $ABCD$ şi dreptunghiul $AEFD$ alcătuieşte $60°$. Aria pătratului este egală cu 16 cm^2, iar aria dreptunghiului – 32 cm^2 Aflați distanța dintre dreptele, care conțin laturile paralele ale pătratului şi dreptunghiului dați.

43.39. Dreapta c este linia de intersecție a planelor perpendiculare α şi β. Punctul M este depărtat de planul α cu 9 cm, iar de la planul β – cu 12 cm. Aflați distanța de la punctul M până la dreapta c.

43.40. Prin vârful unghiului drept C al triunghiului ABC s-a dus dreapta m, perpendiculară pe planul ABC. Pe dreapta m s-a notat punctul D astfel, că unghiul dintre planele ABC şi ABD este egal cu $30°$. Aflați aria triunghiului ABD, dacă $AB = 16$ cm, $\angle BAC = 45°$.

43.41. Proiecția trapezului, aria căruia este egală cu $40\sqrt{2}$ cm^2, este trapez isoscel cu bazele 7 cm şi 13 cm şi latura laterală 5 cm. Aflați unghiul dintre planele trapezelor date.

Coordonate şi vectori în spațiu

43.42. Se dau punctele A (7; 3; –1) şi B (x; 5; z). Se cunoaşte, că mijlocul C al segmentului AB aparține axei ordonatelor.
1) Aflați coordonatele punctului C.
2) Aflați valorile x şi z.

43.43. Se dau punctele A (8; 0; 4), B (13; 4; 7), C (11; –3; 3).
1) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.
2) Aflați aria cercului, circumscris triunghiului ABC.

43.44. Aflați aria triunghiului isoscel ABC cu baza AC, dacă este cunoscut, că A (1; 1; –2), C (–3; 3; 2), iar punctul B aparține axei aplicatelor.

43.45. Se dau punctele A (–2; 1; 3), B (0; 5; 9) şi C (–3; y; 6). Pentru care valori ale lui y segmentul AB este de 2 ori mai lung decât segmentul AC?

43.46. De la punctul C (2; –3; 1) s-a depus vectorul $\overrightarrow{CD}$, egal cu vectorul $\overrightarrow{AB}$. Aflați coordonatele punctului D, dacă A (–1; 0; 5), B (0; 4; –1).

43.47. Se dau punctele A (1; 0; 1), B (2; 1; –1) şi C (–1; 2; 0). Aflați coordonatele unui aşa punct D, ca $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

43.48. Vectorii $\vec{a}\,(x; 3; -4)$ şi $\vec{b}\,(20; -12; 16)$ se află pe laturile opuse ale paralelogramului. Aflați valoarea lui x.

43.49. Se dau punctele A (–4; 1; 2), B (–2; 0; –1) şi C (1; 1; 0). Aflați coordonatele unui aşa punct D, care aparține planului yz, ca vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ să fie coliniari.

43.50. Medianele feței BDC a tetraedrului $DABC$ se intersectează în punctul O, punctul M – mijlocul muchiei AD. Exprimați vectorul $\overrightarrow{MO}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$.

43.51. Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{a}\,(2; 2; 1)$ şi $\vec{b}\,(6; -2; -3)$.

43.52. Aflați unghiul făcut de vectorii $\vec{a}\,(3; -2; 4)$ şi $\vec{b}\,(2; 3; 0)$.

43.53. Pentru care valori ale lui x vectorii $\vec{a}\,(x; -2; 1)$ şi $\vec{b}\,(x; 2x; 3)$ sunt perpendiculari?

43.54. Aflați coordonatele vectorului $\vec{m}$, coliniar vectorului $\vec{n}\,(1; -2; 1)$, dacă $\vec{m}\cdot\vec{n}=-3$.

43.55. Aflați unghiul dintre vectorul $\vec{a}\,(-1; 2; 5)$ şi direcția pozitivă a axei absciselor.

43.56. Aflați unghiul dintre vectorul $\vec{b}\,(6; -2; -3)$ şi direcția negativă a axei aplicatelor.

43.57. Se cunoaşte, că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$. Aflați $|\vec{a}-\vec{b}|$.

43.58. Punctul M este mijlocul muchiei AB a cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$, punctul K – mijlocul muchiei A_1B_1. Aflați unghiul dintre dreptele MB_1 şi DK.

Răspunsuri şi indicaţii la exerciţii

Capitolul 1. Algebră şi elemente de analiză

§ 1. Funcții, proprietățile şi graficele lor

1.16. 1) 16; 2) 32. **1.17.** 2500 m^2. **1.22.** 2; 5. **1.23.** –3; –1. **1.28.** 3) {–6}.

2.7. 4) $\min\limits_{(-\infty;-2]} f(x) = 256;$ cea mai mare valoare nu există. **2.11.** 1) Dacă $a = 6$, atunci o singură soluție; dacă $a > 6$, atunci 2 soluții; dacă $a < 6$, atunci nici o soluție; 2) dacă $a = 1$ sau $a = -8$, atunci o singură soluție; dacă $a < -8$ sau $a > 1$, atunci două soluții; dacă $-8 < a < 1$, atunci soluții nu există.

3.5. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **3.6.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x) = 64,$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x) = 1;$ 2) $\max\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64,$ $\min\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1;$ 3) $\max\limits_{[1;+\infty)} f(x) = 1,$ cea mai mică valoarea nu există. **3.7.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x) = 27,$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x) = \frac{1}{8};$ 2) $\max\limits_{[-2;-1]} f(x) = -\frac{1}{8},$ $\min\limits_{[-2;-1]} f(x) = -1;$ 3) cea mai mare valoare nu există, $\min\limits_{(-\infty;-3]} f(x) = -\frac{1}{27}.$

4.4. 5) –1. **4.8.** 6) Nu are rezolvare; 9) 5; –15. **4.9.** 5) –0,5; 6) 0; 6. **4.12.** 29. **4.13.** –11,8. **4.14.** 1) $\mathbb{R}$; 2) [–1; +∞); 3) (–∞; –1] ∪ [2; +∞). **4.15.** 1) (–∞; 2]; 2) (–∞; 3) ∪ (3; +∞); 3) (–∞; 1] ∪ [3; +∞). **4.16.** 4) –5 şi –4. **4.20.** 1) –1; 2; 2) –1; 3. **4.21.** –3; 1.

5.11. 0. **5.12.** $27\sqrt[3]{2}$. **5.13.** 3) $\sqrt[12]{128}$. **5.14.** 3) $\sqrt[3]{a}$. **5.19.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) a şi b — numere arbitrare; 4) a şi b — numere arbitrare. **5.20.** 2) $\mathbb{R}$. **5.21.** 2) $-n$; 4) c^4. **5.22.** 2) $10x$. **5.25.** 1) [–4; +∞); 2) $\mathbb{R}$. **5.26.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **5.28.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$. **5.29.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$. **5.30.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{6b^6}$, dacă $b \geqslant 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, dacă $b < 0$; 3) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **5.31.** 1) $\sqrt[6]{a^7}$; 2) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **5.32.** [3; 5]. **5.34.** 6) 16.

6.5. 3) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.6.** 3) 4. **6.7.** 3) 125. **6.8.** 2) 49. **6.11.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2. **6.12.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$. **6.13.** 2) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 5) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **6.14.** 3) $1+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$. **6.15.** $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$. **6.16.** $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

7.3. 3) –1; 1. **7.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) rădăcini nu există; 4) 7. **7.5.** 2) Rădăcini nu există. **7.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. **7.7.** 1) –5; 2) 4; 3) –1; 4) 5. **7.8.** 1) 4; 2) 2; 3. **7.9.** $\frac{1}{3}$. **7.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 8; 5) 0; 16; 6) $\frac{9}{8}$. **7.11.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) –4; 11; 4) 2,8; –1,1. **7.12.** 1) 0; 5; 2) 7. **7.13.** 1) 6; 2) 2; 3) –1; 3; 4) –2. **7.14.** 1) 2; 2) 8. **7.15.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) soluții nu sunt; 4) 1; –3. **7.16.** 1) –5; 4; 2) –1. **7.17.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) –1; 4; 4) –2; 5. **7.18.** 1) –1; 5; 2) 1; 2; 3) –6; 4. **7.19.** 27. **7.20.** 10. **7.22.** $f(x) = -2x + 1$.

§ 2. Funcții trigonometrice

8.4. 3) 10π. **8.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **8.8.** 8) În cadranul I. **8.9.** 4) În cadranul III; 7) în cadranul II. **8.10.** 3) (0; –1); 6) (1; 0). **8.11.** 2) (–1; 0). **8.13.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) 2π; -2π. **8.14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **8.15.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **8.16.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; 2) (0; –1); 3) (0; 1), (0; –1); 4) (1; 0), (–1; 0). **8.19.** 1) –2; 2) $-\frac{4}{3}$. **8.20.** 80 000 de locuitori.

9.1. 1) 5; 4) $\frac{7}{4}$. **9.2.** 1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.** 1) Nu; 2) nu. **9.4.** 1) Nu; 2) nu; 3) da. **9.5.** 1) 3; –3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. **9.6.** 2) 1; –5. **9.11.** *Indicație.* Fie că punctele P_1 şi P_2 sunt obținute în rezultatul rotațiilor punctului P_0 cu unghiurile α şi $\alpha+\frac{\pi}{2}$ corespunzător. Coborâm perpendicularele P_1A şi P_2B pe axele x şi y corespunzător (fig. 9.3). Deoarece $\angle P_1OP_2=\frac{\pi}{2}$, atunci se poate stabili, că $\Delta OP_1A=\Delta OP_2B$. De aici $OA=OB$. Deci, abscisa punctului P_1 este egală cu ordonata punctului P_2, adică $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Altele cazuri de amplasare ale punctelor P_1 şi P_2 se cercetează asemănător. Aparte se examinează cazurile, când punctele P_1 şi P_2 se află pe axele de coordonate.

10.4. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.5.** $-\frac{1}{2}$. **10.6.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **10.7.** 1,5. **10.8.** 1) al II-a cadran. **10.12.** 1) 2 sin α; 2) –2 cos α; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Este pară; 2) nu este nici para nici impară. **10.15.** 1) Impară; 2) pară. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

11.1. 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **11.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **11.15.** 2) cos 20° > > cos 21°; 3) $\sin\frac{10\pi}{9}>\sin\frac{25\pi}{18}$. **11.16.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9}>\sin\frac{17\pi}{18}$. **11.19.** 1) sin 58° > cos 58°; 2) sin 18° < cos 18°; 3) cos 80° < sin 70°. **11.21.** 1) [2; +∞); 2) [3; +∞).

12.1. 5) $2\cos^2\alpha$. 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 3) $\sin^4\alpha$; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$. **12.7.** 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.8.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$. **12.11.** $-\frac{1}{2}$. *Indicație.* Împărțiți numărătorul şi numitorul la cos α. **12.12.** $-\frac{16}{11}$. **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; –2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

13.1. 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) sin 2β; 6) tg 15°. **13.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) cos (α + β). **13.5.** $\frac{6}{7}$. **13.7.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.8.** 1) $\sqrt{3}$. **13.9.** 1) 2 cos α; 2) tg 2α; 3) $\cos^2\alpha$; 4) sin 25°;

5) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 6) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 7) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **13.10.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 6) $2\sin 2\alpha$; 7) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 8) $\sin 3\alpha$. **13.11.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.12.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.15.** $-\frac{24}{25}$. **13.16.** $-\frac{4}{5}$. **13.17.** 2. **13.18.** 5. **13.19.** –0,96. **13.20.** $-\frac{8}{15}$. **13.21.** $\frac{7}{8}$. **13.22.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.23.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.25.** 1. **13.26.** 1) 2; 2) $\operatorname{tg}2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **13.27.** 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}2\alpha$. **13.28.** 2. **13.29.** –2. **13.30.** $-\frac{8}{9}$. **13.31.** $\frac{3}{4}$. **13.32.** Pentru $x = 1$: 9, 6, 3; pentru $x = 9$: 41, 62, 83. **13.33.** Pentru $x = 2$: 1, –3, 9; pentru $x=\frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$.

14.3. 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **14.4.** 2) $\sin\frac{\pi}{15}$. **14.7.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) 1. **14.8.** –1. **14.9.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1. **14.11.** 0. **14.12.** 1) 1; 2) 1.

15.3. 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.7.** $-\frac{\pi}{6}$. **15.8.** De exemplu, -3π. **15.9.** 4 soluții. **15.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **15.11.** 1. **15.12.** 1) $\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-3;-2)\cup(-2;3]$.

16.3. 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.4.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.7.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.9.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.10.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.11.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.12.** 2) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$,

$n \in \mathbb{Z}$. **16.13.** $\frac{13\pi}{12}$. **16.14.** $-\frac{13\pi}{90}$. **16.15.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **16.16.** 6 soluții. **16.17.** 4 soluții. **16.18.** $-\frac{2\pi}{3}$. **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

17.1. 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.2.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, πn, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm 4\arccos\frac{1}{3} + 8\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.3.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.4.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos(1-\sqrt{2}) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n \arcsin(2-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **17.7.** 1) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.8.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, πn, $n \in \mathbb{Z}$. **17.10.** 3) -2; 4) 1.

§ 3. Derivata şi aplicarea ei

18.7. 8 m/s. **18.8.** 1) 20 m/s; 2) 10 m/s.

19.4. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.8.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **19.9.** 1) -32;

2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **19.13.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$.

20.9. 16 kg·m/s. **20.10.** 400 J. **20.12.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$.

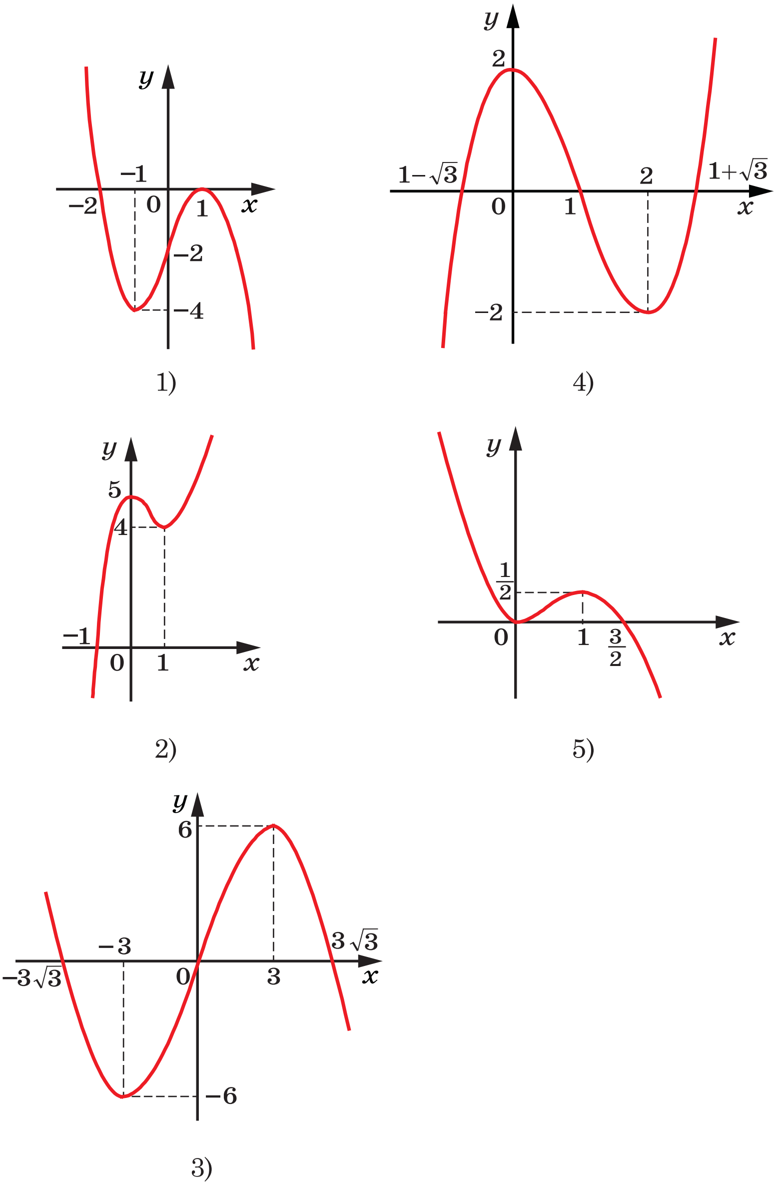
21.1. 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$; 6) $y = x + 4$. **21.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = 5x - 18$. **21.3.** $y = -3x - 3$. **21.4.** $y = -5x + 2$. **21.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **21.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **21.7.** 4) $[1; 3) \cup (3; 4]$.

22.1. 1) Creşte pe intervalul $[-2; +\infty)$, descreşte pe intervalul $(-\infty; -2]$; 2) creşte pe $(-\infty; 0]$ şi $[1; +\infty)$, descreşte pe $[0; 1]$; 3) creşte pe $[-1; 7]$, descreşte pe $(-\infty; -1]$ şi $[7; +\infty)$; 4) creşte pe $[2; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; 2]$. **22.2.** 1) Creşte pe $(-\infty; 3]$, descreşte pe $[3; +\infty)$; 2) creşte pe $(-\infty; -3]$ şi $[1; +\infty)$, descreşte pe $[-3; 1]$; 3) creşte pe $[-1; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; -1]$. **22.3.** 1) Creşte pe $[1; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; 1]$; 2) creşte pe $(-\infty; 2)$ şi $(2; +\infty)$; 3) creşte pe $[1; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; 0)$ şi $(0; 1]$; 4) creşte pe $(-\infty; -3]$ şi $[3; +\infty)$, descreşte pe $[-3; 0)$ şi $(0; 3]$. **22.4.** 1) Creşte pe $(-\infty; 3]$, descreşte pe $[3; +\infty)$; 2) creşte pe $(-\infty; 0)$ şi $[2; +\infty)$, descreşte pe $(0; 2]$. **22.9.** $-\frac{1}{3}$.

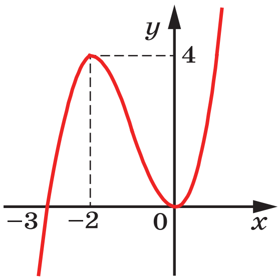
23.3. 1) $x_{min} = 0$; 2) $x_{min} = 3$; 3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = 5$, $x_{max} = -1$. **23.4.** 1) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -1$; 2) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 3) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -7$; 4) $x_{min} = \frac{3}{2}$. **23.7.** 1) Creşte pe $(-\infty; -2]$ şi $[2; +\infty)$, descreşte pe $[-2; 0)$ şi $(0; 2]$, $x_{max} = -2$, $x_{min} = 2$; 2) creşte pe $(-\infty; 0]$, descreşte pe $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$. **23.8.** 1) Creşte pe $(-\infty; -3]$ şi $[3; +\infty)$, descreşte pe $[-3; 0)$ şi $(0; 3]$, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$; 2) creşte pe $[0; +\infty)$, descreşte pe $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$. **23.9.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **23.10.** 1) 26; 2) 17; 3) –10.

24.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) –3; –30; 4) –4; –8. **24.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; –2; 3) 48; –6; 4) 0; –28. **24.3.** $8 = 2 + 6$. **24.4.** $12 = 8 + 4$. **24.5.** $180 = 40 + 80 + 60$. **24.6.** $18 = 8 + 3 + 7$.

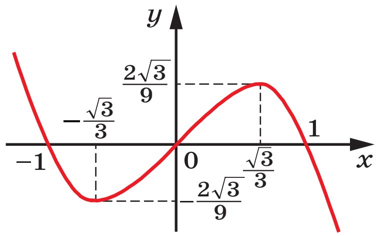
25.1. Vezi figura. **25.2.** Vezi figura.



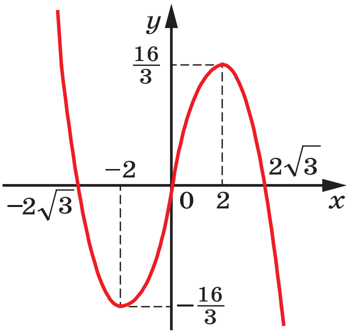
Pentru problema 25.1



1)



3)



2)

Pentru problema 25.2

26.6. 1) –163; 2) 3. **26.14.** 5) $\frac{1}{3}$. **26.16.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) –2; 5) –2; 6) $\frac{2}{9}$; 2; 7) 625; 8) –25; 3. **26.19.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **26.20.** 2; –3. **26.21.** 1) 0; 2) 0. **26.22.** –1. **26.24.** 1) tg α; 2) 2; 3) 0; 4) 1. **26.25.** 1) $-\frac{7\pi}{2}+12\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{3}+4\pi k$ sau $-\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{2}$. **26.27.** $-\frac{\pi}{24}$. **26.28.** 2 soluții. **26.29.** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.32.** 3. **26.33.** 1. **26.34.** 3) $y = -6x+13$; 4) $y = \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.35.** $y=-4x$ şi $y=4x-16$. **26.36.** 3,5 s.

26.38. 2) Creşte pe intervalele $(-\infty; 0]$ şi $[4; +\infty)$, descreşte pe intervalul $[0; 4]$, $x_{max} = 0,$ $x_{min} = 4;$ 3) creşte pe intervalele $(-\infty; -4]$ şi $[4; +\infty)$, descreşte pe intervalele $[-4; 0)$ şi $(0; 4]$, $x_{max} = -4,$ $x_{min} = 4;$ 6) creşte pe intervalele $(-\infty; -3]$ şi $[1; +\infty)$, descreşte pe intervalele $[-3; -1)$ şi $(-1; 1]$, $x_{max} = -3,$ $x_{min} = 1.$ **26.39.** 2) 2; –2. **26.40.** 32 + 32. **26.41.** 2.

Capitolul 2. Stereometrie

§ 4. Paralelismul în spaţiu

27.6. Infinit de multe sau una. **27.14.** 11 cm sau 3 cm. **27.15.** 10 cm. **27.16.** 1 : 3.

28.15. 72°, 108°, 72°, 108°.

29.9. Un plan sau trei plane. **29.14.** 4 cm. **29.15.** 9 cm. **29.16.** 1 : 2.

30.12. 7,5 cm. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Indicație*. Demonstrați, că $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, şi folosiți-vă de egalitatea unghiurilor triunghiurilor asemenea. **30.18.** 156 cm^2.

31.13. 2) 24 cm. **31.15.** 1,5.

32.8. 9 cm. **32.14.** 60°.

§ 5. Perpendicularitatea în spaţiu

33.4. 60°. **33.5.** 1) 90°; 2) 40°. **33.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **33.7.** 80°. **33.8.** 10 cm. **33.9.** 10 cm. **33.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **33.11.** α sau $180° - \alpha$. **33.12.** 90°. *Indicație*. Demonstrați că unghiul căutat este egal cu unghiul dintre dreptele OB_1 şi AC şi că triunghiul AB_1C este isoscel. **33.13.** 60°. **33.14.** 52 cm.

34.7. 2 cm. **34.8.** $2\sqrt{5}$ cm. **34.9.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **34.10.** 8 cm. **34.13.** 12 cm. **34.14.** 14 cm. **34.15.** 12 cm.

35.5. 7 cm. **35.6.** 12 cm. **35.16.** 15 cm. **35.17.** 15 cm, 13 cm. **35.18.** 3 cm. **35.19.** 12 cm. **35.23.** $3\sqrt{5}$ cm. **35.24.** 2 cm. **35.25.** $2\sqrt{2}$ cm. **35.26.** $2\sqrt{6}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{6}$ cm. **35.27.** 17 cm. **35.28.** 8 cm. **35.29.** 10 cm.

35.30. 5 cm. **35.31.** 4 cm. **35.33.** 20 cm. **35.34.** $3\sqrt{10}$ cm. **35.36.** $4\sqrt{3}$ cm.

36.7. 30°. **36.10.** 30°. **36.11.** $6\sqrt{2}$ cm. **36.12.** 3 cm. **36.13.** $8\sqrt{2}$ cm. **36.14.** $3\sqrt{10}$ cm. **36.15.** 6 cm. **36.16.** $3\sqrt{14}$ cm. **36.17.** 30°. **36.18.** 30°.

37.6. 60°. **37.7.** 60°. **37.11.** 80°. **37.16.** 35 cm. **37.18.** 84 cm^2. **37.20.** 105°. **37.21.** 70°. **37.22.** $\sqrt{5}$ cm. **37.23.** 120°. **37.24.** $5\sqrt{2}$ cm, 13 cm. **37.25.** 45°. **37.26.** $3\sqrt{2}$ cm. **37.27.** 25 cm. **37.28.** 8 cm. **37.29.** 45°. **37.30.** 30°, 60°. **37.31.** 1) $2\sqrt{15}$ cm; 2) 8 cm. **37.32.** 13 cm. **37.33.** 45°. **37.34.** 60°. **37.35.** 90°. **37.36.** 26 cm.

§ 6. Coordonate şi vectori în spaţiu

38.18. 66. **38.19.** $3\sqrt{14}$. **38.20.** $y=-2$ sau $y=-10$. **38.21.** A (3; 0; 0) sau A (–1; 0; 0). **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.** 625 cm^2.

39.10. 3. **39.13.** D (7; –4; 5). **39.14.** $x=20$, $y=-29$, $z=-18$. **39.15.** –3 sau 3. **39.16.** –14 sau 2. **39.18.** B (–3; 16; –7). **39.19.** $\vec{m}\,(4;\,4;\,4)$ sau $\vec{m}\,(-4;\,-4;\,-4)$. **39.20.** $\vec{c}\left(3\sqrt{3};\,-3\sqrt{3};\,3\sqrt{3}\right)$ sau $\vec{c}\left(-3\sqrt{3};\,3\sqrt{3};\,-3\sqrt{3}\right)$. **39.21.** 13 cm.

40.11. $\overrightarrow{NK}$. **40.12.** $\overrightarrow{FM}$. **40.15.** A (3,5; –1,5; 8). **40.16.** M (–0,5; –2,5; 4,5). **40.17.** 9,6 cm.

41.14. $x=-\dfrac{4}{7}$, $z=\dfrac{35}{4}$. **41.15.** $\overrightarrow{AB}\left(-1;\,-\dfrac{2}{3};\,-\dfrac{1}{3}\right)$. **41.16.** D (6; 0; 10). **41.17.** $\vec{b}\left(\dfrac{2}{7};\,-\dfrac{6}{7};\,-\dfrac{3}{7}\right)$. **41.18.** $\vec{m}\,(5;\,-5;\,10)$. **41.19.** 1) Nu; 2) da. **41.20.** $y=-9$, $z=3$. **41.21.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.22.** $\overrightarrow{MK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.23.** $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.24.** 8 cm.

42.7. 4. **42.8.** –3. **42.9.** $\vec{a}$ şi $\vec{c}$. **42.12.** –19,5. **42.13.** –12. **42.14.** 1. **42.15.** –1 sau 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1) $-\dfrac{a^2}{2}$. *Indicație*. Exprimați vectorul $\overrightarrow{CM}$ prin vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CB}$; 2) 0. *Indicație*. Exprimați vectorul $\overrightarrow{AB}$ prin vectorii $\overrightarrow{DA}$ şi $\overrightarrow{DB}$. **42.19.** a^2. *Indicație*. Exprimați vectorul $\overrightarrow{AC}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$. **42.20.** $180° - \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **42.21.** $180° - \arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **42.22.** 0,7. **42.23.** 60°. **42.24.** 80 cm^2.

43.10. 11 cm. **43.20.** 2) 60°. **43.21.** 1) arctg 2; 2) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **43.22.** 26 cm, $8\sqrt{10}$ cm. **43.23.** 2) $3\sqrt{2}$ cm. **43.24.** 2,4 cm. **43.25.** 4,5 cm. **43.26.** 10 cm. **43.27.** $25\sqrt{3}$ cm^2. **43.28.** 6 cm. **43.29.** 13 cm. **43.30.** 8 cm. **43.31.** $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2. **43.32.** $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$. **43.33.** 60°. **43.34.** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)$. **43.35.** $\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **43.36.** $\arccos\frac{1}{3}$. **43.37.** 6 cm. **43.38.** $4\sqrt{3}$ cm. **43.39.** 15 cm. **43.40.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ cm^2. **43.41.** 45°. **43.42.** 1) $C(0;\ 4;\ 0)$; 2) $x = -7$, $z = 1$. **43.43.** 2) $\frac{69\pi}{4}$. **43.44.** 9. **43.45.** $y = 3$ sau $y = -1$. **43.46.** $D(3;\ 1;\ -5)$. **43.47.** $D(-2;\ 1;\ 2)$. **43.49.** $D(0;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. **43.50.** $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. **43.51.** $\frac{5}{21}$. **43.52.** 90°. **43.53.** $x = 1$ sau $x = 3$. **43.54.** $\vec{m}\,(-0{,}5;\ 1;\ -0{,}5)$. **43.55.** $180° - \arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **43.56.** $\arccos\frac{3}{7}$. **43.57.** $2\sqrt{5}$. **43.58.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

INDICE DE MATERIE

Cuprins

Capitolul 2. **STEREOMETRIE**

§ 4. Paralelismul în spaţiu

§ 5. Perpendicularitatea în spaţiu

§ 6. Coordonate şi vectori în spaţiu

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти з навчанням румунською/молдовською мовами

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови
Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Румунською/молдовською мовами

Редактор *І. М. Грінчешин*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.
Тираж 1397 пр. Зам. № ?????.

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua
e-mail: office@svit.gov.ua

Віддруковано у ТДВ «Патент»
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011 р.