

8

A.G.Merzleak  
V.B.Polonsikiyi  
M.S.Iakir

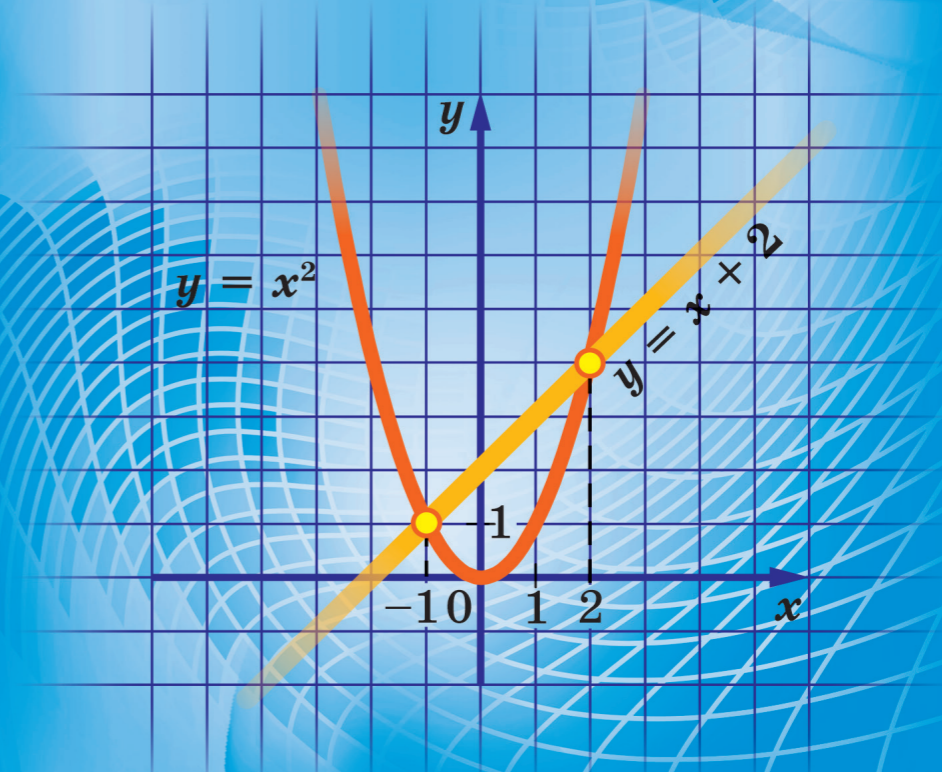
8

ALGEBRĂ

# ALGEBRĂ

A.G.Merzleak, V.B.Polonsikiyi, M.S.Iakir

2021





«Iubesc Ucraina și matematica» – sunt cuvintele incrustate pe piatra de granit a monumentului omului de știință Mihail Kravciuk (1892–1942).

Sperăm că această exprimare patriotică a marelui matematician ucrainean să vă fie călăuză pe calea spre profesionalism.

### Pătratele și cuburile numerelor naturale de la 1 până la 10

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$n^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

### Puterile numerelor 2 și 3

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$3^n$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

### Proprietățile puterii cu exponent întreg

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

### Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice

$$\text{Dacă } a \geq 0, \text{ atunci } (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\text{Pentru orice număr real } a \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{Dacă } a \geq 0 \text{ și } b \geq 0, \text{ atunci } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\text{Dacă } a \geq 0 \text{ și } b > 0, \text{ atunci } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

### Formula rădăcinilor ecuației pătrate

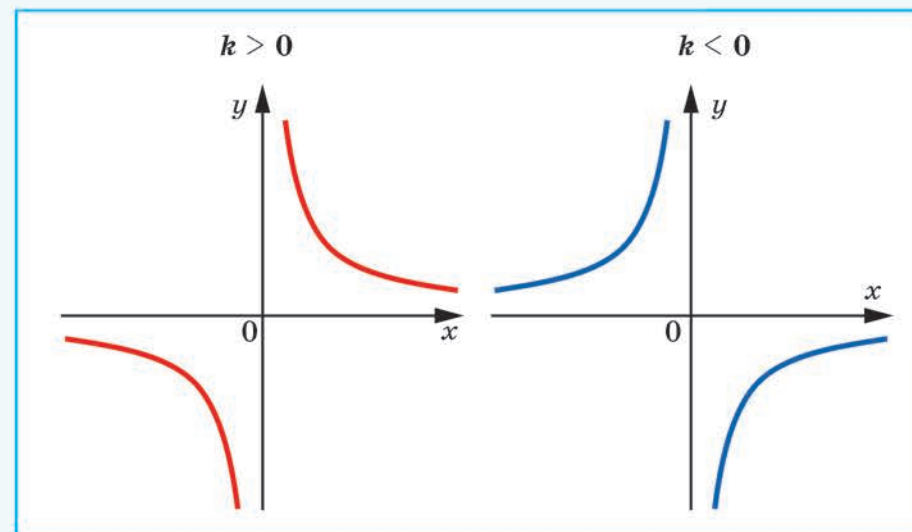
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

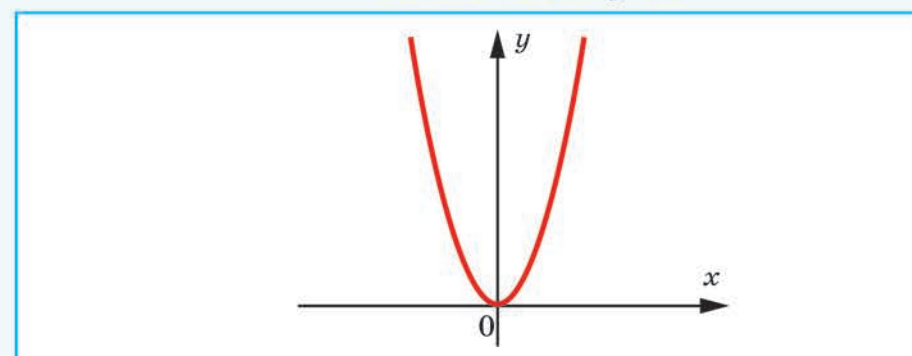
Табелul pătrătelor numerelor naturale de la 10 până la 99

Zeci	Unități									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

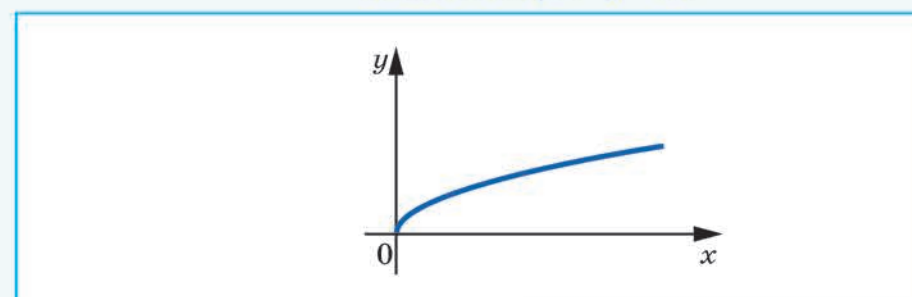
Graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$



Graficul funcției  $y = x^2$



Graficul funcției  $y = \sqrt{x}$



Arcadii Merzleak  
Vitalii Polonsikiy  
Măhailo Iakir

# ALGEBRĂ

Manual pentru clasa a 8-a  
cu limba română/moldovenească de predare  
a instituțiilor de învățământ mediu general

a 2-a ediție, prelucrată

*Recomandat de Ministerul Învățământului și Științei al Ucraine*

Львів  
Видавництво “Світ”  
2021

УДК 373.167.1:512  
М52

Перекладено за виданням:

**Мерзляк А. Г.** Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — 2-ге видання, переробл. — Х. : Гімназія, 2021. — 240 с. : іл.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*  
(наказ Міністерства освіти і науки України від 22.02.2021 № 243)

**Видано за рахунок державних коштів.**  
**Продаж заборонено**

**Мерзляк А. Г.**

М52 Алгебра : підруч. для 8 кл. з навч. рум./молд. мов. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Ю. М. Гаврилюк. — 2-ге видання, переробл. — Львів : Світ, 2021. — 240 с. : іл.

ISBN 978-966-914-355-6

УДК 373.167.1:512

© Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., 2016

© Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., перероблення, 2021

© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2021

© Гаврилюк Ю. М., переклад румунською/молдовською мовами, 2021

ISBN 978-966-914-355-6 (рум./молд.)

ISBN 978-966-474-273-0 (укр.)

## Din partea autorilor

DRAGI ELEVI ȘI ELEVE AI CLASEI A OPTA!

În acest an de învățământ veți continua studierea algebrei. Sperăm că voi ați reușit să îndrăgiți această știință importantă și frumoasă, și ca urmare, veți dobândi cu interes cunoștințe noi. Nădăjduim că în aceasta va contribui manualul pe care îl țineți în mâini.

Faceți, vă rugăm, cunoștință cu structura lui.

Manualul este împărțit în trei paragrafe, fiecare dintre ele constă din puncte. În puncte este prezentat materialul teoretic. Cele mai importante informații sunt evidențiate cu **caracter gras sau cursiv**.

De regulă, expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de rezolvare a problemelor. Aceste scrieri pot fi considerate ca unul din posibilele modele de perfectare a rezolvării.

Pentru fiecare punct sunt alese însărcinări pentru rezolvarea independentă; vă sfătuim ca înainte de a trece la efectuarea lucrului independent să însușiți bine materialul teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții de complexitate simplă și mijlocie, cât și probleme complicate (mai ales acele notate cu asterisc(\*)). Cunoștințele sale le puteți verifica, rezolvând problemele în formă de test sub rubrica “Verifică-te”.

Fiecare punct se termină cu rubrica „Ne învățăm a face pași nestandardizați”. În ea sunt alese însărcinări rezolvarea cărora nu impune cunoștințe algebrice speciale, ci numai pricepere, inventivitate și istețime. Aceste probleme sunt tot așa de utile ca și vitaminele. Ele vă vor ajuta să luați hotărâri neașteptate și nestandarde nu numai în matematică, ci și în viață.

Dacă după ce ați îndeplinit tema pentru acasă o să vă rămână timp liber și veți dori să știți mai mult, atunci vă recomandăm să faceți cunoștință cu rubrica „După ce s-au făcut lecțiile”. Materialul, expus acolo, nu este simplu. Însă cu atât este mai interesant de-a pune la încercare puterile sale!

Cutezați! Vă dorim succes!

## STIMAȚI COLEGI ȘI COLEGE!




Noi sperăm că acest manual va deveni un ajutor de nădejde în a Voastră muncă nu ușoară și nobilă, și vom fi sincer bucuroși dacă el o să Vă placă!

În carte este ales un material didactic mare și divers. Însă în decursul unui an de învățământ este imposibil de rezolvat toate problemele, dar nici nu trebuie. Totodată este cu mult mai comod de lucrat atunci, când este o rezervă considerabilă de probleme. Aceasta permite realizarea principiilor diferențierii a nivelurilor de cunoștințe și a individualizării în învățământ.

Materialul rubricii “După ce s-au făcut lecțiile” poate fi folosit în organizarea lucrului cercului de matematică și a ocupațiilor facultative.

Vă dorim inspirație creativă și răbdare.

## Notații convenționale

- $n^{\circ}$     însărcinări ce corespund nivelului inițial și mijlociu ale reușitelor în învățatură;
- $n^{\cdot}$     însărcinări ce corespund nivelului suficient al reușitei în învățatură;
- $n^{\bullet}$     însărcinări ce corespund nivelului superior al reușitei în învățatură;
- $n^*$     probleme menite cercurilor de matematică și facultativelor;
-     sfârșitul demonstrării teoremei, a rezolvării exemplului;
-     însărcinările care pot fi executate cu ajutorul calculatorului;
-     rubrica “După ce s-au făcut lecțiile”.

**Cu culoarea** verde sunt însemnate numerele problemelor ce sunt recomandate pentru tema de acasă, **cu culoare** albastră – numerele problemelor, care, ținând cont de particularitățile individuale ale elevilor clasei, după părerea profesorului pot fi rezolvate oral.

# § 1

## EXPRESII RAȚIONALE

- În acest paragraf o să faceți cunoștință cu fracțiile, ale căror numărători și numitori sunt expresii cu variabile; o să vă învățați a aduna, scădea, înmulți și împărți astfel de fracții; veți face cunoștință cu ecuațiile care sunt constituite cu ajutorul acestor fracții.
- Veți afla conform căror reguli se poate schimba ecuația dată cu una mai simplă.
- O să vă extindeți imaginile sale despre noțiunea “putere”, o să vă învățați a ridica numerele la puterea cu exponent întreg negativ.
- O să vă învățați a construi modele matematice ale proceselor, în care mărirea(micșorarea) a unei mărimi de câteva ori duce la micșorarea(mărirea) altei mărimi tot de atâtea ori.

### 1. Frații raționale

**Înainte de-a purcede la studierea acestui punct recomandăm repetarea conținutului p. 1 de la pag. 217 și a p.6 de la pag. 219.**

În cursul de algebră al clasei a 7-a au fost cercetate expresii întregi, adică expresiile, care sunt compuse din numere și variabile cu ajutorul operațiilor adunării, scăderii, înmulțirii și împărțirii la un număr diferit de zero.

Iată exemple de expresii întregi:

$$x - y, \frac{a+b}{5}, m^2 + 2m + n^2, \frac{1}{3}x - 4, \frac{c}{4} + \frac{d}{7}, x : 5, y, 7.$$

În cursul de algebră al clasei a 8-a noi vom cerceta **expresii fracționare**. Expresiile fracționare se deosebesc de cele întregi cu aceea, că ele *conțin împărțirea la o expresie cu variabile*.

Aducem exemple de expresii fracționare:

$$2x + \frac{a}{b}, (x - y) : (x + y), \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \frac{5}{x}.$$

Expresiile întregi și fracționare se numesc **expresii raționale**.

Dacă în expresia rațională înlocuim variabilele cu numere, atunci obținem expresie numerică. Dar *această substituție este posibilă numai atunci, când ea nu duce la împărțirea la zero*.



De exemplu, expresia  $2 + \frac{a+2}{a-1}$  pentru  $a = 1$  nu are sens, adică valoarea numerică a acestei expresii pentru  $a = 1$  nu există. Pentru toate alte valori ale lui  $a$  această expresie are sens.

**Definiție.** Valori admisibile ale variabilelor, pe care le conține expresia rațională, se numesc toate valorile variabilelor, pentru care această expresie are sens.

De exemplu, în expresia examinată mai sus valori admisibile ale variabilei  $a$  sunt toate numerele, afară de 1.

Valori admisibile ale variabilelor, ce sunt în componența expresiei întregi, sunt toate numerele.

O modalitate aparte a expresiei raționale este **fracția rațională**. Aceasta este fracția al cărei numărător și numitor sunt polinoame<sup>1</sup>. Astfel, expresiile raționale

$$\frac{x}{7}, \frac{x^2 - 2xy}{x + y}, \frac{12}{a}, \frac{a + b}{5}$$

servesesc ca exemple de fracții raționale.

Menționăm, că fracția rațională poate fi atât expresie întregă, cât și expresie fracționară.

Numitor al fracției raționale nu poate fi **polinomul nul**, adică polinomul identic egal cu zero.

Valori admisibile ale variabilelor ce sunt în componența fracției raționale, sunt toate valorile variabilelor pentru care valorile numitorului fracției sunt diferite de zero.

Schema din figura 1 ilustrează legătura dintre noțiunile care sunt examinate în acest punct.

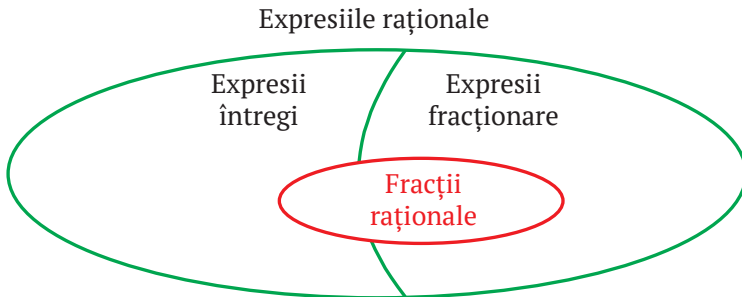


Fig. 1

<sup>1</sup> Vă amintim, că numerele și monoamele sunt cazuri particulare ale polinoamelor (vezi p. 6., pag. 219).

**EXEMPLU** Găsiți valorile admisibile ale variabilei care este în componența expresiei  $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-5}$ .

*Rezolvare.* Frația  $\frac{1}{x}$  are sens pentru toate valorile lui  $x$ , afară de  $x = 0$ , iar fracția  $\frac{3}{x-5}$  are sens pentru toate valorile lui  $x$ , afară de  $x = 5$ .

Așadar, valorile admisibile căutate ale variabilei sunt toate numerele diferite de 0 și 5. ▲



1. Cu ce se deosebesc expresiile fracționare de cele întregi?
2. Cum se numește totalitatea expresiilor întregi și fracționare?
3. Care valori ale variabilelor se numesc admisibile?
4. Care fracții se numesc raționale?
5. Al căror expresii este caz particular fracțiile raționale?
6. Care polinom nu poate fi numitor al fracției raționale?

## EXERCIȚII

1.° Care din expresiile  $\frac{3a^2}{4b^3}$ ,  $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$ ,  $\frac{8}{6n+1}$ ,  $3a - \frac{b^2}{c^4}$ ,  $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$ ,  $\frac{x-2}{x+2}$ ,

$\frac{1}{6}m^3n^5$ ,  $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$ ,  $\frac{m^2 - 3mn}{18}$  sunt:

1) expresii întregi; 2) expresii raționale; 3) fracții raționale?

2.° Care este valoarea fracției  $\frac{c^2 - 4c}{2c + 1}$ , dacă:

1)  $c = -3$ ;

2)  $c = 0$ ?

3.° Aflați valoarea expresiei  $\frac{2m - n}{3m + 2n}$ , dacă:

1)  $m = -1$ ,  $n = 1$ ;

2)  $m = 4$ ,  $n = -5$ .

4.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

1)  $\frac{a^2 - 1}{a - 5}$  pentru  $a = -4$ ;

2)  $\frac{x+3}{y} - \frac{y}{x+2}$  pentru  $x = -5$ ,  $y = 6$ ?

5.° Aflați valorile admisibile ale variabilei ce este în componența expresiei:

1)  $2x - 5$ ;

3)  $\frac{9}{x-5}$ ;

5)  $\frac{2+y}{1+y}$ ;

2)  $\frac{18}{m}$ ;

4)  $\frac{x-5}{9}$ ;

6)  $\frac{1}{x^2+4}$ ;

7)  $\frac{5}{x^2 - 4}$ ;

9)  $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$ ;

11)  $\frac{x}{|x|+1}$ ;

8)  $\frac{5}{|x|-4}$ ;

10)  $\frac{x+4}{x(x-6)}$ ;

12)  $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$ .

6.° Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

1)  $\frac{9}{y}$ ;

3)  $\frac{m-1}{m^2-9}$ ;

5)  $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$ ;

2)  $\frac{x+7}{x+9}$ ;

4)  $\frac{x}{|x|-3}$ ;

6)  $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$ ?

7.° Scrieți o fracție rațională, care conține variabila  $x$  și are sens pentru toate valorile lui  $x$ , afară de:

1)  $x = 7$ ;

2)  $x = -1$ ;

3)  $x = 0$  și  $x = 4$ .

8.° Scrieți o fracție rațională, care conține variabila  $y$ , și ale cărei valori admisibile sunt:

1) toate numerele, afară de 5;

3) toate numerele, afară de 3, -3 și 6;

2) toate numerele, afară de -2 și 0; 4) toate numerele.

9.° Un automobil a parcurs pe șosea  $a$  km cu viteza de 75 km/oră și pe un drum de pământ  $b$  km cu viteza de 40 km/oră. În cât timp automobilul a parcurs tot drumul? Alcătuiți expresia și aflați valoarea ei pentru  $a = 150$ ,  $b = 20$ .

10.° Un elev a achiziționat caiete a câte 8 grn, plătind pentru ele  $m$  grn, și a câte 14 grn, plătind pentru ele  $n$  grn. Câte caiete a achiziționat elevul? Compuneți expresia și aflați valoarea ei pentru  $m = 24$ ,  $n = 56$ .

11.° Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei  $x$  valoarea fracției:

1)  $\frac{1}{x^2}$  este pozitivă;

2)  $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$  este negativă.

12.° Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei  $x$  valoarea fracției:

1)  $\frac{-x^2}{x^2+5}$  este nepozitivă;

2)  $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$  este nenegativă.

13.° Se știe că  $5x - 15y = 1$ . Aflați valoarea expresiei:

1)  $x - 3y$ ;

3)  $\frac{18y-6x}{9}$ ;

2)  $\frac{8}{2x-6y}$ ;

4)  $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$ .

14.° Se știe că  $4a + 8b = 10$ . Aflați valoarea expresiei:

1)  $2b + a$ ;

2)  $\frac{5}{a+2b}$ ;

3)  $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$ .

15.\*\* Aflați domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$$

$$2) y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$$

16.\*\* Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

$$1) \frac{x}{x - \frac{9}{x}}$$

$$2) \frac{10}{2 + \frac{6}{x}}?$$

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

17. Simplificați fracția:

$$1) \frac{5}{15};$$

$$2) \frac{12}{18};$$

$$3) \frac{27}{45};$$

$$4) \frac{30}{48}.$$

18. Aduceți fracția:

$$1) \frac{3}{7} \text{ la numitorul } 14;$$

$$2) \frac{8}{15} \text{ la numitorul } 60.$$

19. Reprezentați expresia în formă de putere:

$$1) a^5 a^5;$$

$$2) (a^5)^5;$$

$$3) a^5 : a^5;$$

$$4) (a^8)^4 : (a^2)^8.$$

20. Descompuneți în factori:

$$1) 6a - 15b;$$

$$5) a^6 + a^2;$$

$$2) 2a + ab;$$

$$6) 12m^2n - 4mn;$$

$$3) 7am + 7bn;$$

$$7) 2x^2 - 4x^3 + 10x^4;$$

$$4) 4x^2 - 12xy;$$

$$8) 10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2.$$

21. Reprezentați expresia în formă de produs:

$$1) ab - ac + bd - cd;$$

$$3) a^5 + a^3 + 2a^2 + 2;$$

$$2) 3m + 3n - mx - nx;$$

$$4) 8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b.$$

22. Exprimați trinomul în formă de pătratul unui binom:

$$1) a^2 - 8a + 16;$$

$$3) 40xy + 16x^2 + 25y^2;$$

$$2) 9x^2 + 6x + 1;$$

$$4) a^8 - 4a^4b + 4b^2.$$

23. Descompuneți în factori:

$$1) x^2 - 9;$$

$$4) a^2b^2 - 81;$$

$$7) c^5 - d^5;$$

$$2) 25 - 4y^2;$$

$$5) 100m^6 - 1;$$

$$8) a^3 + 8;$$

$$3) 36m^2 - 49n^2;$$

$$6) a^{10} - b^6;$$

$$9) 27m^6 - n^9.$$

24. Descompuneți în factori:

$$1) 7a^2 - 7;$$

$$4) -8a^5 + 8a^3 - 2a;$$

$$2) 3b^3 - 3b;$$

$$5) x - 4y + x^2 - 16y^2;$$

$$3) 2x^3 - 2xy^2;$$

$$6) ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4.$$

25. Care din următoarele egalități este identitate:

$$1) 3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2;$$

$$2) 4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)?$$

**Reîmprospătați în memorie conținutul p. 2 de la pag. 217.**

## NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

26. Se dau două numere:  $a = \underbrace{44\dots4}_m$ ,  $b = \underbrace{33\dots3}_n$ . Oare se pot alege astfel de

$m$  și  $n$ , ca:

- 1) numărul  $a$  să fie divizorul numărului  $b$ ;
- 2) numărul  $b$  să fie divizorul numărului  $a$ ?

## 2. Proprietatea fundamentală a fracției raționale

Egalitatea  $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$  este identitate, deoarece ea se realizează pentru orice valori ale lui  $a$ .

Egalitatea  $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$  de asemenea este natural de-o considerat identitate. Însă ea se realizează nu pentru orice valori ale lui  $a$ . Pentru  $a = -1$  fracțiile raționale din componența acestei egalități, nu au sens.

Să precizăm definiția expresiilor identice egale și definiția identității, formulate în clasa a 7-a.

**Definiție.** Expresiile, valorile corespunzătoare ale cărora sunt egale pentru orice valori admisibile ale variabilelor, care se află în componența lor, se numesc **identice egale**.

**Definiție.** Egalitatea care este adevărată pentru orice valori admisibile ale variabilelor care intră în componența ei, se numește **identitate**.

De exemplu, egalitatea  $\frac{a-2}{a-2} = 1$  este identitate, deoarece ea se realizează pentru toate valorile admisibile ale lui  $a$ , adică pentru toți  $a$ , afară de  $a = 2$ .

În clasa a 7-a noi am examinat transformarea identică a expresiilor întregi. Acum să cercetăm transformările identice ale expresiilor fracționare.

Știți că proprietatea fundamentală a raportului se exprimă cu următoarea egalitate:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

unde  $a$ ,  $b$  și  $m$  – numere arbitrare, iar  $b \neq 0$  și  $m \neq 0$ .

Fracțiile raționale au proprietate analogică cu proprietatea fundamentală a raportului:

**dacă înmulțim numărătorul și numitorul fracției raționale cu unul și același polinom nenul, atunci obținem fracția, identic egală, cu cea dată.**

Această proprietate se numește **proprietatea fundamentală a fracției raționale** și se scrie astfel:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

unde  $A, B$  și  $C$  – polinoame, totodată  $B$  și  $C$  – polinoame nenule.

În concordanță cu această proprietate expresia  $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$  poate fi înlocuită cu fracția  $\frac{A}{B}$ , identic egală cu ea. Această transformare identică se numește **simplificarea fracției** cu factorul  $C$ .

**EXEMPLU 1** Simplificați fracția: 1)  $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$ ; 2)  $\frac{3x+15y}{3x}$ ; 3)  $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$ .

*Rezolvare.* 1) Monoamele  $6a^3b^2$  și  $24a^2b^4$  au factorul comun  $6a^2b^2$ . Deci se poate scrie:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Descompunem numărătorul fracției date în factori:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Așadar, numărătorul și numitorul fracției date au factorul comun 3, simplificând prin care obținem:

$$\frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) Descompunând în prealabil numărătorul și numitorul fracției date în factori și simplificând prin factorul comun  $y+2$ , obținem:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}. \blacktriangle$$

Din proprietatea fundamentală a fracției rezultă, că

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ și } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Fiecare din fracțiile  $\frac{-A}{B}$  și  $\frac{A}{-B}$  poate fi scrisă în forma expresiei  $-\frac{A}{B}$ , adică  $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$ .

**EXEMPLU 2** Simplificați fracția  $\frac{4a-20}{5a-a^2}$ .

*Rezolvare.* Avem:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 3** Aduceți fracția:

- 1)  $\frac{a^2}{5bc^3}$  la numitorul  $15ab^3c^5$ ;
- 2)  $\frac{a}{a+2b}$  la numitorul  $a^2 - 4b^2$ ;
- 3)  $\frac{a-b}{2a-3b}$  la numitorul  $3b - 2a$ .

*Rezolvare.* 1) Deoarece  $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$ , reiese că numitorul nou se deosebește de numitorul fracției date cu factorul  $3ab^2c^2$ . Așadar, numărătorul și numitorul fracției date trebuie înmulțiți cu **factorul suplimentar**  $3ab^2c^2$ . Avem:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

$$2) \text{ Scriem: } \frac{a}{a+2b} = \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} = \frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}.$$

3) Înmulțind numărătorul și numitorul fracției date la numărul  $-1$ , obținem:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b) \cdot (-1)}{(2a-3b) \cdot (-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 4** Aduceți la numitorul comun fracțiile:

$$1) \frac{2m}{9a^2b^6} \text{ și } \frac{5n^2}{6a^4b^3}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ și } \frac{1}{a-b}; \quad 3) \frac{4a^2}{a^2-36} \text{ și } \frac{6}{a^2+6a}.$$

*Rezolvare.* 1) Se poate lua ca numitor comun al fracțiilor date produsul numitorilor lor, care este egal cu  $54a^6b^9$ . Însă este mai comod de luat ca numitor comun monomul  $18a^4b^6$ , obținut în felul următor: coeficientul lui 18 este cel mai mic multiplu comun al coeficienților 9 și 6 ai numitorilor fracțiilor date, iar fiecare din variabilele  $a$  și  $b$  sunt luate cu cel mai mare exponent al puterii cu care această variabilă este în numitorii fracțiilor date.

Deoarece  $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$ , rezultă că factor suplimentar pentru fracția  $\frac{2m}{9a^2b^6}$  este monomul  $2a^2$ . Ținând seama, că  $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$ ,

obținem că factorul suplimentar al fracției  $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$  este monomul  $3b^3$ .

Așadar, obținem:

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Aici numitorul comun al fracțiilor date este egal cu produsul numitorilor lor. Avem:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Pentru a afla numitorul comun al fracțiilor raționale se întâmplă să fie de folos descompunerea anterioară a numitorilor lor în factori:

$$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6), a^2 + 6a = a(a + 6).$$

Așadar, numitorul comun al fracțiilor date poate servi expresia  $a(a + 6)(a - 6)$ .

Atunci urmează

$$\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{a/}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{a-6/}{a(a+6)} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 5** Construiți graficul funcției  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ .

*Rezolvare.* Funcția dată este definită pentru toate valorile lui  $x$ , afară de 1. Avem:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

adică  $y = x + 1$ , unde  $x \neq 1$ .

Așadar, graficul căutat este compus din toate punctele dreptei  $y = x + 1$ , cu excepția unui punct, al cărui abscisă este egal cu 1. (fig. 2).  $\blacktriangle$

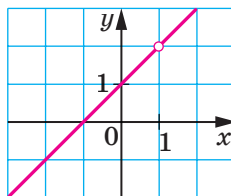


Fig. 2

**EXEMPLU 6** Rezolvați ecuația  $(a^2 - 9)x = a + 3$  pentru fiecare valoare a lui  $a$ .

*Rezolvare.* Scriem ecuația dată în forma  $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$  și să examinăm trei cazuri.

1)  $a = 3$ .

Atunci obținem ecuația  $0x = 6$ , care nu are rădăcini.

2)  $a = -3$ .

În acest caz obținem ecuația  $0x = 0$ , a cărei soluție este orice număr.

3)  $a \neq 3$  și  $a \neq -3$ .

$$\text{Atunci } x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}.$$

*Răspuns:* dacă  $a = 3$ , atunci ecuația nu are rădăcini; dacă  $a = -3$ , atunci rădăcina este orice număr; dacă  $a \neq 3$  și  $a \neq -3$ , atunci  $x = \frac{1}{a-3}$ .  $\blacktriangle$





1. Care expresii se numesc identic egale?
2. Ce se numește identitate?
3. Formulăți proprietatea fundamentală a fracției raționale.

## EXERCIȚII

27.° Cu care din expresiile date mai jos este identic egală fracția  $\frac{6a^2}{24a}$ :

- 1)  $\frac{a^2}{4}$ ;                      2)  $\frac{a}{4}$ ;                      3)  $\frac{12a^3}{48a}$ ;                      4)  $\frac{3a^4}{12a^2}$ ?

28.° Oare este identitate egalitatea:

- 1)  $\frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7}$ ;                      3)  $\frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5}$ ;  
2)  $\frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4}$ ;                      4)  $\frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}$ ?

29.° Simplificați fracția:

- 1)  $\frac{14a^3}{21a}$ ;                      3)  $\frac{5x}{20x}$ ;                      5)  $\frac{4abc}{16ab^4}$ ;                      7)  $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$ ;  
2)  $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$ ;                      4)  $\frac{24x^2y^2}{32xy}$ ;                      6)  $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$ ;                      8)  $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$ .

30.° Reprezentați câtul în formă de fracție și simplificați fracția obținută:

- 1)  $6a : (18a^5)$ ;                      2)  $16b^7 : (48b^4)$ ;                      3)  $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$ .

31.° Simplificați fracția:

- 1)  $\frac{3x}{21y}$ ;                      3)  $\frac{5c^4}{10c^5}$ ;                      5)  $\frac{16ab^4}{40ab^2}$ ;                      7)  $\frac{12a^8}{-42a^2}$ ;  
2)  $\frac{5x^2}{6x}$ ;                      4)  $\frac{2m^4}{m^3}$ ;                      6)  $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$ ;                      8)  $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$ .

32.° Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{-a}{-b}$ ;                      2)  $-\frac{-a}{b}$ ;                      3)  $-\frac{a}{-b}$ ;                      4)  $-\frac{-a}{-b}$ .

33.° Restabiliți egalitățile:

- 1)  $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{5b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$ ;                      2)  $\frac{m}{n} = \frac{4m}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}$ .

34.° Aduceți fracția:

- 1)  $\frac{a}{b^3}$  la numitorul  $b^5$ ;                      3)  $\frac{6}{7x^2y}$  la numitorul  $35x^3y^2$ ;  
2)  $\frac{m}{9n}$  la numitorul  $27n^4$ ;                      4)  $\frac{5k}{6p^5}$  la numitorul  $24p^9c$ .

35.° Aduceți fracția:

1)  $\frac{x}{y^2}$  la numitorul  $y^8$ ;

3)  $\frac{9}{4m^2n}$  la numitorul  $12m^5n^2$ ;

2)  $\frac{a}{3b}$  la numitorul  $6b^5$ ;

4)  $\frac{11c}{15d^6}$  la numitorul  $30bd^7$ .

36.° Simplificați fracția:

1)  $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$ ;

5)  $\frac{7x-21y}{5x-15y}$ ;

9)  $\frac{y^2-25}{10+2y}$ ;

2)  $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$ ;

6)  $\frac{4a-20b}{12ab}$ ;

10)  $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$ ;

3)  $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$ ;

7)  $\frac{6x+12}{6x}$ ;

11)  $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$ ;

4)  $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$ ;

8)  $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$ ;

12)  $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$ .

37.° Simplificați fracția:

1)  $\frac{a-b}{2(b-a)}$ ;

3)  $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$ ;

5)  $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$ ;

2)  $\frac{3x-6y}{4y-2x}$ ;

4)  $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$ ;

6)  $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$ .

38.° Simplificați fracția:

1)  $\frac{3m-3n}{7m-7n}$ ;

4)  $\frac{x^2-49}{6x+42}$ ;

7)  $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$ ;

2)  $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$ ;

5)  $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$ ;

8)  $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$ ;

3)  $\frac{4x-16y}{16y}$ ;

6)  $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$ ;

9)  $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$ .

39.° Aduceți fracția:

1)  $\frac{a}{a+2}$  la numitorul  $4a+8$ ;

2)  $\frac{m}{m-3n}$  la numitorul  $m^2-9n^2$ ;

3)  $\frac{x}{2x-y}$  la numitorul  $7y-14x$ ;

4)  $\frac{5b}{2a+3b}$  la numitorul  $4a^2+12ab+9b^2$ ;

5)  $\frac{x+1}{x^2+x+1}$  la numitorul  $x^3-1$ .

40.° Reprezentați expresia  $x-5y$  în formă de fracție cu numitorul:

1) 2;

2)  $x$ ;

3)  $4y^3$ ;

4)  $x^2-25y^2$ .

41.° Aduceți fracția  $\frac{6}{b-4}$  la numitorul:

1)  $5b-20$ ;

2)  $12-3b$ ;

3)  $b^2-4b$ ;

4)  $b^2-16$ .

42.° Reprezentați fracțiile date în formă de fracții cu aceeași numitori:

1)  $\frac{1}{8ab}$  și  $\frac{1}{2a^3}$ ;

5)  $\frac{x}{2x+1}$  și  $\frac{x}{3x-2}$ ;

2)  $\frac{3x}{7m^3n^3}$  și  $\frac{4y}{3m^2n^4}$ ;

6)  $\frac{a-b}{3a+3b}$  și  $\frac{a}{a^2-b^2}$ ;

3)  $\frac{a+b}{a-b}$  și  $\frac{2}{a^2-b^2}$ ;

7)  $\frac{3a}{4a-4}$  și  $\frac{2a}{5-5a}$ ;

4)  $\frac{3d}{m-n}$  și  $\frac{8p}{(m-n)^2}$ ;

8)  $\frac{7a}{b-3}$  și  $\frac{c}{9-b^2}$ .

43.° Aduceți la numitorul comun fracțiile:

1)  $\frac{4}{15x^2y^2}$  și  $\frac{1}{10x^3y}$ ;

5)  $\frac{x+1}{x^2-xy}$  și  $\frac{y-1}{xy-y^2}$ ;

2)  $\frac{c}{6a^4b^5}$  și  $\frac{d}{9ab^2}$ ;

6)  $\frac{6a}{a-2b}$  și  $\frac{3a}{a+b}$ ;

3)  $\frac{x}{y-5}$  și  $\frac{z}{y^2-25}$ ;

7)  $\frac{1+c^2}{c^2-16}$  și  $\frac{c}{4-c}$ ;

4)  $\frac{m+n}{m^2-mn}$  și  $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$ ;

8)  $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$  și  $\frac{m}{m-5}$ .

44.° Simplificați fracția:

1)  $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$ ;

3)  $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$ ;

2)  $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$ ;

4)  $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$ .

45.° Simplificați fracția:

1)  $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$ ;

2)  $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$ ;

3)  $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$ .

46.° Aflați valoarea fracției, mai întâi simplificând-o:

1)  $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$ , dacă  $a = -2$ ,  $b = 0,4$ ;

2)  $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$ , dacă  $b = \frac{1}{3}$ ,  $c = -6$ ;

3)  $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$ , dacă  $x = 1,2$ ,  $y = -3$ ;

4)  $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$ , dacă  $a = -0,1$ .

47.° Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$  pentru  $x = 2,5$ ,  $y = -2$ ;

2)  $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$  pentru  $c = -4$ .

48.\* Aduceți la numitorul comun fracțiile:

$$1) \frac{2p}{5p-15} \text{ și } \frac{1}{p^3-27}; \quad 4) \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^2-2x+1} \text{ și } \frac{4}{x^2+2x+1};$$

$$2) \frac{3a+1}{9a^2-6a+1} \text{ și } \frac{a-2}{9a^2-1}; \quad 5) \frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}, \frac{b}{2a-2b} \text{ și } \frac{ab}{4a-4c}.$$

$$3) \frac{a}{a^2-7a} \text{ și } \frac{a+3}{a^2-14a+49};$$

49.\* Scrieți în formă de fracții cu aceeași numitori:

$$1) \frac{3a}{3a-2}, \frac{a}{9a+6} \text{ și } \frac{a^2}{9a^2b-4b};$$

$$2) \frac{1}{a-5b}, \frac{1}{a^2+7ac} \text{ și } \frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}.$$

50.\*\* Aflați valoarea expresiei  $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$ , dacă  $\frac{x}{y} = 2$ .

51.\*\* Aflați valoarea expresiei  $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$ , dacă  $\frac{a}{b} = 5$ .

52.\*\* Se știe că  $2a - 6b = 1$ . Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{8}{a-3b}; \quad 2) \frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}.$$

53.\*\* Aflați valoarea expresiei  $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$ , dacă  $4m+3n=8$ .

54.\*\* Oare există așa o valoare a lui  $a$ , pentru care fracția  $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$  obține valoare negativă?

55.\*\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{x^2-4}{x+2}; \quad 3) y = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2-4x}{x};$$

$$2) y = \frac{x-3}{3-x}; \quad 4) y = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+4}.$$

56.\*\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{x^2-8x+16}{x-4}; \quad 2) y = x - \frac{x}{x}; \quad 3) y = \frac{x^2-3x}{x} - \frac{2x^2-2}{x^2-1}.$$

57.\*\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = \frac{x^2-1}{|x|-1}.$$

58.\*\* Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x+1}{x+1} = 1; \quad 2) \frac{x^2-25}{x-5} = 10; \quad 3) \frac{x+6}{|x|-6} = 0.$$

59.\*\* Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x^2-16}{x+4} = -8; \quad 2) \frac{|x|-7}{x-7} = 0.$$

60.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

1)  $ax = 1$ ;

3)  $(a - 6)x = a^2 - 12a + 36$ ;

2)  $ax = a$ ;

4)  $(a^2 - 4)x = a - 2$ .

61.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

1)  $(a + 3)x = 3$ ;

2)  $(a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81$ .

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

62. Simplificați expresia:

1)  $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$ ;

2)  $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$ ;

3)  $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$ ;

4)  $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$ ;

5)  $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$ ;

6)  $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$ .

63. Construiți graficul funcției:

1)  $y = 2$ ;

2)  $y = 2x$ ;

3)  $y = 2x - 1$ .

64. Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$  expresia  $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$  obține cea mai mică valoare?

65. Distanța de la satul Vișneve până la gară este cu 14 km mai mică decât distanța de la satul Iabluneve până la aceeași gară. Timpul, în care autobuzul parcurge distanța de la satul Vișneve până la gară, constituie 45 min, iar timpul, în care un automobil parcurge distanța de la satul Iabluneve până la gară este cu 5 min. mai mare, totodată viteza automobilului este cu 12 km/oră mai mare decât viteza autobuzului. Aflați viteza autobuzului și automobilului.

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

66. Efectuați operațiile:

1)  $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$ ;

2)  $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$ ;

3)  $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$ ;

4)  $4 - 1\frac{3}{11}$ .

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

67. Pe laturile pătratului sunt scrise patru numere naturale. În fiecare vârf al pătratului este scris numărul care este egal cu produsul numerelor, scrise pe laturile pentru care acest vârf este comun. Suma numerelor, scrise în vârfuri, este egală cu 55. Aflați suma numerelor, scrise pe laturile pătratului.

### 3. Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu aceeași numitori

Voi știți regulile adunării și scăderii a fracțiilor ordinare cu aceeași numitori. Ele pot fi exprimate cu următoarele egalități:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Conform aceluiași reguli se adună și se scad fracțiile raționale cu aceeași numitori.

**Pentru a aduna fracțiile raționale cu aceeași numitori, trebuie de adunat numărătorii lor, iar numitorul de-l lăsat același.**

**Pentru a scădea fracțiile raționale cu aceeași numitori trebuie de la numărătorul primei fracții de scăzut numărătorul fracției a doua, iar numitorul rămâne același.**

**EXEMPLU 1** Efectuați scăderea:

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2}; \quad 2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25}; \quad 3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}.$$

*Rezolvare*

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2} = \frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2} = \frac{7x-5-3x+5}{8x^2} = \frac{4x}{8x^2} = \frac{1}{2x}.$$

$$2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25} = \\ = \frac{y^2-10y+25}{y^2-25} = \frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)} = \frac{y-5}{y+5}.$$

$$3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} = \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}. \quad \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Se știe că  $\frac{m}{n} = -3$ . Aflați valoarea expresiei  $\frac{2m+n}{m}$ .

*Rezolvare.* Reprezentăm fracția dată în formă de sumă a expresiilor întregi și fracționare:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

$$\text{Dacă } \frac{m}{n} = -3, \text{ atunci } \frac{n}{m} = -\frac{1}{3}. \text{ Deci, } \frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

**EXEMPLU 3** Aflați toate valorile naturale  $n$  pentru care valoarea expresiei  $\frac{2n^2 + 3n - 15}{n}$  este număr întreg.

*Rezolvare.* Reprezentăm fracția dată în formă de diferență a întregi și fracționare:

$$\frac{2n^2 + 3n - 15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Expresia  $2n + 3$  primește valori naturale pentru orice  $n$  natural. De aceea expresia  $2n + 3 - \frac{15}{n}$  obține valori întregi, dacă valorile expresiei  $\frac{15}{n}$  sunt numere întregi. Aceasta este posibil numai pentru așa valori naturale a lui  $n$ : 1, 3, 5, 15.

*Răspuns:*  $n = 1$ , sau  $n = 3$ , sau  $n = 5$ , sau  $n = 15$ . ▲



1. Cum se adună fracțiile raționale cu aceiași numitori?
2. Cum se scad fracțiile raționale cu aceiași numitori?

## EXERCIȚII

68.° Efectuați operațiile:

$$1) \frac{x}{6} + \frac{y}{6};$$

$$2) \frac{a}{3} - \frac{b}{3};$$

$$3) \frac{m}{n} + \frac{4m}{n};$$

$$4) \frac{6c}{d} - \frac{2c}{d};$$

$$5) \frac{m+n}{6} - \frac{m-2n}{6};$$

$$6) \frac{2a-3b}{6ab} + \frac{9b-2a}{6ab};$$

$$7) -\frac{5c+4d}{cd} + \frac{4d+9c}{cd};$$

$$8) \frac{8m+3}{10m^2} - \frac{2m+3}{10m^2}.$$

69.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

$$1) \frac{7k}{18p} - \frac{4k}{18p};$$

$$2) \frac{a-b}{2b} - \frac{a}{2b};$$

$$3) -\frac{a-12b}{27a} + \frac{a+15b}{27a};$$

$$4) \frac{x-7y}{xy} - \frac{x-4y}{xy};$$

$$5) \frac{10a+6b}{11a^3} - \frac{6b-a}{11a^3};$$

$$6) \frac{x^2-xy}{x^2y} + \frac{2xy-3x^2}{x^2y}.$$

70.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3};$$

$$2) \frac{t}{t^2-16} - \frac{4}{t^2-16};$$

$$3) \frac{m^2}{(m-5)^2} - \frac{25}{(m-5)^2};$$

$$4) \frac{5x+9}{x^2-1} - \frac{4x+8}{x^2-1};$$

5)  $\frac{b^2}{b+10} + \frac{20b+100}{b+10};$

6)  $\frac{c^2}{c-7} - \frac{14c-49}{c-7}.$

71.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{c^2}{c-9} - \frac{81}{c-9};$

3)  $\frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2x+7}{x^2-4};$

2)  $\frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(a-6)^2};$

4)  $\frac{y^2}{y-2} - \frac{4y-4}{y-2}.$

72.° Efectuați operațiile:

1)  $\frac{a+b}{c-7} + \frac{a}{7-c};$

4)  $\frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b};$

2)  $\frac{5m}{m-n} + \frac{5n}{n-m};$

5)  $\frac{t^2}{3t-6} + \frac{4}{6-3t};$

3)  $\frac{2x-4y}{x-3y} - \frac{4x-14y}{3y-x};$

6)  $\frac{y^2}{y-1} - \frac{1-2y}{1-y}.$

73.° 1)  $\frac{x}{y-1} + \frac{2}{1-y};$

3)  $\frac{3m+2n}{2m-3n} - \frac{m-8n}{3n-2m};$

2)  $\frac{3c}{c-d} + \frac{3d}{d-c};$

4)  $\frac{b^2}{2b-14} + \frac{49}{14-2b}.$

74.° Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{a^2-48}{a-8} - \frac{16}{a-8}$  pentru  $a = 32;$

2)  $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8} + \frac{c+3}{8-c^3}$  pentru  $c = -3.$

75.° Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{5x+3}{x^2-16} + \frac{6x-1}{16-x^2}$  pentru  $x = -4, 1;$

2)  $\frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9}$  pentru  $a = 7.$

76.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{5n-1}{20n} - \frac{7n-8}{20n} - \frac{8n+7}{20n};$

3)  $\frac{3k}{k^3-1} + \frac{4k+1}{1-k^3} + \frac{k^2}{1-k^3}.$

2)  $\frac{9m+2}{m^2-4} - \frac{m-9}{4-m^2} + \frac{1-7m}{m^2-4};$

77.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{6a-1}{16a-8} + \frac{4a-7}{16a-8} + \frac{-2a-2}{8-16a};$

2)  $\frac{2a^2+12a}{a^2-25} + \frac{8a-9}{25-a^2} - \frac{a^2+14a-16}{a^2-25}.$

78.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

1)  $\frac{15-8a}{(a-1)^2} - \frac{14-7a}{(1-a)^2};$

3)  $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)} - \frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}.$

2)  $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3} + \frac{12b}{(2-b)^3};$

79.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4} + \frac{2x+49}{(7-x)^4};$

2)  $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)} + \frac{y+36}{(6-y)(2+y)}.$



80.\* Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1; \quad 2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$$

81.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei  $x$  valoarea expresiei  $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$  nu depinde de valoarea lui  $x$ .

82.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei  $y$  valoarea expresiei  $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$  nu depinde de valoarea lui  $y$ .

83.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei expresia  $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$  primește valori pozitive.

84.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei expresia  $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$  primește valori negative.

85.\*\* Reprezentați fracția dată în formă de sumă sau diferență a expresiilor întregă și fracționară:

$$1) \frac{x+3}{x}; \quad 2) \frac{a^2-2a-5}{a-2}.$$

86.\*\* Reprezentați fracția dată în formă de sumă sau diferență a expresiilor întregă și fracționară:

$$1) \frac{4a-b}{a}; \quad 2) \frac{b^2+7b+3}{b+7}.$$

87.\*\* Se știe că  $\frac{x}{y} = 4$ . Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{y}{x}; \quad 2) \frac{2x-3y}{y}; \quad 3) \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

88.\*\* Se știe că  $\frac{a}{b} = -2$ . Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{a-b}{a}; \quad 2) \frac{4a+5b}{b}; \quad 3) \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$$

89.\*\* Aflați toate valorile naturale ale lui  $n$  pentru care valoarea expresiei este număr întreg:

$$1) \frac{n+6}{n}; \quad 2) \frac{3n^2-4n-14}{n}; \quad 3) \frac{4n+7}{2n-3}.$$

90.\*\* Aflați toate valorile naturale ale lui  $n$  pentru care valoarea expresiei este număr întreg:

$$1) \frac{8n-9}{n}; \quad 2) \frac{n^2+2n-8}{n}; \quad 3) \frac{9n-4}{3n-5}.$$



## 4. Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu numitori diferiți

Aplicând proprietatea fundamentală a fracției raționale, adunarea și scăderea fracțiilor cu numitori diferiți poate fi redusă la adunarea și scăderea fracțiilor cu același numitor.

Fie că trebuie de adunat două fracții raționale  $\frac{A}{B}$  și  $\frac{C}{D}$ .

Se poate scrie:  $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$ ,  $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$ .

Atunci  $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$ .

Aici ca **numitor comun** este aleasă expresia, care este egală cu produsul numitorilor ale fracțiilor date.

Menționăm că produsul numitorilor ai fracțiilor date nu totdeauna este numitor comun comod.

Amintim că pentru a găsi numitorul comun al fracțiilor ordinare, noi aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor, descompunându-le în factori primi. Analogic, pentru a afla numitorul comun al fracțiilor raționale, poate să fie convenabilă descompunerea numitorilor în factori.

**EXEMPLU 1** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) \frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c};$$

$$4) \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15};$$

$$2) \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n};$$

$$5) \frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}.$$

$$3) \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n};$$

*Rezolvare.* 1) Numitorul comun al fracțiilor date este monomul  $a^2bc$ . Deci,

$$\frac{a}{abc} \cdot \frac{b+1}{b+1} + \frac{b}{a^2c} \cdot \frac{1-a}{1-a} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Descompunând în prealabil numitorii fracțiilor date în factori, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} &= \frac{m-n/n}{7(m+n)} - \frac{m+n/n}{7(m-n)} = \\ &= \frac{m(m-n) - n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2 - mn - mn - n^2}{7(m^2 - n^2)} = \frac{m^2 - 2mn - n^2}{7(m^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

$$3) \text{ Avem: } \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} = \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} - \frac{n+7/6}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} =$$

$$= \frac{10n + 14 - 6n - 42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n - 28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}.$$

$$4) \frac{2a}{25 - 10a + a^2} - \frac{1}{3a - 15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} =$$

$$= \frac{2a}{(a-5)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \frac{6a - a + 5}{3(a-5)^2} = \frac{5a + 5}{3(a-5)^2}.$$

5) În acest caz numitorul comun al fracțiilor date este egal cu produsul numitorilor lor. Atunci

$$\frac{x^{-2/}}{x-4} - \frac{x^{-4/}}{x-2} = \frac{x(x-2) - (x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x - x^2 + 4x - 2x + 8}{(x-4)(x-2)} =$$

$$= \frac{8}{(x-4)(x-2)}. \quad \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Reprezentați în formă de fracție expresia  $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$ .

*Rezolvare.* Reprezentând expresia  $3c$  în formă de fracție cu numitorul 1, obținem:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{3c}{1} = \frac{21c^2 - 21c^2 + 6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. \quad \blacktriangle$$

Menționăm că suma și diferența a două fracții raționale sunt fracții raționale.



1. Cum se efectuează adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu numitori diferiți?
2. Ce este suma și diferența a două fracții raționale?

## EXERCIȚII

98.° Efectuați operațiile:

$$1) \frac{x}{4} + \frac{2x}{3};$$

$$4) \frac{4}{x} - \frac{3}{y};$$

$$7) \frac{a}{b^2} + \frac{1}{ab^4};$$

$$2) \frac{5b}{14} - \frac{b}{7};$$

$$5) \frac{m}{4n} + \frac{m}{6n};$$

$$8) \frac{11}{5a} - \frac{2c}{15ab};$$

$$3) \frac{m}{8} - \frac{n}{6};$$

$$6) \frac{c}{b} - \frac{d}{3b};$$

$$9) \frac{m}{abc} + \frac{c}{abm}.$$

99.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

$$1) \frac{x}{8} - \frac{y}{12};$$

$$3) \frac{m}{n} - \frac{n}{m};$$

$$5) \frac{7}{cd} + \frac{k}{cp};$$

$$2) \frac{4a}{7} + \frac{a}{4};$$

$$4) \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{8x};$$

$$6) \frac{6a}{35c^5} - \frac{9b}{14c^2}.$$

100.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{a+7}{12} + \frac{a-4}{9};$$

$$2) \frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15};$$

$$3) \frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y};$$

$$4) \frac{6p+1}{p} - \frac{2p+8}{3p};$$

$$5) \frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m};$$

$$6) \frac{x+4}{11x} - \frac{y-3}{11y};$$

$$7) \frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac};$$

$$8) \frac{2}{p^2} + \frac{p-1}{p};$$

$$9) \frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2};$$

$$10) \frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y};$$

$$11) \frac{2m-3n}{m^2n} + \frac{7m-2n}{mn^2};$$

$$12) \frac{c+d}{cd^4} - \frac{c^2-8d}{c^3d^3}.$$

101.° Efectuați adunarea sau scăderea fracțiilor:

$$1) \frac{9-5b}{b} - \frac{7-5c}{c};$$

$$2) \frac{4d+7}{7d} - \frac{d-6}{6d};$$

$$3) \frac{5-k}{5p} - \frac{p+10}{5k};$$

$$4) \frac{m-n}{mn} - \frac{p-n}{np};$$

$$5) \frac{6a+2}{ab} - \frac{2a+4}{a^2b};$$

$$6) \frac{c^2-16}{c^6} - \frac{c-9}{c^5};$$

$$7) \frac{1}{x^3} - \frac{1+x^2}{x^5};$$

$$8) \frac{1-ab}{abc} - \frac{1-ad}{acd}.$$

102.° Efectuați operațiile:

$$1) \frac{2}{x} + \frac{3x-2}{x+1};$$

$$3) \frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3};$$

$$5) \frac{x}{2y+1} - \frac{x}{3y-2};$$

$$2) \frac{m}{n} - \frac{m}{m+n};$$

$$4) \frac{c}{3c-1} - \frac{c}{3c+1};$$

$$6) \frac{a-b}{b} - \frac{a-b}{a+b}.$$

103.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

$$1) \frac{a}{a-b} + \frac{a}{b};$$

$$2) \frac{4}{x} - \frac{5x+4}{x+2};$$

$$3) \frac{b}{b-2} - \frac{2}{b+2}.$$

104.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{1}{b(a-b)} - \frac{1}{a(a-b)};$$

$$2) \frac{5}{a} + \frac{30}{a(a-6)};$$

$$3) \frac{3}{x-2} - \frac{2x+2}{x(x-2)};$$

$$4) \frac{y}{2(y+3)} - \frac{y}{5(y+3)};$$

$$5) \frac{5m+3}{2(m+1)} - \frac{7m+4}{3(m+1)};$$

$$6) \frac{c-a}{a(a+b)} + \frac{c+b}{b(a+b)}.$$

105.° Efectuați operațiile:

$$1) \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)};$$

$$2) \frac{4}{b} - \frac{8}{b(b+2)};$$

$$3) \frac{x}{5(x+7)} - \frac{x}{6(x+7)};$$

$$4) \frac{4n+2}{3(n-1)} - \frac{5n+3}{4(n-1)}.$$

106.° Efectuați adunarea sau scăderea fracțiilor:

1)  $\frac{a}{a-2} - \frac{3a+1}{3a-6}$ ;

5)  $\frac{m+1}{3m-15} - \frac{m-1}{2m-10}$ ;

2)  $\frac{18}{b^2+3b} - \frac{6}{b}$ ;

6)  $\frac{m-2n}{6m+6n} - \frac{m-3n}{4m+4n}$ ;

3)  $\frac{2}{c+1} - \frac{c-1}{c^2+c}$ ;

7)  $\frac{a^2+2}{a^2+2a} - \frac{a+4}{2a+4}$ ;

4)  $\frac{d-1}{2d-8} + \frac{d}{d-4}$ ;

8)  $\frac{3x-4y}{x^2-2xy} - \frac{3y-x}{xy-2y^2}$ .

107.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{b}{b-5} - \frac{4b-1}{4b-20}$ ;

4)  $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b}$ ;

2)  $\frac{2}{m} - \frac{16}{m^2+8m}$ ;

5)  $\frac{b+4}{ab-b^2} - \frac{a+4}{a^2-ab}$ ;

3)  $\frac{a-2}{2a-6} - \frac{a-1}{3a-9}$ ;

6)  $\frac{c-4}{4c+24} + \frac{4c+9}{c^2+6c}$ .

108.° Efectuați operațiile:

1)  $\frac{3}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-9}$ ;

4)  $\frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$ ;

2)  $\frac{a^2}{a^2-64} - \frac{a}{a-8}$ ;

5)  $\frac{m}{m+5} - \frac{m^2}{m^2+10m+25}$ ;

3)  $\frac{6b}{9b^2-4} - \frac{1}{3b-2}$ ;

6)  $\frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$ .

109.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{4x-y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x-y}$ ;

3)  $\frac{10a}{25a^2-9} - \frac{1}{5a+3}$ ;

2)  $\frac{y^2}{y^2-81} - \frac{y}{y+9}$ ;

4)  $\frac{n}{n-7} - \frac{n^2}{n^2-14n+49}$ .

110.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

1)  $\frac{a}{b} + 1$ ;

4)  $\frac{9}{p^2} - \frac{4}{p} + 3$ ;

7)  $6m - \frac{12m^2+1}{2m}$ ;

2)  $\frac{x}{y} - x$ ;

5)  $2 - \frac{3b+2a}{a}$ ;

8)  $\frac{20b^2+5}{2b-1} - 10b$ .

3)  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2$ ;

6)  $\frac{3b+4}{b-2} - 3$ ;

111.° Efectuați operațiile:

1)  $a - \frac{4}{a}$ ;

3)  $\frac{m}{n^3} - \frac{1}{n} + m$ ;

5)  $3n - \frac{9n^2-2}{3n}$ ;

2)  $\frac{1}{x} + x - 2$ ;

4)  $\frac{2k^2}{k-5} - k$ ;

6)  $5 - \frac{4y-12}{y-2}$ .

112. Simplificați expresia:

$$1) \frac{a^2+1}{a^2-2a+1} + \frac{a+1}{a-1};$$

$$2) \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$3) \frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2};$$

$$4) \frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9};$$

$$5) \frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a+4}{a^2-4};$$

$$6) \frac{2p}{p-5} - \frac{5}{p+5} + \frac{2p^2}{25-p^2};$$

$$7) \frac{1}{y} - \frac{y+8}{16-y^2} - \frac{2}{y-4};$$

$$8) \frac{2b-1}{4b+2} + \frac{4b}{4b^2-1} + \frac{2b+1}{3-6b}.$$

113. Simplificați expresia:

$$1) \frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$2) \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{2xy+x^2+y^2};$$

$$3) \frac{2a}{4a^2-1} - \frac{a+4}{2a^2+a};$$

$$4) \frac{b-2}{b^2+6b+9} - \frac{b}{b^2-9};$$

$$5) \frac{x-6}{x^2+3x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x-3}{x};$$

$$6) \frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

114. Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei valorile acestei expresii nu depind de valoarea variabilei:

$$1) \frac{2x+1}{2x-4} + \frac{2x-1}{6-3x} - \frac{x+7}{6x-12};$$

$$2) \frac{24-2a}{a^2-16} - \frac{a}{2a-8} + \frac{4}{a+4}.$$

115. Reprezentați în formă de fracție expresia:

$$1) 1-a + \frac{a^2-2}{a+2};$$

$$3) \frac{c^2+9}{c-3} - c-3;$$

$$2) \frac{a^2-b^2}{3a+b} + 3a-b;$$

$$4) \frac{8m^2}{4m-3} - 2m-1.$$

116. Simplificați expresia:

$$1) b+7 - \frac{14b}{b+7};$$

$$2) 5c - \frac{10-29c+10c^2}{2c-5} + 2.$$

117. Simplificați expresia și aflați valoarea ei:

$$1) \frac{7}{2a-4} - \frac{12}{a^2-4} - \frac{3}{a+2}, \text{ dacă } a = 5;$$

$$2) \frac{2c+3}{2c^2-3c} + \frac{2c-3}{2c^2+3c} - \frac{16c}{4c^2-9}, \text{ dacă } c = -0,8;$$

$$3) \frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2} - \frac{m+4n}{2m-8n}, \text{ dacă } m = 3, n = 0,5.$$

118. Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}, \text{ dacă } x = 5;$$

$$2) \frac{2y-1}{2y} - \frac{2y}{2y-1} - \frac{1}{2y-4y^2}, \text{ dacă } y = -2\frac{3}{7}.$$

119.\* Demonstrați identitatea:

- 1)  $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab} = 0$ ;
- 2)  $\frac{a+3}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} = \frac{2}{a^2-1}$ ;
- 3)  $\frac{2a^2+4}{a^2-1} - \frac{a-2}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} = \frac{1}{a-1}$ .

120.\* Demonstrați identitatea:

- 1)  $\frac{1}{6a-4b} - \frac{1}{6a+4b} - \frac{3a}{4b^2-9a^2} = \frac{1}{3a-2b}$ ;
- 2)  $\frac{c+2}{c^2+3c} - \frac{1}{3c+9} - \frac{2}{3c} = 0$ .

121.\* Aflați diferența fracțiilor:

- 1)  $\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}$ ;
- 2)  $\frac{1}{b+3} - \frac{b^2-6b}{b^3+27}$ .

122.\* Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n} - \frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$ ;
- 2)  $1 - \frac{2b-1}{4b^2-2b+1} - \frac{2b}{2b+1}$ .

123.\* Demonstrați identitatea  $\frac{3a^2+24}{a^3+8} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}$ .

124.\*\* Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{4b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{b^2-ab}$ ;
- 2)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{x^2+4}{8x-2x^3}$ ;
- 3)  $\frac{1}{(a-5b)^2} - \frac{2}{a^2-25b^2} + \frac{1}{(a+5b)^2}$ ;
- 4)  $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6} - \frac{x+5}{y-2}$ .

125.\*\* Demonstrați identitatea:

- 1)  $\frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-3}{3a+9} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{a-3}{3a}$ ;
- 2)  $\frac{b-4}{2a-1} - \frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a} = \frac{2}{2a-1}$ .

126.\*\* Demonstrați identitatea

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

127.\*\* Demonstrați identitatea

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

128.\* Simplificați expresia

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

129.\* Simplificați expresia

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$



130.\* Demonstrați identitatea

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

131.\* Demonstrați identitatea

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}.$$

132.\* Demonstrați, că dacă  $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$ , atunci  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4$ .

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

133. Găsiți rădăcina ecuației:

1)  $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$ ;

2)  $\frac{x-4}{2} - \frac{x-1}{5} = 3$ .

134. Rezolvați sistemul de ecuații:

1)  $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

135. În prima zi a unei curse de trei zile bicicliștii au parcurs  $\frac{4}{15}$  din tot itinerarul, a doua zi –  $\frac{2}{5}$  din toată ruta, iar a treia zi – restul de 90 km. Ce distanță au parcurs bicicliștii în 3 zile?

136. (*Din folclorul bulgar*). Cinci frați au vrut să împartă 20 de oi astfel ca fiecare din ei să obțină un număr impar de oi. Oare este aceasta posibil?

137. Oare este justă afirmația că pentru orice număr natural  $n$  valoarea expresiei  $(5n+7)^2 - (n-1)^2$  este divizibilă cu 48?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

138. Indicați numărul invers numărului:

1)  $\frac{5}{8}$ ;    2) 7;    3)  $-3\frac{5}{6}$ ;    4)  $\frac{1}{14}$ ;    5) 0,12.

139. Aflați valoarea produsului:

1)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{20}$ ;    2)  $6 \cdot \frac{7}{18}$ ;    3)  $\frac{3}{8} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$ .

140. Efectuați împărțirea:

1)  $\frac{5}{18} : \left(-\frac{25}{27}\right)$ ;    2)  $8 : \frac{4}{17}$ ;    3)  $-\frac{8}{15} : (-24)$ ;    4)  $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$ .

141. Aflați valoarea puterii:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^5; \quad 2) \left(\frac{2}{5}\right)^3; \quad 3) \left(-2\frac{2}{3}\right)^2; \quad 4) \left(-3\frac{1}{3}\right)^3.$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

142. Două poduri plutitoare în același timp pornesc de la malurile opuse ale râului și îl intersectează pe direcția perpendiculară pe maluri. Vitezele podurilor plutitoare sunt constante, însă diferite. Podurile plutitoare se întâlnesc la distanța de 720 m de la unul din maluri, după ce continuă mișcarea. Ajungând la maluri podurile plutitoare imediat încep să se miște înapoi și peste un oarecare timp se întâlnesc la distanța de 400 m de la celălalt mal. Care este lățimea râului?

### ÎNSĂRCINAREA NR. 1 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Care din expresiile de mai jos este întregă?

$$A) \frac{m+n}{m}; \quad B) \frac{m+n}{7}; \quad C) \frac{m+n}{7m}; \quad D) m + \frac{n}{7m}.$$

2. Pentru care valoare a variabilei expresia  $\frac{3a}{2a-10}$ ? nu are sens?

$$A) 0; \quad B) 10; \quad C) 5; \quad D) 0; 5.$$

3. Pentru care valori ale argumentului funcția  $y = \frac{x+2}{x^2-1}$  nu este determinată?

$$A) -1; 1; \quad B) 1; \quad C) -2; -1; 1; \quad D) -2; 1.$$

4. Simplificați fracția  $\frac{21a^6}{14a^3}$ .

$$A) \frac{3a^3}{2}; \quad B) \frac{3a^2}{2}; \quad C) \frac{3}{2a^3}; \quad D) \frac{3}{2a^2}.$$

5. Cu care din fracțiile de mai jos este identic egală fracția  $\frac{5b-15}{b^2-9}$ ?

$$A) \frac{b-3}{5}; \quad B) \frac{b+3}{5}; \quad C) \frac{5}{b-3}; \quad D) \frac{5}{b+3}.$$

6. Simplificați fracția  $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$ .

$$A) 4c; \quad B) -4c; \quad C) \frac{1}{4c}; \quad D) -\frac{1}{4c}.$$

7. Efectuați scăderea:  $\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$ .

$$A) \frac{x+2}{x-2}; \quad B) \frac{5x+10}{x-2}; \quad C) 5; \quad D) -5.$$

8. Efectuați adunarea:  $\frac{4-m}{m-3} + \frac{2m-5}{3-m}$ .

- A)  $\frac{m-1}{m-3}$ ;      B)  $\frac{1-3m}{m-3}$ ;      C) 3;      D) -3.

9. Reprezentați în formă de fracție expresia  $\frac{3n^2}{n-6} - 3n$ .

- A)  $\frac{3n}{n-4}$ ;      B)  $\frac{3n}{4-n}$ ;      C)  $\frac{18n}{n-6}$ ;      D)  $\frac{18}{6-n}$ .

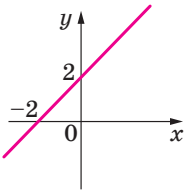
10. Simplificați expresia  $\frac{2m+1}{3m-2} - \frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$ .

- A)  $\frac{1}{(3m-2)^2}$ ;      B)  $\frac{1}{3m-2}$ ;      C)  $\frac{m}{(3m-2)^2}$ ;      D)  $\frac{m}{3m-2}$ .

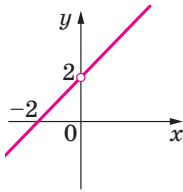
11. Simplificați expresia  $\frac{a-12}{a^2+4a} - \frac{a-4}{a} + \frac{a}{a+4}$ .

- A)  $\frac{4}{a}$ ;      B)  $\frac{1}{a}$ ;      C)  $a$ ;      D)  $a+4$ .

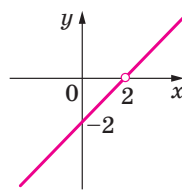
12. În care figură este reprezentat graficul funcției  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ ?



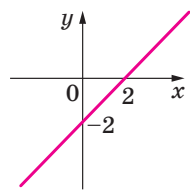
A)



B)



C)



D)

## 5. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale. Ridicarea la putere a fracției raționale

Voi știți regulile înmulțirii și împărțirii a fracțiilor ordinare. Ele pot fi exprimate cu următoarele egalități:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ,  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ .

Conform regulilor analogice se efectuează înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale.

**Produsul a două fracții raționale este fracția rațională, a cărei numărător este egal cu produsul numărătorilor ai fracțiilor date, iar numitorul – cu produsul numitorilor lor.**

**Câțul a două fracții raționale este fracția rațională al cărei numărător este egal cu produsul numărătorului deîmpărțitului cu numitorul împărțitorului, iar numitorul – cu produsul numitorului deîmpărțitului cu numărătorul împărțitorului.**

**EXEMPLU 1** Efectuați operațiile:

$$1) \frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4};$$

$$3) \frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27};$$

$$2) (2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36};$$

$$4) \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7).$$

Rezolvare. 1) Avem:  $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}.$

2) Reprezentând polinomul  $2x - 12$  în formă de fracție cu numitorul 1, obținem:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6};$$

$$3) \frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b};$$

$$4) \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}. \blacktriangle$$

Regula înmulțirii a două fracții poate fi generalizată pentru cazul când trebuie de aflat produsul a trei și mai multe fracții raționale. De exemplu, pentru trei fracții avem:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

**EXEMPLU 2** Simplificați expresia  $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}.$

Rezolvare. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} &= \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Aplicând regula înmulțirii fracțiilor se poate obține regula ridicării la putere a fracțiilor raționale. Pentru  $n$  natural,  $n > 1$ , avem:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ factori}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ factori}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ factori}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Pentru  $n = 1$  s-a convenit, că  $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$

Deci,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

unde  $n$  – număr natural.

**Pentru a ridica la putere fracția rațională trebuie de ridicat la această putere numărătorul și numitorul. Primul rezultat de-l scris ca numărător, iar al doilea – ca numitorul fracției.**

**EXEMPLU 3** Reprezentați în formă de fracție expresia  $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$ .

*Rezolvare.*  $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}. \blacktriangle$



1. Ce este produsul a două fracții raționale?
2. Ce este câtul a două fracții raționale?
3. Cum se ridică la o putere fracția rațională?

## EXERCIȚII

**143.°** Cu care din expresiile aduse este egal produsul  $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$ ?

- 1)  $\frac{1}{c^2}$ ;      2)  $\frac{a}{c^2}$ ;      3)  $\frac{1}{c^4}$ ;      4)  $\frac{a}{c^4}$ .

**144.°** Efectuați înmulțirea:

- 1)  $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$ ;      3)  $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$ ;      5)  $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$ ;      7)  $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$ ;  
2)  $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$ ;      4)  $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$ ;      6)  $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$ ;      8)  $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$ .

**145.°** Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ ;      3)  $\frac{a}{2b} \cdot 2a$ ;      5)  $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$ ;  
2)  $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$ ;      4)  $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$ ;      6)  $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$ .

**146.°** Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$ ;      3)  $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$ ;  
2)  $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$ ;      4)  $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$ ;

5)  $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$ ;

6)  $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$ ;

7)  $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$ ;

8)  $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$ ;

9)  $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$ ;

10)  $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$ .

147.° Efectuați înmulțirea:

1)  $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$ ;

2)  $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$ ;

3)  $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$ ;

4)  $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$ ;

5)  $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$ ;

6)  $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$ .

148.° Căreia din expresiile aduse este egal câtul  $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$ ?

1)  $\frac{c^3}{4}$ ;

2)  $\frac{c^6}{4}$ ;

3)  $4c^5$ ;

4)  $4c^6$ .

149.° Executați împărțirea:

1)  $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$ ;

3)  $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$ ;

5)  $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$ ;

7)  $24a^3 : \frac{12a^2}{b}$ ;

2)  $\frac{3b}{8} : b$ ;

4)  $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$ ;

6)  $a^2 : \frac{a}{b^2c}$ ;

8)  $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$ .

150.° Aflați câtul:

1)  $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$ ;

3)  $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$ ;

5)  $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$ ;

2)  $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$ ;

4)  $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$ ;

6)  $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$ .

151.° Simplificați expresia:

1)  $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$ ;

5)  $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$ ;

2)  $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$ ;

6)  $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$ ;

3)  $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$ ;

7)  $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$ ;

4)  $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$ ;

8)  $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$ .

152.° Executați împărțirea:

1)  $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$ ;

3)  $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$ ;

2)  $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$ ;

4)  $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$ ;

$$5) \frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64};$$

$$6) (x^2 - 49y^2) : \frac{x-7y}{x}.$$

153.° Efectuați ridicarea la putere:

$$1) \left(\frac{a}{b}\right)^9;$$

$$3) \left(\frac{c}{2d}\right)^5;$$

$$5) \left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3;$$

$$2) \left(\frac{m}{n^2}\right)^8;$$

$$4) \left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2;$$

$$6) \left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2.$$

154.° Reprezentați în formă de fracție expresia:

$$1) \left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10};$$

$$2) \left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2;$$

$$3) \left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3;$$

$$4) \left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6.$$

155.° Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) \frac{6a^4b^2}{35c^3} \cdot \frac{14b^2}{a^7c^5} \cdot \frac{5a^3c^8}{18b^4};$$

$$4) \left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8};$$

$$2) \frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} \cdot \frac{21m^6}{16n^2};$$

$$5) \left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3;$$

$$3) \frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y};$$

$$6) \left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3.$$

156.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3};$$

$$3) \left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}};$$

$$2) \frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}};$$

$$4) \left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3.$$

157.° Modificați variabila  $x$  în așa mod, ca să se obțină o identitate:

$$1) \left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2};$$

$$2) \left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}.$$

158.° Efectuați înmulțirea și împărțirea fracțiilor:

$$1) \frac{4-a}{8a^3} \cdot \frac{12a^5}{a^2-16};$$

$$6) \frac{x^2-9}{x+y} \cdot \frac{5x+5y}{x^2-3x};$$

$$2) \frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd};$$

$$7) \frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m};$$

$$3) \frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15};$$

$$8) \frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4};$$

$$4) \frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16};$$

$$9) \frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24};$$

$$5) \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2};$$

$$10) \frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}.$$

159.° Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) \frac{7a^2}{a^2-25} \cdot \frac{5-a}{a};$$

$$2) \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{b-a}{b+a};$$

- 3)  $\frac{a^4 - 1}{a^3 - a} \cdot \frac{a}{1 + a^2}$ ;      6)  $\frac{mn^2 - 36m}{m^3 - 8} : \frac{2n + 12}{6m - 12}$ ;
- 4)  $\frac{a^2 - 8ab}{12b} : \frac{8b^2 - ab}{24a}$ ;      7)  $\frac{a^4 - 1}{a^2 - a + 1} : \frac{a - 1}{a^3 + 1}$ ;
- 5)  $\frac{5m^2 - 5n^2}{m^2 + n^2} : \frac{15n - 15m}{4m^2 + 4n^2}$ ;      8)  $\frac{4x^2 - 100}{6x} : (2x^2 - 20x + 50)$ .

160.\* Simplificați expresia și aflați valoarea ei:

- 1)  $\frac{a^2 - 81}{a^2 - 8a} : \frac{a - 9}{a^2 - 64}$ , dacă  $a = -4$ ;
- 2)  $\frac{x}{4x^2 - 4y^2} : \frac{1}{6x + 6y}$ , dacă  $x = 4,2$ ,  $y = -2,8$ ;
- 3)  $(3a^2 - 18a + 27) : \frac{3a - 9}{4a}$ , dacă  $a = 0,5$ ;
- 4)  $\frac{a^6 + a^5}{(3a - 3)^2} : \frac{a^5 + a^4}{9a^2 - 9a}$ , dacă  $a = 0,8$ .

161.\* Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\frac{1}{a^2 - ab} : \frac{b}{b^2 - a^2}$ , dacă  $a = 2\frac{1}{3}$ ,  $b = -\frac{3}{7}$ .
- 2)  $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a^2 - 9b^2} : \frac{3a + 6b}{2a - 6b}$ , dacă  $a = 4$ ,  $b = -5$ .

162.\*\* Se știe că  $x - \frac{1}{x} = 9$ . Aflați valoarea expresiei  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

163.\*\* Se știe că  $3x + \frac{1}{x} = -4$ . Aflați valoarea expresiei  $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

164.\*\* Se dă:  $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$ . Aflați valoarea expresiei  $x + \frac{4}{x}$ .

165.\*\* Se dă:  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$ . Aflați valoarea expresiei  $x - \frac{1}{x}$ .

166.\*\* Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2}$ ;
- 2)  $\frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}$ .

167.\*\* Simplificați expresia:

- 1)  $\frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} : \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25}$ ;
- 2)  $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}$ .

168.\*\* Demonstrați identitatea  $\frac{8a^2}{a - 3b} : \frac{6a^3}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{3a}{4a + 12b} = 1$ .

169.\*\* Demonstrați identitatea  $\frac{a^2 + a}{2a - 12} \cdot \frac{6a + 6}{2a + 12} : \frac{9a^3 + 18a^2 + 9a}{a^2 - 36} = \frac{1}{6}$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

170. Rezolvați ecuația:

$$1) (2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10;$$

$$2) (x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12.$$

171. Demonstrați, că ecuația  $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$  nu are rădăcini.

172. Din punctul  $A$  spre punctul  $B$ , distanța dintre care este egală cu 192 km, cu viteza de 60 km/oră s-a pornit un motociclist. Peste 30 min a pornit din punctul  $B$  în întâmpinarea lui cu viteza de 75 km/oră al doilea motociclist. Cât timp a mers al doilea motociclist până la întâlnirea cu primul?

173. În două bidoane se conțin în total 80 l de lapte. Dacă din primul bidon vom turna 20 % lapte în al doilea bidon, atunci în ambele bidoane va fi aceeași cantitate de lapte. Câți litri de lapte au fost în fiecare bidon la început

174. (Din manualul „Aritmetica” a lui L. P. Magnițkiy<sup>1</sup>.) Douăsprezece persoane duc 12 pâini. Fiecare bărbat duce câte 2 pâini, femeia – câte jumătate de pâine, iar copilul – câte un sfert de pâine. Câți bărbați, femei și copii erau?

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

175. Vasile și Elena pe rând înlocuiesc în ecuația  $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$  un semn  $*$  cu un oarecare număr. Primul face schimbul Vasile. Elena vrea să obțină ecuație care are rădăcină. Oare poate Vasile s-o împe-dice?

## 6. Transformări identice ale expresiilor raționale

Regulile operațiilor cu fracțiile raționale permit transformarea oricărei expresii raționale în fracție rațională.

Să examinăm exemplele.

<sup>1</sup> Magnițkiy Leontii Pilipovici (1669–1739) – remarcabil matematician-pedagog rus, autorul renumitului manual „Aritmetica” (1703), după care au învățat multe generații.

**EXEMPLU 1** Aduceți la forma cea mai simplă expresia  $\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4}\right) \cdot \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}$ .

*Rezolvare.* Expresia dată poate fi adusă la o formă mai simplă tot așa, cum noi făceam aceasta, când aflăm valoarea expresiei numerice, care conține câteva operații aritmetice. Facem operațiile conform ordinii efectuării operațiilor aritmetice: mai întâi – scăderea expresiilor, care sunt în paranteze, apoi – împărțirea și la urmă – scăderea:

$$1) \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} = \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2) \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} = \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3) \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

Răspuns:  $a$ . ▲

Transformarea expresiei raționale se poate efectua nu cu operații aparate, ci “în lăntșor”. Să ilustrăm acest procedeu pe un exemplu.

**EXEMPLU 2** Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei valoarea expresiei  $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$  nu depinde de valoarea lui  $a$ .

*Rezolvare.* Simplificăm expresia dată:

$$\begin{aligned} \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} &= \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \\ &= \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3. \end{aligned}$$

Așadar, pentru toate valorile admisibile ale lui  $a$  valoarea expresiei date este egală cu 3. ▲

**EXEMPLU 3** Demonstrați identitatea  $\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$ .

*Rezolvare.* Să transformăm partea stângă a egalității care se demonstrează. Aici este rațional de omis parantezele, aplicând proprietatea distributivă a înmulțirii:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} &= \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \\ &= \frac{a+1}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}. \end{aligned}$$

Identitatea este demonstrată. ▲

**EXEMPLU 4** Simplificați expresia  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$ .

*Rezolvare.* Scriind expresia dată în formă de câtul împărțirii a numărătorului la numitor, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \\ &= \frac{bc + ac + ab}{abc} : \frac{c + a + b}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c + a + b} = \frac{bc + ac + ab}{c + a + b}. \end{aligned}$$

Expresia dată poate fi adusă la o formă mai simplă cu ajutorul altui procedeu, aplicând proprietatea fundamentală a fracției, și anume: de înmulțit numărătorul și numitorul ei cu monomul  $abc$ :

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)abc} = \frac{\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc}{\frac{1}{ab} \cdot abc + \frac{1}{bc} \cdot abc + \frac{1}{ac} \cdot abc} = \frac{bc + ac + ab}{c + a + b}.$$

Răspuns:  $\frac{bc + ac + ab}{c + a + b}$ . ▲

## EXERCIȚII

176.° Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

- 1)  $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right) \cdot \frac{6}{a^2}$ ;
- 2)  $\frac{a^2b}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$ ;
- 3)  $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ ;
- 4)  $\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{a-b}$ ;
- 5)  $\frac{a^2 - ab}{b^2 - 1} \cdot \frac{b+1}{a} - \frac{a}{b-1}$ ;
- 6)  $\left(\frac{5}{m-n} - \frac{4}{m+n}\right) : \frac{m+9n}{m+n}$ ;
- 7)  $\frac{x-2}{x+2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{x-2}\right)$ ;
- 8)  $\frac{x^2+x}{4} : \frac{x^2+x-1}{4}$ ;
- 9)  $\frac{6c^2}{c^2-1} : \left(\frac{1}{c-1} + 1\right)$ ;
- 10)  $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ .

177.° Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- 1)  $\left(x + \frac{x}{y}\right) : \left(x - \frac{x}{y}\right)$ ;
- 2)  $\left(\frac{a}{b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \frac{ab^2}{a^2+b^2}$ ;
- 3)  $\left(\frac{m}{m-1} - 1\right) : \frac{m}{mn-n}$ ;
- 4)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{4ab}{a-b}$ ;
- 5)  $\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}$ ;
- 6)  $\frac{7x}{x+2} - \frac{x-8}{3x+6} \cdot \frac{84}{x^2-8x}$ ;
- 7)  $\left(a - \frac{9a-9}{a+3}\right) : \frac{a^2-3a}{a+3}$ ;
- 8)  $\left(\frac{a}{a+2} - \frac{8}{a+8}\right) \cdot \frac{a^2+8a}{a-4}$ .

178.\* Ефектувати операції:

- 1)  $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} \cdot \frac{3}{a-2}$ ;
- 2)  $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left( \frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3} \right)$ ;
- 3)  $\left( \frac{3c+1}{3c-1} - \frac{3c-1}{3c+1} \right) : \frac{2c}{6c+2}$ ;
- 4)  $\left( \frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2} \right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$ ;
- 5)  $\left( \frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25} \right) : \frac{a-20}{(a-5)^2}$ ;
- 6)  $\left( \frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x} \right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}$ .

179.\* Ефектувати операції:

- 1)  $\frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4}$ ;
- 2)  $\left( \frac{m-1}{m+1} - \frac{m+1}{m-1} \right) : \frac{4m}{m^2-1}$ ;
- 3)  $\frac{2x}{x^2-y^2} : \left( \frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2} \right)$ ;
- 4)  $\left( \frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a} \right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}$ .

180.\* Адуцети вираз у форму найпростішу:

- 1)  $\left( \frac{15}{x-7} - x-7 \right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64}$ ;
- 2)  $\left( a - \frac{5a-16}{a-3} \right) : \left( 2a - \frac{2a}{a-3} \right)$ ;
- 3)  $\left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2} \right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a}$ ;
- 4)  $\left( \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2}$ ;
- 5)  $\left( \frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2} \right) : \frac{4y}{x+2y}$ ;
- 6)  $\left( \frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right) \cdot \frac{a^2-4}{4}$ .

181.\* Спростіть вираз:

- 1)  $\frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left( \frac{13}{x+6} - x+6 \right)$ ;
- 2)  $\left( c - \frac{2c-9}{c+8} \right) : \frac{c^2+3c+24}{c^2-64} + \frac{24}{c}$ ;
- 3)  $\left( \frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x} \right) : \frac{6}{3-x}$ ;
- 4)  $\left( \frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2} \right) \cdot \frac{y^2-4}{18}$ .

182.\* Демонструйте ідентичність:

- 1)  $\left( \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a} \right) : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{4}$ ;
- 2)  $\left( \frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2} \right) : \frac{a+2}{a} + \frac{2}{a-2} = -1$ ;

$$3) \left( \frac{3}{36-c^2} + \frac{1}{c^2-12c+36} \right) \cdot \frac{(c-6)^2}{2} + \frac{3c}{c+6} = 2.$$

**183.:** Demonstrați identitatea:

$$1) \left( \frac{b}{a^2-ab} - \frac{2}{a-b} - \frac{a}{b^2-ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{4}{a+b};$$

$$2) \frac{(a-b)^2}{a} \cdot \left( \frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2-a^2} \right) + \frac{3a+b}{a+b} = 3.$$

**184.:** Oare depinde valoarea expresiei de valoarea variabilei, care îi aparține:

$$1) \left( \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a} \right) : \frac{3a+3}{a^2-a};$$

$$2) \left( \frac{a}{a^2-49} - \frac{1}{a+7} \right) : \frac{7a}{a^2+14a+49} - \frac{2}{a-7}?$$

**185.:** Demonstrați că valoarea expresiei nu depinde de valoarea variabilei, care se conține în ea:

$$1) \frac{3x^2-27}{4x^2+2} \cdot \left( \frac{6x+1}{x-3} + \frac{6x-1}{x+3} \right);$$

$$2) \frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left( \frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9} \right).$$

**186.:** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

$$1) \frac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}}; \quad 2) \frac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}}; \quad 3) \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}; \quad 4) \frac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1} + \frac{3-\frac{b}{a}}{\frac{3a}{b}-1}.$$

**187.:** Simplificați expresia:

$$1) \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}; \quad 2) \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a+1}}}.$$

**188.\*\*** Simplificați expresia:

$$1) \left( \frac{a^2}{b^3-ab^2} + \frac{a-b}{b^2} - \frac{1}{b} \right) : \left( \frac{a+b}{b-a} - \frac{b-a}{a+b} + \frac{6a^2}{a^2-b^2} \right);$$

$$2) \left( \frac{a+2}{4a^3-4a^2+a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a} \right) : \left( \frac{1}{1-2a} \right)^2 - \frac{8a-1}{2a^2+a}.$$

**189.\*\*** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\left( \frac{18y^2+3y}{27y^3-1} - \frac{3y+1}{9y^2+3y+1} \right) : \left( 1 - \frac{3y-1}{y} - \frac{5-6y}{3y-1} \right).$$

**190.\*\*** Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{16}{(a-2)^4} : \left( \frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) - \frac{8a}{(a-2)^2} = 1;$$

$$2) \frac{a+11}{a+9} - \left( \frac{a+5}{a^2-81} + \frac{a+7}{a^2-18a+81} \right) : \left( \frac{a+3}{a-9} \right)^2 = 1.$$

191.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei expresia

$$\frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left( \frac{b+3}{b-3} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b} \right)$$
 primește valori pozitive.

192.\* Înlocuiți  $x$  cu expresia dată și simplificați expresia obținută:

$$1) \frac{x-a}{x-b}, \text{ dacă } x = \frac{ab}{a+b}; \quad 2) \frac{a-bx}{b+ax}, \text{ dacă } x = \frac{a-b}{a+b}.$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

193. Rezolvați ecuația:

$$1) (3x-1)(4x+5) - (2x+3)(6x+1) = 4;$$

$$2) 8x(2x+7) - (4x+3)^2 = 15.$$

194. Demonstrați că valoarea expresiei  $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$  se împarte fără rest la 11.

195. Demonstrați că pentru orice  $n$  natural valoarea expresiei  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  se împarte fără rest la 10.

196. În primul depozit erau de 3 ori mai mulți cartofi, decât în al doilea. După ce din primul depozit s-au luat 400 kg de cartofi, atunci în el au rămas de 2 ori mai puțini cartofi decât erau în al doilea. Câți cartofi erau în primul depozit la început?

197. Scurta costa cu 200 grn mai puțin decât costumul. În timpul vânzării sezoniere scurta s-a ieftinit cu 10%, iar costumul – cu 20%, după aceasta scurta și costumul puteau fi achiziționate cu 1010 grn. Care era costul inițial al scurtei și care – costul costumului?

198. Din punctul  $A$  în punctul  $B$  automobilul se mișcă cu viteza de 60 km/oră, dar s-a înapoiat din punctul  $B$  în punctul  $A$  cu viteza de 70 km/oră pe alt drum, care este cu 15 km mai scurt decât primul. Pentru drumul de întoarcere automobilul a cheltuit cu 30 min mai puțin, decât pentru drumul din punctul  $A$  în punctul  $B$ . În cât timp el a ajuns din punctul  $A$  în punctul  $B$ ?

199. Un muncitor trebuie să confecționeze zilnic 10 piese. Însă el confecționa zilnic 12 piese, și deja cu 2 zile până la terminarea termenului de îndeplinire a lucrului lui i-au rămas de confecționat 6 piese. Câte piese avea să confecționeze muncitorul?

200.\* (Din folclorul ucrainean). Cu 30 de monede au cumpărat 30 de păsări. Câte păsări de fiecare fel au cumpărat, dacă pentru trei vrăbii au plătit o monedă, pentru doi hulubi – tot o monedă, iar pentru o turturică – două monede, totodată au cumpărat măcar o pasăre de fiecare fel?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

201. Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{2x+7}{4} = \frac{x+5}{3};$$

$$4) x^2 - 16 = 0;$$

$$2) x^2 + 6x = 0;$$

$$5) 25x^2 - 36 = 0;$$

$$3) 0,21x - 0,7x = 0;$$

$$6) x^2 + 4 = 0.$$

202. Pentru care valoare a variabilei nu are sens expresia:

$$1) \frac{6}{3x-9};$$

$$4) \frac{8}{x+7} + \frac{4}{x-2};$$

$$2) \frac{x^2+1}{x^2-1};$$

$$5) \frac{x}{x^2-10x+25};$$

$$3) \frac{x+4}{3x^2+12x};$$

$$6) \frac{x+2}{(x+10)(x-12)}?$$

203. Pentru care valoare a variabilei valoarea fracției este egală cu zero:

$$1) \frac{x-8}{9};$$

$$2) \frac{x-2}{x+2};$$

$$3) \frac{4}{x-5}?$$

Împrospătați-vă memoria cu conținutul pp. 14, 15 de la pag. 221.

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

204. Pe tablă sunt scrise polinoamele  $x + 2$  și  $2x + 1$ . Se permite de scris suma, diferența sau produsul a oricăror două polinoame, din cele deja scrise. Oare poate să apară pe tablă polinomul  $2x^3 + x + 5$ ?

### ÎNSĂRCINAREA NR. 2 "VERIFICAȚI-VĂ" ÎN FORMĂ DE TEST

1. Reprezentați în formă de fracție expresia  $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$ .

$$A) \frac{1}{3m^2n^2};$$

$$B) \frac{1}{3m^4n^5};$$

$$C) \frac{3}{m^2n^2};$$

$$D) \frac{3}{m^4n^5}.$$

2. Efectuați înmulțirea:  $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$ .

$$A) 8(a-5b);$$

$$B) 8(a+5b);$$

$$C) \frac{8}{a+5b};$$

$$D) \frac{8}{a-5b}.$$

3. Aduceți expresia la forma cea mai simplă  $\frac{b^2-6b+9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$ .

$$A) b+3;$$

$$B) b-3;$$

$$C) \frac{1}{b-3};$$

$$D) \frac{1}{b+3};$$

4. Faceți împărțirea:  $\frac{5a^6}{b^8} : (10a^3b^2)$ .
- A)  $\frac{2a^9}{b^6}$ ;      B)  $\frac{b^6}{2a^9}$ ;      C)  $\frac{2b^{10}}{a^3}$ ;      D)  $\frac{a^3}{2b^{10}}$ .
5. Simplificați expresia  $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$ .
- A)  $\frac{12}{x}$ ;      B)  $\frac{x}{12}$ ;      C) 12;      D) x.
6. Reprezentați în formă de fracție expresia  $\frac{n^2-3n}{64n^2-1} : \frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$ .
- A)  $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$ ;      C)  $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$ ;  
 B)  $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$ ;      D)  $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$ .
7. Efectuați ridicarea la putere:  $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$ .
- A)  $\frac{8a^8}{b^{12}}$ ;      B)  $-\frac{8a^8}{b^{12}}$ ;      C)  $\frac{16a^8}{b^{12}}$ ;      D)  $-\frac{16a^8}{b^{12}}$ .
8. Simplificați expresia  $\left(\frac{1}{a-6} - \frac{1}{a+6}\right) : \frac{2}{a+6}$ .
- A)  $\frac{6}{a+6}$ ;      B)  $\frac{6}{a-6}$ ;      C)  $6(a-6)$ ;      D)  $6(a+6)$ .
9. Care este valoarea expresiei  $\left(\frac{30a}{9a^2-25} + \frac{5}{5-3a}\right) : \left(\frac{3a-5}{3a+5} - 1\right)$ ? pentru toate valorile admisibile ale lui  $a$ ?
- A)  $\frac{1}{2}$ ;      B) 2;      C)  $-\frac{1}{2}$ ;      D) -2.
10. Cu ce este egală valoarea expresiei  $\frac{a^2-4ab}{b^2}$ , dacă  $3a - 5b = 0,2(2a + b)$ ?
- A) 4;      B) -4;      C) 3;      D) -3.
11. Se știe că  $x + \frac{1}{x} = 6$ . Aflați valoarea expresiei  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .
- A) 36;      B) 38;      C) 34;      D) 35.
12. Aduceți expresia la forma cea mai simplă  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}}$ .
- A)  $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ;      B)  $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ;      C)  $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$ ;      D)  $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ .



## 7. Ecuații echivalente. Ecuații raționale

Să examinăm două ecuații:  $x^2 = 4$  și  $|x| = 2$ .

Evident, că fiecare din ele are aceleași rădăcini:  $-2$  și  $2$ .

Se spune că ecuațiile  $x^2 = 4$  și  $|x| = 2$  sunt **echivalente**.

Aducem încă exemple de perechi de ecuații echivalente:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ și } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ și } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ și } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Să cercetăm ecuațiile  $x^2 = -5$  și  $|x| = -3$ . Fiecare din aceste ecuații nu are rădăcini. Așa ecuații de asemenea este primit de le considerat echivalente.

**Definiție.** Două ecuații se numesc **echivalente**, dacă ele au aceleași rădăcini sau fiecare din ele nu are rădăcini.

Numărul  $2$  este rădăcina fiecăreia din ecuațiile  $(x - 2)(x + 1) = 0$  și  $x - 2 = 0$ . Dar aceste ecuații nu sunt echivalente, deoarece prima ecuație mai are încă o rădăcină, egală cu  $-1$ , care nu este rădăcina celei de-a doua ecuație.

În clasa a 7-a voi ați învățat proprietățile ecuațiilor cu o singură variabilă. Acuma, folosind noțiunea de “ecuații echivalente”, aceste proprietăți pot fi formulate astfel.

- **Dacă la ambele părți ale ecuației date adunăm (sau din ambele părți scădem) unul și același număr, atunci obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.**
- **Dacă un termen oarecare de-l trecut dintr-o parte a ecuației în alta, schimbându-i în același timp semnul în opus, atunci obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.**
- **Dacă ambele părți ale ecuației de le înmulțit (împărțit) la unul și același număr diferit de zero, atunci obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.**

Să considerăm următoarea problemă. Un automobil, parcurgând  $180$  km de drum, și-a mărit viteza cu  $10$  km/oră și restul  $210$  km le-a parcurs în același timp ca și prima parte a drumului. De aflat viteza inițială a automobilului.

Fie că  $x$  km/oră – viteza căutată. Atunci viteza automobilului pe a doua parte a drumului este egală cu  $(x + 10)$  km/oră. Automobilul a parcurs prima parte a drumului în  $\frac{180}{x}$  ore, iar a doua – în  $\frac{210}{x + 10}$  ore.

Ecuatia  $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$  este modelul matematic al situației reale examinate. Ambele părți ale ecuației obținute sunt expresii raționale.

**Definiție.** Ecuatia, la care părțile stângă și dreaptă sunt expresii raționale, se numește rațională.

Din definiție rezultă că, rezolvând problema, noi am obținut o ecuație rațională.

Menționăm că ecuația liniară cu o singură variabilă, adică ecuația de tipul  $ax = b$ , este rațională.

Să analizăm ecuația rațională de tipul  $\frac{A}{B} = 0$ , unde  $A$  și  $B$  – sunt polinoame.

Voi știți că *fracția este egală cu zero atunci și numai atunci, când numărătorul ei este egal cu zero, iar numitorul este diferit de zero*. De aceea pentru a rezolva ecuația de tipul  $\frac{A}{B} = 0$ , trebuie de cerut îndeplinirea în același timp a două condiții:  $A = 0$  și  $B \neq 0$ . Aceasta înseamnă că în procesul rezolvării a ecuațiilor de acest tip, trebuie de ținut cont de următorul algoritm:

- de rezolvat ecuația  $A = 0$ ;
- de verificat care din rădăcinile găsite satisfac condiția  $B \neq 0$ ;
- rădăcinile, care satisfac condiția  $B \neq 0$ , de le inclus în răspuns.

**EXEMPLU 1** Rezolvați ecuația  $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$ .

*Rezolvare.* Egalăm cu zero numărătorul fracției, care se află în partea stângă a ecuației. Avem:  $(x-1)(x+1) = 0$ . Rădăcinile acestei ecuații sunt numerele  $-1$  și  $1$ .

Verificăm dacă satisfac aceste rădăcini condiția  $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ .

Pentru  $x = -1$  obținem, că  $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$ .

Pentru  $x = 1$  obținem, că  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

Așadar, numărul  $-1$  este rădăcina ecuației date, iar numărul  $1$  – nu.

*Răspuns:*  $-1$ . ▲

După cum am menționat mai sus, rezolvarea ecuației de tipul  $\frac{A}{B} = 0$  se reduce la rezolvarea ecuației  $A = 0$  și la verificarea condiției  $B \neq 0$ . Se spune că ecuația  $\frac{A}{B} = 0$  este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

De exemplu, ecuația  $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$  este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

După cum noi am clarificat soluție a acestui sistem este numărul  $-1$ . Să terminăm rezolvarea problemei despre automobil. Avem:

$$\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}.$$

Trecem la ecuația echivalentă  $\frac{180}{x} - \frac{210}{x+10} = 0$ .

De aici

$$\frac{180(x+10) - 210x}{x(x+10)} = 0;$$

$$\frac{1800 - 30x}{x(x+10)} = 0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 1800 - 30x = 0, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

Rădăcina ecuației, care este în componența sistemului este numărul  $60$ ; evident, că ea satisface condiția  $x(x+10) \neq 0$ .

*Răspuns:* 60 km/oră.

Se știe că orice expresie rațională poate fi prezentată în formă de fracție.

De aceea orice ecuație rațională poate fi redusă la o ecuație de forma  $\frac{A}{B} = 0$ .

Anume așa noi am făcut, rezolvând ecuația  $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ .

**EXEMPLU 2** Rezolvați ecuația  $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$ .

*Rezolvare.* Avem:  $\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0$ . Reprezentând partea stângă a acestei ecuații în formă de fracție rațională, obținem:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Ecuația obținută este echivalentă cu sistemul  $\begin{cases} 4x-2=0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$

Să scriem acest sistem astfel:  $\begin{cases} 4x-2=0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

$$\text{De aici } \begin{cases} x = 0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Deci, ecuația dată nu are rădăcini.

*Răspuns:* Nu sunt rădăcini. ▲

**EXEMPLU 3** Rezolvați ecuația  $\frac{2x^2 - 4x - 16}{x - 4} - x = 0$ .

*Rezolvare.* Reprezentăm partea stângă a fracției în formă de fracție:

$$\frac{2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 4x}{x - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0.$$

Ecuția obținută este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

de aici obținem:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ sau } x = -4, \\ x \neq 4; \\ x = -4. \end{cases}$$

*Răspuns:*  $-4$ . ▲

Să cercetăm problema în care ecuația rațională este modelul matematic al situației reale.

**EXEMPLU 4** Un turist a navigat pe o luntre 3 km după curentul râului și 2 km împotriva curentului în decurs de 30 min. Aflați viteza luntrei în apă stătătoare, dacă viteza curentului de apă este egală cu 2 km/oră.

*Rezolvare.* Presupunem că viteza luntrei în apă stătătoare este de  $x$  km/oră. atunci viteza luntrei după curentul de apă constituie  $(x + 2)$  km/oră, iar împotriva curentului  $-(x - 2)$  km/oră. Turistul a navigat 3 km după curent în  $\frac{3}{x+2}$  ore, iar 2 km împotriva curentului  $-\text{în } \frac{2}{x-2}$  ore. Deoarece tot drumul a fost parcurs în 30 min =  $\frac{1}{2}$  ore avem că  $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$ .

Să rezolvăm ecuația obținută:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{3x-6+2x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2} &= 0; \\ \frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)} &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \\ x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ sau } x = 10.$$

Rădăcina  $x = 0$  nu satisface condiția problemei. Deci, viteza luntrei în apă stătătoare este egală cu 10 km/oră.

Răspuns: 10 km/oră. ▲



1. Care două ecuații se numesc echivalente?
2. Cu ajutorul căror transformări ale ecuației date se poate obține ecuația echivalentă celei date?
3. Care ecuație se numește rațională?
4. Formulați condiția conform căreia fracția este egală cu zero.
5. Descrieți algoritmul rezolvării a ecuației de formă  $\frac{A}{B} = 0$ , unde A și B - polinoame.

## EXERCIȚII

205.° Oare sunt echivalente ecuațiile:

1)  $x + 2 = 10$  și  $3x = 24$ ;

2)  $-2x = -6$  și  $\frac{1}{3}x = 1$ ;

3)  $x - 5 = 0$  și  $x(x - 5) = 0$ ;

4)  $(3x - 12)(x + 2) = 0$  și  $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$ ;

5)  $\frac{6}{x} = 0$  și  $x^2 = -4$ ;

6)  $x + 1 = 1 + x$  și  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$ ?

206.° Alcătuiți ecuația, echivalentă celei date:

1)  $2x - 3 = 4$ ;

2)  $|x| = 1$ ;

3)  $x + 6 = x - 2$ .

207.° Rezolvați ecuația:

1)  $\frac{x-6}{x-4} = 0$ ;

3)  $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$ ;

2)  $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$ ;

4)  $\frac{x-2}{x-2} = 1$ ;

5)  $\frac{2x^2+18}{x^2+9} = 2;$

6)  $\frac{x}{x-5} + \frac{2x-9}{x-5} = 0;$

7)  $\frac{5x-7}{x+1} - \frac{x-5}{x+1} = 0;$

8)  $\frac{2x+16}{x+3} - \frac{1-3x}{x+3} = 0;$

9)  $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0;$

10)  $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+3};$

11)  $\frac{x}{x-6} = 2;$

12)  $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+1}{2x-1};$

13)  $\frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0;$

14)  $\frac{2x}{x-5} - \frac{x^2+15x}{x^2-25} = 0;$

15)  $3 - \frac{2x^2-5x}{x^2-3x} = 0.$

**208.°** Розв'яжіть екватію:

1)  $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 0;$

2)  $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0;$

3)  $\frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0;$

4)  $\frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0;$

5)  $\frac{x-6}{x-2} - \frac{x-8}{x} = 0;$

6)  $\frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0;$

7)  $\frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2+6x} = 0;$

8)  $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1} - x = 1;$

9)  $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1.$

**209.°** Яке число треба відняти від чисельника і знаменника дробу  $\frac{15}{19}$ , щоб отримати дроб, рівний до  $\frac{2}{3}$ ?**210.°** Яке число треба додати до чисельника і знаменника дробу  $\frac{25}{32}$ , щоб отримати дроб, рівний до  $\frac{5}{6}$ ?**211.\*** Складіть пару екватій еквівалентних, для кожної з них:

1) щоб мати один корінь;

2) щоб мати два корені;

3) щоб мати нескінченно багато коренів;

4) щоб не мати коренів.

**212.\*** Розв'яжіть екватію:

1)  $\frac{5}{x^2-4} + \frac{2x}{x+2} = 2;$

2)  $\frac{2}{6x+1} + \frac{3}{6x-1} = \frac{30x+9}{36x^2-1};$

3)  $\frac{6x+14}{x^2-9} + \frac{7}{x^2+3x} = \frac{6}{x-3};$

4)  $\frac{2y^2+5}{1-y^2} + \frac{y+1}{y-1} = \frac{4}{y+1};$

5)  $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2};$

6)  $\frac{7}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2};$

7)  $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} = \frac{6x+64}{x^2-16} + 4;$

8)  $\frac{2x-6}{x^2-36} - \frac{x-3}{x^2-6x} - \frac{x-1}{x^2+6x} = 0.$

**213.\*** Розв'яжіть екватію:

1)  $\frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{x^2+27}{x^2-1};$

2)  $\frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{6}{1-9x^2};$

3)  $\frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{5}{x-2}$ ;

5)  $\frac{7}{x^2+2x} + \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{x+4}{x^2-4}$ ;

4)  $\frac{2x^2-2x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = \frac{x+2}{x-2}$ ;

6)  $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x} = \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-5}{x}$ .

214.\* O barcă cu motor a străbătut 8 km după curentul de apă al râului și s-a înapoiat de unde a pornit, consumând pentru tot drumul 54 min. Aflați viteza curentului râului, dacă viteza proprie a bărcii constituie 18 km/oră.

215.\* Motonava a parcurs 28 km împotriva curentului de apă și s-a înapoiat la locul de pornire, cheltuind pe drumul de întoarcere cu 4 min mai puțin. Aflați viteza proprie a motonavei, dacă viteza curentului de apă este egală cu 1 km/oră.

216.\* O barcă a navigat 6 km împotriva curentului de apă a râului și 12 km după curentul de apă, cheltuind pentru tot drumul 2 ore. Aflați viteza proprie a bărcii, dacă viteza curentului de apă a râului constituie 3 km/oră.

217.\*\* Rezolvați ecuația:

1)  $\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50}$ ;

3)  $\frac{9x+12}{x^3-64} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x^2+4x+16}$ .

2)  $\frac{2}{x^2-9} - \frac{1}{2x^2-12x+18} = \frac{3}{2x^2+6x}$ ;

218.\*\* Rezolvați ecuația:

1)  $\frac{4y+24}{5y^2-45} + \frac{y+3}{5y^2-15y} = \frac{y-3}{y^2+3y}$ ;

2)  $\frac{y+2}{8y^3+1} - \frac{1}{4y+2} = \frac{y+3}{8y^2-4y+2}$ .

219.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

1)  $\frac{x-1}{x-a} = 0$ ;

3)  $\frac{a(x-a)}{x-3} = 0$ ;

5)  $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a} = 0$ ;

2)  $\frac{x-a}{x+5} = 0$ ;

4)  $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7} = 0$ ;

6)  $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)} = 0$ .

220.\* Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $\frac{x+a}{x^2-4} = 0$  nu are rădăcini?

221.\* Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$  are o singură rădăcină?

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

222. La finele anului populația orașului constituia 72100 locuitori. Determinați numărul de locuitori ai acestui oraș la începutul anului, dacă creșterea populației în acest interval de timp a constituit 3 %.

223. Distanța dintre două gări un tren electric o parcurge în 45 min. Dacă am mări viteza lui cu 10 km/oră, atunci el va parcurge această distanță în 40 min. Care este distanța dintre gări?

224. Demonstrați că pentru orice valori ale variabilelor expresia dată primește valori nenegative:

1)  $(a - 5)^2 - 2(a - 5) + 1$ ;                      2)  $(a - b)(a - b - 8) + 16$ .

225. Aflați valorile funcției  $f(x) = 3x - 7$  pentru: 1)  $x = -3$ ;

2)  $x = 2\frac{1}{3}$ . Pentru care valoare a argumentului valoarea funcției este egală cu 0,2?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

226. Aflați valoarea expresiei:

1)  $4^3 + 3^4$ ;    3)  $9 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^2$ ;  
 2)  $(-8)^2 - (-1)^{12}$ ;                                4)  $(2,8 - 3,1)^3 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^2$ .

227. Fără a efectua calcule, comparați valorile expresiilor:

1)  $(-5,7)^2$  și 0;    2) 0 și  $(-6,9)^3$ ;    3)  $(-23)^5$  și  $(-2)^4$ ;    4)  $-8^8$  și  $(-8)^8$ .

228. Reprezentați în formă de putere:

1) cu baza 2 numerele 4; 8; 16; 32; 64;  
 2) cu baza 10 numerele 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

229. Aflați valoarea expresiei:

1)  $18a^2$ , dacă  $a = -\frac{1}{6}$ ;                      3)  $16 + b^4$ , dacă  $b = -2$ ;  
 2)  $(18a)^2$ , dacă  $a = -\frac{1}{6}$ ;                    4)  $(16 + b)^4$ , dacă  $b = -2$ .

**Împrospătați-vă memoria cu conținutul p. 3 de la pag. 217.**

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

230. Oare există un număr natural, care fiind înmulțit cu 2, dă în rezultat pătratul unui număr natural, iar fiind înmulțit cu 3 – cubul unui număr natural?

## 8. Puterea cu exponent întreg negativ

Frecvent pentru scrierea numerelor mari în formă compactă se utilizează puterea cu exponent natural. De exemplu,

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$

$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$





Expresia  $0^n$  pentru  $n$  întregi, care sunt mai mici decât zero sau sunt egali cu zero, nu are sens.

Din definițiile aduse reiese că pentru orice  $a \neq 0$  și  $n$  întreg numerele  $a^n$  și  $a^{-n}$  sunt reciproc inverse. De aceea egalitatea

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

se îndeplinește pentru  $n$  întreg arbitrar  $n$ .

De exemplu, pentru  $n = -2$  avem:  $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$ .

În literatura din îndreptare voi puteți găsi așa o informație: „Masa lui Venus este egală cu  $4,9 \cdot 10^{24}$  kg. Masa lui Marte este egală cu  $6,423 \cdot 10^{23}$  kg. Aria suprafeței Lunii constituie  $3,8 \cdot 10^7$  km<sup>2</sup>”. Numerele, care exprimă aceste mărimi, sunt scrise în așa numită **formă standard**.

**Definiție. Formă standard a numărului se numește scrierea lui în formă de produsul  $a \cdot 10^n$ , unde  $1 \leq a < 10$  și  $n$  – număr întreg.**

Numărul  $n$  se numește **ordinul** numărului, scris în formă standard. De exemplu, ordinul numărului, care exprimă masa Soarelui în kilograme, este egal cu 30, iar ordinul numărului, care exprimă masa atomului de Hidrogen în kilograme, este egal cu  $-27$ .

În formă standard poate fi scris orice număr pozitiv. De exemplu,  $171,25 = 1,7125 \cdot 10^2$ ;  $0,00958 = 9,58 \cdot 10^{-3}$ . Dar în practică forma standard a numărului de regulă se folosește pentru scrierea valorilor mari și mici ale mărimilor. În același timp ordinul numărului dă închipuire despre mărime. De exemplu, dacă ordinul numărului  $m$  este egal cu 3, adică  $m = a \cdot 10^3$ , atunci ținând cont de aceea că  $1 \leq a < 10$ , obținem:  $10^3 \leq m < 10^4$ .

**EXEMPLU 1** Aflați valoarea expresiei: 1)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$ ; 2)  $1,2^{-2}$ ; 3)  $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0$ .

$$\text{Rezolvare. 1) } \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}.$$

Și în general, dacă  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ , atunci  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ .

$$2) 1,2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

$$3) 3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \\ = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Exprimați expresia  $(a - b)^{-2} (a^2 - b^2)$  în formă de fracție rațională.

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } (a - b)^{-2} (a^2 - b^2) &= \frac{1}{(a - b)^2} \cdot \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \\ &= \frac{1}{(a - b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{(b - a)^2} \cdot \frac{(b - a)(b + a)}{a^2 b^2} = \frac{b + a}{a^2 b^2 (b - a)} = \frac{b + a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**EXEMPLU 3** Scrieți în formă standard numărul:

1) 564 000 000; 2) 0,0036.

*Rezolvare.* 1)  $564\,000\,000 = 5,64 \cdot 100\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8$ .

2)  $0,0036 = 3,6 \cdot 0,001 = 3,6 \cdot \frac{1}{1000} = 3,6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3,6 \cdot 10^{-3}$ .  $\blacktriangle$



1. Cu ce este egal  $a^{-n}$  pentru  $a$  arbitrar, diferit de zero, și numărul  $n$  natural?
2. Cu ce este egală puterea nulă a oricărui număr diferit de zero?
3. Ce se numește formă standard a numărului?
4. Cum în scrierea numărului în formă standard  $a \cdot 10^n$  se numește numărul  $n$ ?

## EXERCIȚII

**231.**° Cu care expresie este egală expresia  $a^{-6}$ :

1)  $-a^6$ ;      2)  $\frac{1}{a^{-6}}$ ;      3)  $\frac{1}{a^6}$ ;      4)  $-\frac{1}{a^6}$ ?

**232.**° Reprezentați puterea în formă de fracție:

1)  $3^{-8}$ ;      3)  $a^{-9}$ ;      5)  $12^{-1}$ ;      7)  $(a - b)^{-2}$ ;  
2)  $5^{-6}$ ;      4)  $d^{-3}$ ;      6)  $m^{-1}$ ;      8)  $(2x - 3y)^{-4}$ .

**233.**° Schimbați puterea cu o fracție:

1)  $14^{-4}$ ;      2)  $p^{-20}$ ;      3)  $(m + n)^{-1}$ ;      4)  $(4c - 5d)^{-10}$ .

**234.**° Reprezentați fracția în formă de putere cu exponent întreg negativ sau în formă de produsul puterilor:

1)  $\frac{1}{7^2}$ ;      3)  $\frac{1}{c}$ ;      5)  $\frac{a}{b}$ ;      7)  $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$ ;  
2)  $\frac{1}{x^5}$ ;      4)  $\frac{m}{n^3}$ ;      6)  $\frac{x^6}{y^7}$ ;      8)  $\frac{(x-y)^2}{x+y}$ .

**235.**° Înlocuiți fracția cu o putere cu exponent întreg negativ sau cu produsul puterilor:

1)  $\frac{1}{11^{11}}$ ;      2)  $\frac{1}{k^4}$ ;      3)  $\frac{x^2}{y}$ ;      4)  $\frac{m^6}{n^6}$ ;      5)  $\frac{(2x - y)^3}{(x - 2y)^9}$ .

**236.°** Reprezentați numerele 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$  în formă de putere cu baza: 1) 2; 2)  $\frac{1}{2}$ .

**237.°** Reprezentați în formă de puterea unui număr natural de o cifră fracția:

1)  $\frac{1}{49}$ ;                      2)  $\frac{1}{216}$ ;                      3)  $\frac{1}{625}$ ;                      4)  $\frac{1}{128}$ .

**238.°** Exprimați numărul în formă de putere cu baza 10:

1) 0,1;                      2) 0,01;                      3) 0,0001;                      4) 0,000001.

**239.°** Exprimați numerele 1, 3, 9, 27, 81,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{81}$  în formă de putere cu baza: 1) 3; 2)  $\frac{1}{3}$ .

**240.°** Calculați:

1)  $5^{-2}$ ;                      3)  $(-9)^{-2}$ ;                      5)  $1^{-24}$ ;                      7)  $(-1)^{-17}$ ;                      9)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;  
2)  $2^{-4}$ ;                      4)  $0,2^{-3}$ ;                      6)  $(-1)^{-16}$ ;                      8)  $\left(\frac{7}{8}\right)^0$ ;                      10)  $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$ ;

**241.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $20^{-2}$ ;                      3)  $(-6)^{-3}$ ;                      5)  $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$ ;  
2)  $0,3^{-1}$ ;                      4)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ ;                      6)  $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**242.°** Calculați valoarea expresiei:

1)  $3^{-1} - 4^{-1}$ ;                      4)  $9 \cdot 0,1^{-1}$ ;  
2)  $2^{-3} + 6^{-2}$ ;                      5)  $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$ ;  
3)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$ ;                      6)  $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$ .

**243.°** Cu ce este egală valoarea expresiei:

1)  $2^{-2} + 2^{-1}$ ;                      3)  $0,03^0 + 0,7^0$ ;  
2)  $3^{-2} - 6^{-1}$ ;                      4)  $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$ ?

**244.°** Care din numerele date este scris în formă standard:

1)  $12 \cdot 10^4$ ;                      2)  $1,2 \cdot 10^4$ ;                      3)  $0,12 \cdot 10^4$ ?

**245.°** Scrieți numărul în formă standard și indicați ordinul numărului:

1) 3400;                      4) 0,000008;                      7)  $0,86 \cdot 10^3$ ;  
2) 15;                      5) 0,73;                      8)  $0,23 \cdot 10^4$ ;  
3) 0,0046;                      6)  $250 \cdot 10^2$ ;                      9)  $9300 \cdot 10^5$ .

246.° Aplicând forma standard a numărului, scrieți:

- 1) Viteza luminii în vid este egală cu 300 000 km/s;
- 2) înălțimea Hoverlei, celui mai înalt munte al Ucrainei, este egală cu 2061 m;
- 3) aria Ucrainei constituie 603 700 km<sup>2</sup>;
- 4) distanța medie de la Pământ până la Soare constituie 149,6 mln km;
- 5) presiunea atmosferică la înălțimea 100 km constituie 0,032 Pa;
- 6) diametrul moleculei de apă este egală cu 0,00000028 mm.

247.° Scrieți numărul în formă standard și indicați ordinul numărului:

- 1) 45 000;
- 2) 260;
- 3) 0,00024;
- 4) 0,032;
- 5)  $0,059 \cdot 10^8$ ;
- 6)  $526 \cdot 10^4$ .

248.° Numărul este dat în formă standard. Scrieți-l în formă de număr natural sau de fracție zecimală:

- 1)  $1,6 \cdot 10^3$ ;
- 2)  $5,7 \cdot 10^6$ ;
- 3)  $2,1 \cdot 10^{-2}$ ;
- 4)  $1,1 \cdot 10^{-5}$ .

249.° Numărul este dat în formă standard. Scrieți-l în formă de număr natural sau de fracție zecimală:

- 1)  $2,4 \cdot 10^2$ ;
- 2)  $4,8 \cdot 10^5$ ;
- 3)  $1,4 \cdot 10^{-3}$ ;
- 4)  $8,6 \cdot 10^{-4}$ .

250.° Demonstrați că  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ .

251.° Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$ ;
- 2)  $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$ .

252.° Amplasați expresiile în ordinea micșorării valorilor lor:

- 1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ;
- 2)  $4^{-1}$ ,  $4^3$ ,  $4^0$ ,  $4^{-2}$ .

253.° Distribuți expresiile în ordinea creșterii valorilor lor:

- 1)  $7^{-2}$ ,  $7^2$ ,  $7^{-1}$ ,  $7^0$ ;
- 2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ .

254.° Comparați valorile expresiilor:

- 1)  $12^0$  și  $(-6)^0$ ;
- 2)  $0,2^3$  și  $0,2^{-3}$ ;
- 3)  $4^6$  și  $0,25^{-6}$ ;
- 4)  $3^{-1} \cdot 7^{-1}$  și  $21^{-1}$ ;
- 5)  $5^{-1} - 7^{-1}$  și  $2^{-1}$ ;
- 6)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$  și  $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ .

255.° Comparați valorile expresiilor:

- 1)  $3^{-2}$  și  $(-3)^0$ ;
- 2)  $3^{-1} + 2^{-1}$  și  $5^{-1}$ ;
- 3)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$  și  $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$ .

**256.\*** Reprezentați în formă de fracție expresia:

- 1)  $ab^{-1} + a^{-1}b$ ;                      4)  $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$ ;  
 2)  $3a^{-1} + ab^{-2}$ ;                    5)  $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$ ;  
 3)  $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$ ;            6)  $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$ .

**257.\*** Exprimați în formă de fracție expresia:

- 1)  $a^{-2} + a^{-3}$ ;                      3)  $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$ ;  
 2)  $mn^{-4} + m^{-4}n$ ;                4)  $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$ .

**258.\*** Ordinul unui oarecare număr este 4. Câte cifre conține scrierea în sistemul zecimal de numerație acest număr?

**259.\*** Scrierea zecimală a unui număr oarecare natural constă din șapte cifre. Cu ce este egal ordinul acestui număr?

**260.\*** Care număr este mai mare:

- 1)  $9,7 \cdot 10^{11}$  sau  $1,2 \cdot 10^{12}$ ;            3)  $2,34 \cdot 10^6$  sau  $0,23 \cdot 10^7$ ;  
 2)  $3,6 \cdot 10^{-5}$  sau  $4,8 \cdot 10^{-6}$ ;        4)  $42,7 \cdot 10^{-9}$  sau  $0,072 \cdot 10^{-7}$ ?

**261.\*** Care număr este mai mic:

- 1)  $6,1 \cdot 10^{19}$  sau  $6,15 \cdot 10^{18}$ ;        2)  $1,5 \cdot 10^{-9}$  sau  $0,9 \cdot 10^{-8}$ ?

 **262.\*** În tabel sunt date distanțele de la Soare până la planetele Sistemului Solar.

Planeta	Distanța, km
Venus	$1,082 \cdot 10^8$
Pământul	$1,495 \cdot 10^8$
Marte	$2,280 \cdot 10^8$
Mercur	$5,790 \cdot 10^7$
Neptun	$4,497 \cdot 10^9$
Saturn	$1,427 \cdot 10^9$
Uranus	$2,871 \cdot 10^9$
Jupiter	$7,781 \cdot 10^8$

- Care planete se află la cea mai mică distanță de la Soare, iar care – la cea mai mare?
- Care din planetele, Marte sau Saturn, se află cel mai departe de la Soare?
- Alcătuți un tabel, scriind în colonița din stânga denumirea planetelor în ordinea creșterii distanței de la ele până la Soare, iar în colonița din dreapta – distanțele de la ele până la Soare, exprimate în milioane de kilometri.

 **263.** În tabel sunt aduse masele atomilor a unor elemente chimice.

Elementul	Masa atomului, kg	Elementul	Masa atomului, kg
Nitrogen	$2,32 \cdot 10^{-26}$	Aurum	$3,27 \cdot 10^{-25}$
Aluminiu	$4,48 \cdot 10^{-26}$	Cuprum	$1,05 \cdot 10^{-25}$
Hidrogen	$1,66 \cdot 10^{-27}$	Sodiu	$3,81 \cdot 10^{-26}$
Heliu	$6,64 \cdot 10^{-27}$	Stanium	$1,97 \cdot 10^{-25}$
Ferum	$9,28 \cdot 10^{-26}$	Uran	$3,95 \cdot 10^{-25}$

- 1) Masa cărui atom a elementelor chimice de mai sus este cea mai mică, iar a cărui – cea mai mare?
- 2) Masa atomului a cărui din elementele Cuprum sau Sodiu, este mai mare?
- 3) Alcătuiți tabelul amplasând elementele în ordinea micșorării masei atomilor lor.

 **264.** În tabel sunt date rezervele unor substanțe în resursele minerale ale lumii.

Substanța	Rezervele, t	Substanța	Rezervele, t
Aluminiu	$1,1 \cdot 10^9$	Nichel	$6,8 \cdot 10^7$
Wolfram	$1,3 \cdot 10^6$	Staniu	$4,76 \cdot 10^6$
Fer	$8,8 \cdot 10^{10}$	Mercur	$1,15 \cdot 10^5$
Aur	$1,1 \cdot 10^4$	Fosfate	$1,98 \cdot 10^{10}$
Mangan	$6,35 \cdot 10^8$	Crom	$4,4 \cdot 10^9$
Aramă	$2,8 \cdot 10^9$	Zinc	$1,12 \cdot 10^8$

- 1) Rezervele căreia din substanțele expuse mai sus sunt cele mai mari, iar ale căreia – cele mai mici?
- 2) Rezervele căreia din substanțe, nichel sau zinc, sunt mai mari?
- 3) Alcătuiți tabelul resurselor minerale, amplasând substanțele în ordinea micșorării a rezervelor lor.

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**265.** Masa unui calup din fontă este de 16 kg. Care este cel mai mic număr de calupuri pentru a turna 41 de piese cu masa de 12 kg fiecare?

**266.** Într-un oarecare oraș la ora actuală locuiesc 88 200 locuitori. Câți locuitori erau în acest oraș doi ani în urmă, dacă sporul anual al populației constituia 5 %?

**267.** Dumitru merge de acasă până la stadion pe jos cu viteza de 4 km/oră. Dacă el se va deplasa la stadion cu bicicleta cu viteza de 12 km/oră, atunci va ajunge la el cu 20 min mai devreme decât de obicei. La ce distanță de casa lui Dumitru se află stadionul?

**268.** Simplificați expresia

$$\frac{2a^2 + 2}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{a - 1} + \frac{3a - 3}{2a + 2}.$$

**269.** Se poate oare afirma că pentru orice număr natural  $n$  valoarea expresiei  $(5n + 6,5)^2 - (2n + 0,5)^2$  este multiplă lui 42?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

**270.** Exprimați în formă de putere cu baza  $a$  expresia:

1)  $a^7 \cdot a^5$ ;

3)  $(a^7)^5$ ;

2)  $a^7 : a^5$ ;

4)  $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$ .

**271.** Aduceți expresia la o formă mai simplă:

1)  $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$ ;

2)  $(-2m^7n^2)^4$ ;

3)  $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$ .

**272.** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$ ;

2)  $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$ .

**Împrospătați-va memoria cu conținutul p. 4 de la pag. 218.**

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

**273.** Într-un bloc de apartamente trăiesc numai perechi căsătorite cu copii mici, totodată fiecare băiețel are surioară și băieței sunt mai mulți decât fetițe. Oare se poate ca oameni maturi să fie mai mulți decât copiii?

## 9. Proprietățile puterii cu exponent întreg

În clasa a 7-a voi ați învățat proprietățile puterii cu exponent natural. Ele rămân valabile și pentru puterea cu orice exponent întreg.



**Teorema 9.1.** Pentru oricare  $a \neq 0$  și pentru orice  $m$  și  $n$  întregi se îndeplinesc egalitățile:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

**Teorema 9.2.** Pentru orice  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$  și oricare număr întreg  $n$  este adevărată egalitatea

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Egalitatea (1) exprimă **proprietatea fundamentală a puterii**. Să o demonstrăm.

Pentru numerele naturale  $m$  și  $n$  această egalitate a fost deja demonstrată în cursul de algebră din clasa a 7-a.

Să cercetăm acum cazul când  $m$  și  $n$  – sunt numere întregi negative.

Dacă  $m$  și  $n$  – numere întregi negative, atunci  $-m$  și  $-n$  – numere naturale. Atunci  $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$ .

$$\text{Avem: } a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Pentru a termina demonstrarea proprietății fundamentale a puterii trebuie de asemenea de examinat următoarele cazuri: unul din exponenții puterii  $m$  sau  $n$  este negativ, iar celălalt – pozitiv; unul sau ambii exponenți sunt egali cu zero. Cercetați aceste cazuri de sine stătător.

Egalitățile (2) și (3) se demonstrează analogic.

Cu ajutorul proprietății (1) să demonstrăm următoarea teoremă.

**Teorema 9.3.** Pentru  $a \neq 0$  arbitrari și pentru oricare numere întregi  $m$  și  $n$  este adevărată egalitatea

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

*Demonstrație.* Avem:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \quad \blacktriangle$$

Cu ajutorul proprietăților (2) și (3) să demonstrăm așa o teoremă.

**Teorema 9.4.** Pentru orice  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$  și pentru orice  $n$  întreg este adevărată egalitatea

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

*Demonstrație.* Avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \quad \blacktriangle$$

Proprietățile (1) – (5) se numesc **proprietățile puterii cu exponent întreg**.

**EXEMPLU 1** Reprezentați în formă de putere cu baza  $a$  expresia:

1)  $a^{-14} \cdot a^{12}$ ; 2)  $a^{-5} : a^{-9}$ ; 3)  $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$ .

*Rezolvare.* 1) Aplicând proprietatea fundamentală a puterii, obținem:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Aplicând egalitatea  $a^m : a^n = a^{m-n}$ , obținem:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Folosind consecutiv regulile ridicării puterii la o putere (proprietatea (2)), înmulțirii și împărțirii a puterilor cu aceleași baze (proprietățile (1) și (4)), obținem:

$$(a^{-4}) \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Aflați valoarea expresiei:

1)  $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$ ; 2)  $16^{-9} \cdot 8^{12}$ ; 3)  $\frac{6^{-3}}{18^{-3}}$ ; 4)  $\left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$ .

*Rezolvare.* 1) Avem:  $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ .

2) Reprezentând numerele 16 și 8 în formă de puteri în baza 2, obținem:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

3) Aplicând regula ridicării fracției la o putere (proprietatea (5)), obținem:  $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$ .

$$\begin{aligned} 4) \left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} &= \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \\ &= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \blacktriangle \end{aligned}$$

**EXEMPLU 3** Aduceți la o formă mai simplă expresia: 1)  $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$ ;

2)  $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$ .

*Rezolvare.*

1)  $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0,2m^{-2}n^{-3}$ .

2)  $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}. \blacktriangle$

**EXEMPLU 4** Efectuați înmulțirea  $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$  și scrieți rezultatul în formă standard.

*Rezolvare.*  $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) =$

$$= 23,8 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7. \blacktriangle$$



Formulați proprietățile puterii cu exponent întreg.

### EXERCIȚII

274.° Reprezentați în formă de putere cu baza  $a$  sau ca produsul puterilor cu diferite baze:

1)  $a^{-6} \cdot a^9$ ;

5)  $a^7 : a^{-3}$ ;

9)  $(a^{-6})^{-8}$ ;

2)  $a^5 \cdot a^{-8}$ ;

6)  $a^{-3} : a^{-15}$ ;

10)  $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^3$ ;

3)  $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$ ;

7)  $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$ ;

11)  $(a^4 b^{-2} c^3)^{-10}$ ;

4)  $a^{-2} : a^6$ ;

8)  $(a^{-5})^4$ ;

12)  $\left(\frac{a^{10} b^{-7}}{c^6 d^{-14}}\right)^{-2}$ .

275.° Reprezentați expresia în formă de putere în baza  $a$  sau de produs al puterilor cu baze diferite:

1)  $a^6 \cdot a^{-10}$ ;

4)  $(a^{-2})^6$ ;

7)  $a^{-16} \cdot a^8 : a^{-4}$ ;

2)  $a^4 : a^7$ ;

5)  $(a^{-3} b^{-1} c^7)^{-4}$ ;

8)  $(a^{-3})^8 : (a^{-1})^7 \cdot (a^{-7})^{-4}$ .

3)  $a^{-5} : a^{-9}$ ;

6)  $\left(\frac{a^2}{bc^{-1}}\right)^{-3}$ ;

276.° Aflați valoarea expresiei:

1)  $9^5 \cdot 9^{-7}$ ;

4)  $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$ ;

7)  $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;

2)  $10^{-8} \cdot 10^{12}$ ;

5)  $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$ ;

8)  $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$ .

3)  $3^{-18} : 3^{-21}$ ;

6)  $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$ ;

277.° Aflați valoarea expresiei:

1)  $6^{-9} \cdot 6^6$ ;

3)  $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$ ;

5)  $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$ ;

2)  $7^{-16} : 7^{-18}$ ;

4)  $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$ ;

6)  $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$ .

278.° Simplificați expresia:

1)  $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$ ;

5)  $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$ ;

9)  $0,2c^{-3}d^5 \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$ ;

2)  $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$ ;

6)  $\frac{kp^{-6}}{k^4 p^4}$ ;

10)  $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$ ;

3)  $(2c^{-6})^4$ ;

7)  $(c^{-6}d^2)^{-7}$ ;

11)  $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$ ;

4)  $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$ ;

8)  $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \frac{6}{7}a^7b^4$ ;

12)  $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$ .

**279.°** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) 2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}; \quad 3) \frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}; \quad 5) \frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}};$$

$$2) \left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}; \quad 4) 0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}; \quad 6) 28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}.$$

**280.°** Aflați valoarea expresiei:

$$1) 8^{-3} \cdot 2^7; \quad 4) \left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}; \quad 7) \frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}};$$

$$2) 27^{-2} \cdot 9^{-4}; \quad 5) 25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}; \quad 8) \frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}.$$

$$3) 100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6; \quad 6) \frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}};$$

**281.°** Aflați valoarea expresiei:

$$1) 9^{-4} \cdot 27^2; \quad 3) \left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5; \quad 5) \frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9};$$

$$2) 32^{-5} : 64^{-4}; \quad 4) 8^{-2} : 0,5^4; \quad 6) \frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}.$$

**282.°** Efectuați operațiile și rezultatul obținut aduceți-l la forma care nu conține putere cu exponent negativ:

$$1) -2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}; \quad 4) \left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2};$$

$$2) (-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}; \quad 5) \left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4;$$

$$3) 1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}; \quad 6) \left(\frac{4x^{-5}}{3y}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2.$$

**283.°** Efectuați operațiile și aduceți expresia obținută la forma care nu conține putere cu exponent negativ:

$$1) 3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}; \quad 3) \left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2;$$

$$2) 1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}; \quad 4) \left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4.$$

**284.°** Scoateți în afara parantezelor puterea cu baza  $a$  și cu cel mai mic din exponenții dați:

$$1) a^3 - 2a^4; \quad 2) a^{-3} - 2a^{-4}; \quad 3) a^5 - 2a^{-4}.$$

**285.°** Scoateți înaintea parantezelor puterea cu baza  $b$  și cu cel mai mic din exponenții dați:

$$1) b^3 + 3b^2; \quad 2) b^{-3} + 3b^{-2}; \quad 3) b^{-3} + 3b^2.$$

**286.\*** Reprezentați în formă de produs expresia:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 1) $a^{-2} - 4$ ;               | 4) $a^{-3} + b^{-3}$ ;                  |
| 2) $a^{-4}b^{-6} - 1$ ;         | 5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$ ; |
| 3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$ ; | 6) $a^{-8} - 49a^{-2}$ .                |

**287.\*** Reprezentați în formă de produs expresia:

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| 1) $x^{-4} - 25$ ;      | 3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$ ; |
| 2) $m^{-6} - 8n^{-3}$ ; | 4) $a^{-4} - a^{-2}$ .                     |

**288.\*** Demonstrați identitatea:

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

**289.\*** Simplificați expresia:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$ ; | 3) $\frac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$ ; |
| 2) $\frac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$ ;   | 4) $\frac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \frac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$ .             |

**290.\*** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$ ;                   | 3) $\frac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \frac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$ ; |
| 2) $\frac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$ ; | 4) $\frac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \frac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$ .     |

**291.\*** Ordinul numărului  $a$  este egal cu  $-4$ . Determinați ordinul numărului:

- |             |               |                     |
|-------------|---------------|---------------------|
| 1) $10a$ ;  | 3) $100a$ ;   | 5) $10\,000a$ ;     |
| 2) $0,1a$ ; | 4) $0,001a$ ; | 6) $1\,000\,000a$ . |

**292.\*** Ordinul numărului  $b$  este  $3$ . Determinați ordinul numărului:

- |            |              |                |              |
|------------|--------------|----------------|--------------|
| 1) $10b$ ; | 2) $0,01b$ ; | 3) $0,0001b$ ; | 4) $1000b$ . |
|------------|--------------|----------------|--------------|

 **293.\*** Efectuați calculele și scrieți rezultatul în formă standard:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $(1,8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$ ;    | 3) $\frac{5,4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$ ;         |
| 2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5,2 \cdot 10^{-9})$ ; | 4) $\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$ . |

 **294.\*** Efectuați calculele și scrieți rezultatul în formă standard:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$ ;    | 3) $\frac{7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-6}}$ ; |
| 2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-1})$ ; | 4) $\frac{6,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$ .    |

**295.\*** Distanța medie de la Pământ până la Soare este egală cu  $1,5 \cdot 10^8$  km, iar viteza luminii –  $3 \cdot 10^8$  m/sec. În câte minute lumina de la Soare va ajunge la Pământ? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.

**296.\*** Densitatea aramei este egală cu  $8,9 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Aflați masa unei plăci de aramă, a cărei lungime este  $2,5 \cdot 10^{-1}$  m, lățimea – 12 cm, iar înălțimea – 0,02 m.

**297.\*** Masa Pământului este egală cu  $6 \cdot 10^{24}$  kg, iar masa Lunii –  $7,4 \cdot 10^{22}$  kg. De câte ori masa Lunii este mai mică decât masa Pământului? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.

**298.\*\*** Aduceți expresia la forma cea mai simplă și scrieți rezultatul în formă de expresie rațională, care nu conține putere cu exponent negativ:

$$1) \left( \frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1}} \right) : \left( \frac{b}{a^2} \right)^{-1};$$

$$2) \frac{b^{-2} - 2}{b^{-2}} - \frac{b^{-4} - 4}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-2} - 2};$$

$$3) \frac{5c^{-3}}{c^{-3} - 3} - \frac{c^{-3} + 6}{2c^{-3} - 6} \cdot \frac{90}{c^{-6} + 6c^{-3}};$$

$$4) \left( \frac{m^{-4}}{m^{-4} - 4} - \frac{3m^{-4}}{m^{-8} - 8m^{-4} + 16} \right) \cdot \frac{16 - m^{-8}}{m^{-4} - 7} + \frac{8m^{-4}}{m^{-4} - 4}.$$

**299.\*\*** Simplificați expresia și scrieți rezultatul în formă de expresie rațională, care nu conține putere cu exponent negativ:

$$1) \frac{a^{-2} + 5}{a^{-4} - 6a^{-2} + 9} : \frac{a^{-4} - 25}{4a^{-2} - 12} - \frac{2}{a^{-2} - 5};$$

$$2) \left( b^{-1} - \frac{5b^{-1} - 36}{b^{-1} - 7} \right) \cdot \left( 2b^{-1} + \frac{2b^{-1}}{b^{-1} - 7} \right)^{-1}.$$

**300.\*\*** Ordinul numărului  $a$  este egal cu -4, iar ordinul numărului  $b$  este egal cu 3. Care poate fi ordinul valorii a expresiei:

$$1) ab; \quad 2) a + b; \quad 3) a + 10b; \quad 4) 10a + 0,1b?$$

**301.\*\*** Ordinul numărului  $m$  este egal cu 2, iar ordinul numărului  $n$  este egal cu 4. Care poate fi ordinul valorii a expresiei:

$$1) mn; \quad 2) 0,01mn; \quad 3) 100m + n; \quad 4) 0,01m + n?$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**302.** Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 18. În urma împărțirii a celui mai mare din aceste numere la cel mai mic din ele obținem câtul incomplet 3 și restul 4. Aflați aceste numere.

**303.** Datorită măsurilor referitoare la economisirea energiei electrice în prima lună consumul ei s-a micșorat cu 20%, în a doua – cu 10% în comparație cu cea precedentă, iar în a treia – cu 5% în comparație cu cea premergătoare. Cu câte procente în rezultat s-a micșorat consumul energiei electrice?

304. Pentru pomparea apei dintr-o încăpere inundată au fost puse în funcțiune trei pompe. Prima din ele poate pompa toată apa din această încăpere în 12 ore, a doua – în 15 ore, a treia – în 20 ore. La început în decursul a 3 ore au funcționat prima și a doua pompe, iar apoi a fost conectată și a treia pompă. În cât timp a fost pompată toată apa?
305. Un caiet costă 19 grn. Cumpărătorul are bancnote numai de 5 grn, iar vânzătorul – numai de 2 grn. Oare poate cumpărătorul să plătească costul caietului fără schimbarea suplimentară a banilor? În cazul răspunsului afirmativ determinați care este numărul cel mai mic de bancnote cu valoarea corespunzătoare, pe care trebuie să o posede cumpărătorul și vânzătorul.

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

306. Aflați valoarea funcției  $y = -\frac{14}{x}$ , dacă:
- 1)  $x = 2$ ;            2)  $x = -1$ ;            3)  $x = 3,5$ ;            4)  $x = -6$ .
307. Funcția este definită cu formula  $y = \frac{x+2}{x-6}$ . Care este domeniul de definiție al funcției date? Completați tabelul, calculând valorile corespunzătoare ale funcției:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$							

308. Construiți graficul funcției  $y = 2x - 1$ . Oare trece acest grafic prin punctul: 1)  $A(30; 59)$ ; 2)  $B(-15; -29)$ ?
309. Fără a efectua construcțiile aflați coordonatele punctului de intersecție ale graficilor funcțiilor  $y = 2,7x - 8$  și  $y = 1,2x + 7$ .
310. Rezolvați grafic sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Împrospătați-vă memoria cu conținutul pp. 17–19 de la pag. 222–223.

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

311. După terminarea întrecerilor la tenis, care s-au desfășurat conform sistemului olimpic (acel ce a pierdut, abandonează întrecerile), a ieșit la iveală că numai 32 de participanți au câștigat mai multe întâlniri, decât au pierdut. Câți tenismeni au participat la întreceri?

## 10. Funcția $y = \frac{k}{x}$ și graficul ei

În cursul de matematică clasa a 6-a voi ați făcut cunoștință cu dependența funcțională conform căreia odată cu **mărirea (micșorarea)** uneia din mărimi de câteva ori cealaltă mărime se **micșorează (mărește)** tot de atâtea ori. Așa o dependență se numește **invers proporțională**.

Să examinăm două exemple.

**EXEMPLU 1** Exemplul 1. Presupunem că sunt 500 de grn. Notăm prin  $x$  grn costul 1 kg de marfă, iar prin  $y$  kg – cantitatea acestei mărfi, care poate fi achiziționată de 500 grn.

Dependența variabilei  $y$  de variabila  $x$  este invers proporțională: mărirea costului  $x$  de câteva ori duce la micșorarea cantității mărfii și tot de atâtea ori și, invers, micșorarea costului provoacă mărirea cantității mărfii cumpărate.

Acestei dependențe funcționale îi corespunde funcția, dată cu formula  $y = \frac{500}{x}$ . ▲

**EXEMPLU 2** Să considerăm dreptunghiul, a cărui arie este egală cu  $18 \text{ cm}^2$ , iar laturile –  $x$  cm și  $m$ . Atunci

$$y = \frac{18}{x}.$$

Mărirea (micșorarea) numitorului  $x$  de câteva ori provoacă micșorarea (mărirea) mărimii  $y$  tot de atâtea ori, adică dependența variabilei  $y$  de variabila  $x$  este invers proporțională. ▲

În exemplele considerate modelul matematic al situațiilor reale este funcția care poate fi dată cu formula de tipul  $y = \frac{k}{x}$ .

**Definiție.** Funcția care poate fi dată cu formula de tipul  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ , se numește **proporționalitate inversă**.

Deoarece în expresia  $\frac{k}{x}$  valorile admisibile ale variabilei  $x$  sunt toate numerele, afară de 0, rezultă că domeniul de definiție al funcției  $y = \frac{k}{x}$  de asemenea constă din toate numerele, afară de 0.

Să cercetăm funcția  $y = \frac{6}{x}$ . În tabel sunt aduse unele valori ale argumentului și valorile corespunzătoare lor ale funcției.

$x$	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1	1	1,5	2	3	4	6
$y$	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1,5	1



Notăm pe planul de coordonate punctele, ale căror coordonate  $(x; y)$  sunt aduse în tabel (fig. 3).

Cu cât mai multe puncte, ale căror coordonate satisfac ecuația  $y = \frac{6}{x}$ , noi vom reuși să notăm, cu atât mai puțin figura obținută (fig. 4) se va deosebi de graficul funcției  $y = \frac{6}{x}$ .

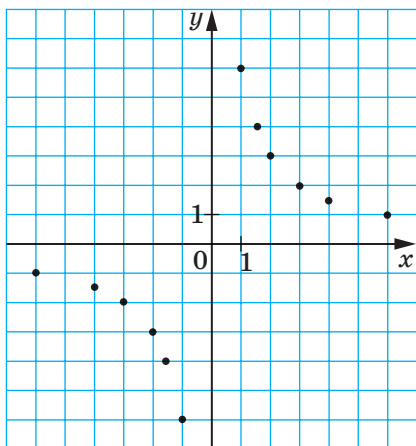


Fig. 3

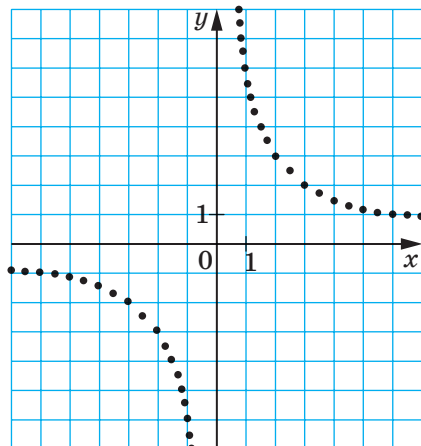


Fig. 4

Printre punctele notate nu pot fi puncte, ale căror abscisă să fie egală cu zero, deoarece numărul 0 nu aparține domeniului de definiție al funcției date. De aceea graficul funcției  $y = \frac{6}{x}$  nu are puncte comune cu axa ordonateilor.

Afară de aceasta, acest grafic nu are puncte comune și cu axa absciselor, adică puncte ale căror ordonate sunt egale cu zero. Într-adevăr, ecuația  $\frac{6}{x} = 0$  nu are soluții. Așadar, numărul 0 nu aparține domeniului de valori al funcției date.

Dacă  $x > 0$ , atunci  $\frac{6}{x} > 0$ , adică  $y > 0$ ; dacă  $x < 0$ , atunci  $y < 0$ . Așadar, punctele graficului al funcției date pot fi amplasate numai în cadranele I și III.

Menționăm, că odată cu mărirea modulului abscisei distanțele de la punctele graficului funcției  $y = \frac{6}{x}$  până la axa absciselor se micșorează și pot deveni infinit de mici, însă niciodată nu vor fi egale cu zero. Într-adevăr, cu cât este mai mare modulul argumentului, cu atât este mai mic modulul valorii corespunzătoare a funcției.

Analogic se poate stabili, că concomitent cu micșorarea modulului abscisei distanțele de la punctele graficului până la axa ordonatelor se micșorează și pot deveni oricât de mici, însă niciodată nu vor fi egale cu zero.

Dacă am reuși să notăm pe planul de coordonate toate punctele, ale căror coordonate satisfac ecuația  $y = \frac{6}{x}$ , atunci noi am obține figura, reprezentată în figura 5.

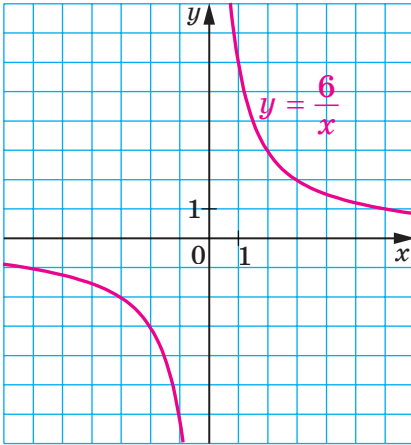


Fig. 5

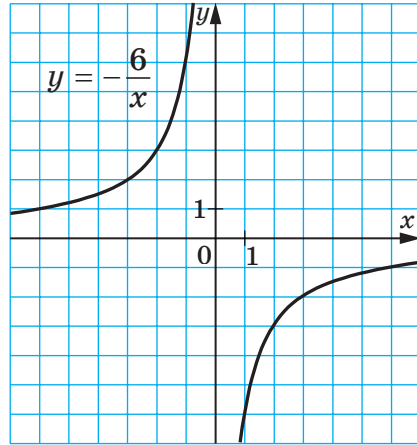


Fig. 6

Figura, care este graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ , se numește **hiperbolă**. Hiperbola constă din două părți – **ramuri ale hiperbolei**.

Să menționăm că atunci, când este adevărată egalitatea  $y_0 = \frac{k}{x_0}$ , de asemenea tot este adevărată și egalitatea  $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$ . Atunci se poate conchide: dacă punctul  $A(x_0; y_0)$  aparține hiperbolei  $y = \frac{k}{x}$ , atunci și punctul  $B(-x_0; -y_0)$  tot aparține acestei hiperbole.

În figura 5 este reprezentată hiperbola  $y = \frac{6}{x}$ .

Dacă  $k > 0$ , atunci ramurile hiperbolei sunt amplasate în cadranele I și III, iar dacă  $k < 0$ , atunci în cadranele II și IV.

În figura 6 este reprezentat graficul funcției  $y = -\frac{6}{x}$ . Ramurile hiperbolei  $y = -\frac{6}{x}$  sunt amplasate în cadranele II și IV.

Menționăm că domeniul valorilor al funcției  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ , este mulțimea tuturor numerelor, afară de zero.

În tabel sunt expuse proprietățile funcției  $y = \frac{k}{x}$ , studiate în acest punct.

Domaniul de definiție	Toate numerele, afară de 0
Domaniul de valori	Toate numerele, afară de 0
Graficul	Hiperbola
Zeroul funcției (valoarea argumentului, pentru care valoare funcției este egală cu zero)	Nu există
Proprietatea graficului	Dacă punctul $A(x_0; y_0)$ aparține hiperbolei $y = \frac{k}{x}$ , atunci punctul $B(-x_0; -y_0)$ de asemenea aparține acestei hiperbole.

Să arătăm în ce mod graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$  poate fi folosit în procesul rezolvării ecuațiilor.

**EXEMPLU 3** Rezolvați ecuația  $\frac{4}{x} = x + 3$ .

*Rezolvare.* Să cercetăm funcțiile  $y = \frac{4}{x}$  și  $y = x + 3$ . Construim în ace-

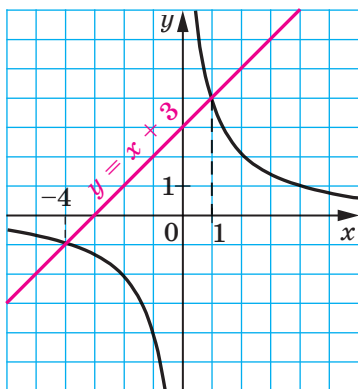


Fig. 7

lași sistem de coordonate graficul acestor funcții (fig.7). Ele se intersectează în două puncte, abscisele căror sunt egale cu 1 și  $-4$ . În fiecare din punctele de intersecție ale graficelor valoarea funcției  $y = \frac{4}{x}$  este egală cu valoarea funcției  $y = x + 3$ . Deci, pentru abscisele găsite valorile expresiilor  $\frac{4}{x}$  și  $x + 3$  sunt egale, adică numerele sunt rădăcinile ecuației  $\frac{4}{x} = x + 3$ . Verificarea confirmă aceasta. Într-adevăr,  $\frac{4}{1} = 1 + 3$  și

$$\frac{4}{-4} = -4 + 3. \blacktriangle$$

Procedeul descris de rezolvare a ecuațiilor se numește **grafic**. În clasa a 7-a voi ați făcut cunoștință cu metoda grafică de rezolvare a sistemelor de ecuații și știți, că această metodă nu totdeauna dă rezultate exacte. De aceea verificarea rădăcinilor găsite este o etapă obligatorie a rezolvării ecuației.

În viitor (p. 22) voi vă veți învăța să rezolvați astfel de ecuații fără aplicarea metodei grafice.



1. Explicați, care dependență dintre mărimi se numește proporționalitate inversă.
2. Care funcție se numește proporționalitate inversă?
3. Care este domeniul de definiție al funcției  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ ?
4. Cum se numește figura care este graficul proporționalității inverse?
5. Cum se numesc părțile din care este compusă hiperbola?
6. Care este domeniul de valori ale funcției  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ ?
7. În care cadrane este amplasat graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$ , dacă  $k > 0$ ? dacă  $k < 0$ ?
8. Explicați în ce constă metoda grafică de rezolvare a ecuațiilor.

## EXERCIȚII

- 312.°** Un automobil parcurge o distanță oarecare în 10 ore. În cât timp el va parcurge aceeași distanță, dacă viteza lui:
- 1) se va mări de 2 ori;
  - 2) se va micșora de 1,2 ori?
- 313.°** Lungimea dreptunghiului este egală cu 30 cm. Cu ce va deveni egală lungimea lui dacă pentru aceeași arie lățimea dreptunghiului:
- 1) de o mărit de 1,5 ori;
  - 2) de o micșorat de 3,2 ori?
- 314.°** Pentru o oarecare sumă de bani au cumpărat 40 m de țesătură. Câți metri de țesătură ar fi cumpărat de aceeași sumă de bani, dacă prețul pentru 1 m:
- 1) s-ar micșora de 2,6 ori;
  - 2) s-ar mări de 1,6 ori?
- 315.°** Un pieton a parcurs 12 km. Completați tabelul, în primul rând al căruia este indicată viteza, iar în al doilea – timpul mișcării.

$v$ , km/oră	5		2,4	
$t$ , ore		3		$3\frac{1}{3}$

Dați printr-o formulă dependența lui  $t$  de  $v$ .

- 316.°** Volumul paralelipipedului dreptunghiular este egal cu  $48 \text{ cm}^3$ . Completați tabelul, în primul rând al căruia este indicată aria bazei lui, iar în al doilea – înălțimea.

$S, \text{ cm}^2$	16		240	
$h, \text{ cm}$		8	$h, \text{ cm}$	4,8

Dați formula dependenței a lui  $h$  de  $S$ .

- 317.°** O brigadă alcătuită din șapte persoane cu aceeași productivitate a muncii poate executa o anumită însărcinare de producție în 12 zile. Câți muncitori sunt necesari, cu aceeași productivitate a muncii, pentru a îndeplini această însărcinare în 4 zile?

- 318.°** Furajele preparate vor ajunge pentru 24 de cai pe 18 zile. Pentru câte zile vor ajunge aceste furaje pentru 36 de cai?

- 319.°** Dintre funcțiile date indicați proporționalitățile inverse:

1)  $y = 2x$ ;      3)  $y = \frac{2}{x}$ ;      5)  $y = -\frac{0,8}{x}$ ;      7)  $y = \frac{1}{2x}$ ;

2)  $y = \frac{x}{2}$ ;      4)  $y = -\frac{1}{x}$ ;      6)  $y = \frac{2x}{3}$ ;      8)  $y = \frac{2}{3x}$ .

- 320.°** Se dă funcția  $y = \frac{24}{x}$ . Aflați:

- 1) valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egal cu:  $-3$ ;  $6$ ;  $0,2$ ;
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu:  $12$ ;  $-6$ ;  $100$ .

- 321.°** Se dă funcția  $y = -\frac{36}{x}$ . Aflați:

- 1) valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egală cu:  $-4$ ;  $0,9$ ;  $18$ ;
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu:  $6$ ;  $-0,3$ ;  $8$ .

- 322.°** Construiți graficul funcției  $y = -\frac{8}{x}$ . Folosind graficul aflați:

- 1) valoarea funcției dacă valoarea argumentului este egală cu:  $4$ ,  $-1$ ;
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu:  $2$ ,  $-8$ ;
- 3) valorile argumentului pentru care funcția primește valori pozitive.

- 323.°** Construiți graficul funcției  $y = \frac{10}{x}$ . Aplicând graficul, aflați:

- 1) valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egală cu: 2, -10;
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu: 5, -2;
- 3) valorile argumentului pentru care funcția primește valori negative.

**324.°** Fără a efectua construirea graficului funcției  $y = \frac{28}{x}$ , determinați, dacă trece graficul prin punctul:

- 1)  $A(-4; -7)$ ;    2)  $B(14; -2)$ ;    3)  $C(0,5; 14)$ ;    4)  $D(0,2; 140)$ .

**325.°** Fără a construi graficul funcției  $y = -\frac{48}{x}$ , determinați, dacă trece graficul prin punctul:

- 1)  $A(-6; -8)$ ;    3)  $C(0,3; -16)$ ;
- 2)  $B(12; -4)$ ;    4)  $D(0,4; -120)$ .

**326.\*** În figura 8 este reprezentat graficul dependenței timpului  $t$  a mișcării din punctul  $A$  până în punctul  $B$  de viteza  $v$  a mișcării. Folosind graficul, determinați:

- 1) în cât timp se poate ajunge din punctul  $A$  până în punctul  $B$ , dacă se va mișca cu viteza de 8 km/oră; 24 km/oră;
- 2) cu ce viteză trebuie de se mișcat pentru a ajunge din punctul  $A$  în punctul  $B$  în decurs de 3 ore; 4 ore;
- 3) cu ce este egală distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ .

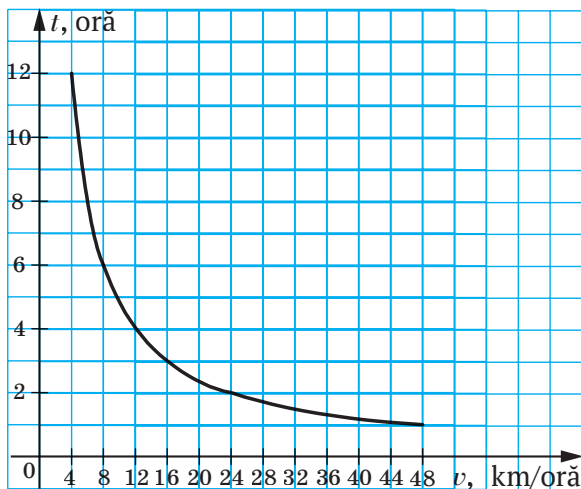


Fig. 8

**327.\*** Un reostat de sârmă este conectat la blocul de alimentare (fig. 9). Rezistența, reostatului  $R$  depinde de poziția cursorului și poate varia între limitele de la 0 până la 6 Om. Folosind graficul dependenței intensității curentului  $I$  de rezistența  $R$ , cu condiția că tensiunea la extremitățile reostatului rămâne neschimbată (fig. 10), determinați:

- 1) cu ce este egală intensitatea curentului dacă rezistența este egală cu 20 Om;
- 2) pentru care valoare a rezistenței intensitatea curentului este egală cu 3 A;
- 3) câți volți constituie tensiunea de la extremitățile reostatului.

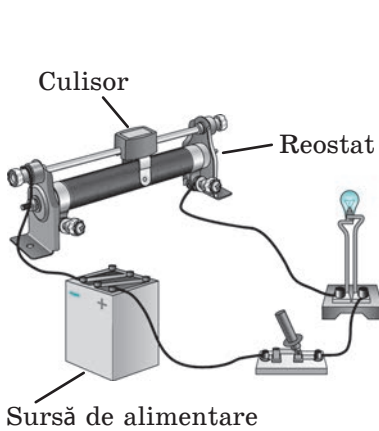


Fig. 9

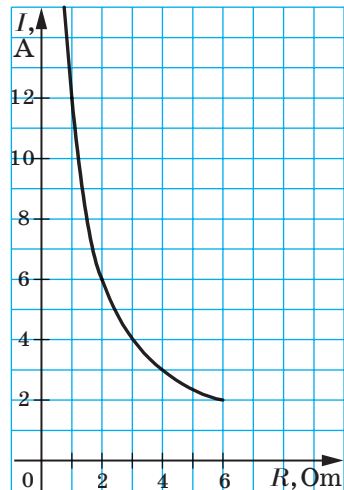


Fig. 10

**328.\*** Aflați valoarea  $k$  pentru care graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$  trece prin punctul:

- 1)  $A(-5; 4)$ ;
- 2)  $B(\frac{1}{6}; -2)$ ;
- 3)  $C(1,5; -8)$ .

**329.\*** Graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$  trece prin punctul  $A(10; 1,6)$ . Oare trece graficul acestei funcții prin punctul:

- 1)  $B(-1; -16)$ ;
- 2)  $C(-2; 8)$ ?

**330.\*** Construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor  $y = \frac{4}{x}$  și  $y = x$ , și determinați coordonatele punctelor de intersecție ale lor.

**331.\*** Rezolvați prin metoda grafică ecuația:

- 1)  $\frac{4}{x} = 4 - x$ ;
- 2)  $x - 2 = \frac{3}{x}$ ;
- 3)  $x + 2 = -\frac{5}{x}$ .

**332.\*** Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) \frac{8}{x} = 6 - x; \quad 2) 2x = \frac{2}{x}; \quad 3) \frac{7}{x} = -x.$$

**333.\*** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$$

**334.\*** Розв'яжіть графічно систему рівнянь  $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

**335.\*** Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$$

**336.\*** Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

**337.\*\*** Знайдіть координати всіх точок графіка функції  $y = \frac{64}{x}$ , в яких абсциса і ордината є рівними.

**338.\*\*** Знайдіть координати всіх точок графіка функції  $y = -\frac{25}{x}$ , в яких абсциса і ордината є числами, що є суміжними.

**339.\*\*** Побудуйте графік функції  $y = \frac{6}{|x|}$ .

**340.\*\*** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x + 3, & \text{якщо } x > -1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{якщо } x \leq 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$$

**341.\*\*** Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

**342.\*\*** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}; \quad 2) y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}.$$

**343.\*\*** Побудуйте графік функції  $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

344. Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilelor, pe care le conține expresia

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left( \frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2} \right) - \frac{b}{a - b},$$

valoarea ei nu depinde de valorile variabilelor.

345. Rezolvați ecuația

$$\frac{3}{5x + 25} + \frac{1}{2x - 10} = \frac{5}{x^2 - 25}.$$

346. Prețul dulapului l-au micșorat cu 30%, iar peste un oarecare timp l-au ridicat cu 30%. Cum s-a schimbat, s-a mărit sau micșorat, prețul dulapului în comparație cu cel inițial și cu câte procente?

347. (*Problema lui Suni-Țzâ*<sup>1</sup>). Doi oameni au primit monede, pe care ei trebuiau să le împartă între ei astfel, că atunci, când la monedele, pe care le-a primit primul din ei, de adăugat jumătate din monedele celui de-al doilea sau, dacă la monedele, pe care le-a primit al doilea, de adăugat  $\frac{2}{3}$  din monedele primului, atunci în ambele cazuri vor fi 48 de monede. Câte monede are de primit fiecare din ei?

348. Dacă schiorul se va mișca cu viteza de 10 km/oră, atunci va ajunge la punctul de destinație cu 1oră mai târziu decât ora de sosire planificată, iar dacă se va mișca cu viteza de 15 km/oră – atunci cu 1 oră mai devreme. Cu ce viteză el trebuie să se miște ca să ajungă în punctul de destinație în timpul planificat?

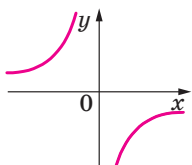
## NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

349. Fiecare din trei elevi a scris câte 100 de cuvinte diferite. După aceea au șters aceleași cuvinte. Ca urmare la primul elev au rămas 45 de cuvinte, la al doilea – 68, iar la al treilea – 78. Demonstrați, că cel puțin un cuvânt l-au scris toți trei.

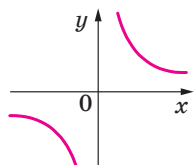
<sup>1</sup> Suni-Țzi – matematician chinez, care a trăit în secolul 3 sau 4 e.n.

### ÎNSĂRCINAREA NR. 3 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

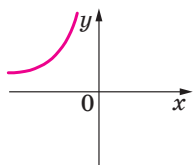
- Rezolvați ecuația  $\frac{x^2-100}{x-10} = 0$ .  
A) -10; 10;      B) 10;      C) -10;      D) n-are rădăcini.
- Rezolvați ecuația  $\frac{x-10}{x^2-100} = 0$ .  
A) -10; 10;      B) 10;      C) -10;      D) n-are rădăcini.
- Care din egalitățile următoare este adevărată?  
A)  $10^{-3} = -1000$ ;      C)  $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ ;  
D)  $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{16}$ ;      D)  $\frac{1}{7^{-2}} = -49$ .
- Cum se scrie în formă de standard numărul 42 000?  
A)  $4,2 \cdot 10^3$ ;      B)  $4,2 \cdot 10^4$ ;      C)  $0,42 \cdot 10^5$ ;      D)  $42 \cdot 10^3$ .
- Cum se scrie în formă de fracție zecimală numărul  $6,3 \cdot 10^{-3}$ ?  
A) 0,63;      B) 0,063;      C) 0,0063;      D) 0,00063.
- Exprimați numărul  $\frac{1}{25}$  în formă de putere cu baza 5.  
A)  $5^{-2}$ ;      B)  $5^2$ ;      C)  $5^{-3}$ ;      D)  $5^3$ .
- Cu ce este egală valoarea expresiei  $(1,7 \cdot 10^8) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$ ?  
A)  $1,02 \cdot 10^5$ ;      B)  $1,02 \cdot 10^6$ ;      C)  $10,2 \cdot 10^6$ ;      D)  $1,02 \cdot 10^7$ .
- Aflați valoarea expresiei  $\frac{9^{-2} \cdot 3^{-5}}{81 \cdot 27^{-3}}$ .  
A) 81;      B)  $\frac{1}{81}$ ;      C) 27;      D)  $\frac{1}{27}$ .
- Care din următoarele funcții nu este proporționalitate inversă?  
A)  $y = \frac{3}{x}$ ;      B)  $y = -\frac{3}{x}$ ;      C)  $y = \frac{3}{2x}$ ;      D)  $y = \frac{3x}{2}$ .
- Pe una din figuri este reprezentat graficul funcției  $y = -\frac{4}{x}$ . Indicați această figură.



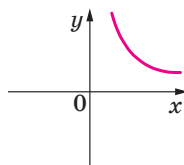
A)



B)



C)



D)

11. Pentru care valoare a lui  $k$  graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$  trece prin punctul  $A(-3; 0,6)$ ?  
A)  $-1,8$ ;                      B)  $-0,2$ ;                      C)  $-2,4$ ;                      D)  $-3,6$ .
12. Rezolvați ecuația  $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x+1}{4-x} = \frac{4x^2+8}{x^2-16}$ .  
A)  $0; 4$ ;                      B)  $-4; 0$ ;                      C)  $-4$ ;                      D)  $0$ .

## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

### Expresia rațională

Expresiile întregi sau fracționare se numesc expresii raționale.

### Valorile admisibile ale variabilelor

Valori admisibile ale variabilelor, care intră în componența expresiei raționale, se numesc toate valorile variabilelor pentru care această expresie are sens.

### Expresii identic egale

Expresiile, valorile corespunzătoare ale cărora sunt egale pentru orice valori admisibile ale variabilelor, ce intră în componența lor, se numesc identic egale.

### Identitate

Egalitatea, care se realizează pentru orice valori admisibile ale variabilelor ce intră în componența ei, se numește identitate.

### Proprietatea fundamentală a fracției raționale

Dacă numărătorul și numitorul fracției raționale de le înmulțit la unul și același polinom nenul, atunci obținem o fracție, identic egală cu cea dată.

### Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu aceiași numitori

Pentru a aduna fracții raționale cu aceiași numitori, trebuie de adunat numărătorii lor, iar numitorul de-l lăsat tot același

Pentru a afla diferența fracțiilor raționale cu aceiași numitori, trebuie de la numărătorul primei fracții de scăzut numărătorul fracției a doua, iar numitorul de-l lăsat tot același.

### Înmulțirea fracțiilor raționale

Produsul a două fracții raționale este fracția rațională, a căreia numărător este egal cu produsul numărătorilor ai fracțiilor date, iar numitorul – cu produsul numitorilor acestor fracții.

### Împărțirea fracțiilor raționale

Câtul a două fracții raționale este fracția rațională, al căreia numărător este egal cu produsul numărătorului a deîmpărțitului și numitorul împărțitorului, iar numitorul – cu produsul dintre numitorul deîmpărțitului și numărătorul împărțitorului.

### Ridicarea la putere a fracției raționale

Pentru a ridica la putere fracția rațională trebuie de ridicat la această putere numărătorul și numitorul ei. Primul rezultat de-l scris ca numărător, iar al doilea – ca numitorul fracției.

### Ecuatii echivalente

Două ecuații se numesc echivalente, dacă ele au unele și aceleași rădăcini sau fiecare din ecuații nu are rădăcini.

### Proprietățile ecuațiilor

Dacă la ambele părți ale ecuației date de adunat (sau de la ambele părți de scăzut) unul și același număr, atunci ecuația obținută este echivalentă cu cea dată.

Dacă un termen oarecare de-l trecut dintr-o parte a ecuației în alta, schimbându-i în același timp semnul lui în opus, atunci obținem o ecuație, echivalentă cu cea dată.

Dacă ambele părți ale ecuației de le înmulțit (împărțit) la unul și același număr diferit de zero, atunci obținem o ecuație, echivalentă cu cea dată.

### Ecuatia rațională

Ecuatia, ale cărei părți stângă și dreaptă, sunt expresii raționale, se numește rațională.

### Puterea cu exponentul întreg negativ

Pentru orice număr  $a$ , care este diferit de zero, și numărul natural  $n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

### Puterea cu exponent, egal cu zero

Pentru orice număr  $a$ , care nu este egal cu zero,  $a^0 = 1$ .

### Formula standard a numărului

Formă standard a numărului se numește scrierea lui în formă de produsul  $a \cdot 10^n$ , unde  $1 \leq a < 10$  și  $n$  – număr întreg.

**Proprietățile puterii cu exponent întreg**

Pentru orice  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$  și pentru orice  $m$  și  $n$  întregi se realizează egalitățile:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ (proprietatea fundamentală a puterii);}$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

**Funcția proporționalitate inversă**

Funcția care poate fi dată cu formula de tipul  $y = \frac{k}{x}$ , unde  $k \neq 0$ , se numește proporționalitate inversă.

**Proprietățile funcției  $y = \frac{k}{x}$** 

Domeniul de definiție: toate numerele, afară de zero.

Domeniul de valori: toate numerele, afară de 0.

Graficul: hiperbolă.

Zero al funcției: nu există.

Proprietatea graficului: Dacă punctul  $A(x_0; y_0)$  aparține hiperbolei  $y = \frac{k}{x}$ , atunci punctul  $B(-x_0; -y_0)$  tot aparține acestei hiperbole.

## § 2

# RĂDĂCINI PĂTRATE. NUMERE REALE

- Studiind materialul acestui paragraf veți face cunoștință cu funcția  $y = x^2$  și proprietățile ei.
- Veți afla despre o operație nouă „extragerea rădăcinii pătrate”. O să înțelegeți că pentru studierea lumii inconjurătoare numai numerele raționale sunt insuficiente.
- Voi o să faceți cunoștință cu o noțiune matematică nouă – rădăcina pătrată aritmetică, veți afla proprietățile ei. Veți învăța a simplifica expresiile care conțin rădăcini pătrate.

## 11. Funcția $y = x^2$ și graficul ei

Să notăm cu  $y$  aria pătratului cu latura  $x$ . Atunci  $y = x^2$ .

Odată cu variația laturii  $x$  a pătratului corespunzător se va schimba și aria lui  $y$ .

E clar că fiecărei valori a variabilei  $x$  îi corespunde o singură valoare a variabilei  $y$ . Așadar, dependența variabilei  $y$  de variabila  $x$  este funcțională, iar formula  $y = x^2$  definește o funcție.

Să cercetăm funcția  $y = x^2$ , a cărei domeniu de definiție constă din toate numerele. În tabel sunt aduse unele valori ale argumentului și, corespunzător lor, valori ale funcției.

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Să notăm pe planul de coordonate punctele, coordonatele cărora ( $x$ ;  $y$ ) le luăm din tabel (fig. 11).

Cu cât mai multe puncte, ale căror coordonate satisfac ecuația  $y = x^2$ , vor fi notate pe planul de coordonate, cu atât mai puțin figura obținută (fig. 12) se va deosebi de graficul funcției  $y = x^2$ .

Perechea de numere (0; 0) este soluția ecuației  $y = x^2$ . Deci, graficul funcției date trece prin originea de coordonate. Deoarece  $y = x^2$  și  $x^2 \geq 0$ ,

atunci  $y \geq 0$ , adică printre punctele notate nu pot fi puncte cu ordonate negative.

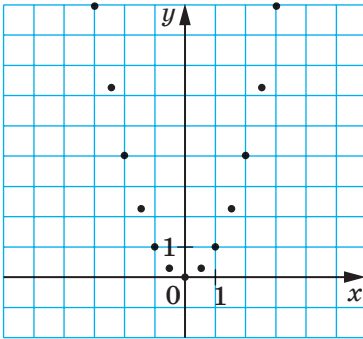


Fig. 11

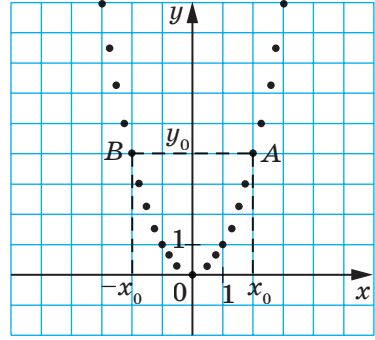


Fig. 12

Domeniul de valori al funcției  $y = x^2$  constă din toate numerele nenegative.

Dacă s-ar reuși de notat pe planul de coordonate toate punctele ale căror coordonate satisfac ecuația  $y = x^2$ , atunci am primi figura—graficul funcției  $y = x^2$ , care se numește **parabolă** (fig. 13).

Punctul cu coordonatele  $(0; 0)$  împarte parabola în două părți egale, fiecare din ele este numită **ramura parabolei**, iar însuși punctul — **vârful parabolei**.

Menționăm că atunci, când este justă egalitatea  $y_0 = x_0^2$ , rezultă și justetea egalității  $y_0 = (-x_0)^2$ . Așadar putem conchide: dacă punctul  $A(x_0; y_0)$  aparține parabolei  $y = x^2$ , atunci punctul  $B(-x_0; y_0)$  tot aparține acestei parabole.

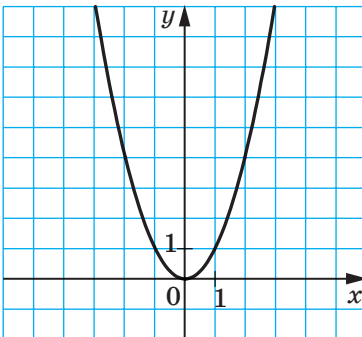


Fig. 13

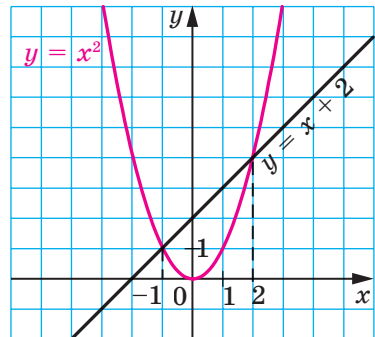


Fig. 14

În tabel sunt prezentate proprietățile funcției  $y = x^2$ , învățate în acest punct.

Domeniul de definiție	Toate punctele
Domeniul de valori	Toate numerele nenegative
Graficul	Parabolă
Zeroul funcției( valoarea argumentului, pentru care valoarea funcției este egală cu zero)	$x = 0$
Proprietatea graficului	Dacă punctul $A(x_0; y_0)$ aparține parabolei $y = x^2$ , atunci punctul $B(-x_0; y_0)$ tot aparține acestei parabole.

**EXEMPLU** ■ Rezolvați cu modul grafic ecuația  $x^2 = x + 2$ .

*Rezolvare.* În același sistem de coordonate construim graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = x + 2$  (fig. 14). Aceste grafice se intersectează în două puncte, ale căror abscise sunt egale cu 2 și -1. Așadar, atât pentru  $x = 2$ , cât și pentru  $x = -1$  valorile expresiilor  $x^2$  și  $x + 2$  sunt egale, adică numerele 2 și -1 sunt rădăcinile ecuației  $x^2 = x + 2$ . Verificarea confirmă aceasta. Într-adevăr,  $2^2 = 2 + 2$  și  $(-1)^2 = -1 + 2$ . ▲



1. Care este domeniul de definiție al funcției  $y = x^2$ ?
2. Ce este domeniul de valori al funcției  $y = x^2$ ?
3. Pentru care valoare a argumentului valoarea funcției  $y = x^2$  este egală cu zero?
4. Comparați valorile funcției  $y = x^2$  pentru valorile opuse ale argumentului.
5. Care figură este graficul funcției  $y = x^2$ ?

## EXERCIȚII

**350.°** Funcția este dată cu formula  $y = x^2$ . Aflați:

- 1) valorile funcției, dacă valorile argumentului sunt: -6; 0,8; -1,2; 150;
- 2) valoarea argumentului, pentru care valoarea funcției este egală cu: 49; 0; 2500; 0,04.

**351.°** Fără a construi graficul funcției  $y = x^2$ , determinați, dacă trece acest grafic prin punctul:

- 1)  $A(-8; 64)$ ;
- 2)  $B(-9; -81)$ ;
- 3)  $C(0,5; 2,5)$ ;
- 4)  $D(0,1; 0,01)$ .



**352.\*** Fără a construi graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = 4x - 4$ , aflați coordonatele punctelor de intersecție ale acestor grafice. Construiți graficele funcțiilor date și notați punctele găsite.

**353.\*** Rezolvați grafic ecuația:

$$1) x^2 = x - 1; \quad 2) x^2 - 2x - 3 = 0; \quad 3) x^2 = \frac{8}{x}.$$

**354.\*** Rezolvați grafic ecuația:

$$1) x^2 = -4x - 3; \quad 2) x^2 - 3x + 5 = 0; \quad 3) x^2 + \frac{1}{x} = 0.$$

**355.\*** Stabiliți cu metoda grafică cantitatea de soluții a sistemului de ecuații:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$$

**356.\*** Stabiliți cu ajutorul metodei grafice numărul de rădăcini al sistemului de ecuații:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

**357.\*\*** Funcția  $f$  este definită cu așa un procedeu:  $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{dacă } x \leq -2, \\ x^2, & \text{dacă } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$

- 1) Aflați  $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(3), f(0,5)$ .
- 2) Construiți graficul funcției.

**358.\*\*** Se dă funcția  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{dacă } x \leq -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$

- 1) Aflați  $f(-4), f(-0,3), f(1,9), f(3), f(-1), f(2)$ .
- 2) Construiți graficul funcției.

**359.\*\*** Este dată funcția  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

- 1) Aflați  $f(-7), f(0), f(2)$ .
- 2) Construiți graficul funcției.

**360.\*\*** Se dă funcția  $f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{dacă } x \leq -1, \\ x^2, & \text{dacă } x > -1, \end{cases}$

- 1) Aflați  $f(-12), f(-1), f(-0,9), f(3), f(0)$ .
- 2) Construiți graficul funcției.

361.\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1};$$

$$2) y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}.$$

362.\* Construiți graficul funcției  $y = \frac{x^3}{x}$ .

363.\* Aflați domeniul de definiție, domeniul de valori și zerourile funcției  $y = -x^2$ . Construiți graficul acestei funcții.

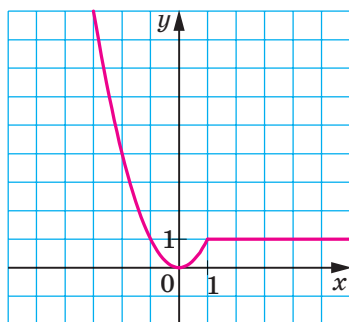
364.\* Construiți graficul ecuației:

$$1) \frac{y - x^2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0;$$

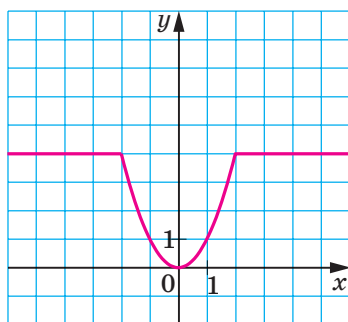
$$2) \frac{y - x^2}{y - x} = 0.$$

365.\* Construiți graficul ecuației  $\frac{x^2 - y}{(x + 2)^2 + (y - 4)^2} = 0$ .

366.\* Definiți prin formulă funcția, al cărei grafic este reprezentat în figura 15.



a



b

Fig. 15

367.\* Dați cu ajutorul formulelor funcția, al cărei grafic este reprezentat în figura 16.

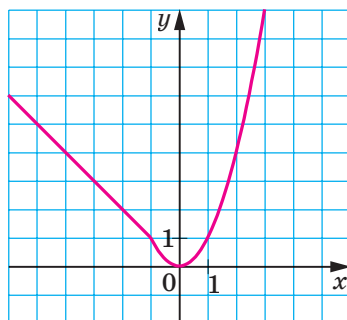


Fig. 16

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

368. Demonstrați identitatea

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left( \frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right) = a+b.$$

369. Rezolvați identitatea

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

370. Demonstrați că valoarea expresiei  $27^6 - 9^7$  este multiplă lui 48.

371. Din două puncte, amplasate la distanța de 30 km unul de celălalt, în același timp au pornit unul în întâmpinarea celuilalt doi pietoni și s-au întâlnit peste 3 ore 45 min. Dacă primul ar fi pornit cu 2 ore mai devreme, decât al doilea, atunci ei s-ar fi întâlnit peste 4,5 ore după ce primul a început mișcarea. Aflați viteza fiecărui pieton.

## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

372. Aflați latura pătratului, a cărui arie este egală cu: 1)  $25 \text{ cm}^2$ ; 2)  $1600 \text{ dm}^2$ ; 3)  $0,04 \text{ m}^2$ .

373. Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 = 9;$$

$$2) x^2 = \frac{36}{49}.$$

374. Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $x^2 = a$  nu are rădăcini?

375. Construiți graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = 1$  și aflați coordonatele punctelor comune ale lor.

## NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

376. Numerele naturale  $x, y, z$  sunt astfel, că valorile expresiilor  $x + y, y + z, x + z$  – sunt numere prime. Demonstrați că printre numerele  $x, y, z$  sunt cel puțin două numere care sunt egale cu 1.

## 12. Rădăcini pătrate. Rădăcina pătrată aritmetică

Să examinăm pătratul a cărui arie este egală cu 49 de unități pătrate. Fie că lungimea laturii lui este egală cu  $x$  unități. Atunci ecuația  $x^2 = 49$  poate

fi considerată ca modelul matematic al problemei despre aflarea laturii pătratului, a cărui arie este egală cu 49 de unități pătrate.

Rădăcinile acestei ecuații sunt numerele 7 și  $-7$ . Se spune ca numerele 7 și  $-7$  sunt **rădăcinile pătrate** din numărul 49.

**Definiție.** Rădăcina pătrată dintr-un număr  $a$  se numește numărul, pătratul căruia este egal cu  $a$ .

Aducem câteva exemple.

Rădăcinile pătrate din numărul 9 sunt numerele 3 și  $-3$ . Într-adevăr  $3^2 = 9$ ,  $(-3)^2 = 9$ .

Rădăcinile pătrate din numărul  $\frac{25}{4}$  sunt numerele  $\frac{5}{2}$  și  $-\frac{5}{2}$ . Într-adevăr  $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ,  $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ .

Rădăcina pătrată din numărul 0 este numai numărul 0. Într-adevăr, există numai un singur număr, al cărui pătrat este egal cu zero – acesta-i numărul zero.

Deoarece nu există număr, al cărui pătrat să fie egal cu număr negativ, rezultă că rădăcina pătrată din număr negativ nu există.

Rădăcina *pozitivă* a ecuației  $x^2 = 49$ , numărul 7, este răspunsul la problema despre aflarea laturii pătratului, a cărui arie este egală cu 49 de unități pătrate. Acest număr se numește **rădăcina pătrată aritmetică** din numărul 49.

**Definiție.** Rădăcina pătrată aritmetică dintr-un număr  $a$  se numește numărul nenegativ, pătratul căruia este egal cu  $a$ .

Rădăcina pătrată aritmetică din numărul  $a$  se notează cu simbolul:  $\sqrt{a}$ . Semnul  $\sqrt{\quad}$  se numește semnul **rădăcinii pătrate** sau **radical** (de la lat. *radix* – rădăcină).

Scrierea  $\sqrt{a}$  se citește: „rădăcina pătrată din numărul  $a$ ”, neglijând la citire cuvântul „aritmetică”.

Expresia care se află sub radical se numește **expresie de sub radical**. De exemplu, în scrierea  $\sqrt{b-5}$  binomul  $b-5$  este expresie de sub radical. Din definiția rădăcinii pătrate aritmetice rezultă că **expresia de sub radical poate primi numai valori nenegative**.

Operația aflării rădăcinii pătrate aritmetice dintr-un număr se numește **extragerea rădăcinii pătrate**.

Să examinăm câteva exemple.

$\sqrt{9} = 3$ , deoarece  $3 \geq 0$ , și  $3^2 = 9$ ;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ , deoarece  $\frac{5}{2} \geq 0$ , și  $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ;

$\sqrt{0} = 0$ , deoarece  $0 \geq 0$ , și  $0^2 = 0$ .

În general, **egalitatea  $\sqrt{a} = b$  este justă cu condiția că  $b \geq 0$  și  $b^2 = a$ .** Această concluzie poate fi expusă și în altă formă: **pentru orice număr nenegativ  $a$  este adevărat că  $\sqrt{a} \geq 0$  și  $(\sqrt{a})^2 = a$ .**

De exemplu,  $\sqrt{4} \geq 0$  și  $(\sqrt{4})^2 = 4$ ,  $\sqrt{2} \geq 0$  și  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ,  $\sqrt{5,2} \geq 0$  și  $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$ .

Accentuăm că noi am ajuns la noțiunea de rădăcină pătrată, rezolvând ecuația de tipul  $x^2 = a$ , unde  $a \geq 0$ . Rădăcini ale acestei ecuații sunt numerele, fiecare din ele fiind rădăcina pătrată din numărul  $a$ .

Căutarea rădăcinilor ale ecuației  $x^2 = a$  să o ilustrăm, rezolvând grafic ecuația  $x^2 = 4$ .

În același sistem de coordonate să construim graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = 4$  (fig. 17). Punctele de intersecție ale acestor grafice au abscisele 2 și -2, care sunt rădăcinile ecuației date.

Ecuația  $x^2 = a$  pentru  $a < 0$  nu are rădăcini, ce se confirmă grafic: graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = a$  pentru  $a < 0$  nu au puncte comune (fig. 18).

Pentru  $a = 0$  ecuația  $x^2 = a$  are o singură rădăcină  $x = 0$ , ceea ce de asemenea, se confirmă grafic: graficele funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = 0$  au numai un singur punct comun (fig. 18).

Metoda grafică de asemenea ne permite să facem următoarea concluzie: dacă  $a > 0$ , atunci ecuația  $x^2 = a$  are două soluții. Într-adevăr, parabola  $y = x^2$  și dreapta  $y = a$ , unde  $a > 0$ , au două puncte comune (fig. 18). Totodată rădăcini ale ecuației  $x^2 = a$  sunt numerele  $\sqrt{a}$  și  $-\sqrt{a}$ . Într-adevăr,  $(\sqrt{a})^2 = a$ ,  $(-\sqrt{a})^2 = a$ .

De exemplu, ecuația  $x^2 = 5$  are două rădăcini  $\sqrt{5}$  și  $-\sqrt{5}$ .

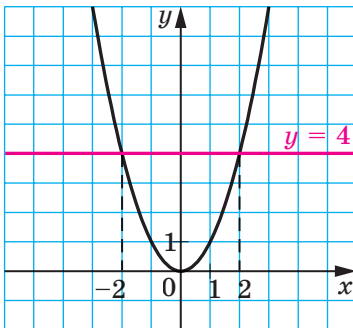


Fig. 17

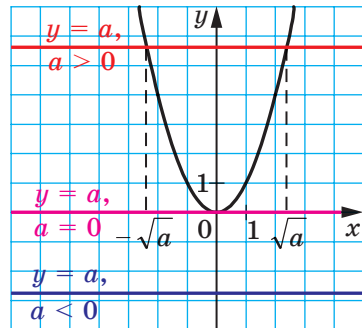


Fig. 18

**EXEMPLU 1** Aflați valoarea expresiei  $(-8\sqrt{2})^2$ .

*Rezolvare.* Aplicând regula ridicării la o putere a produsului și identitatea  $(\sqrt{a})^2 = a$ , obținem:

$$(-8\sqrt{2})^2 = (-8)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Rezolvați ecuația: 1)  $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$ ; 2)  $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$ .

*Rezolvare.* 1) Avem:  $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$ ;  $\sqrt{x} = 6$ . Atunci  $x = 6^2$ ;  $x = 36$ .

*Răspuns:* 36.

2)  $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$ ;  $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$ ;  $\sqrt{x+2} = 3$ ;  $x + 2 = 3^2$ ;  $x = 7$ .

*Răspuns:* 7.  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 3** Rezolvați ecuația  $(x - 5)^2 = 16$ .

*Rezolvare.*  $(x - 5)^2 = 16$ ;

$$x - 5 = -4 \text{ sau } x - 5 = 4;$$

$$x = 1 \text{ sau } x = 9.$$

*Răspuns:* 1; 9.  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 4** Rezolvați ecuația  $(3x - 1)^2 = 2$ .

*Rezolvare.*  $(3x - 1)^2 = 2$ ;

$$3x - 1 = -\sqrt{2} \text{ sau } 3x - 1 = \sqrt{2};$$

$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ sau } 3x = 1 + \sqrt{2};$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \text{ sau } x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}.$$

*Răspuns:*  $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$ ;  $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ .  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 5** Pentru care valori ale lui  $x$  are sens expresia : 1)  $\sqrt{-5x}$ ;

2)  $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$ ?

*Rezolvare.* 1) Expresia  $\sqrt{-5x}$  are sens dacă expresia de sub radical  $-5x$  primește valori nenegative. Expresia de sub radical este produsul a doi factori, unul din ei este număr negativ. Deci, acest produs va avea valori pozitive, dacă al doilea factor  $x$  va primi valori nepozitive.

*Răspuns:* pentru  $x \leq 0$ .

2) Expresia dată are sens dacă se îndeplinesc două condiții: are sens expresia  $\sqrt{x}$  și numitorul  $\sqrt{x} - 2$  este diferit de zero. Deci, trebuie ca în același timp să se îndeplinească două condiții:  $x \geq 0$  și  $\sqrt{x} - 2 \neq 0$ . De aici  $x \geq 0$  și  $x \neq 4$ .

*Răspuns:* pentru  $x \geq 0$  și  $x \neq 4$ . ▲

**EXEMPLU 6** Rezolvați ecuația: 1)  $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2$ ;

2)  $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x-2} = 0$ ; 3)  $(x+2)\sqrt{x-2} = 0$ .

*Rezolvare.* 1) Partea stângă a acestei ecuații are sens, dacă expresiile de sub radical  $-x$  și  $x - 2$  concomitent primesc valori nenegative. Din aceea că prima expresie de sub radical trebuie să fie nenegativă avem:  $-x \geq 0$ , atunci  $x \leq 0$ . Însă când  $x \leq 0$ , atunci a doua expresie  $x - 2$ , de sub radical primește numai valori negative. Deci, partea stângă a ecuației date nu are sens.

*Răspuns:* nu sunt rădăcini.

2) Partea stângă a ecuației date este suma a doi termeni, fiecare din ei poate primi numai valori nenegative. Atunci suma lor va fi egală cu zero, când fiecare din termeni va fi egal cu zero. Deci, în același timp trebuie să se îndeplinească două condiții:  $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$  și  $\sqrt{x-2} = 0$ . Aceasta înseamnă că trebuie de găsit rădăcini comune ale ecuațiilor obținute, adică de rezolvat sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Avem: } \begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0 \text{ sau } x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$$

Soluție a ultimului sistem, deci, și a ecuației inițiale, este numărul 2.

*Răspuns:* 2.

3) Aplicând condiția nulității unui produs, obținem:

$$\begin{aligned} x + 2 = 0 \text{ sau } \sqrt{x-2} = 0; \\ x = -2 \text{ sau } x = 2. \end{aligned}$$

*Dar pentru*  $x = -2$  expresia  $\sqrt{x-2}$  nu are sens. Așadar, ecuația dată are o singură rădăcină – numărul 2.

*Răspuns:* 2. ▲



1. Це се нумежіте радікани п'ятраті дин нумару  $a$ ?
2. Це се нумежіте радікани п'ятраті арифметичні дин нумару  $a$ ?
3. Кум есте нотаті радікани п'ятраті арифметичні дин нумару  $a$ ?
4. Кум есте нуміт семну  $\sqrt{\quad}$ ?
5. Кум се цитежіте счереа  $\sqrt{a}$ ?
6. Кум се нумежіте еспресеа каре се афлі суб радікани?
7. Це валорі поате преме еспресеа де суб радікани?
8. Кум се нумежіте операціа афлірї радікани п'ятрате арифметичне дин-ун нумар?
9. Ку це есте егалі валореа еспресеі  $(\sqrt{a})^2$  прену орїе нумар ненегатів  $a$ ?
10. Кате радікани аре екуаціа  $x^2 = a$  прену  $a > 0$ ? Ку це сунт егаліе?
11. Оаре аре радікани екуаціа  $x^2 = a$  прену  $a = 0$ ? прену  $a < 0$ ?

## EXERCIIII

**377.°** Ку це есте егалі радікани п'ятраті дин нумару 16? Дин нумару 1? Дин нумару 0? Ку це есте егалі радікани п'ятраті арифметичні дин асте нумере?

**378.°** Оаре есте јусті егалїтеа (аргументаці рјспунсу):

- |                      |                         |                          |
|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\sqrt{25} = 5$ ; | 3) $\sqrt{36} = -6$ ;   | 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$ ; |
| 2) $\sqrt{0} = 0$ ;  | 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$ ; | 6) $\sqrt{10} = 100$ ?   |

**379.°** Афлі валореа радікани п'ятрате арифметичне:

- |                   |                    |                             |                              |
|-------------------|--------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{9}$ ;   | 5) $\sqrt{0,25}$ ; | 9) $\sqrt{400}$ ;           | 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ; |
| 2) $\sqrt{49}$ ;  | 6) $\sqrt{0,01}$ ; | 10) $\sqrt{3600}$ ;         | 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$ ; |
| 3) $\sqrt{100}$ ; | 7) $\sqrt{1,21}$ ; | 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$ ; | 15) $\sqrt{0,0004}$ ;        |
| 4) $\sqrt{225}$ ; | 8) $\sqrt{1,96}$ ; | 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ;  | 16) $\sqrt{0,000025}$ .      |

**380.°** Афлі валореа радікани п'ятрате арифметичне:

- |                   |                    |                              |                             |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{36}$ ;  | 4) $\sqrt{0,04}$ ; | 7) $\sqrt{2500}$ ;           | 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ ; |
| 2) $\sqrt{64}$ ;  | 5) $\sqrt{0,49}$ ; | 8) $\sqrt{10\ 000}$ ;        | 11) $\sqrt{0,0009}$ ;       |
| 3) $\sqrt{144}$ ; | 6) $\sqrt{1,69}$ ; | 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$ ; | 12) $\sqrt{0,0196}$ .       |



**381.°** Oare are sens expresia:

1)  $\sqrt{2}$ ;      2)  $-\sqrt{2}$ ;      3)  $\sqrt{-2}$ ;      4)  $\sqrt{(-2)^2}$ ;      5)  $(\sqrt{-2})^2$ ?

**382.°** Aflați numărul, rădăcina pătrată aritmetică din care este egală cu:

1) 4;    2) 0;    3) 0,8;    4)  $2\frac{1}{4}$ ;    5) 1,6;    6) -9.

**383.°** Folosindu-vă de tabelul pătratelor al numerelor naturale, amplasat pe forțaț, aflați:

1)  $\sqrt{484}$ ;                      4)  $\sqrt{5929}$ ;                      7)  $\sqrt{68,89}$ ;  
 2)  $\sqrt{729}$ ;                      5)  $\sqrt{5,76}$ ;                      8)  $\sqrt{67\,600}$ ;  
 3)  $\sqrt{1156}$ ;                      6)  $\sqrt{14,44}$ ;                      9)  $\sqrt{384\,400}$ .

**384.°** Aflați:

1)  $\sqrt{841}$ ;                      3)  $\sqrt{9,61}$ ;                      5)  $\sqrt{72,25}$ ;  
 2)  $\sqrt{1296}$ ;                      4)  $\sqrt{10,24}$ ;                      6)  $\sqrt{672\,400}$ .

**385.°** Cu ajutorul microcalculatorului, aflați valoarea rădăcinii pătrate (rotunjiți rezultatul până la sutimi):

1)  $\sqrt{2}$ ;    2)  $\sqrt{7}$ ;    3)  $\sqrt{34}$ ;    4)  $\sqrt{1,8}$ ;    5)  $\sqrt{2,439}$ .

**386.°** Folosindu-vă de microcalculator aflați valoarea rădăcinii pătrate (rotunjiți rezultatul până la sutimi):

1)  $\sqrt{3}$ ;                      2)  $\sqrt{5,1}$ ;                      3)  $\sqrt{40}$ ;                      4)  $\sqrt{12,56}$ .

**387.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $(\sqrt{7})^2$ ;                      4)  $-(\sqrt{10})^2$ ;                      7)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ;  
 2)  $(\sqrt{4,2})^2$ ;                      5)  $(2\sqrt{3})^2$ ;                      8)  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$ ;  
 3)  $(-\sqrt{11})^2$ ;                      6)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ ;                      9)  $(-0,3\sqrt{2})^2$ .

**388.°** Calculați:

1)  $(\sqrt{6})^2$ ;                      3)  $(3\sqrt{2})^2$ ;                      5)  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$ ;  
 2)  $(-\sqrt{21})^2$ ;                      4)  $(-4\sqrt{5})^2$ ;                      6)  $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$ .

**389.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{16+9}$ ;                      4)  $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$ ;  
 2)  $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ ;                      5)  $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$ ;  
 3)  $\sqrt{36}-\sqrt{49}$ ;                      6)  $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$ ;

- 7)  $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$ ;                      10)  $\frac{1}{6} \cdot (\sqrt{18})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$ ;  
 8)  $-2\sqrt{0,16} + 0,7$ ;                      11)  $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$ ;  
 9)  $(\sqrt{13})^2 - 3 \cdot (\sqrt{8})^2$ ;                      12)  $\sqrt{4 \cdot 5^2 - 6^2}$ .

**390.°** Calcuлаї валуара еспресіа:

- 1)  $\sqrt{3 + \sqrt{36}}$ ;                      4)  $\frac{1}{3}\sqrt{900} + 0,2\sqrt{1600}$ ;  
 2)  $\sqrt{72} - \sqrt{64}$ ;                      5)  $(2\sqrt{6})^2 - 3(\sqrt{21})^2$ ;  
 3)  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{225}$ ;                      6)  $\sqrt{10^2 - 4 \cdot 3^2}$ .

**391.°** Afluлаї валуара еспресіа:

- 1)  $\sqrt{12 + a}$ , даца  $a = 0,25$ ;  
 2)  $\sqrt{7 - 3b}$ , даца  $b = 2$ ;  
 3)  $\sqrt{2a - b}$ , даца  $a = 34$ ,  $b = 19$ ;  
 4)  $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b - c)^2} + \sqrt{d}$ , даца  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = -0,19$ ,  $c = 0,18$ ,  $d = 0,04$ .

**392.°** Afluлаї валуара еспресіа:

- 1)  $\sqrt{27 + m}$ , даца  $m = 54$ ;  
 2)  $\sqrt{m - 3n}$ , даца  $m = 0,13$ ,  $n = -0,04$ .

**393.°** Резолвулаї екуаїа:

- 1)  $\sqrt{x} = 9$ ;                      2)  $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$ ;                      3)  $\sqrt{x} - 0,2 = 0$ ;                      4)  $\sqrt{x} + 7 = 0$ .

**394.°** Резолвулаї екуаїа:

- 1)  $\sqrt{x} = 20$ ;                      2)  $\sqrt{x} = -16$ ;                      3)  $\sqrt{x} - \frac{2}{3} = 0$ .

**395.°** Резолвулаї екуаїа:

- 1)  $x^2 = 25$ ;                      2)  $x^2 = 0,49$ ;                      3)  $x^2 = 3$ ;                      4)  $x^2 = -25$ .

**396.°** Резолвулаї екуаїа:

- 1)  $x^2 = 100$ ;                      2)  $x^2 = 0,81$ ;                      3)  $x^2 = 7$ ;                      4)  $x^2 = 3,6$ .

**397.°** Afluлаї валуара еспресіа:

- 1)  $-0,06 \cdot \sqrt{10\,000} + \frac{8}{\sqrt{256}} - 2,5\sqrt{3,24}$ ;  
 2)  $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6,25} + \sqrt{2^3 + 17}$ ;  
 3)  $\sqrt{1\frac{11}{25}} + 3\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,6\sqrt{3025}$ ;

- 4)  $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$ ;  
 5)  $(3\sqrt{8})^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{24})^2$ ;  
 6)  $\sqrt{144} : \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{2500}$ .

**398.** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + (10\sqrt{0,08})^2$ ;  
 2)  $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$ ;  
 3)  $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : (0,1\sqrt{13})^2$ .

**399.** Pentru care valori ale lui  $x$  are sens expresia:

- 1)  $\sqrt{x}$ ;                      5)  $\sqrt{x-8}$ ;                      9)  $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$ ;                      13)  $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$ ;  
 2)  $\sqrt{-x}$ ;                      6)  $\sqrt{8-x}$ ;                      10)  $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ ;                      14)  $\sqrt{|x|}$ ;  
 3)  $\sqrt{x^2}$ ;                      7)  $\sqrt{x^2+8}$ ;                      11)  $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ ;                      15)  $\sqrt{-|x|}$ ;  
 4)  $\sqrt{-x^2}$ ;                      8)  $\sqrt{(x-8)^2}$ ;                      12)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$ ;                      16)  $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ?

**400.** Pentru care valori ale lui  $y$  are sens expresia:

- 1)  $\sqrt{2y}$ ;                      3)  $\sqrt{y^3}$ ;                      5)  $\sqrt{-y^4}$ ;                      7)  $\frac{1}{\sqrt{y-1}}$ ;  
 2)  $\sqrt{-3y}$ ;                      4)  $\sqrt{-y^3}$ ;                      6)  $\frac{1}{\sqrt{y}}$ ;                      8)  $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$ ?

**401.** Rezolvați ecuația:

- 1)  $\sqrt{5x-4} = 0$ ;                      3)  $\sqrt{5x-4} = 6$ ;                      5)  $\frac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$ ;  
 2)  $\sqrt{5x-4} = 0$ ;                      4)  $\frac{42}{\sqrt{x}} = 6$ ;                      6)  $\sqrt{x^2-36} = 8$ .

**402.** Rezolvați ecuația:

- 1)  $\frac{1}{3}\sqrt{x} - 2 = 0$ ;                      3)  $\frac{4}{\sqrt{x-5}} = 6$ ;  
 2)  $\sqrt{2x+3} = 11$ ;                      4)  $\sqrt{130-x^2} = 9$ .

**403.** Rezolvați ecuația:

- 1)  $(x+6)^2 = 0$ ;    2)  $(x+6)^2 = 9$ ;    3)  $(x+6)^2 = 3$ ;    4)  $(7x+6)^2 = 5$ .

**404.** Rezolvați ecuația:

- 1)  $(2x-3)^2 = 25$ ;                      2)  $(x-3)^2 = 7$ ;                      3)  $(2x-3)^2 = 7$ .

**405.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} = 4;$$

$$3) \sqrt{4 - \sqrt{10 + \sqrt{x}}} = 2.$$

$$2) \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}} = 3;$$

**406.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{17 + \sqrt{\sqrt{x} - 6}} = 5;$$

$$2) \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 1.$$

**407.\*\*** Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$  are sens expresia:

$$1) \sqrt{ab}; \quad 2) \sqrt{-ab}; \quad 3) \sqrt{ab^2}; \quad 4) \sqrt{a^2b^2}; \quad 5) \sqrt{-a^2b}?$$

**408.\*\*** Oare se poate afirma că pentru orice valoare a lui  $x$  are sens expresia:

$$1) \sqrt{x^2 - 4x + 4}; \quad 2) \sqrt{x^2 - 4x + 5}?$$

**409.\*\*** Demonstrați că nu există așa o valoare a lui  $x$ , pentru care are sens expresia  $\sqrt{-x^2 + 6x - 12}$ .

**410.\*\*** Care din expresiile date are sens pentru orice valoare a lui  $x$ :

$$1) \sqrt{x^2 + 8x + 15};$$

$$2) \sqrt{x^2 - 10x + 27}?$$

**411.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x} = -x;$$

$$4) \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4} = 0;$$

$$2) \sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0;$$

$$5) (x-1)\sqrt{x+1} = 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x-1} = 0;$$

$$6) (x+1)\sqrt{x-1} = 0.$$

**412.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 0;$$

$$2) \sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1;$$

$$4) (x-2)\sqrt{x-3} = 0.$$

**413.\*\*** Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $x^2 = a + 1$ :

$$1) \text{ are două rădăcini};$$

$$3) \text{ nu are rădăcini?}$$

$$2) \text{ are o singură rădăcină};$$

**414.\*\*** Construiți graficul funcției:

$$1) y = \sqrt{-x^2};$$

$$2) y = \sqrt{-x^2 - 4x - 4} + 2;$$

$$3) y = (\sqrt{x})^2.$$

**415.\*\*** Construiți graficul funcției  $y = \sqrt{2x-1-x^2} - 1$ .

**416.\*** Rezolvați ecuația pentru fiecare valoare a lui  $a$ :

$$1) a\sqrt{x-1} = 0;$$

$$3) a\sqrt{x-1} = a;$$

$$2) \sqrt{(a-1)x} = 0;$$

$$4) \sqrt{x-2} = a.$$

**417.\*** Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $(\sqrt{x}-1)(x-a) = 0$  are numai o singură rădăcină?

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

418. Clădirile pe o stradă sunt numerotate la rând de la 1 până la 24. De câte ori cifra 1 nimereste în numerotare?
419. Aduceți expresia la o formă mai simplă  

$$\left(\frac{a}{a^2 - 25} + \frac{5}{5 - a} + \frac{1}{a + 5}\right) : \left(\frac{28 - a^2}{a + 5} + a - 5\right).$$
420. Un muncitor a primit 4700 grn ca avans cu bancnote a câte 100 grn și a câte 500 grn. Câte bancnote de fiecare valoare nominală erau, dacă de tot erau 31 de bancnote?

## NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

421. Aflați toate astfel de numere naturale  $n$  cu trei cifre, ca suma cifrelor a numărului  $n$  să fie de 11 ori mai mică decât însuși numărul  $n$ .

## Cresc oare în grădina radicalii?



În Grecia Antică operația extragerii rădăcinii, era identificată cu căutarea laturii pătratului, fiind cunoscută aria lui, iar însuși rădăcina pătrată era numită „latură”.



**Rene Descartes**  
(1596–1650)

În India Străveche cuvântul „mula” înseamnă „începutul”, „baza”, „rădăcina copacului”. Acest cuvânt au început să-l utilizeze și la latura pătratului, posibil, provenind din așa o asociație: din latura pătratului, ca și din rădăcină, crește însuși pătratul. Probabil, de aceea în limba latină noțiunile „latură” și „rădăcină” se exprimă ca unul și același cuvânt – *radix*. De la acest cuvânt provine și termenul „radical”.

Cuvântul *radix* poate, de asemenea, fi tradus ca „reolis” sau „rizocarp” – partea a plantei, rădăcină modificată, care poate fi bună de mâncat.

În sec. 13–15 matematicienii europeni prescurtând cuvântul *radix* notau rădăcina pătrată

cu semnele  $R$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $R^2$ . De exemplu, scrierea  $\sqrt{7}$  avea următoarea înfățișare:  $R^27$ .

În sec. 16 au început să folosească semnul  $\forall$ . Proveniența acestui simbol, probabil, este legată cu înfățișarea literei latine  $r$ , scrisă de mână.

În sec. 17 renumitul matematician francez Rene Descartes îmbinând semnul  $\forall$  cu liniuța orizontală, a obținut simbolul  $\sqrt{\quad}$ , pe care noi îl folosim în ziua de azi.

## Prima problemă a primei olimpiade matematice din Ucraina



Problema 391(4) merită atenție și de aceea că în a. 1935 anume cu a ei condiție începea textul primei olimpiade matematice din Ucraina. Inițiatorul acestor întreceri matematice a fost ilustrul matematician ucrainean, academicul Mâhaylo Pâlâpovâci Kravciuc<sup>1</sup>.

De atunci au trecut mai mult de 80 de ani și în acest interval de timp olimpiadele matematice au devenit pentru mulți elevi talentați primul pas pe calea creației științifice. La ora actuală așa nume ca O.V.Pogorelov, S.G.Krein, N.O.Krasnoseliskiy, V.G.Drinfelid sunt cunoscute în întreaga lume științifică. Acești remarcabili învățați în diferiți ani au fost învingători ai olimpiadelor matematice din Ucraina.

Cu satisfacție menționăm că și azi olimpiadele matematice din Ucraina sunt foarte populare. Zeci de mii de elevi ai țării noastre la diferite etape participă la această întrecere matematică. În organizarea și petrecerea olimpiadelor sunt angrenați cei mai buni învățați, metodiști, profesori. Anume datorită entuziasmului și a profesionalismului lor echipa Ucrainei reprezintă cu demnitate țara noastră la olimpiadele matematice internaționale.

Vă sfătuim, dragi elevi ai clasei a 8-a, să participați la olimpiadele matematice.

---

<sup>1</sup> Pe primul forțaș al manualului este reprezentat monumentul lui M.P.Kravciuc, ridicat pe teritoriul Universității Tehnice naționale a Ucrainei „Institutul politehnic din Kiyv”. Pe baza acestui așezământ de învățământ o dată în doi ani au loc Conferințe Matematice Internaționale academicianul M.P. Kravciuc.

### 13. Mulțimea și elementele ei. Submulțimea



Noi frecvent vorbim: turmă de oi, buchet de flori, colecție de timbre, banc de pești, stol de păsări, roi de albine, colecție de tablouri, set de tocuri, companie de prieteni.

Dacă în aceste perechi de amestecat primele cuvinte, atunci se primesc îmbinări de cuvinte hazlii: buchet de tablouri, colecție de prieteni. Totodată așa îmbinări de cuvinte ca colecție de pești, colecție de păsări, colecție de tablouri, colecție de tocuri și altele sunt acceptabile. Chestia constă în aceea că cuvântul „colecție” este destul de universal. Dar în matematică este un termen cu care se poate înlocui oricare din primele cuvinte din perechile expuse. Acest termen este **mulțimea**.

Să mai aducem câteva exemple de mulțimi:

- mulțimea elevilor din clasa voastră;
- mulțimea planetelor din Sistemul Solar;
- mulțimea numerelor de două cifre;
- mulțimea perechilor de numere  $(x; y)$ , care sunt soluțiile ecuației  $x^2 + y^2 = 1$ .

Unor, a celor mai importante mulțimi li s-au dat denumiri cunoscute de toți:

- mulțimea punctelor unui plan – **figură geometrică**;
- mulțimea punctelor care au proprietatea dată – **loc geometric al punctelor (LGP)**;
- mulțimea valorilor ale argumentului funcției  $f$  – **domeniul de definiție al funcției  $f$** , pe care îl notează  $D(f)$ ;
- **mulțimea valorilor ale funcției  $f$**  – **domeniul de valori ale funcției  $f$** , pe care îl notează  $E(f)$ .

De regulă, mulțimile se notează cu literele majuscule ale alfabetului latin:  $A, B, C, D$  ș.a.m.d.

Obiectele care formează mulțimea dată se numesc **elemente** ale mulțimii date.

De obicei elementele se notează cu literele minuscule ale alfabetului latin:  $a, b, c, d$  ș.a.m.d.

Dacă  $a$  – este elementul mulțimii  $A$ , atunci se scrie:  $a \in A$  (se citește: „ $a$  aparține mulțimii  $A$ ”). Dacă  $b$  nu aparține mulțimii  $A$  (nu este elementul ei), atunci se scrie:  $b \notin A$  (se citește: „ $b$  nu aparține mulțimii  $A$ ”).

Dacă mulțimea  $A$  constă din trei elemente  $a, b, c$ , atunci se scrie:  $A = \{a, b, c\}$ .

Dacă  $M$  – mulțimea divizorilor naturali ai numărului 6, atunci se scrie:  $M = \{1, 2, 3, 6\}$ . Mulțimea divizorilor ai numărului 6, care sunt numere compuse, are aspectul:  $\{6\}$ . Acesta-i exemplu de **mulțime cu un singur element**.

A da mulțimea cu ajutorul acoladelor, în care este indicată lista elementelor ei, este comod în acele cazuri, când mulțimea constă dintr-o cantitate nu mare de elemente.

**Definiție.** Două mulțimi  $A$  și  $B$  se numesc egale, dacă ele constau din unele și aceleași elemente, adică fiecare element al mulțimii  $A$  aparține mulțimii  $B$  și, invers, fiecare element al mulțimii  $B$  aparține mulțimii  $A$ .

Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  sunt egale, atunci se scrie:  $A = B$ .

Din definiție rezultă că **mulțimea se determină univoc de către elementele ei**. Dacă mulțimea este scrisă cu ajutorul acoladelor, atunci ordinea, în care sunt scrise elementele ei, nu are însemnătate. Astfel, sunt posibile șase variante de scriere a mulțimii care constă din trei elemente  $a, b, c$ :

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Deoarece din definiția mulțimilor egale rezultă, că, de exemplu,  $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$ , de aceea mai departe vom considera mulțimi care constau din elemente diferite. Astfel, mulțimea literelor cuvântului „cosmodrom” are înfățișarea  $\{c, o, s, m, d, r\}$ .

Menționăm, că  $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ . Într-adevăr, mulțimea  $\{a\}$  este compusă dintr-un singur element  $a$ ; mulțimea  $\{\{a\}\}$  este compusă dintr-un singur element – mulțimea  $\{a\}$ .

Cel mai des mulțimea se definește cu unul din următoarele două procedee.

*Primul procedeu* constă în aceea, că mulțimea este definită prin indicarea (enumerarea) tuturor elementelor ei. Noi deja am utilizat acest procedeu, scriind mulțimea cu ajutorul acoladelor, în care am indicat enumerarea elementelor ei. E clar că nu orice mulțime poate fi definită cu acest procedeu. De exemplu, mulțimea numerelor pare este imposibil de o definit astfel.

*Al doilea procedeu* constă în aceea, că este indicată **proprietatea specifică** a elementelor mulțimii, adică proprietatea, pe care o au toate elementele acestei mulțimi și numai ele. De exemplu, proprietatea „numărul natural fiind împărțit la 2 dă rest 1” definește mulțimea numerelor impare.

Dacă am defini o mulțime cu ajutorul proprietății specifice a elementelor ei, atunci poate ieși la iveală, că nici un obiect nu posedă această proprietate.

Să ne adresăm la exemple.

- Mulțimea triunghiurilor, ale căror laturi sunt proporționale cu numerele 1, 2, 5. Din inegalitatea triunghiului rezultă că această mulțime nu conține nici un element.



- Notăm cu  $A$  mulțimea elevilor clasei voastre care sunt maeștrii în sportul de șah. Se poate întâmpla că mulțimea  $A$ , de asemenea, nu conține nici un element.
- Cercetând mulțimea soluțiilor unei ecuații arbitrare, este necesar de prevăzut situația când ecuația nu are rădăcini.

Exemplele aduse arată la aceea, că la totalitatea mulțimilor este comod de a mai raporta o mulțime deosebită, care nu conține nici un element. Ea este numită **mulțime vidă** și se notează cu simbolul  $\emptyset$ .

Menționăm, că mulțimea  $\{\emptyset\}$  nu este vidă, ea conține un singur element – mulțimea vidă.

Să considerăm mulțimea cifrelor ale sistemului zecimal de numerație:  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Separăm din mulțimea  $A$  elementele ei care sunt cifre pare. Obținem mulțimea  $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ , toate elementele căreia sunt elemente ale mulțimii  $A$ .

**Definiție.** Mulțimea  $B$  se numește **submulțimea mulțimii  $A$** , dacă fiecare element al mulțimii  $B$  este elementul mulțimii  $A$ .

Aceasta se scrie astfel:  $B \subset A$  sau  $A \supset B$  (se citește: „mulțimea  $B$  este submulțimea mulțimii  $A$ ” sau „mulțimea  $A$  conține mulțimea  $B$ ”).

Să examinăm exemple:

- mulțimea elevilor ai clasei voastre este submulțimea mulțimii elevilor școlii voastre;
- mulțimea mamiferelor este submulțimea mulțimii vertebratelor;
- mulțimea punctelor semidreței  $CB$  este submulțimea mulțimii punctelor dreptei  $AB$  (fig. 19);
- mulțimea dreptunghiurilor este submulțimea mulțimii paralelogramelor;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$ .



Fig. 19

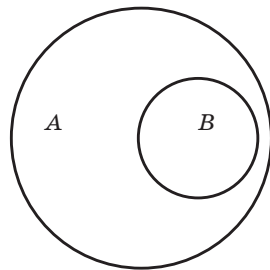


Fig. 20

Pentru ilustrarea corelației dintre mulțimi se folosesc de schemele, numite **diagramele lui Euler**.

În figura 20 este reprezentată mulțimea  $A$  (un cerc mare) și mulțimea  $B$  (cercul mai mic, care se conține în cel mare). Această schemă înseamnă, că  $B \subset A$  (sau  $A \supset B$ ).

Din definițiile submulțimii și a egalității mulțimilor reiese că dacă  $A \subset B$  și  $B \subset A$ , atunci  $A = B$ .

Dacă în mulțimea  $B$  nu este elementul, care nu aparține mulțimii  $A$ , atunci mulțimea  $B$  este submulțimea mulțimii  $A$ . Având în vedere aceste raționamente putem considera că mulțimea vidă este submulțimea oricărei mulțimi. Într-adevăr, mulțimea vidă nu conține nici un element, deci, ea nu are elementul, care nu aparține mulțimii date  $A$ . De aceea pentru mulțimea arbitrară  $A$  este justă afirmația:  $\emptyset \subset A$ .

Orice mulțime  $A$  este submulțimea a ei însăși, adică  $A \subset A$ .

**EXEMPLU** Scrieți toate submulțimile mulțimii  $A = \{a, b, c\}$ .

*Rezolvare.* Avem:  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset$ . ▲



1. Cum este notată mulțimea și elementele ei?
2. Cum se notează domeniul de definiție și domeniul de valori al funcției?
3. Cum de scris că elementul aparține (nu aparține) mulțimii  $A$ ?
4. Care mulțimi se numesc egale?
5. Care procedee de definire ale mulțimilor există?
6. Care mulțime se numește vidă? Cum ea este notată?
7. Care mulțime este numită submulțimea mulțimii date?
8. Cum este ilustrată intuitiv corelația dintre mulțimi?
9. Care mulțime este submulțimea mulțimii arbitrară?

## EXERCIȚII

**422.**° Cum este numită mulțimea punctelor unui unghi, egal depărtate de la laturile lui?

**423.**° Cum se numește mulțimea lupilor care se supune unei căpetenii?

**424.**° Numiți o mulțime oarecare de elevi ai școlii voastre.

**425.**° Cum se numește mulțimea profesorilor care lucrează în aceeași școală?

**426.**° Se dă funcția  $f(x) = x^2$ . Puneți în loc de asterisc semnul  $\in$  sau  $\notin$  astfel, ca să se obțină o afirmație justă:

- 1)  $3 \in D(f)$ ;      2)  $0 \in D(f)$ ;      3)  $0 \in E(f)$ ;      4)  $-\frac{1}{2} \in E(f)$ .

**427.°** Care din afirmațiile aduse sunt juste:

- 1)  $1 \in \{1, 2, 3\}$ ;                      3)  $\{1\} \in \{1, 2\}$ ;                      5)  $\emptyset \notin \{1, 2\}$ ;  
 2)  $1 \notin \{1\}$ ;                              4)  $\{1\} \in \{\{1\}\}$ ;                      6)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ?

**428.°** Scrieți mulțimea rădăcinilor ecuațiilor:

- 1)  $x(x - 1) = 0$ ;                              3)  $x = 2$ ;  
 2)  $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$ ;                      4)  $x^2 + 3 = 0$ .

**429.°** Definiți cu ajutorul enumerării elementelor mulțimea:

- 1) fracțiilor regulate cu numitorul 7;  
 2) fracțiilor regulate, ale căror numitori nu sunt mai mari de 4;  
 3) a literelor din cuvântul „matematica”;  
 4) a cifrelor numărului 5555.

**430.°** Numiți câteva submulțimi de elevi ai clasei voastre.

**431.°** Fie că  $A$  – mulțimea literelor cuvântului „coordonata”. Mulțimea literelor ale cărei cuvânt este submulțimea mulțimii  $A$ :

- 1) vizuină;                              5) ațe;                              9) ordonată;  
 2) tractor;                              6) coajă;                              10) drum;  
 3) tablou;                              7) ședință;                              11) coroană;  
 4) crocodil;                              8) cadou;                              12) cardinal?

**432.°** Fie  $A$  – mulțimea cifrelor ale numărului 1958. Oare este mulțimea cifrelor numărului  $x$  submulțimea mulțimii  $A$  dacă:

- 1)  $x = 98$ ;                              3)  $x = 519$ ;                              5)  $x = 195\ 888$ ;  
 2)  $x = 9510$ ;                              4)  $x = 5858$ ;                              6)  $x = 91\ 258$ ?

**433.°** Fie  $A \neq \emptyset$ . Care două submulțimi totdeauna le are mulțimea  $A$ ?

**434.°** Oare sunt egale mulțimile  $A$  și  $B$ , dacă:

- 1)  $A = \{1, 2\}, B = \{2, 1\}$ ;                              3)  $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}$ ;  
 2)  $A = \{(1; 0)\}, B = \{(0; 1)\}$ ;

**435.°** Oare sunt egale mulțimile  $A$  și  $B$ , dacă:

- 1)  $A$  – mulțimea rădăcinilor ecuației  $|x| = x$ ,  $B$  – mulțimea numerelor nenegative;  
 2)  $A$  – mulțimea patruleterelor la care laturile opuse două câte două sunt egale;  $B$  – mulțimea patruleterelor, ale căror diagonale sunt împărțite de către punctul lor de intersecție în jumătăți?

**436.°** Care din mulțimile următoare sunt egale cu mulțimea vidă:

- 1) mulțimea triunghiurilor, ale căror sumă a unghiurilor este egală cu  $181^\circ$ ;  
 2) mulțimea vârfurilor de munți mai înalte de 8800 m;  
 3) mulțimea triunghiurilor ascuțitunghice, ale căror mediană este egală cu jumătate din latura, la care este dusă;  
 4) mulțimea funcțiilor, ale căror grafice sunt circumferințe?

**437.°** Demonstrați că dacă  $A \subset B$  și  $B \subset C$ , atunci  $A \subset C$ .

438.\* Amplasați mulțimile date în așa o consecutivitate ca fiecare mulțime următoare să fie submulțimea celei anterioare:

- 1)  $A$  – mulțimea dreptunghiurilor,  $B$  – mulțimea patrulaterelor,  $C$  – mulțimea pătratelor,  $D$  – mulțimea paralelogramelor;
- 2)  $A$  – mulțimea mamiferelor,  $B$  – mulțimea canidelor,  $C$  – mulțimea vertebralelor,  $D$  – mulțimea lupilor,  $E$  – mulțimea mamiferelor de pradă.

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

439. Simplificați expresia:

$$1) \frac{5b}{b-3} - \frac{b+6}{2b-6} \cdot \frac{90}{b^2+6b}; \quad 2) \frac{b+2}{b^2-2b+1} : \frac{b^2-4}{3b-3} - \frac{3}{b-2}.$$

440. O barcă cu motor a navigat 36 de km după curentul râului 3 ore și 36,8 km împotriva curentului în 4 ore. Care este viteza curentului râului?

441. Într-o cutie sunt 42 creioane, din care 14 – roșii, 16 – albastre, iar restul – verzi. Care este probabilitatea evenimentului că creionul luat la întâmplare nu va fi nici roșu, nici albastru?

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

442. Petrea și Dumitru zilnic scriu câte un număr. În prima zi fiecare băiat a scris numărul 1. În fiecare zi următoare Petrea scrie numărul 1, iar Dumitru – numărul care este egal cu suma numerelor, scrise de băieți în zilele anterioare. Oare poate într-o oarecare zi Dumitru să scrie numărul, a cărui scriere se va termina cu 101?

## 14. Mulțimi numerice<sup>1</sup>

Numerele naturale sunt primele numere pe care au început să le folosească oamenii. Cu ele ați făcut cunoștință în copilărie când v-ați învățat a număra obiectele. Toate numerele naturale formează **mulțimea numerelor naturale**, pe care o notăm cu litera  $\mathbb{N}$ .

Necesitățile practice ale oamenilor au condiționat apariția numerelor fracționare. Cu timpul a apărut necesitatea de-a considera mărimi, pentru caracterizarea cărora, a ieșit la iveală, că numerele pozitive sunt insuficiente. Așa au apărut numerele negative.

<sup>1</sup> În acest punct se folosește simbolică teoriei mulțimilor, cu elementele cărei sunteți cunoscuți din cursul matematicii cursurilor anterioare. Dacă este necesar v-ă sfătuim să vă adresați la p.13.

Toate numerele naturale, numerele opuse lor și numărul zero formează **mulțimea numerelor întregi**, care se notează cu litera  $\mathbb{Z}$ .

De exemplu,  $-2 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \in \mathbb{Z}$ ,  $5 \in \mathbb{Z}$ .

Mulțimea numerelor naturale este submulțimea mulțimii numerelor întregi, adică  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

Numerele întregi și fracționare (atât cele pozitive, cât și cele negative) formează **mulțimea numerelor raționale**, care se notează cu litera  $\mathbb{Q}$ . De

exemplu,  $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ ,  $-0,2 \in \mathbb{Q}$ ,  $0 \in \mathbb{Q}$ ,  $-3 \in \mathbb{Q}$ ,  $15 \in \mathbb{Q}$ .

E clar, că  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Schema, reprezentată în figura 21 arată corelativitatea mulțimilor  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  și  $\mathbb{Q}$ .

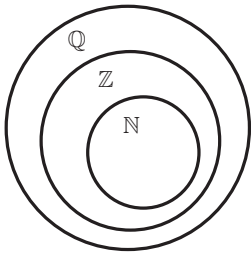


Fig. 21

Fiecare număr rațional poate fi dat în formă de raportul  $\frac{m}{n}$ , unde  $m$  – număr întreg, iar  $n$  – număr natural. De exemplu,  $5 = \frac{5}{1}$ ,  $-3 = \frac{-3}{1}$ ,  $0,2 = \frac{1}{5}$ ,

$0 = \frac{0}{7}$ ,  $5,3 = \frac{53}{10}$ . Cu posibilitatea unei astfel de reprezentări este legată

denumirea „număr rațional”: unu din înțelesurile cuvântului latin ratio este „raportul”.

În clasa a 6-a voi ați aflat că fiecare număr rațional poate fi exprimat în formă de fracție ze-

cimală finită sau de fracție zecimală infinită periodică. Pentru fracția  $\frac{m}{n}$  o astfel de exprimare poate fi obținută, efectuând împărțirea numărului  $m$  la numărul  $n$  în formă de unghi.

De exemplu,  $\frac{5}{8} = 0,625$ ,  $\frac{5}{11} = 0,454545\dots$

Numărul  $\frac{5}{8}$  este scris în formă de fracție zecimală finită, iar numărul  $\frac{5}{11}$  – în formă de fracție zecimală infinită periodică. În scrierea  $0,454545\dots$  cifrele 4 și 5 se repetă periodic. Grupa cifrelor care se repetă se numește **perioada fracției** se scrie în paranteze rotunde. În cazul de față perioada este 45, iar fracția  $\frac{5}{11}$  se scrie astfel:  $\frac{5}{11} = 0,(45)$ .

Remarcăm că orice fracție zecimală finită și orice număr întreg poate fi reprezentat în formă de fracție zecimală infinită periodică. De exemplu,  $0,625 = 0,6250000\dots = 0,625(0)$ ;  
 $2 = 2,000\dots = 2,(0)$ .

Așadar, **orice număr rațional poate fi reprezentat în formă de fracție zecimală infinită periodică.**

Justă este și următoarea afirmație: fiecare **fracție zecimală infinită periodică este scrierea unui număr rațional**.

În clasa a 9-a veți învăța a scrie fracția zecimală infinită în formă de fracție ordinară.

Suma și produsul a două numere naturale sunt numere naturale. Însă diferența numerelor naturale nu totdeauna are așa o proprietate. De exemplu,  $(5 - 7) \notin \mathbb{N}$ .

Suma, diferența, produsul a două numere întregi sunt numere întregi. Dar câtul numerelor întregi nu totdeauna are așa o proprietate. De exemplu,  $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$ .

Suma, diferența, produsul și câtul (afară de împărțirea la zero) a două numere raționale sunt numere raționale.

Deci, operația scăderii numerelor naturale poate scoate rezultatul în afara limitelor mulțimii  $\mathbb{N}$ , operația împărțirii a numerelor întregi – în afara limitelor mulțimii  $\mathbb{Z}$ , însă efectuarea oricăror operații aritmetice cu numerele raționale nu scoate rezultatul în afara limitelor mulțimii  $\mathbb{Q}$ .

Ați făcut cunoștință cu o operație nouă – extragerea rădăcinii pătrate. Apare o întrebare naturală: oare totdeauna rădăcina pătrată dintr-un număr rațional nenegativ este număr rațional? Cu alte cuvinte, poate oare operația extragerii rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional să scoată rezultatul în afara hotarelor mulțimii  $\mathbb{Q}$ ?

Să cercetăm ecuația  $x^2 = 2$ . Deoarece  $2 > 0$ , rezultă că această ecuație are două rădăcini  $\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2}$  (fig.22). Dar *nu există număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2* (demonstrarea acestei afirmații voi o puteți găsi în capitolul „După ce s-au făcut lecțiile” în povestirea „Descoperirea iraționalității”), adică numerele  $\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2}$  nu sunt raționale. Aceste numere sunt exemple de **numere iraționale** (prefixul „ir” înseamnă „negare”).

Așadar, operația extragerii rădăcinii dintr-un număr rațional poate scoate rezultatul în afara limitelor mulțimii  $\mathbb{Q}$ .

Nici un număr irațional nu poate fi reprezentat în formă de fracția  $\frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , și deci, în formă de fracție zecimală infinită periodică.

Numerele iraționale pot fi prezentate în formă de **fracții zecimale infinite neperiodice**.

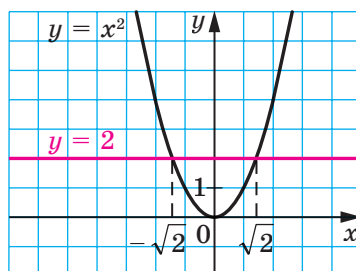


Fig. 22

De exemplu, cu ajutorul unei programe speciale pentru calculator se poate stabili, că

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097... .$$

Numerele  $\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2}$  – acestea nu sunt primele numere iraționale la care voi vă întâlniți. Numărul  $\pi$ , care este egal cu raportul lungimii circumferinței la diametrul ei, tot este irațional:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937... .$$

Numerele iraționale apar nu numai în rezultatul extragerii rădăcinii pătrate. Ele pot fi alcătuite, construind fracții zecimale neperiodice infinite.

De exemplu, numărul (... ..) (după virgulă sunt scrise consecutiv puterile numărului 10) este irațional. Într-adevăr, dacă admitem, că fracția zecimală dată are perioadă, care constă din  $n$  cifre, atunci de la un anumit loc această perioadă completamente va fi alcătuită din zerouri, cu alte cuvinte, începând cu acest loc, în scriere nu trebuie să fie nici o cifră de unu, ceea ce contrazice construcției numărului.

Împreună mulțimile numerelor iraționale și raționale formează **mulțimea numerelor reale**. Pe ea o notăm cu litera  $\mathbb{R}$  (prima literă a cuvântului latin *realis* – „real”, „acel ce într-adevăr există”).

Acum „lănțișorul”  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  poate fi continuat:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Legătura dintre mulțimile numerice, pe care le-am examinat în acest punct, este ilustrată de schema, reprezentată în figura 23.

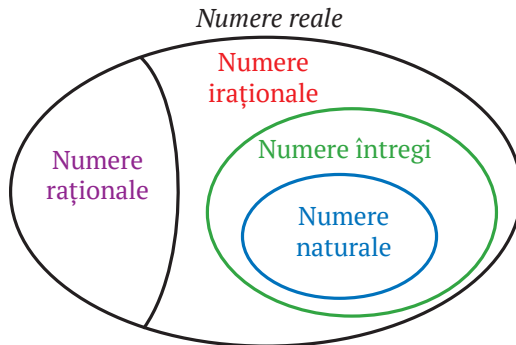


Fig. 23

Lungimea oricărui segment poate fi exprimată cu un număr real. Acest fapt permite stabilirea legăturii dintre mulțimea  $\mathbb{R}$  și mulțimea punctelor drepte de coordonate. Îi punem în corespondență punctului  $O$ , punctului de referință, numărul zero. Fiecărui punct  $A$  al drepte de coordonate, diferit de punctul  $O$ , îi punem în corespondență un singur număr, care este egal cu lungimea segmentului  $OA$ , dacă punctul  $A$  este amplasat în dreapta

punctului  $O$ , și numărul, opus lungimii segmentului  $OA$ , dacă punctul  $A$  este amplasat în partea stângă de punctul  $O$ . De asemenea este clar că fiecare număr real este corespunzător unui singur punct al dreptei de coordonate.

Cu numerele reale pot fi efectuate patru operații aritmetice (cu excepția împărțirii la zero), în rezultat vom obține număr real. Acestor operații le sunt specifice proprietățile obișnuite pentru voi:

$a + b = b + a$	Legea comutativă a adunării
$ab = ba$	Legea comutativă a înmulțirii
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Proprietatea asociativă a adunării
$(ab)c = a(bc)$	Proprietatea asociativă a înmulțirii
$a(b + c) = ab + ac$	Proprietatea distributivă a înmulțirii față de adunare

Numerele reale pot fi comparate, aplicând regulile de comparare ale fracțiilor zecimale, adică compararea cifrelor ale ordinilor corespunzătoare. De exemplu,  $7,853126... < 7,853211...$ .

Numărul real arbitrar pozitiv este mai mare decât zero și decât orice număr real negativ. Numărul real arbitrar negativ este mai mic decât zero. Din două numere reale negative este mai mare acel, al cărui modul este mai mic.

Dacă am nota pe dreapta de coordonate două numere reale, atunci cel mai mic dintre ele va fi situat la stânga celui mai mare.

Aflând lungimea circumferinței și aria cercului voi vă foloseați de **valoarea aproximativă a numărului  $\pi$**  (de exemplu,  $\pi \approx 3,14$ ). Analogic în procesul rezolvării problemelor practice, în care trebuie de efectuat operații cu numere reale, după necesitate aceste numere sunt înlocuite cu valorile lor aproximative. De exemplu, pentru numărul  $\sqrt{2}$  se poate de folosit următoarele egalități aproximative:  $\sqrt{2} \approx 1,414$  sau  $\sqrt{2} \approx 1,415$ . Prima din ele este valoarea aproximativă a numărului  $\sqrt{2}$  luată prin lipsă cu precizia de 0,001, a doua  $\sqrt{2}$  – valoarea aproximativă a numărului cu adaus cu precizia de 0,001. Mai amănunt despre valorile aproximative veți afla în clasa a 9-a.

În încheiere, accentuăm că din orice număr real negativ se poate extrage rădăcina pătrată și în rezultatul acestei operații se poate obține număr real. Așadar, operația extragerii rădăcinii pătrate dintr-un număr real negativ nu scoate rezultatul în afara limitelor mulțimii  $\mathbb{R}$ .





1. Care numere formează mulțimea numerelor întregi?
2. Cu ce literă se notează mulțimea numerelor întregi?
3. Care numere formează mulțimea numerelor raționale?
4. Cu ce literă se notează mulțimea numerelor raționale?
5. În formă de care raport poate fi exprimat orice număr rațional?
6. Cum sunt legate între ele numerele raționale și fracțiile zecimale infinite periodice?
7. Cum se numesc numerele care nu sunt raționale?
8. Care mulțimi, luate împreună, formează mulțimea numerelor reale?
9. Cu ce literă se înseamnă mulțimea numerelor reale?
10. Cum sunt interconexate mulțimile numerice  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{R}$ ?

## EXERCIȚII

**443.°** Care din afirmațiile aduse este falsă:

- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| 1) $-3$ – număr real;     | 3) $-3$ – număr întreg;  |
| 2) $-3$ – număr rațional; | 4) $-3$ – număr natural? |

**444.°** Oare sunt juste afirmațiile:

- |                         |                            |                                     |
|-------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 1) $1 \in \mathbb{N}$ ; | 4) $1 \in \mathbb{R}$ ;    | 7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$ ;   |
| 2) $1 \in \mathbb{Z}$ ; | 5) $-2,3 \in \mathbb{N}$ ; | 8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$ ; |
| 3) $1 \in \mathbb{Q}$ ; | 6) $-2,3 \in \mathbb{R}$ ; | 9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$ ? |

**445.°** Oare sunt juste afirmațiile:

- |                            |                                    |                                       |                                |
|----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $0 \in \mathbb{N}$ ;    | 3) $0 \in \mathbb{R}$ ;            | 5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$ ; | 7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$ ; |
| 2) $0 \notin \mathbb{Z}$ ; | 4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ ; | 6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$ ;        | 8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$ ? |

**446.°** Oare sunt juste afirmațiile:

- 1) orice număr natural este număr întreg;
- 2) orice număr natural este rațional;
- 3) orice număr natural este real;
- 4) orice număr rațional este întreg;
- 5) orice număr real este rațional;
- 6) orice număr rațional este real;
- 7) orice număr irațional este real;
- 8) orice număr real este sau rațional, sau irațional?

**447.°** Care din fracțiile infinite date sunt scrieri ale numerelor raționale, iar care – a celor iraționale:

- 1)  $0,(3)$ ;
- 2)  $0,4(32)$ ;

3) 0,20200200020... (numărul de zerouri dintre cifrele vecine de doi se mărește consecutiv cu 1)?

**448.**° Comparați:

1) 6,542... și 6,452...;                      2) -24,064... și -24,165...

**449.**° Comparați:

1) 0,234... și 0,225...;                      2) -1,333... și -1,345...

**450.**° Cu ajutorul microcalculatorului aflați valoarea aproximativă a numărului  $\sqrt{3}$  cu precizia de 0,01: 1) prin lipsă; 2) prin adaus.

**451.**° Cu ajutorul microcalculatorului aflați valoarea aproximativă a numărului  $\sqrt{5}$  cu precizia de 0,01: 1) prin lipsă; 2) prin adaus.

**452.**° Indicați o valoare oarecare a lui  $a$ , pentru care ecuația  $x^2 = a$ :

- 1) are două rădăcini raționale;
- 2) are două rădăcini iraționale;
- 3) nu are rădăcini.

**453.**° Comparați numerele:

- 1)  $\frac{43}{7}$  și 6,12;                                      4) -2,(36) și -2,36;
- 2) 3,(24) și 3,24;                                5) 7,(18) și 7,(17).
- 3)  $\pi$  și 3,(14);

**454.**° Comparați numerele:

- 1)  $\frac{1}{6}$  și 0,2;                                      2)  $\frac{7}{9}$  și 0,77;                                      3) -1,(645) și -1,(643).

**455.**° Scrieți în ordinea descrescătoare numerele 3,(16);  $\pi$ ; -1,82...; -0,08...; 2,(136).

**456.**° Scrieți în ordinea crescătoare numerele 1,57; 1,571...;  $\frac{\pi}{2}$ ; 1,(56); 1,(572).

**457.**\*\* Demonstrați că suma, diferența, produsul și câtul a două numere raționale sunt numere raționale.

**458.**\*\* Demonstrați că suma numerelor raționale și iraționale este număr irațional.

**459.**\*\* Oare este justă afirmația, că:

- 1) suma a oricăror două numere iraționale este număr irațional;
- 2) produsul a două numere iraționale este număr irațional;
- 3) produsul a unui număr irațional arbitrar și a oricărui număr rațional este număr irațional?

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

460. La fiecare scară a unui bloc de locuințe cu 9 etaje la fiecare etaj sunt câte opt apartamente. La care scară și la care etaj se află apartamentul Nr.186?

461. Numerele naturale  $a$  și  $b$  sunt astfel:  $a$  – par,  $b$  – impar. Valoarea căreia din expresiile date nu poate fi număr natural:

1)  $\frac{8b}{5a}$ ;      2)  $\frac{a^2}{b^2}$ ;      3)  $\frac{4a}{b}$ ;      4)  $\frac{b^2}{a}$ ?

462. Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale variabilei valoarea expresie

$$\left( \frac{3}{4-4a+a^2} + \frac{2}{a^2-4} \right) \cdot (a-2)^2 - \frac{2a-4}{a+2}$$

nu depinde de valoarea lui  $a$ .

463. Într-o vadră sunt câțiva litri de apă. Dacă vărsăm jumătate din apă, apoi în ea va rămâne cu 14 l de apă mai puțin, decât încape în vadră.

Dacă mai turnăm 4 l în vadră, atunci volumul apei va alcătui  $\frac{2}{3}$  din cantitatea de apă ce încapă în vadră. Câți litri de apă încap în vadră?

## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

464. Aflați valoarea expresiei:

1)  $|-3,5| - |2,6|$ ;      2)  $|-9,6| - |-32|$ .

465. Modulul cărui număr este egal cu 6?

466. Pentru care numere sunt juste egalitățile:

1)  $|a| = a$ ;      3)  $|a| = |-a|$ ;  
2)  $|a| = -a$ ;      4)  $|a| = -|a|$ ?

467. Pentru care numere în același timp au loc ambele egalități:

$$|a| = a \text{ și } |a| = -a?$$

468. Aflați valoarea fiecărei expresii  $a^2$ ,  $(-a)^2$ ,  $|a|^2$  pentru  $a = -8$  și pentru  $a = 7$ . Faceți concluzia.

469. Se știe că  $a > 0$ ,  $c < 0$ . Comparați cu zero valoarea expresiei:

1)  $a^3c^4$ ;      2)  $ac^5$ .

**NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI**

470. Într-o companie sunt 100 de soldați. În fiecare noapte ies la timpul de gazdă trei soldați. Oare se poate organiza timpul de gazdă într-un astfel de mod, ca peste un oarecare interval de timp fiecare soldat să fie în gazdă( serviciu) cu fiecare din restul soldaților exact o singură dată?

**Descoperirea iraționalității**



În p.14, rezolvând grafic ecuația  $x^2 = 2$ , noi am stabilit că lungimea fiecărui segment  $OA$  și  $OB$  este egală cu  $\sqrt{2}$  (fig. 24) Să arătăm că numărul  $\sqrt{2}$  este irațional.

Admitem că numărul  $\sqrt{2}$  este rațional. Atunci el poate fi exprimat în formă de fracție ireductibilă  $\frac{m}{n}$ , unde  $m$  și  $n$  – numere naturale. Avem:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Atunci } (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2; 2 = \frac{m^2}{n^2}; m^2 = 2n^2.$$

Din ultima egalitate rezultă, că numărul  $m^2$  este par. Iar aceasta înseamnă că este par și numărul  $m$ . Atunci  $m = 2k$ , unde  $k$  – un oarecare număr natural. Avem:  $(2k)^2 = 2n^2; 4k^2 = 2n^2; n^2 = 2k^2$ . De aici reiese că numărul  $n^2$ , deci, și numărul  $n$  sunt pari.

Astfel, numărătorul și numitorul fracției  $\frac{m}{n}$  – sunt numere pare. Așadar, fracția este simplificabilă. Am obținut contradicție.

Exemplul adus arată că există segmente (în cazul nostru acestea-s segmentele  $OA$  și  $OB$  din figura 24) ale căror lungimi nu pot fi exprimate prin numere raționale, adică *pentru măsurarea segmentelor numerele raționale sunt insuficiente.*

Acest fapt a fost descoperit în școala marelui învățat grec din vechime Pitagora.

La început pitagoreenii considerau că pentru orice segmente  $AB$  și  $CD$  totdeauna poate fi găsit un astfel de segment  $MN$ , care se conține în fiecare din ele de un număr întreg de ori. De aici reieșea, că raportul lungimilor a

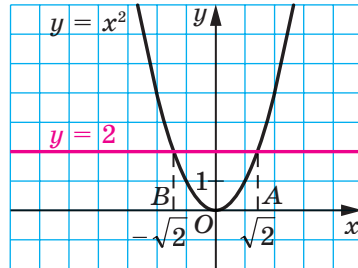


Fig. 24

două segmente arbitrare se exprimă prin raportul numerelor întregi, adică printr-un număr rațional.

De exemplu, în figura 25 avem:  $AB = 5MN$ ,  $CD = 2MN$  și  $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$ . Segmentul  $MN$  se numește **măsura comună** a segmentelor  $AB$  și  $CD$ .

Dacă pentru segmente există măsură comună, atunci ele se numesc **comen-surabile**. De exemplu, segmentele  $AB$  și  $CD$  (fig.25) sunt comun-măsurabile.

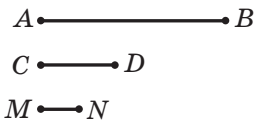


Fig. 25

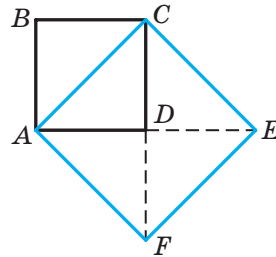
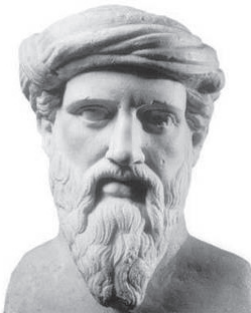


Fig. 26

Așadar, savanții greci din vechime considerau că oricare două segmente sunt comun-măsurabile. Iar din aceasta rezultă, că lungimea oricărui segment poate fi exprimată printr-un număr rațional.

Într-adevăr, fie că un oarecare segment  $AB$  este ales ca unitate. Atunci pentru segmentul  $AB$  și un alt oarecare segment  $CD$  există un segment cu lungimea  $e$ , care este măsura lor comună. Obținem:  $AB = ne$ ,  $CD = me$ , unde  $m$  și  $n$  – niște numere naturale. De aici  $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$ . Deoarece  $AB = 1$ , decurge că  $CD = \frac{m}{n}$ .



**Pitagora**  
(aprox. 570 – aprox.  
a 500 î. e. n.)

Dar înșiși pitagoreenii au făcut o descoperire excepțională. Ei au demonstrat, că diagonala și latura pătratului nu sunt comensurabile adică dacă primim latura pătratului drept unitate, atunci lungimea diagonalei pătratului nu poate fi exprimată printr-un număr rațional.

Pentru demonstrare să considerăm un pătrat arbitrar  $ABCD$  și luăm latura lui în calitate de unitate de lungime. Atunci aria lui este egală cu  $AB^2 = 1$ . Pe diagonala  $AC$  construim pătratul  $ACEF$  (fig.26). E clar că aria pătratului  $ACEF$  este de două ori mai mare decât aria pătratului  $ABCD$ . De aici  $AC^2 = 2$ , adică  $AC = \sqrt{2}$ .

Așadar, lungimea diagonalei  $AC$  nu poate fi exprimată printr-un număr rațional.

Această descoperire a schimbat unul din postulatele fundamentale ale învățaților greci din vechime, care consta în aceea, că raportul a două mărimi arbitrare se exprimă prin raportul a două numere întregi.

Există legenda despre aceea, că pitagoreenii țineau descoperirea numerelor iraționale în cea mai strictă taină, iar pe omul care a divulgat acest fapt, l-au pedepsit zeii: el a murit în timpul unui naufragiu.

## EXERCIȚII

1. Demonstrați că numărul  $\sqrt{3}$  este irațional.
2. Demonstrați că dacă numărul natural  $n$  nu este pătratul unui număr natural, atunci numărul  $\sqrt{n}$  este irațional.

## 15. Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice

Este ușor de verificat că  $\sqrt{5^2} = 5$ ,  $\sqrt{1,4^2} = 1,4$ ,  $\sqrt{0^2} = 0$ . S-ar părea că pentru orice valoare a lui  $a$  are loc egalitatea  $\sqrt{a^2} = a$ . Însă asta nu este așa. De exemplu, egalitatea  $\sqrt{(-5)^2} = -5$  este falsă deoarece  $-5 < 0$ . Într-adevăr  $\sqrt{(-5)^2} = 5$ . De asemenea se poate convinge în aceea, că, de exemplu  $\sqrt{(-7)^2} = 7$ ,  $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$ .

În general este justă așa o teoremă.

**Teorema 15.1.** Pentru orice număr real  $a$  este adevărată egalitatea

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

*Demonstrație.* Pentru a demonstra egalitatea  $\sqrt{a} = b$ , trebuie de demonstrat, că  $b \geq 0$  și  $b^2 = a$ .

Avem:  $|a| \geq 0$  pentru orice  $a$ .

De asemenea din definiția modulului rezultă că  $|a|^2 = a^2$ . ▲

Teorema următoare generalizează faptul demonstrat.

**Teorema 15.2 (rădăcina pătrată aritmetică din putere).** Pentru orice număr real  $a$  și orice număr natural  $n$  este justă egalitatea

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Demonstrarea acestei teoreme este analogică cu demonstrarea teoremei 15.1. Faceți această demonstrare de sine stătător.

**Teorema 15.3 (rădăcina pătrată aritmetică dintr-un produs).** Pentru numerele reale pozitive arbitrare  $a$  și  $b$  astfel, că  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , este justă egalitatea

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

*Demonstrație.* Avem:  $\sqrt{a} \geq 0$  și  $\sqrt{b} \geq 0$ . Atunci  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ . Afară de aceasta,  $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$ . Așadar, expresia  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  primește numai valori nenegative, și pătratul ei este egal cu  $ab$ . ▲

Această teoremă poate fi generalizată pentru produsul a trei și mai mulți factori. De exemplu, dacă  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  și  $c \geq 0$ , atunci

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

**Teorema 15.4 (rădăcina pătrată aritmetică dintr-o fracție).** Pentru oricare numere reale  $a$  și  $b$  astfel, că  $a \geq 0$  și  $b > 0$ , este valabilă egalitatea

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Demonstrarea acestei teoreme este analogică cu demonstrarea teoremei 15.3. Demonstrați-o de sine stătător.

Evident că din două pătrate cu ariile  $S_1$  și  $S_2$  (fig.27) latură mai mare o are acela, la care aria este mai mare, adică dacă  $S_1 > S_2$ , atunci  $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$ .

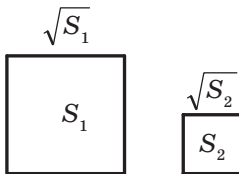


Fig. 27

Acest raționament evident ilustrează următoarea proprietate a rădăcinii pătrate aritmetice: **pentru oricare numere reale nenegative  $a_1$  și  $a_2$  astfel, că  $a_1 > a_2$ , este justă inegalitatea  $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$ .**

**EXEMPLU 1** Aflați valoarea expresiei:

$$1) \sqrt{(-7,3)^2}; 2) \sqrt{1,2^4}; 3) \sqrt{0,81 \cdot 225}; 4) \sqrt{\frac{16}{49}}.$$

$$\text{Rezolvare. } 1) \sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3.$$

$$2) \sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44.$$

$$3) \sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5.$$

$$4) \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}. \quad \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Aflați valoarea expresiei: 1)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$ .

*Rezolvare.* 1) Înlocuind produsul rădăcinilor cu rădăcina produsului, obținem:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Schimbând câțul rădăcinilor cu rădăcina câțului (a fracției) vom avea:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 3** Aduceți la o formă mai simplă expresia: 1)  $\sqrt{a^{14}}$ ; 2)  $\sqrt{9a^6}$ , dacă  $a \leq 0$ ; 3)  $\sqrt{m^2 n^2}$ , dacă  $m \geq 0$ ,  $n \leq 0$ ; 4)  $\sqrt{a^{36}}$ .

*Rezolvare.* 1) Conform teoremei despre rădăcina pătrată aritmetică dintr-o putere avem:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{dacă } a \geq 0, \\ -a^7, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

2) Avem:  $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$ . Deoarece conform condiției  $a \leq 0$ , atunci  $a^3 \leq 0$ . Rezultă

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) Avem:  $\sqrt{m^2 n^2} = |m| \cdot |n|$ . Deoarece conform condiției  $m \geq 0$ , atunci  $|m| = m$ . Deoarece  $n \leq 0$ , atunci  $|n| = -n$ . Deci,  $|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$ .

4) Avem:  $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$ . Deoarece  $a^{18} \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$ .  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 4** Aflați valoarea expresiei: 1)  $\sqrt{37^2 - 12^2}$ ; 2)  $\sqrt{8 \cdot 648}$ ; 3)  $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$ .

*Rezolvare.* 1) Transformând expresia de sub radical conform formulei diferenței pătratelor, obținem:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37 - 12)(37 + 12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) Reprezentând expresia de sub radical în formă de produsul pătratelor ale numerelor raționale, obținem:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3)  $\sqrt{16,9 \cdot 0,4} = \sqrt{169 \cdot 0,04} = 13 \cdot 0,2 = 2,6$ .  $\blacktriangle$



**EXEMPLU 5** Construiți graficul funcției

$$y = \sqrt{x^2 + x}.$$

*Rezolvare.* Deoarece  $\sqrt{x^2} = |x|$ , avem că  
 $y = |x| + x$ .

Dacă  $x \geq 0$ , atunci  $y = x + x = 2x$ .

Dacă  $x < 0$ , atunci  $y = -x + x = 0$ .

$$\text{Deci, } y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Graficul funcției este reprezentat în figura 28. ▲

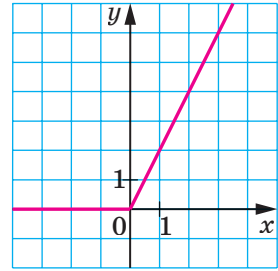


Fig. 28



1. Cu care expresie este identic egală expresia  $\sqrt{a^2}$  ?
2. Formulați teorema despre rădăcina pătrată aritmetică dintr-o putere.
3. Formulați teorema despre rădăcina pătrată aritmetică dintr-un produs.
4. Formulați teorema despre rădăcina pătrată aritmetică dintr-o fracție.
5. Se știe că numerele nenegative  $a_1$  și  $a_2$  sunt astfel, că  $a_1 > a_2$ . Comparați valorile expresiilor  $\sqrt{a_1}$  și  $\sqrt{a_2}$ .

## EXERCIȚII

**471.°** Cu ce este egală valoarea expresiei:

- |                        |                         |                           |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\sqrt{0,4^2}$ ;    | 4) $3\sqrt{1,2^2}$ ;    | 7) $5\sqrt{(-10)^4}$ ;    |
| 2) $\sqrt{(-1,8)^2}$ ; | 5) $\sqrt{6^4}$ ;       | 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$ ; |
| 3) $2\sqrt{(-15)^2}$ ; | 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$ ; | 9) $-10\sqrt{3^6}$ ?      |

**472.°** Aflați valoarea expresiei:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\sqrt{a^2}$ , dacă $a = 4,6; -18,6$ ; | 3) $0,1\sqrt{c^6}$ , dacă $c = -2; 5$ . |
| 2) $\sqrt{b^4}$ , dacă $b = -3; 1,2$ ;    |   |

**473.°** Calculați valoarea expresiei:

- |                              |                               |   |
|------------------------------|-------------------------------|---|
| 1) $\sqrt{9 \cdot 25}$ ;     | 5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$ ; | 9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$ ;      |
| 2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$ ;  | 6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$ ; | 10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$ ; |
| 3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$ ;  | 7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$ ;   | 11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$ ;             |
| 4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$ ; | 8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$ ;   | 12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$ ;             |

13)  $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ ;

15)  $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$ ;

16)  $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$ .

14)  $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$ ;

**474.°** Cu ce este egală valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{36 \cdot 81}$ ;

5)  $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$ ;

9)  $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$ ;

2)  $\sqrt{900 \cdot 49}$ ;

6)  $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$ ;

10)  $\sqrt{13\frac{4}{9}}$ ;

3)  $\sqrt{16 \cdot 0,25}$ ;

7)  $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$ ;

11)  $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$ ;

4)  $\sqrt{9 \cdot 1,69}$ ;

8)  $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$ ;

12)  $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$ ?

**475.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ ;

4)  $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$ ;

7)  $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$ ;

2)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ ;

5)  $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$ ;

8)  $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$ ;

3)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ ;

6)  $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$ ;

9)  $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$ .

**476.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ ;

3)  $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,1}$ ;

5)  $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{2,8}$ ;

2)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ ;

4)  $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{50}$ ;

6)  $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$ .

**477.°** Aflați valoarea câtului:

1)  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ ;

3)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$ ;

5)  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$ ;

7)  $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ;

2)  $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ ;

4)  $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$ ;

6)  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$ ;

8)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$ .

**478.°** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ ;

3)  $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$ ;

5)  $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

2)  $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$ ;

4)  $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$ ;

**479.°** Pentru care valori ale lui  $a$  are loc egalitatea:

1)  $\sqrt{a^2} = a$ ;

2)  $\sqrt{a^2} = -a$ ?

**480.°** Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$  se realizează egalitatea:

1)  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ;

2)  $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ ;

3)  $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$ ?

**481.\*** Aflați valoarea expresiei, reprezentând în prealabil expresia de sub radical, în formă de produsul pătratelor ale numerelor raționale:

- 1)  $\sqrt{18 \cdot 32}$ ;                      4)  $\sqrt{75 \cdot 48}$ ;                      7)  $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$ ;  
 2)  $\sqrt{8 \cdot 98}$ ;                        5)  $\sqrt{288 \cdot 50}$ ;                      8)  $\sqrt{80 \cdot 45}$ ;  
 3)  $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$ ;                    6)  $\sqrt{4,5 \cdot 72}$ ;                      9)  $\sqrt{33 \cdot 297}$ .

**482.\*** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\sqrt{18 \cdot 200}$ ;                      3)  $\sqrt{14,4 \cdot 0,9}$ ;                      5)  $\sqrt{12,5 \cdot 32}$ ;  
 2)  $\sqrt{3,6 \cdot 0,4}$ ;                      4)  $\sqrt{13 \cdot 52}$ ;                        6)  $\sqrt{108 \cdot 27}$ .

 **483.\*** Găsiți valoarea expresiei:

- 1)  $\sqrt{41^2 - 40^2}$ ;                      3)  $\sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$ ;                      5)  $\sqrt{\frac{155^2 - 134^2}{84}}$ ;  
 2)  $\sqrt{145^2 - 144^2}$ ;                    4)  $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$ ;                    6)  $\sqrt{\frac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$ .

**484.\*** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ ;                    2)  $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$ ;                    3)  $\sqrt{\frac{98}{228^2 - 164^2}}$ .

**485.\*** Schimbați expresia cu una identic egală cu ea, care nu conține semnul rădăcinii:

- 1)  $\sqrt{b^2}$ ;                            2)  $-0,4 \sqrt{c^2}$ ;                        3)  $\sqrt{a^6}$ ;                            4)  $\sqrt{m^8}$ .

**486.\*** Înlocuiți expresia cu una identic egală cu ea, care nu conține semnul rădăcinii:

- 1)  $1,2 \sqrt{x^2}$ ;                        2)  $\sqrt{y^4}$ ;                            3)  $\sqrt{n^{10}}$ .

**487.\*** Simplificați expresia:

- 1)  $\sqrt{m^2}$ , dacă  $m > 0$ ;                      7)  $\sqrt{81x^4y^2}$ , dacă  $y \geq 0$ ;  
 2)  $\sqrt{n^2}$ , dacă  $n < 0$ ;                      8)  $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$ , dacă  $a \leq 0$ ,  $b \geq 0$ ;  
 3)  $\sqrt{16p^2}$ , dacă  $p \geq 0$ ;                    9)  $-1,2x \sqrt{64x^{18}}$ , dacă  $x \leq 0$ ;  
 4)  $\sqrt{0,36k^2}$ , dacă  $k \leq 0$ ;                    10)  $\frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$ , dacă  $b < 0$ ;  
 5)  $\sqrt{c^{12}}$ ;                            11)  $\frac{3,3a^4}{b^3} \sqrt{\frac{b^{24}}{121a^{26}}}$ , dacă  $a < 0$ ;  
 6)  $\sqrt{0,25b^{14}}$ , dacă  $b \leq 0$ ;                    12)  $-0,5m^5 \sqrt{1,96m^6n^8}$ , dacă  $m \leq 0$ .

**488.\*** Aduceți expresia la cea mai simplă formă:

- 1)  $\sqrt{9a^{16}}$ ;                            5)  $\sqrt{p^6q^8}$ , dacă  $p \geq 0$ ;  
 2)  $\sqrt{0,81d^6}$ , dacă  $d \geq 0$ ;                    6)  $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$ , dacă  $m \leq 0$ ,  $n \leq 0$ ;  
 3)  $-5 \sqrt{4x^2}$ , dacă  $x \leq 0$ ;                    7)  $ab^2 \sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$ , dacă  $b \geq 0$ ,  $c \leq 0$ ;

$$4) -0,1 \sqrt{100z^{10}}, \text{ dacă } z \geq 0; \quad 8) -\frac{8m^3 p^4}{k^2} \sqrt{\frac{625k^{30} p^{40}}{144m^6}}, \text{ dacă } \\ m < 0, k > 0.$$

**489.\*\*** Care din egalitățile aduse au loc pentru toate valorile reale a lui  $a$ :

$$1) \sqrt{a^2} = a; \quad 2) \sqrt{a^4} = a^2; \quad 3) \sqrt{a^6} = a^3; \quad 4) \sqrt{a^8} = a^4?$$

**490.\*\*** Pentru care valori ale lui  $a$  sunt juste egalitățile:

$$1) \sqrt{a^{10}} = a^5; \quad 2) \sqrt{a^{10}} = -a^5; \quad 3) \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2; \quad 4) \sqrt{a^2} = (\sqrt{-a})^2?$$

**491.\*\*** Construiți graficul funcției:

$$1) y = \sqrt{x^2} - x, \text{ dacă } x \leq 0; \quad 3) y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}; \\ 2) y = 2x + \sqrt{x^2}; \quad 4) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3.$$

**492.\*\*** Construiți graficul funcției:

$$1) y = \sqrt{x^2} - 2x, \text{ dacă } x \geq 0; \quad 2) y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}.$$

**493.\*** Pentru care valori ale lui  $x$  se îndeplinește egalitatea:

$$1) \sqrt{x^2} = x - 4; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6 - x; \quad 3) 2\sqrt{x^2} = x + 3?$$

**494.\*** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x^2} = x + 8; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6x - 10.$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**495.** Calculați valoarea expresiei

$$\left( \frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25} \right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

pentru  $a = 4,5$ .

**496.** Un tractorist avea să însămânțeze un câmp în 8 zile. Dar din pricina condițiilor naturale nefavorabile el însămânța zilnic cu 3 ha mai puțin decât norma și de aceea a terminat lucrul în 10 zile. Care este aria câmpului?

**497.** Numărul natural  $a$  este par, iar numărul  $b$  – impar. Valoarea căreia din expresiile date este obligatoriu număr par:

$$1) (a + b)b; \quad 2) \frac{ab}{2}; \quad 3) \frac{a^2b}{2}; \quad 4) \frac{ab^2}{2}?$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

**498.** Pe tablă sunt scrise 102 numere naturale consecutive. Oare pot fi ele împărțite în două astfel de grupe, ca suma numerelor din fiecare grupă să fie număr prim (în fiecare grupă trebuie să fie nu mai puțin de două numere)?

## 16. Transformări identice ale expresiilor care conțin rădăcini pătrate

Aplicând teorema despre rădăcina pătrată aritmetică dintr-un produs să transformăm expresia  $\sqrt{48}$ . Avem:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Expresia  $\sqrt{48}$  noi am reprezentat-o în formă de produsul numărului rațional 4 și numărul irațional  $\sqrt{3}$ . Această transformare se **numește scoaterea factorului de sub semnul rădăcinii**. În cazul dat a fost scos de sub semnul rădăcinii factorul 4.

Să cercetăm transformarea efectuată în ordinea inversă:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Așa o transformare se numește **introducerea factorului sub semnul rădăcinii**. În cazul dat a fost introdus sub semnul rădăcinii factorul 4.

**EXEMPLU 1** Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii: 1)  $\sqrt{150}$ ; 2)  $\sqrt{72a^8}$ ; 3)  $\sqrt{b^{35}}$ ; 4)  $\sqrt{-b^{35}}$ ; 5)  $\sqrt{a^2b^3}$ , dacă  $a < 0$ .

*Rezolvare.* 1) Să reprezentăm numărul, care se află sub semnul rădăcinii, în formă de produsul a două numere, unul din ei fiind pătratul unui număr rațional:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

$$2) \sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$$

3) Deoarece expresia de sub semnul rădăcinii trebuie să fie nenegativă, atunci din condiție urmează, că  $b \geq 0$ . Atunci

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}| \sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

4) Din condiție rezultă, că  $b \leq 0$ . Atunci

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}| \sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) Din condiție rezultă, că  $a^2 > 0$ . Deoarece expresia de sub semnul rădăcinii trebuie să fie nenegativă, vom obține că  $b \geq 0$ . Atunci

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}. \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Introduceți factorul sub semnul rădăcinii: 1)  $-2\sqrt{7}$ ; 2)  $a\sqrt{7}$ ;

3)  $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$ ; 4)  $c\sqrt{c^7}$ .

*Rezolvare.* 1)  $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$ .

2) Dacă  $a \geq 0$ , atunci  $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$ ; dacă  $a < 0$ , atunci  $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$ .

3) Din condiție reiese  $b \leq 0$ . Atunci

$$3b \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{3b^3}.$$

4) Din condiție rezultă, că  $c \geq 0$ . Atunci  $c \sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$ . ▲

**EXEMPLU 3** Simplificați expresia: 1)  $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$ ;

2)  $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ ; 3)  $(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})$ .

*Rezolvare.* 1) Avem:

$$\begin{aligned} \sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} &= \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = \\ &= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3+2-10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}. \end{aligned}$$

2)  $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$ .

3) Aplicând formulele înmulțirii prescurtate (pătratul binomului și produsul diferenței cu suma a două expresii), obținem:

$$\begin{aligned} (7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5}) &= 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \\ &- ((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**EXEMPLU 4** De descompus în factori expresia: 1)  $a^2 - 2$ ; 2)  $b - 4$ , dacă  $b \geq 0$ ; 3)  $9c - 6\sqrt{5c} + 5$ ; 4)  $a + \sqrt{a}$ ; 5)  $\sqrt{3} + 6$ ; 6)  $\sqrt{35} - \sqrt{15}$ .

*Rezolvare.* 1) Reprezentând expresia dată în formă de diferența pătratelor, obținem:  $a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$ .

2) Deoarece conform condiției  $b \geq 0$ , atunci  $b - 4 = (\sqrt{b})^2 - 4 = (\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2)$ .

3) Să aplicăm formula pătratului diferenței:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = (3\sqrt{c})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{c} - \sqrt{5})^2.$$

4) Avem:  $a + \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$ .

5)  $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3})$ .

6)  $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ . ▲

**EXEMPLU 5** Simplificați fracția: 1)  $\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}$ ; 2)  $\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ; 3)  $\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$ ,

dacă  $a > 0, b > 0$ .

*Rezolvare.* 1) Descompunând numărătorul acestei fracții în factori, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{\sqrt{b}+1} &= \frac{(\sqrt{b})^2 - 1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b}-1. \\ 2) \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-3. \end{aligned}$$

3) Deoarece din condiție  $a > 0$  și  $b > 0$ , reiese că numărătorul și numitorul fracției date pot fi descompuși în factori și fracția obținută de-o simplificat:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}. \blacktriangle$$

**A se elibera de iraționalitate la numitorul fracției** înseamnă, de transformat fracția astfel, ca numitorul ei să nu conțină rădăcină pătrată.

**EXEMPLU 6** De se eliberat de iraționalitatea fracției în numitorul ei:

1)  $\frac{15}{2\sqrt{3}}$ ; 2)  $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$ .

*Rezolvare.* 1) Înmulțind numărătorul și numitorul fracției date cu  $\sqrt{3}$ , obținem:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Înmulțind numărătorul și numitorul fracției date la expresia  $5\sqrt{2}+1$ , obținem:

$$\begin{aligned} \frac{14}{5\sqrt{2}-1} &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2-1} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1} = \\ &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49} = \frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7}. \blacktriangle \end{aligned}$$

**EXEMPLU 7** Demonstrați identitatea

$$\left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

*Rezolvare.*

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \left( \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \\ &= \frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{a} + \sqrt{b}. \blacktriangle \end{aligned}$$

**EXEMPLU 8** Aduceți la o formă mai simplă expresia  $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ .

*Rezolvare.* Exprimând expresia de sub radical sub formă de pătratul sumei, obținem:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{9+2 \cdot 3\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = |3+\sqrt{3}| = 3+\sqrt{3}. \blacktriangle$$

## EXERCIȚII

499.° Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

- |                  |                   |                    |                        |
|------------------|-------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{8}$ ;  | 4) $\sqrt{54}$ ;  | 7) $\sqrt{275}$ ;  | 10) $\sqrt{0,48}$ ;    |
| 2) $\sqrt{12}$ ; | 5) $\sqrt{490}$ ; | 8) $\sqrt{108}$ ;  | 11) $\sqrt{450}$ ;     |
| 3) $\sqrt{32}$ ; | 6) $\sqrt{500}$ ; | 9) $\sqrt{0,72}$ ; | 12) $\sqrt{36\,300}$ . |

500.° Simplificați expresia:

- |                             |                              |                               |                         |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ ; | 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$ ; | 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$ ; | 4) $-0,05\sqrt{4400}$ . |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------|

501.° Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

- |                  |                             |                             |                              |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{27}$ ; | 4) $\sqrt{125}$ ;           | 7) $-2\sqrt{0,18}$ ;        | 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$ ; |
| 2) $\sqrt{24}$ ; | 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$ ; | 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$ ; | 11) $10\sqrt{0,03}$ ;        |
| 3) $\sqrt{20}$ ; | 6) $0,4\sqrt{250}$ ;        | 9) $0,8\sqrt{1250}$ ;       | 12) $0,7\sqrt{1000}$ .       |

502.° Introduceți factorul sub semnul rădăcinii:

- |                    |                     |                               |   |
|--------------------|---------------------|-------------------------------|---|
| 1) $7\sqrt{2}$ ;   | 4) $-10\sqrt{14}$ ; | 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$ ;   | 10) $-0,3\sqrt{10b}$ ;                  |
| 2) $3\sqrt{13}$ ;  | 5) $5\sqrt{8}$ ;    | 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$ ;  | 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ;             |
| 3) $-2\sqrt{17}$ ; | 6) $6\sqrt{a}$ ;    | 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$ ; | 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$ . |

503.° Introduceți factorul sub semnul rădăcinii:

- |                  |                    |                       |                               |
|------------------|--------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 1) $2\sqrt{6}$ ; | 3) $-11\sqrt{3}$ ; | 5) $-7\sqrt{3c}$ ;    | 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$ ;    |
| 2) $9\sqrt{2}$ ; | 4) $12\sqrt{b}$ ;  | 6) $-10\sqrt{0,7m}$ ; | 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$ . |

504.° Simplificați expresia:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 5\sqrt{a}$ ; | 3) $5\sqrt{c} + 3\sqrt{d} - \sqrt{c} + 3\sqrt{d}$ ; |
| 2) $6\sqrt{b} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{b}$ ; | 4) $\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ .             |

505.° Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$ ;              | 3) $9\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$ . |
| 2) $\sqrt{c} + 10\sqrt{c} - 14\sqrt{c}$ ; |  |

506.° Simplificați expresia:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{49a}$ ; | 3) $2\sqrt{0,04c} - 0,3\sqrt{16c} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$ ;  |
| 2) $\sqrt{64b} - \frac{1}{6}\sqrt{36b}$ ;  | 4) $0,4\sqrt{100m} + 15\sqrt{\frac{4}{9}m} - 1,2\sqrt{2,25m}$ . |



**507.**° Simplificați expresia:

$$1) 2\sqrt{4x} + 6\sqrt{16x} - \sqrt{625x}; \quad 2) 3\sqrt{0,09y} - 0,6\sqrt{144y} + \frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}.$$

**508.**° Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll} 1) 8\sqrt{2} - \sqrt{32}; & 4) 2\sqrt{500} - 8\sqrt{5}; \\ 2) 6\sqrt{3} - \sqrt{27}; & 5) 5\sqrt{7} - \sqrt{700} - 0,5\sqrt{28}; \\ 3) \sqrt{96} - 3\sqrt{6}; & 6) 2\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,6\sqrt{125}. \end{array}$$

**509.**° Rațională sau irațională este valoarea expresiei:

$$1) \sqrt{48} - 6 - 4\sqrt{3}; \quad 2) \sqrt{162} - 9\sqrt{2} + \sqrt{27}?$$

**510.**° Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

$$\begin{array}{ll} 1) 4\sqrt{700} - 27\sqrt{7}; & 4) 5\sqrt{12} - 7\sqrt{3}; \\ 2) \sqrt{75} - 6\sqrt{3}; & 5) 3\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{98}; \\ 3) 2\sqrt{50} - 8\sqrt{2}; & 6) \frac{1}{3}\sqrt{108} + \sqrt{363} - \frac{2}{9}\sqrt{243}. \end{array}$$

**511.**° Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{2}(\sqrt{50} + \sqrt{8}); & 3) (3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5}; \\ 2) (\sqrt{3} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}; & 4) 2\sqrt{2} \left( 3\sqrt{18} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \sqrt{32} \right). \end{array}$$

**512.**° Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{28}); & 3) (4\sqrt{3} - \sqrt{75} + 4) \cdot 3\sqrt{3}; \\ 2) (\sqrt{18} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}; & 4) (\sqrt{600} + \sqrt{6} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}. \end{array}$$

**513.**° Efectuați înmulțirea:

$$\begin{array}{ll} 1) (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1); & 6) (y - \sqrt{7})(y + \sqrt{7}); \\ 2) (\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}); & 7) (4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}); \\ 3) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}); & 8) (m + \sqrt{n})^2; \\ 4) (\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c}); & 9) (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2; \\ 5) (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}); & 10) (2 - 3\sqrt{3})^2. \end{array}$$

**514.**° Efectuați înmulțirea:

$$\begin{array}{ll} 1) (\sqrt{7} + 3)(3\sqrt{7} - 1); & 5) (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x); \\ 2) (4\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}); & 6) (\sqrt{19} + \sqrt{17})(\sqrt{19} - \sqrt{17}); \\ 3) (\sqrt{p} - q)(\sqrt{p} + q); & 7) (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2; \\ 4) (6 - \sqrt{13})(6 + \sqrt{13}); & 8) (3 - 2\sqrt{15})^2. \end{array}$$

**515.**° Cu ce este egală valoarea expresiei:

$$1) (2 + \sqrt{7})^2 - 4\sqrt{7}; \quad 2) (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{2}?$$

■ 516.° Găsiți valoarea expresiei:

$$1) (3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}; \quad 2) (\sqrt{12} - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}.$$

517.° De se eliberat de iraționalitatea din numitorul fracției:

$$1) \frac{4}{\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{18}{\sqrt{5}}; \quad 5) \frac{a}{b\sqrt{b}}; \quad 7) \frac{7}{\sqrt{7}};$$

$$2) \frac{12}{\sqrt{6}}; \quad 4) \frac{m}{\sqrt{n}}; \quad 6) \frac{5}{\sqrt{15}}; \quad 8) \frac{24}{5\sqrt{3}}.$$

518.° De se eliberat de iraționalitatea din numitorul fracției:

$$1) \frac{a}{\sqrt{11}}; \quad 2) \frac{18}{\sqrt{6}}; \quad 3) \frac{5}{\sqrt{10}}; \quad 4) \frac{13}{\sqrt{26}}; \quad 5) \frac{30}{\sqrt{15}}; \quad 6) \frac{2}{3\sqrt{x}}.$$

519.° Descompuneți în factori expresia:

$$1) a^2 - 3; \quad 9) b + 6\sqrt{b} + 9;$$

$$2) 4b^2 - 2; \quad 10) 3 + 2\sqrt{3c} + c;$$

$$3) 5 - 6c^2; \quad 11) 2 + \sqrt{2};$$

$$4) a - 9, \text{ dacă } a \geq 0; \quad 12) 6\sqrt{7} - 7;$$

$$5) m - n, \text{ dacă } m \geq 0, n \geq 0; \quad 13) a - \sqrt{a};$$

$$6) 16x - 25y, \text{ dacă } x \geq 0, y \geq 0; \quad 14) \sqrt{b} + \sqrt{3b};$$

$$7) a - 2\sqrt{a} + 1; \quad 15) \sqrt{15} - \sqrt{5}.$$

$$8) 4m - 28\sqrt{mn} + 49n, \text{ dacă } m \geq 0, n \geq 0;$$

520.° Descompuneți în factori expresia:

$$1) 15 - x^2; \quad 6) m + 2\sqrt{mn} + n,$$

$$2) 49x^2 - 2; \quad \text{dacă } m \geq 0, n \geq 0;$$

$$3) 36p - 64q, \text{ dacă } p \geq 0, q \geq 0; \quad 7) a - 4\sqrt{a} + 4;$$

$$4) c - 100, \text{ dacă } c \geq 0; \quad 8) 5 + \sqrt{5};$$

$$5) a - 8b\sqrt{a} + 16b^2; \quad 9) \sqrt{3p} - p;$$

$$10) \sqrt{12} + \sqrt{32}.$$

521.° Simplificați fracția:

$$1) \frac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}; \quad 5) \frac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}; \quad 9) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5 - \sqrt{10}};$$

$$2) \frac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}; \quad 6) \frac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}; \quad 10) \frac{13 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}};$$

$$3) \frac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}; \quad 7) \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}; \quad 11) \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$

$$4) \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}; \quad 8) \frac{\sqrt{35} + \sqrt{10}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}; \quad 12) \frac{4b^2 - 4b\sqrt{c} + c}{2b - \sqrt{c}}.$$

522.\* Simplificați fracția:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}; & 4) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; & 7) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}; \\
 2) \frac{\sqrt{a}+2}{a-4}; & 5) \frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}; & 8) \frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}. \\
 3) \frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}; & 6) \frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}; & 
 \end{array}$$

523.\* Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

$$1) \sqrt{3a^2}, \text{ dacă } a \geq 0; \quad 2) \sqrt{5b^2}, \text{ dacă } b \leq 0; \quad 3) \sqrt{12a^4}; \quad 4) \sqrt{c^5}.$$

524.\* Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

$$1) \sqrt{18x^{12}}; \quad 2) \sqrt{y^9}.$$

525.\* Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{32}; & 4) \sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} + 3\sqrt{80a}; \\
 2) 3\sqrt{8} + \sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{162}; & 5) \sqrt{a^3b} - \frac{2}{a}\sqrt{a^5b}, \text{ dacă } a > 0; \\
 3) 0,7\sqrt{300} - 7\sqrt{\frac{3}{49}} + \frac{2}{3}\sqrt{108}; & 6) \sqrt{c^5} + 4c\sqrt{c^3} - 5c^2\sqrt{c}.
 \end{array}$$

526.\* Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll}
 1) 0,5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 0,4\sqrt{75}; & 3) \sqrt{81a^7} - 5a^3\sqrt{a} + \frac{6}{a}\sqrt{a^9}. \\
 2) 2,5\sqrt{28b} + \frac{2}{3}\sqrt{63b} - 10\sqrt{0,07b}; & 
 \end{array}$$

527.\* Demonstrați, că:

$$1) \sqrt{11+4\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 2; \quad 2) \sqrt{14+8\sqrt{3}} = \sqrt{8} + \sqrt{6}.$$

528.\* Simplificați expresia:

$$\begin{array}{ll}
 1) (2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2); & 4) (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2; \\
 2) (\sqrt{5}-2)^2 - (3+\sqrt{5})^2; & 5) (\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2. \\
 3) \sqrt{\sqrt{17}-4} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+4}; & 
 \end{array}$$

■ 529.\* Aflați valoarea expresiei:

$$\begin{array}{ll}
 1) (3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2); & 3) (10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2; \\
 2) (3-2\sqrt{7})^2 + (3+2\sqrt{7})^2; & 4) (\sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}})^2.
 \end{array}$$

530.\* Simplificați fracția:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}; & 3) \frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}, \text{ dacă } a > 0, b > 0; \\
 2) \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}; & 4) \frac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}};
 \end{array}$$

5)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}$ ;

6)  $\frac{m\sqrt{m-27}}{\sqrt{m-3}}$ .

**531.** Simplificați fracția:

1)  $\frac{a-b}{\sqrt{11b} - \sqrt{11a}}$ ;

3)  $\frac{a-2\sqrt{a+4}}{a\sqrt{a+8}}$ .

2)  $\frac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$ , dacă  $a > 0, b > 0$ ;

**532.** De se eliberat de iraționalitatea din numitorul fracției:

1)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ ;

3)  $\frac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$ ;

5)  $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ;

2)  $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ;

4)  $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$ ;

6)  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ .

**533.** De scăpat de iraționalitate din numitorul fracției:

1)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$ ;

2)  $\frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$ ;

3)  $\frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ;

4)  $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ .

**534.** Demonstrați egalitatea:

1)  $\frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10$ ;

2)  $\frac{2}{3\sqrt{2}+4} - \frac{2}{3\sqrt{2}-4} = -8$ ;

3)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 4\sqrt{2}$ .

**535.** Demonstrați că valoarea expresiei este un număr rațional:

1)  $\frac{6}{3+2\sqrt{3}} + \frac{6}{3-2\sqrt{3}}$ ;

2)  $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$ .

**536.** Simplificați expresia:

1)  $\frac{a}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$ ;

6)  $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}+2}$ ;

2)  $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2} - \frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$ ;

7)  $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}} : \frac{c-25}{3c}$ ;

3)  $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$ ;

8)  $\left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1}$ ;

4)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} - \frac{a}{a-16}$ ;

9)  $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;

5)  $\frac{a}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ ;

10)  $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$ .

**537.\*** Смплпфкачп експрпа:

$$1) \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a-4}}{\sqrt{a}};$$

$$2) \frac{\sqrt{a+1}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{ab}-b};$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}} : \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6};$$

$$4) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} : \left( \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right);$$

$$5) \left( \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}};$$

$$6) \frac{a-64}{\sqrt{a+3}} \cdot \frac{1}{a+8\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a+8}}{a-3\sqrt{a}}.$$

**538.\*\*** Скоатячп факорл дс суб сепнул рядячпнп:

$$1) \sqrt{-m^9};$$

$$2) \sqrt{a^4 b^{13}}, \text{ дачя } a \neq 0;$$

$$3) \sqrt{4x^6 y}, \text{ дачя } x < 0;$$

$$4) \sqrt{m^7 n^7}, \text{ дачя } m \leq 0, n \leq 0;$$

$$5) \sqrt{45x^3 y^{14}}, \text{ дачя } y < 0;$$

$$6) \sqrt{64a^2 b^9}, \text{ дачя } a > 0;$$

$$7) \sqrt{242m^{11} b^{18}}, \text{ дачя } b < 0;$$

$$8) \sqrt{-m^2 n^2 p^{15}}, \text{ дачя } m > 0, n < 0.$$

**539.\*\*** Скоатячп факорл дс суб сепнул рядячпнп:

$$1) \sqrt{-m^{19}};$$

$$2) \sqrt{a^{23} b^{24}}, \text{ дачя } b \neq 0;$$

$$3) \sqrt{49a^2 b}, \text{ дачя } a < 0;$$

$$4) \sqrt{a^9 b^9};$$

$$5) \sqrt{27x^{15} y^{34}}, \text{ дачя } y < 0;$$

$$6) \sqrt{-50m^6 n^6 p^7}, \text{ дачя } m > 0, n > 0.$$

**540.\*\*** Интродуочп факорл суб сепнул рядячпнп:

$$1) a\sqrt{3};$$

$$2) b\sqrt{-b};$$

$$3) c\sqrt{c^5};$$

$$4) m\sqrt{n}, \text{ дачя } m \geq 0;$$

$$5) xy^2\sqrt{xy}, \text{ дачя } x \leq 0;$$

$$6) 2p\sqrt{\frac{p}{2}};$$

$$7) 2p\sqrt{-\frac{p}{2}};$$

$$8) ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ дачя } a \geq 0.$$

**541.\*\*** Интродуочп факорл суб сепнул рядячпнп:

$$1) m\sqrt{7}, \text{ дачя } m \geq 0;$$

$$2) 3n\sqrt{6}, \text{ дачя } n \leq 0;$$

$$3) p\sqrt{p^3};$$

$$4) x^4 y \sqrt{x^5 y}, \text{ дачя } y \leq 0;$$

$$5) 7a\sqrt{\frac{3}{a}};$$

$$6) 5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}, \text{ дачя } a \leq 0, b > 0.$$

**542.\*\*** Демонстрачп идентптеа:

$$1) \left( \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a+7}} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49} \right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a+7}} = \sqrt{a}-7;$$

$$2) \frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left( \frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27} \right) = \sqrt{a}.$$

543.\* Simplificați expresia:

$$1) \left( \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}};$$

$$2) \left( \sqrt{a} + \sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right).$$

544.\* Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{3+2\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt{7+4\sqrt{3}}; \quad 3) \sqrt{11+2\sqrt{30}}.$$

545.\* Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

$$1) \sqrt{8+2\sqrt{7}}; \quad 2) \sqrt{15+6\sqrt{6}}; \quad 3) \sqrt{7+2\sqrt{10}}.$$

546.\* Simplificați expresia:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

547.\* Demonstrați, că

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

548.\* Demonstrați, că

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2.$$

549.\* Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}; \quad 2) \sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

550. Un muncitor avea să confecționeze zilnic 12 piese. Dar el confecționează zilnic 15 piese, și deja cu 5 zile până la expirarea termenului de terminare a lucrului, lui i-au rămas de confecționat 30 de piese. Câte piese trebuia să confecționeze muncitorul?

551. În timpul desfacerii totale prețul mărfii l-au micșorat cu 20%. Cu câte procente trebuie de ridicat prețul la această marfă, ca el să fie egal cu cel inițial?

552. O luntre a navigat 32 km în direcția curentului de apă a râului în 4 ore, iar tot aceeași distanță împotriva curentului – în 8 ore. Aflați viteza proprie a luntrii și viteza curentului râului.

553. Florea și Olga călătoreau în același tren. Florea se afla în vagonul doisprezece din capul trenului, iar Olga – în al șaselea din coada trenului. A ieșit la iveală că ei călătoreau în același vagon. Câte vagoane are trenul?

554. Numărul  $a$  – pozitiv, iar numărul  $b$  – negativ. Care din expresiile date are cea mai mare valoare:

- 1)  $a^2b$ ;      2)  $-a^2b^2$ ;      3)  $-ab^2$ ;      4)  $ab$ ;      5)  $-a^2b$ ?

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

555. Se știe că într-o oarecare clasă învață pe „bine” și „foarte bine” nu mai puțin de 95,5% și nu mai mult de 96,5% din elevi. Care este cea mai mică cantitate de elevi care poate să învețe în această clasă?

## 17. Funcția $y = \sqrt{x}$ și graficul ei

Dacă aria pătratului este egală cu  $x$ , atunci latura lui  $y$  poate fi găsită după formula  $y = \sqrt{x}$ . Variația ariei  $x$  a pătratului provoacă variația laturii lui  $y$ .

Fiecărei valori a variabilei  $x$  îi corespunde o singură valoare a variabilei  $y$ . Deci dependența variabilei  $y$  de variabila  $x$  este funcțională, iar formula  $y = \sqrt{x}$  definește funcție.

Deoarece în expresia  $\sqrt{x}$  valorile admisibile ale variabilei  $x$  sunt toate numerele nenegative, rezultă că domeniul de definiție al funcției  $y = \sqrt{x}$  este mulțimea numerelor nenegative.

Expresia  $\sqrt{x}$  nu poate obține valori negative, adică nici un număr negativ nu poate aparține domeniului de valori al funcției considerate. Să arătăm că funcția  $y = \sqrt{x}$  poate primi oricare valori nenegative, de exemplu 7,2. Într-adevăr, există așa o valoare a argumentului  $x$ , că  $\sqrt{x} = 7,2$ . Această valoare este egală cu  $7,2^2$ . Pe acest exemplu noi vedem că pentru orice număr nenegativ  $b$  totdeauna se va găsi așa o valoare a lui  $x$ , că  $\sqrt{x} = b$ . Așa o valoare a argumentului  $x$  este  $b^2$ .

Așadar, domeniul de valori al funcției  $y = \sqrt{x}$  este mulțimea numerelor nenegative.

Remarcăm, că dacă  $x = 0$ , atunci  $y = 0$ .

Luând în considerație domeniul de definiție și domeniul de valori al funcției  $y = \sqrt{x}$ , se poate conchide, că graficul ei este amplasat numai în primul cadran.

În tabel sunt aduse unele valori ale argumentului și valorile corespunzătoare lor ale funcției  $y = \sqrt{x}$ .

$x$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Să notăm în planul de coordonate punctele, ale căror coordonate sunt  $(x; y)$  prezentate în tabel (fig.29).

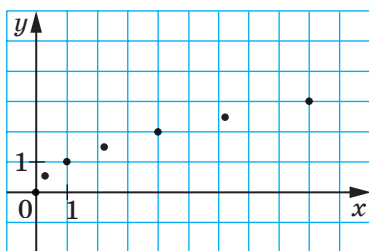


Fig. 29

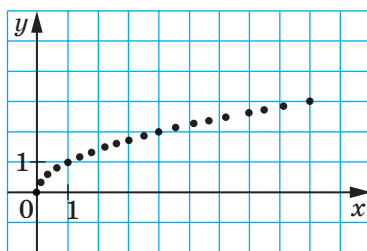


Fig. 30

Cu cât mai multe puncte se vor nota, ale căror coordonate satisfac ecuația  $y = \sqrt{x}$ , cu atât mai puțin se va deosebi figura obținută de graficul funcției  $y = \sqrt{x}$  (fig. 30).

Dacă s-ar reuși de notat pe planul de coordonate toate astfel de puncte, atunci am obține figura care este desenată în figura 31. În clasele superioare se va demonstra că graficul al funcției  $y = \sqrt{x}$  este figura care este egală cu ramura parabolei  $y = x^2$ .

Admitem că  $x_1$  și  $x_2$  – două astfel de valori arbitrare ale argumentului funcției  $y = \sqrt{x}$  care se află în corelația:  $x_1 < x_2$ . Atunci din proprietatea rădăcinii pătrate aritmetice rezultă, că  $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ . Aceasta înseamnă că valorii mai mari a argumentului funcției  $y = \sqrt{x}$  îi corespunde valoarea mai mare a funcției. Justă de asemenea este și afirmația inversă: valorii mai mari a funcției îi corespunde valoarea mai mare a argumentului, adică dacă  $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ , atunci  $x_1 < x_2$  (fig. 32).

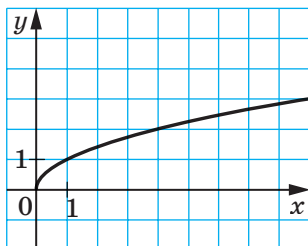


Fig. 31

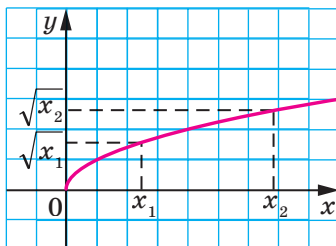


Fig. 32



În tabel sunt aduse proprietățile funcției  $y = \sqrt{x}$ , învățate în acest punct.

Domeniul de definiție	Mulțimea numerelor nenegative
Domeniul de valori	Mulțimea numerelor nenegative
Graficul	Ramură a parabolei
Zeroul funcției (valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu 0)	$x = 0$
Compararea valorilor funcției	Valorii mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mare a funcției

**EXEMPLU 1** Rezolvați grafic ecuația  $\sqrt{x} = 6 - x$ .

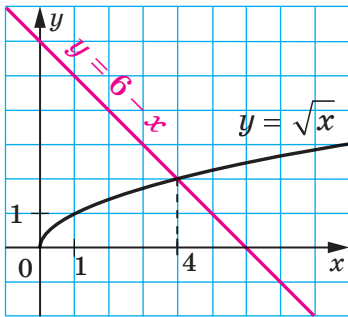


Fig. 33

*Rezolvare.* Construim în același sistem de coordonate graficele funcțiilor  $y = \sqrt{x}$  și  $y = 6 - x$  (fig. 33). Aceste grafice se intersectează în punctul al cărui abscisă este egală cu 4. Verificarea confirmă că numărul 4 este rădăcina ecuației date. ▲

**EXEMPLU 2** Comparați numerele:

1) 6 și  $\sqrt{31}$ ; 2)  $3\sqrt{7}$  și  $\sqrt{65}$ .

*Rezolvare.* 1) Deoarece  $6 = \sqrt{36}$  și  $36 > 31$ , atunci  $\sqrt{36} > \sqrt{31}$ , adică  $6 > \sqrt{31}$ .

2) Avem:  $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ ,  $63 < 65$ ,  $\sqrt{63} < \sqrt{65}$ . Așadar,  $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$ . ▲

**EXEMPLU 3** Pentru care valori ale lui  $x$  este adevărată inegalitatea  $\sqrt{x} < 3$ ?

*Rezolvare.* Să scriem inecuația dată astfel:  $\sqrt{x} < \sqrt{9}$ .

Deoarece valoarea mai mare a funcției  $y = \sqrt{x}$  corespunde valorii mai mari ai argumentului, putem trage concluzia, că  $x < 9$ . Ținând seamă că expresia  $\sqrt{x}$  are sens numai pentru  $x \geq 0$ , obținem, că inegalitatea dată este satisfăcută pentru toți acei  $x$  care satisfac inegalitatea  $0 \leq x < 9$ . ▲

**EXEMPLU 4** Simplificați expresia  $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$ .

*Rezolvare.* Deoarece  $\sqrt{5} > 2$  și  $\sqrt{5} < 3$ , rezultă că  $\sqrt{5} - 2 > 0$  și  $\sqrt{5} - 3 < 0$ . De aici obținem:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$$

Răspuns: 1. ▲



1. Care este domeniul de definiție al funcției  $y = \sqrt{x}$ ?
2. Care este domeniul de valori al funcției  $y = \sqrt{x}$ ?
3. Cu ce este egal zeroul funcției  $y = \sqrt{x}$ ?
4. În care cadran este amplasat graficul funcției  $y = \sqrt{x}$ ?
5. Ce figură este graficul funcției  $y = \sqrt{x}$ ?
6. Numerele nenegative  $a$  și  $b$  sunt astfel, că  $a > b$ . Comparați  $\sqrt{a}$  și  $\sqrt{b}$ .
7. Se știe că  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . Comparați numerele  $a$  și  $b$ .

## EXERCIȚII

556.° Funcția este definită cu formula  $y = \sqrt{x}$ . Completați tabelul:

$x$	0,01	4				1600
$y$			9	11	1,5	

557.° Funcția este definită de formula  $y = \sqrt{x}$ .

- 1) Cu ce este egală valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egală cu: 0,16; 64; 1,44; 3600?
- 2) Pentru care valoare a argumentului valoarea funcției este egală cu: 0,2; 5; 120; -4?

558.° Fără a face construcții determinați prin care din punctele date trece graficul funcției  $y = \sqrt{x}$ :

$A(36; 6)$ ,  $B(4; -2)$ ,  $C(0,81; 0,9)$ ,  $D(-1; 1)$ ,  $E(42,25; 6,5)$ .

559.° Prin care din punctele date trece graficul funcției  $y = \sqrt{x}$ :

- 1)  $A(16; 4)$ ;    2)  $B(49; -7)$ ;    3)  $C(3,6; 0,6)$ ;    4)  $D(-36; 6)$ ?

560.° Comparați numerele:

- 1)  $\sqrt{86}$  și  $\sqrt{78}$ ;    4)  $\sqrt{\frac{6}{7}}$  și 1;    7)  $\sqrt{41}$  și  $2\sqrt{10}$ ;
- 2)  $\sqrt{1,4}$  și  $\sqrt{1,6}$ ;    5)  $-7$  și  $-\sqrt{48}$ ;    8)  $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$  și  $\sqrt{1,1}$ ;
- 3) 5 și  $\sqrt{26}$ ;    6)  $3\sqrt{2}$  și  $2\sqrt{3}$ ;    9)  $\sqrt{75}$  și  $4\sqrt{3}$ .

**561.**° Comparați numerele:

1)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  și  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ ;      3)  $\sqrt{33}$  și 6;      5)  $\sqrt{30}$  și  $2\sqrt{7}$ ;

2) 9 și  $\sqrt{82}$ ;      4)  $3\sqrt{5}$  și  $\sqrt{42}$ ;      6)  $7\sqrt{\frac{1}{7}}$  și  $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ .

**562.**° Fără a efectua construcțiile graficelor găsiți coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției  $y = \sqrt{x}$  și al dreptei:

1)  $y = 1$ ;      2)  $y = 0,8$ ;      3)  $y = -6$ ;      4)  $y = 500$ .

**563.**° Scrieți în ordinea descreșterii numerele: 8,  $\sqrt{62}$ , 7,9,  $\sqrt{65}$ , 8,2.

**564.**° Scrieți în ordinea crescătoare numerele:  $\sqrt{38}$ , 6,1, 6,  $\sqrt{35}$ , 5,9.

**565.**° Între care două numere întregi consecutive este situat pe dreapta de coordonate numărul:

1)  $\sqrt{2}$ ;      4)  $\sqrt{7}$ ;      7)  $\sqrt{59}$ ;  
2)  $\sqrt{3}$ ;      5)  $\sqrt{13}$ ;      8)  $-\sqrt{115}$ ;  
3)  $\sqrt{5}$ ;      6)  $\sqrt{0,98}$ ;      9)  $-\sqrt{76,19}$ ?

**566.**° Între care două numere întregi consecutive este situat pe dreapta de coordonate numărul:

1)  $\sqrt{6}$ ; 2)  $\sqrt{19}$ ; 3)  $\sqrt{29}$ ; 4)  $\sqrt{160}$ ; 5)  $-\sqrt{86}$ ; 6)  $-\sqrt{30,5}$ ?

**567.**° Indicați toate numerele întregi care sunt amplasate pe dreapta de coordonate între numerele:

1) 3 și  $\sqrt{68}$ ;      2)  $\sqrt{7}$  și  $\sqrt{77}$ ;      3)  $-\sqrt{31}$  și  $-2,3$ ;      4)  $-\sqrt{42}$  și 2,8.

**568.**° Indicați toate numerele întregi care sunt situate pe dreapta de coordonate între numerele:

1)  $\sqrt{3}$  și  $\sqrt{13}$ ;      2)  $\sqrt{10}$  și  $\sqrt{90}$ ;      3)  $-\sqrt{145}$  și  $-\sqrt{47}$ .

**569.**° Pentru care valori ale lui  $x$  este satisfăcută inegalitatea:

1)  $\sqrt{x} \geq 2$ ;      2)  $\sqrt{x} < 4$ ;      3)  $6 \leq \sqrt{x} < 9$ ?

**570.**° Pentru care valori a lui  $x$  este satisfăcută inecuația:

1)  $\sqrt{x} \leq 8$ ;      2)  $\sqrt{x} > 7$ ;      3)  $10 \leq \sqrt{x} \leq 20$ ?

**571.**° Rezolvați grafic ecuația:

1)  $\sqrt{x} = x$ ;      3)  $\sqrt{x} = x + 2$ ;      5)  $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$ ;  
2)  $\sqrt{x} = x^2$ ;      4)  $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$ ;      6)  $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$ .

**572.**° Rezolvați grafic ecuația:

1)  $\sqrt{x} = -x - 1$ ;      2)  $\sqrt{x} = 2 - x$ ;      3)  $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$ .

**573.**° Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

1)  $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$ ;      3)  $\sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}$ ;  
2)  $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2}$ ;      4)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$ .

574.\* Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}; \quad 2) \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}.$$

575.\*\* Rezolvați ecuația  $\sqrt{x} = -x^2$ .

576.\*\* Se dă funcția  $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{dacă } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

1) Aflați:  $f(-8), f(0), f(9)$ .

2) Construiți graficul funcției.

577.\*\* Se dă funcția  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

1) Aflați:  $f(-2), f(0), f(1), f(4)$ .

2) Construiți graficul funcției date.

578.\*\* Aflați domeniul de definiție, domeniul de valori și zerourile funcției  $y = \sqrt{-x}$ . Construiți graficul funcției date.

579.\*\* Construiți graficul funcției  $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ .

580.\* Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{8-2\sqrt{7}}; \quad 2) \sqrt{5-2\sqrt{6}}; \quad 3) \sqrt{12-6\sqrt{3}}; \quad 4) \sqrt{38-12\sqrt{2}}.$$

581.\* Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{9-4\sqrt{5}}; \quad 2) \sqrt{7-2\sqrt{10}}; \quad 3) \sqrt{37-20\sqrt{3}}.$$

582.\* Câte rădăcini are ecuația  $\sqrt{x} = a - x$  în dependență de valoarea lui  $a$ ?

583.\* Simplificați expresia  $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}$ .

584.\* Simplificați expresia  $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{(\sqrt{a}+6)^2 - 24\sqrt{a}}$ .

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

585. În primul container erau 90 kg de mere, iar în al doilea – 75 kg. După ce din primul container s-au luat de 3 ori mai multe mere, decât din al doilea, în primul au rămas de 2 ori mai puține mere decât în al doilea. Câte kg de mere s-au luat din primul container?

586. De la debarcader împotriva curgerii râului a pornit o șalupă a cărei viteză proprie este egală cu 12 km/oră. După 40 min de la pornirea șalupei s-a defectat motorul și șalupea a fost adusă de curentul apei peste 2 ore la același debarcader. Care este viteza cursului apei?

587. Demonstrați identitatea:

$$1) \left( \frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{1}{a^2-4b^2} : \frac{a+2b}{(2b-a)^2} \right) : \frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{2b}{a^2};$$

$$2) \left( \frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9} \right) \cdot \frac{a^2-9}{a+1} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a.$$

588. Distanța dintre două orașe limuzina o parcurge în 2 ore, iar camionul – în 3 ore. Peste cât timp de la pornire ele se vor întâlni, dacă vor ieși în același timp unul în întâmpinarea celuilalt din aceste orașe?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

589. Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 = 0;$$

$$4) -3x^2 + 12 = 0;$$

$$7) \frac{1}{6}x^2 - 5x = 0;$$

$$2) x^2 - 1 = 0;$$

$$5) 5x^2 - 6x = 0;$$

$$8) x^2 - 2x + 1 = 0;$$

$$3) x^2 + 5x = 0;$$

$$6) 0,2x^2 + 2 = 0;$$

$$9) 9x^2 + 30x + 25 = 0.$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

590. Numerele naturale de la 1 până la 37 sunt scrise într-un rând astfel, că suma a oarecare câteva din primele numere se împarte fără rest la numărul ce urmează după ele. Care număr este scris pe al treilea loc, dacă pe primul loc este scris numărul 37, iar pe al doilea – 1?

### ÎNSĂRCINAREA NR. 4 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Care din afirmațiile date este falsă?

A)  $-5$  – număr întreg;

C)  $-5$  – număr irațional;

B)  $-5$  – număr rațional;

D)  $-5$  – număr real.

2. Care din numere este irațional?

A)  $\sqrt{4}$ ;

B)  $\sqrt{0,4}$ ;

C)  $\sqrt{0,04}$ ;

D)  $\sqrt{400}$ .

3. Graficul a cărei funcții este parabolă?

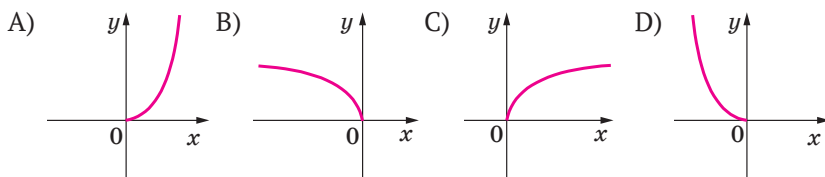
A)  $y = 2x$ ;

B)  $y = x^2$ ;

C)  $y = \frac{2}{x}$ ;

D)  $y = \frac{x}{2}$ .

4. Pe care din desene este reprezentat graficul funcției  $y = \sqrt{x}$ ?



5. Care din expresiile aduse nu are sens?

- A)  $\sqrt{2}$ ;      B)  $-\sqrt{2}$ ;      C)  $\sqrt{-2}$ ;      D)  $\sqrt{(-2)^2}$ .

6. Calculați valoarea expresiei  $\sqrt{7x-3}$  pentru  $x = 4$ .

- A) 5;      B) -5;      C) 25;      D) -25.

7. Cu ce este egală valoarea expresiei  $\sqrt{36 \cdot 0,81}$ ?

- A) 6,9;      B) 54;      C) 5,4;      D) 0,54.

8. Aflați valoarea expresiei  $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$ .

- A) 2;      B) 4;      C) 2,5;      D) 0,4.

9. Simplificați expresia  $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$ .

- A)  $15\sqrt{a}$ ;      B)  $15a$ ;      C)  $7\sqrt{a}$ ;      D)  $7a$ .

10. Eliberați-vă de iraționalitatea din numitorul fracției  $\frac{12}{\sqrt{2}}$ .

- A)  $\sqrt{2}$ ;      B)  $4\sqrt{2}$ ;      C)  $6\sqrt{2}$ ;      D)  $10\sqrt{2}$ .

11. Simplificați fracția  $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$ .

- A)  $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ ;      B)  $\frac{a+2}{a-2}$ ;      C) 1;      D)  $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$ .

12. Simplificați fracția  $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$ .

- A) 15;      B) 5;      C)  $10-\sqrt{5}$ ;      D)  $10+5\sqrt{5}$ .

## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

**Proprietățile funcției  $y = x^2$**

Domeniul de definiție:  $\mathbb{R}$ .

Domeniul de valori: mulțimea numerelor nenegative.

Graficul: parabolă.

Zerul funcției:  $x = 0$ .

Proprietatea graficului: dacă punctul  $A(x_0, y_0)$  aparține graficului funcției, atunci punctul  $B(-x_0, y_0)$  tot aparține graficului.

**Rădăcina pătrată**

Rădăcina pătrată din numărul  $a$  se numește numărul, al cărui pătrat este egal cu  $a$ .

**Rădăcina pătrată aritmetică**

Rădăcină pătrată aritmetică din numărul  $a$  se numește numărul nenegativ, al cărui pătrat este egal cu  $a$ .

**Mulțimi egale**

Două mulțimi  $A$  și  $B$  se numesc egale, dacă ele constau din unele și aceleași elemente, adică fiecare element al mulțimii  $A$  aparține mulțimii  $B$  și, invers, fiecare element al mulțimii  $B$  aparține mulțimii  $A$ .

**Submulțime**

Mulțimea  $B$  se numește submulțimea mulțimii  $A$ , dacă fiecare element al mulțimii  $B$  este element al mulțimii  $A$ .

**Notarea mulțimilor numerice**

$\mathbb{N}$  – mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}$  – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}$  – mulțimea numerelor raționale;

$\mathbb{R}$  – mulțimea numerelor reale.

**Legătura dintre mulțimile numerice**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

**Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice**

Pentru oricare număr real  $a$  este adevărată egalitatea  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Pentru oricare număr real  $a$  și oricare număr natural  $n$  este adevărată egalitatea  $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$ .

Pentru oricare astfel de numere reale  $a$  și  $b$  că  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , este justă egalitatea  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

Pentru oricare astfel de numere reale  $a$  și  $b$  că  $a \geq 0$  și  $b > 0$ , este adevărată egalitatea  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

Pentru oricare astfel de numere nenegative  $a_1$  și  $a_2$  că  $a_1 > a_2$ , este adevărată inegalitatea  $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$ .

**Proprietățile funcției  $y = \sqrt{x}$** 

Domeniul de definiție: mulțimea numerelor nenegative.

Domeniul de valori: mulțimea numerelor nenegative.

Graficul: ramură a parabolei.

Zeroul funcției:  $x = 0$ .

Valorii mai mari a argumentului îi corespund valoarea mai mare a funcției.

## § 3

# ECUAȚII PĂTRATE

- După însușirea materialului acestui paragraf o să puteți rezolva ecuații de tipul  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- O să faceți cunoștință cu teorema lui Viete despre ecuația pătrată.
- Veți stăpâni procedeele de rezolvare ale ecuațiilor, care se reduc la cele pătrate.

## 18. Ecuații pătrate.

### Rezolvarea ecuațiilor pătrate incomplete

Voi puteți rezolva ecuații liniare, adică ecuațiile de tipul  $ax = b$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$  și  $b$  – numere oarecare.

Dacă  $a \neq 0$ , atunci ecuația  $ax = b$  se numește **ecuație de gradul întâi**.

De exemplu, fiecare din ecuațiile liniare  $2x = 3$ ,  $3x = 0$ ,  $\frac{1}{3}x = -7$  sunt ecuații de gradul întâi. Dar iată ecuațiile liniare  $0x = 0$ ,  $0x = 2$  nu sunt ecuații de gradul întâi.

Numerele  $a$  și  $b$  se numește **coeficienții ecuației de gradul întâi**  $ax = b$ .

Acel fapt că mulțimea ecuațiilor de gradul întâi este submulțimea mulțimii ecuațiilor liniare este ilustrată de schema din figura 34.

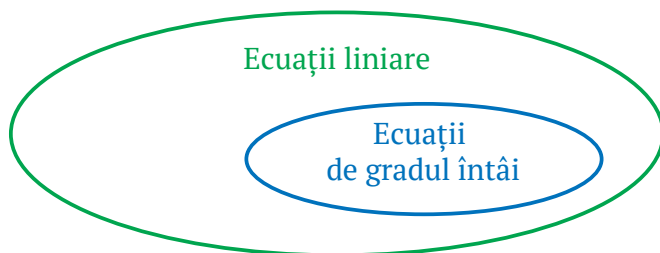


Fig. 34

Voi de asemenea puteți rezolva unele ecuații, care conțin variabila la puterea a doua. De exemplu, pregătindu-vă pentru studierea temei noi voi



ați rezolvat ecuațiile  $x^2 = 0$ ,  $x^2 - 1 = 0$ ,  $x^2 + 5x = 0$ ,  $x^2 - 2x + 1 = 0$  (exercițiul 589). Fiecare din aceste ecuații are aspectul  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Definiție.** Ecuație pătrată este numită ecuația de forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$ ,  $b$  și  $c$  – numere oarecare, totodată  $a \neq 0$ .

Numere  $a$ ,  $b$  și  $c$  se numește **coeficienții ecuației pătrate**. Numărul  $a$  este numit **primul** sau **coeficientul superior**, numărul  $b$  – **al doilea coeficient**, numărul  $c$  – **termen liber**.

De exemplu, ecuația pătrată  $-2x^2 + 5x + 3 = 0$  are așa coeficienți:  $a = -2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 3$ .

Ecuația pătrată, al cărei primul coeficient este egal cu 1, se numește **redușă**.

De exemplu,  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ ,  $x^2 - 4 = 0$ ,  $x^2 + 3x = 0$  – acestea sunt ecuații pătrate redușe.

Deoarece în ecuația pătrată  $ax^2 + bx + c = 0$  coeficientul superior nu este egal cu zero, atunci ecuația pătrată neredușă totdeauna poate fi transformată în redușă, echivalentă cu cea dată. Împărțind ambele părți ale ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$  la numărul  $a$ , obținem, ecuația pătrată redușă  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

Dacă în ecuația pătrată  $ax^2 + bx + c = 0$  măcar unul din numerele  $b$  și  $c$  este egal cu zero, atunci așa o ecuație este numită **ecuație pătrată incompletă**.

Există trei tipuri de ecuații pătrate incomplete.

1. Pentru  $b = c = 0$  avem :  $ax^2 = 0$ .
2. Pentru  $c = 0$  și  $b \neq 0$  avem :  $ax^2 + bx = 0$ .
3. Pentru  $b = 0$  și  $c \neq 0$  avem :  $ax^2 + c = 0$ .

Să rezolvă ecuațiile pătrate incomplete ale fiecărui tip.

1. Deoarece  $a \neq 0$ , rezultă că ecuația  $ax^2 = 0$  are o singură rădăcină  $x = 0$ .  
 2. 2. Reprezentăm ecuația  $ax^2 + bx = 0$  în formă  $x(ax + b) = 0$ . Această ecuație are două rădăcini  $x_1$  și  $x_2$ , una din ele este egală cu zero, iar a doua este rădăcina ecuației de gradul întâi  $ax + b = 0$ . De aici  $x_1 = 0$  și  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

3. 3. Să reprezentăm ecuația  $ax^2 + c = 0$  în formă  $x^2 = -\frac{c}{a}$ . Deoarece  $c \neq 0$ , atunci sunt posibile două cazuri:  $-\frac{c}{a} < 0$  sau  $-\frac{c}{a} > 0$ . Evident că în primul caz ecuația nu are rădăcini. În al doilea caz ecuația are rădăcini:  $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

și  $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

Să generalizăm rezultatele obținute:

Coeficientul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$	Ecuația pătrată incompletă	Rădăcini
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Nu sunt rădăcini
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

**EXEMPLU** ■ Rezolvați ecuația  $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$ .

*Rezolvare.* Pentru  $x > 0$  avem:  $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$ . De aici  $x^2 - 4 = 0$ ;  $x = 2$  sau  $x = -2$ . Însă rădăcina  $x = -2$  nu satisface condiția  $x > 0$ .

Pentru  $x < 0$  avem:  $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$ . De aici  $x^2 + 4 = 0$ . Ultima ecuație nu are rădăcini.

*Răspuns:* 2. ▲



1. Care ecuație se numește liniară?
2. Care ecuație se numește ecuație de gradul întâi?
3. Dați exemplu de ecuație liniară care este ecuație de gradul întâi și exemplu de ecuație liniară care nu este ecuație de gradul întâi.
4. Care ecuație se numește pătrată?
5. Cum se numesc coeficienții ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ ?
6. Care ecuație pătrată se numește redusă?
7. Care ecuație pătrată se numește incompletă?
8. Care tipuri de ecuații pătrate incomplete există? Ce rădăcini are ecuația de fiecare tip?

## EXERCIȚII

**591.°** Indicați printre ecuațiile date pe cele pătrate și numiți cu ce este egal coeficientul superior, al doilea coeficient și termenul liber a fiecărei din ele:

1)  $x = 0$ ;

5)  $x^2 - 4x + 2 = 0$ ;

9)  $6 - x^2 + 4x = 0$ ;

2)  $x^2 = 0$ ;

6)  $3x^3 - x^2 + 6 = 0$ ;

10)  $-x^2 - 2x + 3 = 0$ .

3)  $x^2 + x = 0$ ;

7)  $-2x^2 + 7x - 8 = 0$ ;

4)  $x^2 + 1 = 0$ ;

8)  $x^3 - x - 9 = 0$ ;

**592.°** Alcătuiți ecuația pătrată, în care:

1) coeficientul superior este 6, al doilea coeficient este egal cu 7, iar termenul liber este egal cu 2;

2) coeficientul superior este egal cu 1, al doilea coeficient este egal cu  $-8$ , iar termenul liber este egal cu  $-\frac{1}{3}$ ;

3) coeficientul superior este egal cu  $-0,5$ , al doilea coeficient este egal cu 0, iar termenul liber este egal cu  $2\frac{3}{7}$ ;

4) coeficientul superior este egal cu  $7,2$ , al doilea coeficient este egal cu  $-2$ , iar termenul liber este egal cu 0.

**593.°** Compuneți ecuația pătrată, în care:

1) coeficientul superior este egal cu  $-1$ , al doilea coeficient este egal cu  $-2$ , iar termenul liber este egal cu  $1,6$ ;

2) coeficientul superior și termenul liber sunt egali cu 2, iar al doilea coeficient este egal cu 0.

**594.°** Reprezentați ecuația dată în forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , indicați valorile coeficienților  $a$ ,  $b$  și  $c$ :

1)  $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$ ;

3)  $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$ ;

2)  $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$ ;

4)  $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$ .

**595.°** Reprezentați ecuația dată în forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , arătați valorile coeficienților  $a$ ,  $b$  și  $c$ :

1)  $x(x + 10) = 8x + 3$ ;

2)  $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$ .

**596.°** Arătați care din ecuațiile date sunt reduse, și transformați ecuațiile nereduse în reduse:

1)  $x^2 - 5x + 34 = 0$ ;

3)  $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$ ;

5)  $-x^2 + 8x - 7 = 0$ ;

2)  $2x^2 + 6x + 8 = 0$ ;

4)  $16 - 6x + x^2 = 0$ ;

6)  $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$ .

**597.°** Transformați ecuația pătrată dată în redusă:

1)  $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$ ;

2)  $-4x^2 + 20x - 16 = 0$ ;

3)  $3x^2 + x + 2 = 0$ .

598.° Care din numerele 1; 0; -3; 2; -10 sunt rădăcinile ecuației  $x^2 + 9x - 10 = 0$ ?

599.° Demonstrați, că:

- 1) numărul -1 nu este rădăcina ecuației  $x^2 - 2x + 3 = 0$ ;
- 2) numărul  $-\frac{1}{3}$  și -3 sunt rădăcinile ecuației  $3x^2 + 10x + 3 = 0$ ;
- 3) numărul  $-\sqrt{2}$  și  $\sqrt{2}$  sunt rădăcinile ecuației  $3x^2 - 6 = 0$ .

600.° Demonstrați, că:

- 1) numărul -5 este rădăcina ecuației  $x^2 + 3x - 10 = 0$ ;
- 2) numărul 4 nu este rădăcina ecuației  $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$ .

601.° Rezolvați ecuația:

- 1)  $5x^2 - 45 = 0$ ;
- 3)  $2x^2 - 10 = 0$ ;
- 5)  $64x^2 - 9 = 0$ ;
- 2)  $x^2 + 8x = 0$ ;
- 4)  $2x^2 - 10x = 0$ ;
- 6)  $x^2 + 16 = 0$ .

602.° Rezolvați ecuația:

- 1)  $x^2 + 7x = 0$ ;
- 3)  $3x^2 - 6 = 0$ ;
- 2)  $2x^2 - 11x = 0$ ;
- 4)  $-8x^2 = 0$ .

603.° Rezolvați ecuația:

- 1)  $(3x - 1)(x + 4) = -4$ ;
- 2)  $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$ ;
- 3)  $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$ .

604.° Rezolvați ecuația:

- 1)  $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$ ;
- 2)  $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$ .

605.° Aflați două numere naturale consecutive, al căror produs este cu 36 mai mare decât cel mai mic din ele.

606.° Aflați două numere naturale consecutive, al căror produs este cu 80 mai mare decât cel mai mare din ele.

607.\* Demonstrați că numerele  $2 - \sqrt{3}$  și  $2 + \sqrt{3}$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

608.\* Rezolvați ecuația:

- 1)  $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$ ;
- 2)  $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$ .

609.\* Rezolvați ecuația:

- 1)  $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$ ;
- 2)  $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$ .

610.\* Pentru care valoare  $m$ :

- 1) numărul 2 este rădăcina ecuației  $x^2 + mx - 6 = 0$ ;
- 2) numărul -3 este rădăcina ecuației  $2x^2 - 7x + m = 0$ ;
- 3) numărul  $\frac{1}{7}$  este rădăcina ecuației  $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$ ?

**611.\*** Pentru care valori ale lui  $n$ :

- 1) numărul 6 este rădăcina ecuației  $x^2 - nx + 3 = 0$ ;  
 2) numărul 0,5 este rădăcina ecuației  $nx^2 - 8x + 10 = 0$ ?

**612.\*** Rezolvați ecuația, descompunând partea stângă a ei în factori cu ajutorul procedurii grupării:

- 1)  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ;    2)  $x^2 + 12x + 20 = 0$ ;    3)  $x^2 + 22x - 23 = 0$ .

**613.\*** Rezolvați ecuația, separând în partea stângă a ei pătratul unui binom:

- 1)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;    2)  $x^2 + 6x - 7 = 0$ ;    3)  $x^2 + 8x + 20 = 0$ .

**614.\*** Rezolvați ecuația, descompunând partea stângă a ei în factori:

- 1)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ;    3)  $x^2 - x - 2 = 0$ ;  
 2)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;    4)  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .

**615.\*** Suma pătratelor a două numere întregi consecutive este cu 17 mai mare decât dublul celui mai mare din ele. Aflați aceste numere.

**616.\*** Aflați două numere întregi consecutive, suma pătratelor cărora este egală cu 1.

**617.\*** Pentru care valori ale lui  $m$  ecuația nu este ecuație pătrată:

- 1)  $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$ ;  
 2)  $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$ ;  
 3)  $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$ ?

**618.\*** Ce număr, pozitiv sau negativ, este rădăcină diferită de zero a ecuației pătrate incomplete  $ax^2 + bx = 0$ , dacă:

- 1)  $a > 0, b > 0$ ;    2)  $a < 0, b > 0$ ;    3)  $a > 0, b < 0$ ;    4)  $a < 0, b < 0$ ?

**619.\*** Oare are rădăcini ecuația pătrată incompletă  $ax^2 + c = 0$ , dacă:

- 1)  $a > 0, c > 0$ ; 2)  $a < 0, c > 0$ ; 3)  $a > 0, c < 0$ ; 4)  $a < 0, c < 0$ ?

**620.\*\*** Cu care polinom poate fi înlocuit asteriscul din ecuația  $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$ , ca să se obțină o ecuație pătrată incompletă, ale cărei rădăcini să fie numerele:

- 1) 0 și 4;    2) -1 și 1?

**621.\*\*** Cu care polinom poate fi înlocuit asteriscul din ecuația  $x^2 + 5x - 1 + * = 0$ , pentru ca să se obțină o ecuație pătrată incompletă, ale cărei rădăcini să fie numerele:

- 1) 0; -7;    2) -4; 4?

**622.\*\*** Rezolvați ecuația:

- 1)  $x^2 - 3|x| = 0$ ;    3)  $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$ ;  
 2)  $x^2 + |x| - 2x = 0$ ;    4)  $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$ .

623.\*\* Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 - 7|x| = 0; \quad 2) x^2 - 6|x| + x = 0; \quad 3) 2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0.$$

624.\*\* Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$  este:

- 1) liniară;
- 2) pătrată redusă;
- 3) pătrată neredusă incompletă;
- 4) pătrată redusă incompletă?

625.\*\* Determinați pentru care valoare a lui  $a$  una din rădăcinile ecuației pătrate este egală cu 0, și aflați a doua rădăcină a ecuației:

$$1) x^2 + ax + a - 4 = 0; \quad 3) ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0.$$

$$2) 4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0;$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

626. Efectuați operațiile:

$$1) \frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2}; \quad 3) \frac{4}{c^2-4c} - \frac{c+4}{c^2-16}; \quad 5) \frac{72a^3b}{c} : (27a^2b);$$

$$2) \frac{a^2-6b^2}{3b} + 2b; \quad 4) \frac{56a^5}{b^4} \cdot \frac{b^2}{14b^5}; \quad 6) \frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{10a+5}{a+3}.$$

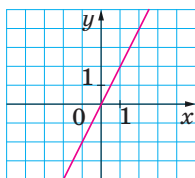
627. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) 10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}; \quad 3) (5 - \sqrt{2})^2;$$

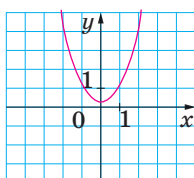
$$2) (3\sqrt{5} - \sqrt{20})\sqrt{5}; \quad 4) (\sqrt{18} - \sqrt{3})\sqrt{2} + 0,5\sqrt{24}.$$

628. Care din graficele, reprezentate în figura 35, este grafic funcției:

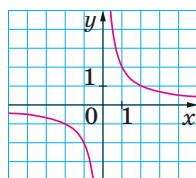
$$1) y = x^2; \quad 2) y = 2x; \quad 3) y = \frac{x}{2}; \quad 4) y = \frac{2}{x}$$



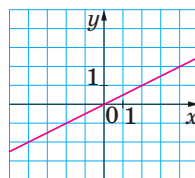
a



b



c



d

Fig. 35

629. Un elev s-a gândit la un număr de două cifre. Dacă am mări fiecare cifră a acestui număr cu 2, atunci numărul obținut va fi cu 13 mai mic decât dublul numărului ce și-a pus în gând elevul. Ce număr și-a pus în gând elevul?

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

630. Un aparat, menit pentru calcul, obține la intrare fișă cu numerele  $(a; b)$  și dă la ieșire fișă cu numerele  $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)$ . Oare se poate cu ajutorul acestui automat de pe fișă cu numere  $(0,25; 1000)$  de obținut fișă cu numerele  $(1,25; 250)$ ?

## 19. Formula rădăcinilor ecuației pătrate

Cunoscând coeficienții  $a$  și  $b$  ai ecuației de gradul întâi  $ax = b$ , se poate afla rădăcina ei cu formula  $x = \frac{b}{a}$ .

Să deducem formula, care permite, cunoscând coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  ai ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$  de aflat rădăcinile ei.

Avem:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Deoarece  $a \neq 0$ , atunci, înmulțind ambele părți ale acestei ecuații cu  $4a$  obținem ecuație, echivalentă cu cea dată:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Separăm în partea stângă a acestei ecuații pătratul unui binom:

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac &= 0; \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac. \end{aligned} \quad (2)$$

*Existența rădăcinilor ecuației (2) și cantitatea lor depinde de semnul valorii expresiei  $b^2 - 4ac$ . Această valoare se numește **discriminant al ecuației pătrate**  $ax^2 + bx + c = 0$  și se notează cu litera  $D$ , adică  $D = b^2 - 4ac$ . Terminul, „discriminant” provine de la cuvântul latin *discriminare*, ceea ce înseamnă „a distinge”, „a deosebi”.*

Acum ecuația (2) poate fi scrisă astfel:

$$(2ax + b)^2 = D. \quad (3)$$

Sunt posibile 3 cazuri:  $D < 0$ ,  $D = 0$ ,  $D > 0$ .

1. Dacă  $D < 0$ , atunci ecuația (3), deci, și ecuația (1) n-are rădăcini. Într-adevăr, pentru orice valori ale lui  $x$  expresia  $(2ax + b)^2$  primește numai valori negatve.

**Concluzie: dacă  $D < 0$ , ecuația pătrată n-are rădăcini.**

2. Dacă  $D = 0$ , atunci ecuația (3) obține aspectul

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

De aici  $2ax + b = 0$ ;  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Concluzie: **dacă  $D = 0$ , atunci ecuația pătrată are o singură rădăcină**

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Dacă  $D > 0$ , atunci ecuația (3) poate fi scrisă în formă

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2.$$

De aici  $2ax + b = -\sqrt{D}$  sau  $2ax + b = \sqrt{D}$ . Atunci  $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$  sau

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Concluzie: **dacă  $D > 0$ , atunci ecuația pătrată are două rădăcini  $x_1$  și  $x_2$ :**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Se folosește de asemenea scrierea prescurtată:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Această scriere este numită **formula rădăcinilor ecuației pătrate**  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Formula obținută poate fi utilizată și în cazul când  $D = 0$ . Avem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

În procesul rezolvării ecuațiilor pătrate este potrivit de se condus de algoritmul:

- de aflat discriminantul  $D$  al ecuației pătrate;
- dacă  $D < 0$ , atunci de scris în răspuns că rădăcini nu sunt;
- dacă  $D \geq 0$ , atunci de folosit formula rădăcinilor ecuației pătrate.

Dacă am reprezenta al doilea coeficient al ecuației pătrate în forma  $2k$ , atunci se poate folosi altă formulă, care în multe cazuri ușurează calculele.

Să considerăm ecuația pătrată  $ax^2 + 2kx + c = 0$ .

Aflăm discriminantul ei:  $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$ .

Notăm expresia  $k^2 - ac$  cu  $D_1$ .

Dacă  $D_1 \geq 0$ , atunci conform formulei rădăcinilor ecuației pătrate, obținem

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

adică

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ unde } D_1 = k^2 - ac.$$



**ЕХЕМПЛУ 1** Резолваї ецуаїа:

$$1) 3x^2 - 2x - 16 = 0;$$

$$4) x^2 - 6x + 11 = 0;$$

$$2) -0,5x^2 + 2x - 2 = 0;$$

$$5) 5x^2 - 16x + 3 = 0.$$

$$3) x^2 + 5x - 3 = 0;$$

*Резолваре.* 1) Pentru ецуаїа даїа  $a = 3, b = -2, c = -16$ .

Discriminantul ецуаїеи

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

$$\text{Аїадар, } x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$\text{Рăспунс: } -2; 2\frac{2}{3}.$$

2) Avem:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Deci, ецуаїа даїа are o singură rădăcină:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Menїionăm că ецуаїа даїа poate fi rezolvată cu alt procedeu. Înmulїind ambele părїи ale ецуаїеи cu  $-2$ , obїinem:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

De aici

$$(x - 2)^2 = 0; x - 2 = 0; x = 2.$$

*Рăспунс:* 2.

$$3) D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37.$$

$$\text{Ецуаїа are două rădăcini: } x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}.$$

*Рăспунс* poate fi scris conform unuia din două moduri:  $\frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$ ;

$$\frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \text{ sau } \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

$$4) D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0.$$

Deci, ецуаїа nu sunt rădăcini.

*Рăспунс:* Рăдăcini nu sunt.

5) Reprezentăm ецуаїа даїа în forma  $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$  și utilizăm formula rădăcinilor pentru ецуаїа de forma  $ax^2 + 2kx + c = 0$ :

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{8 + 7}{5} = 3.$$

*Рăспунс:*  $\frac{1}{5}; 3.$  ▲

**EXEMPLU 2** Rezolvați ecuația: 1)  $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$ ;  
2)  $x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0$ ; 3)  $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$ .

*Rezolvare.* 1) Avem:  $x^2 + 6|x| - 16 = 0$ .

Pentru  $x \geq 0$  obținem ecuația  $x^2 + 6x - 16 = 0$ , care are rădăcinile  $-8$  și  $2$ , însă rădăcina  $-8$  nu satisface condiția  $x \geq 0$ .

Pentru  $x < 0$  obținem ecuația  $x^2 - 6x - 16 = 0$ , care are rădăcinile  $-2$  și  $8$ , însă rădăcina  $8$  nu satisface condiția  $x < 0$ .

*Răspuns:*  $-2$ ;  $2$ .

2) Deoarece  $(\sqrt{x})^2 = x$  pentru  $x \geq 0$ , rezultă că rădăcinile căutate trebuie să satisfacă în același timp două condiții:  $x^2 - 10x - 24 = 0$  și  $x \geq 0$ . În acest caz se spune că ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Ecuația  $x^2 - 10x - 24$  are rădăcinile  $-2$  și  $12$ , însă rădăcina  $-2$  nu satisface condiția  $x \geq 0$ .

*Răspuns:*  $12$ .

3) Ecuația dată este echivalentă cu sistemul  $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$  De aici

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1 \text{ sau } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{9}.$$

*Răspuns:*  $-\frac{1}{9}$ . ▲

**EXEMPLU 3** Pentru care valoare a lui  $b$  are o singură rădăcină ecuația:

1)  $2x^2 - bx + 18 = 0$ ;

2)\*  $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$ ?

*Rezolvare.* 1) Ecuația dată este pătrată. Ea are o singură rădăcină, dacă discriminantul ei este egal cu zero. Avem:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ sau } b = 12.$$

*Răspuns:*  $b = -12$  sau  $b = 12$ .

2) Pentru  $b = -6$  obținem ecuația liniară  $8x + 1 = 0$ , care are o singură rădăcină.

Pentru  $b \neq -6$  ecuația dată este pătrată. Ea are o singură rădăcină, dacă discriminantul ei este egal cu zero:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Avem:  $b^2 - 8b - 20 = 0$ , de unde  $b = -2$  sau  $b = 10$ .

*Răspuns:*  $b = -2$ , sau  $b = 10$ , sau  $b = -6$ . ▲

Câteva generații de profesori preuniversitari obțineau experiență pedagogică, iar elevii lor își aprofundau cunoștințele sale, folosindu-se de cartea „Ecuatii pătrate” a ilustrului pedagog și matematician ucrainean Mâcola Andriiovici Ceaikovskiy. M. A. Ceaikovskiy a lăsat o mare moștenire științifică și pedagogică. Lucrările lui sunt cunoscute departe de hotarele Ucrainei.



**M. A. Ceaikovskiy**  
(1887–1970)



1. Valoarea cărei expresii este numită discriminantul ecuației pătrate?
2. Cum depinde numărul de rădăcini al ecuației pătrate de semnul discriminantului?
3. Scrieți formula rădăcinilor ecuației pătrate.
4. De care algoritm este potrivit de se folosit în procesul rezolvării ecuațiilor pătrate?

## EXERCIȚII

**631.°** Aflați discriminantul și determinați cantitatea de rădăcini a ecuației:

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 + 2x - 4 = 0$ ; | 3) $2x^2 - 6x - 3,5 = 0$ ; |
| 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$ ; | 4) $5x^2 - 2x + 0,2 = 0$ . |

**632.°** Care din ecuațiile aduse are două rădăcini:

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + 4x + 8 = 0$ ;  | 3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ; |
| 2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$ ; | 4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$ ? |

**633.°** Care din următoarele ecuații nu are rădăcini:

- |                           |                               |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 - 6x + 4 = 0$ ;   | 3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$ ;      |
| 2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$ ; | 4) $0,04x^2 - 0,4x + 1 = 0$ ? |

**634.**° Rezolvați ecuația:

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;   | 11) $2x^2 - x - 6 = 0$ ;   |
| 2) $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;   | 12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$ ; |
| 3) $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;   | 13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$ ; |
| 4) $x^2 - 4x - 21 = 0$ ;  | 14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$ ; |
| 5) $x^2 + x - 56 = 0$ ;   | 15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$ ; |
| 6) $x^2 - 6x - 7 = 0$ ;   | 16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$ ; |
| 7) $x^2 - 8x + 12 = 0$ ;  | 17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$ ; |
| 8) $x^2 + 7x + 6 = 0$ ;   | 18) $x^2 - 4x + 1 = 0$ ;   |
| 9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$ ; | 19) $2x^2 - x - 4 = 0$ ;   |
| 10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ; | 20) $x^2 - 8x + 20 = 0$ .  |

**635.**° Rezolvați ecuația:

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ;   | 7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$ ;   |
| 2) $x^2 + 12x - 13 = 0$ ; | 8) $-2x^2 + x + 15 = 0$ ;  |
| 3) $x^2 - 7x + 10 = 0$ ;  | 9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$ ;   |
| 4) $x^2 - x - 72 = 0$ ;   | 10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$ ; |
| 5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ;  | 11) $x^2 - 6x + 11 = 0$ ;  |
| 6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$ ;  | 12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$ . |

**636.**° Pentru care valori ale variabilei sunt egale valorile:

- 1) polinoamelor  $6x^2 - 2$  și  $5 - x$ ;
- 2) binomului  $y - 6$  și trinomului  $y^2 - 9y + 3$ ;
- 3) trinoamelor  $4m^2 + 4m + 2$  și  $2m^2 + 10m + 8$ ?

**637.**° Pentru care valori ale variabilelor sunt egale valorile:

- 1) binomului  $4x + 4$  și trinomului  $3x^2 + 5x - 10$ ;
- 2) trinoamelor  $10p^2 + 10p + 8$  și  $3p^2 - 10p + 11$ ?

**638.**° Aflați rădăcinile ecuației:

- 1)  $(2x - 5)(x + 2) = 18$ ;
- 2)  $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$ ;
- 3)  $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$ ;
- 4)  $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$ ;
- 5)  $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$ ;
- 6)  $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$ .

**639.**° Rezolvați ecuația:

- 1)  $(x - 4)^2 = 4x - 11$ ;
- 2)  $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$ ;
- 3)  $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$ .

**640.**° Aflați numărul natural, al cărui pătrat este cu 42 mai mare decât numărul dat.

641.° Aflați perimetrul dreptunghiului, a cărui arie este egală cu  $70 \text{ cm}^2$ , iar una din laturi este cu  $9 \text{ cm}$  mai mare decât cealaltă.

642.° Produsul a două numere este egal cu  $84$ . Aflați aceste numere, dacă unul din ele este cu  $8$  mai mic decât celălalt.

▣ 643.° Produsul a două numere naturale consecutive este cu  $89$  mai mare decât suma lor. Aflați aceste numere.

▣ 644.° Suma pătratelor a două numere naturale consecutive este egală cu  $365$ . Aflați aceste numere.

645.° Rezolvați ecuația:

$$1) 2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1;$$

$$2) x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0;$$

$$4) \frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}.$$

646.° Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0;$$

$$3) \frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1.$$

$$2) x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0;$$

647.° Pentru care valori ale lui  $a$  numărul  $\frac{1}{4}$  este rădăcina ecuației

$$a^2x^2 + 4ax - 5 = 0?$$

648.° Pentru care valori ale lui  $a$  numărul  $2$  este rădăcina ecuației

$$x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0?$$

649.° Dintr-o foaie pătrată de carton a fost tăiată o fâșie în formă de dreptunghi cu lățimea de  $3 \text{ cm}$  și cu lungimea ca  $a$  laturii pătratului. Aria restului foi constituie  $40 \text{ cm}^2$ . Care a fost lungimea laturii foi pătrate de carton?

650.° Dintr-o foaie dreptunghiulară de hârtie cu lungimea de  $18 \text{ cm}$  s-a tăiat un pătrat, al cărui latură este egală cu lățimea foi. Aria părții rămase a foi de hârtie constituie  $72 \text{ cm}^2$ . Care a fost lățimea foi de hârtie?

651.° Găsiți catetele triunghiului dreptunghic, dacă una din ele este cu  $14 \text{ cm}$  mai mică decât cealaltă, iar ipotenuza este egală cu  $34 \text{ cm}$ .

652.° Aflați laturile dreptunghiului, dacă diferența lor este egală cu  $31 \text{ cm}$ , iar diagonala dreptunghiului este egală cu  $41 \text{ cm}$ .

653.° Aflați trei numere naturale impare consecutive, dacă pătratul primului din ele este cu  $33$  mai mare decât îndoitul sumei celor de-al doilea și al treilea din aceste numere.

654.° Găsiți patru numere naturale pare consecutive, dacă suma primului și al treilea numere este de  $5$  ori mai mică decât produsul numerelor al doilea și al patrulea.

**655.\*** Demonstrați că dacă coeficientul superior și termenul liber au semne diferite, atunci ecuația are două rădăcini.

**656.\*** (*Problemă indiană străveche*).

În două cete împărțindu-se,  
Maimuțele într-un crâng se veseleau.  
O optime a lor la pătrat  
În tufăriș caraghios se jucau,  
Iar douăsprezece pe liane  
Ba atârnav, ba săreau.  
În total câte, după al tău gând,  
Maimuțe erau în acel crâng?

**657.\*\*** Într-o competiție de fotbal au fost jucate 36 de meciuri. Câte echipe au participat la competiție, dacă fiecare echipă a jucat o singură dată cu fiecare din restul echipe?

**658.\*\*** Câte laturi are poligonul, dacă în el se pot duce 90 de diagonale?

**659.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) |x^2 + 7x - 4| = 4;$$

$$4) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0;$$

$$2) 5x^2 - 8|x| + 3 = 0;$$

$$5) x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0;$$

$$3) x|x| + 6x - 5 = 0;$$

$$6) x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0.$$

**660.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) |x^2 + 10x - 4| = 20;$$

$$3) \frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0;$$

$$2) x|x| + 12x - 45 = 0;$$

$$4) x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0.$$

**661.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80;$$

$$2) x^2 + 8(\sqrt{x})^2 - 33 = 0.$$

**662.\*\*** Rezolvați ecuația:

$$1) 6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1};$$

$$2) 5x^2 - 14(\sqrt{x})^2 - 3 = 0.$$

**663.\*\*** Pentru care valori ale lui  $b$  are o singură rădăcină ecuația:

$$1) 2x^2 + 4x - b = 0;$$

$$2) 3x^2 - bx + 12 = 0?$$

**664.\*\*** Pentru care valori ale lui  $b$  are o singură rădăcină ecuația:

$$1) 6x^2 - 18x + b = 0;$$

$$2) 8x^2 + bx + 2 = 0?$$

**665.\*\*** Demonstrați că pentru orice valori a lui  $p$  ecuația are două rădăcini:

$$1) 4x^2 - px - 3 = 0;$$

$$2) x^2 + px + p - 2 = 0.$$

666.\* Demonstrați că pentru orice valoare a lui  $m$  n-are rădăcini ecuația:

$$1) x^2 + mx + m^2 + 1 = 0; \quad 2) x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0.$$

667.\* Demonstrați că pentru orice valoare a lui  $b$  ecuația

$$x^2 + bx - 7 = 0$$

are două rădăcini.

668.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

$$1) x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0;$$

$$2) x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0;$$

$$3) a^2x^2 - 24ax - 25 = 0;$$

$$4) 3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0.$$

669.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

$$1) x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0;$$

$$2) x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0;$$

$$3) ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0.$$

670.\* Pentru care valori ale lui  $b$  are o singură rădăcină ecuația:

$$1) bx^2 - 6x - 7 = 0;$$

$$2) (b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0;$$

$$3) (b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0?$$

671.\* Pentru care valori ale lui  $b$  are o singură rădăcină ecuația:

$$1) bx^2 + x + b = 0;$$

$$2) (b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0?$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

672. Simplificați expresia

$$\left( \frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b} \right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

673. Aflați valoarea expresiei  $\frac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$  pentru  $a = \frac{1}{3}$ .

674. Aranjați în ordine crescătoare numerele  $\sqrt{17}$ ,  $3\sqrt{2}$  și 4.

675. Este deșeu de aliaje de două sorturi, care conțin 5% și 45% nichel corespunzător. Câte tone de deșeu de fiecare din aceste sorturi trebuie de luat, pentru a obține 120 t de aliaj, care conține 30% nichel?

676. Într-o carte lipsesc câteva foi. Partea stângă a paginilor învecinate are numărul 24, iar cea dreaptă – 53. Câte foi lipsesc între aceste pagini?

## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

677. Rezolvați ecuația, aflați suma și produsul rădăcinilor ei și comparați-le cu al doilea coeficient și termenul liber al ecuației:

$$1) x^2 - 4x - 12 = 0; \quad 2) x^2 + 9x + 14 = 0.$$

678. Completați tabelul, unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  – sunt coeficienții ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ , iar  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ei.

Ecuția	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$x_1$	$x_2$	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

## NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

679. Demonstrați că din 101 cubușoare, vopsite în culori arbitrare, se pot alege sau 11 cubușoare de aceeași culoare, sau 11 cubușoare de diferite culori.

## 20. Teorema lui Viète

Pregătindu-vă pentru studierea acestui punct voi ați rezolvat exercițiile 677, 678. Posibil că aceste exerciții v-au sugerat, că suma și produsul rădăcinilor ecuației pătrate sunt legate cu coeficienții ei.

**Teorema 20.1 (teorema lui Viète).** Dacă  $x_1$  și  $x_2$  – sunt rădăcinile ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ , atunci

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Demonstrație.* Condiția teoremei prevede că ecuația dată are rădăcini. De aceea discriminantul ei nu poate fi negativ.

Admitem  $D > 0$ . Aplicând formula rădăcinilor ecuației pătrate, scriem:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$



$$\text{Avem: } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Fie că  $D = 0$ . În acest caz se consideră că  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ . Avem:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left( \frac{-b}{2a} \right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacktriangle$$

**Consecință.** Dacă  $x_1$  și  $x_2$  – sunt rădăcinile ecuației pătrate  $x^2 + bx + c = 0$ , atunci

$$x_1 + x_2 = -b,$$

$$x_1 x_2 = c.$$

Cu alte cuvinte, *suma rădăcinilor ecuației pătrate reduse este egală cu al doilea coeficient, luat cu semnul opus, iar produsul rădăcinilor este egal cu termenul liber.*

**Teorema 20.2 (inversă teoremei lui Viète).** Dacă numerele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt astfel, că  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  și  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ , atunci aceste numere sunt rădăcinile ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ .

*Demonstrație.* Să cercetăm ecuația pătrată  $ax^2 + bx + c = 0$ . O transformăm în ecuație redusă:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$



**Francois Viète**

(1540–1603)

Se citește Viet Fransoa

În anul 1591 a introdus sistemul de simboluri algebrice, adică notarea cu litere nu numai a mărimilor necunoscute, dar și a coeficienților ecuațiilor, ceea ce a permis exprimarea proprietăților ecuațiilor și a rădăcinilor lor prin formule generale. Dintre ale sale descoperiri însuși Viète deosebit de înalt aprecia stabilirea dependenței dintre rădăcinile și coeficienții ecuațiilor.

Conform condiției teoremei această ecuație poate fi scrisă astfel:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \quad (*)$$

Înlocuim în partea stângă a acestei ecuații  $x$  mai întâi cu numărul  $\alpha$ , apoi cu numărul  $\beta$ . Obținem:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Așadar, numerele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt rădăcinile ecuației (\*), și deci, și rădăcinile ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ . ▲

**Consecință.** Dacă numerele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt astfel, că  $\alpha + \beta = -b$  și  $\alpha\beta = c$ , atunci aceste numere sunt rădăcinile ecuației pătrate reduse  $x^2 + bx + c = 0$ .

Această consecință permite rezolvarea unor ecuații pătrate oral, fără a folosi formula rădăcinilor ecuației pătrate.

**EXEMPLU 1** Aflați suma și produsul rădăcinilor ecuației  $3x^2 - 15x + 2 = 0$ .

*Rezolvare.* Să clarificăm dacă ecuația dată are rădăcini.

Avem:  $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$ . Deci, ecuația are două rădăcini  $x_1$  și  $x_2$ .

$$\text{Atunci pe baza teoremei lui Viète } x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5, \quad x_1 x_2 = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

**EXEMPLU 2** Aflați coeficienții  $b$  și  $c$  ai ecuației  $x^2 + bx + c = 0$ , dacă rădăcinile ei sunt numerele  $-7$  și  $4$ .

*Rezolvare.* Conform teoremei lui Viète  $b = -(-7 + 4) = 3$ ,  $c = -7 \cdot 4 = -28$ . ▲

**EXEMPLU 3** Alcătuiți ecuația pătrată cu coeficienți întregi, ale cărei rădăcini sunt egale cu: 1)  $4$  și  $-\frac{5}{7}$ ; 2)  $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$  și  $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$ .

$$\text{Rezolvare. 1) Fie } x_1 = 4 \text{ și } x_2 = -\frac{5}{7}.$$

$$\text{Atunci } x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}, \quad x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}.$$

În virtutea teoremei inverse teoremei lui Viète, numerele  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$ . Înmulțind ambele părți ale acestei ecuații cu  $7$ , obținem ecuația pătrată cu coeficienți întregi:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

$$2) \text{ Fie că } x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \text{ și } x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Atunci } x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6, \quad x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Așadar,  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$ . De aici obținem ecuația căutată  $4x^2 - 24x + 29 = 0$ . ▲

**EXEMPLU 4** Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $2x^2 - 3x - 9 = 0$ . Fără a rezolva ecuația aflați valoarea expresiei  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$ .

*Rezolvare.* Conform teoremei lui Viete  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$ .

Atunci avem:  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$ .

*Răspuns:*  $-\frac{1}{3}$ . ▲

**EXEMPLU 5** Numărul 4 este rădăcina ecuației  $3x^2 - 10x + n = 0$ . Aflați a doua rădăcină a ecuației și valoarea lui  $n$ .

*Rezolvare.* Admitem că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației date, totodată  $x_1 = 4$ . Conform teoremei lui Viete  $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$ . Atunci  $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$ .

Avem:  $\frac{n}{3} = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}$ ,  $n = -8$ .

*Răspuns:*  $x_2 = -\frac{2}{3}$ ,  $n = -8$ . ▲

**EXEMPLU 6** Compuneți ecuația pătrată, rădăcinile căreia sunt cu 4 mai mari decât rădăcinile ecuației  $x^2 + 6x - 14 = 0$ .

*Rezolvare.* Fie  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației date,  $x'_1$  și  $x'_2$  – rădăcinile ecuației căutate.

Conform condiției  $x'_1 = x_1 + 4$ ,  $x'_2 = x_2 + 4$ .

Conform teoremei lui Viete  $x_1 + x_2 = -6$ ,  $x_1 x_2 = -14$ .

Atunci avem:

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x'_1 x'_2 = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Așadar, conform teoremei, inverse teoremei lui Viete, ecuația căutată este  $x^2 - 2x - 22 = 0$ .

*Răspuns:*  $x^2 - 2x - 22 = 0$ . ▲



1. Formulați teorema lui Viete.
2. Formulați consecința din teorema lui Viete.
3. Formulați teorema inversă teoremei lui Viete.
4. Formulați consecința din teorema, inversă teoremei lui Viete.

## EXERCIȚII

- 680.**° Cu ce este egală suma rădăcinilor ecuației  $x^2 + 5x - 10 = 0$ :  
 1) 5;                      2) -5;                      3) -10;                      4) 10?
- 681.**° Cu ce este egal produsul rădăcinilor ecuației  $x^2 - 14x + 12 = 0$ :  
 1) -14;                      2) 14;                      3) 12;                      4) -12?
- 682.**° Fără a rezolva ecuația aflați suma și produsul rădăcinilor ei:  
 1)  $x^2 + 6x - 32 = 0$ ;                      3)  $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ;  
 2)  $x^2 - 10x + 4 = 0$ ;                      4)  $10x^2 + 42x + 25 = 0$ .
- 683.**° Fără a rezolva ecuația, aflați suma și produsul rădăcinilor ei:  
 1)  $x^2 - 12x - 18 = 0$ ;                      3)  $3x^2 + 7x + 2 = 0$ ;  
 2)  $x^2 + 2x - 9 = 0$ ;                      4)  $-4x^2 - 8x + 27 = 0$ .
- 684.**° Aplicând teorema inversă teoremei lui Viète, de stabilit, dacă sunt rădăcini ale ecuației:  
 1)  $x^2 - 8x + 12 = 0$  numerele 2 și 6;  
 2)  $x^2 + x - 56 = 0$  numerele -7 și 8;  
 3)  $x^2 - 13x + 42 = 0$  numerele 5 și 8;  
 4)  $x^2 - 20x - 99 = 0$  numerele 9 și 11.
- 685.**° Folosind teorema inversă teoremei lui Viète, de aflat dacă sunt rădăcini ale ecuației:  
 1)  $x^2 + 2x - 3 = 0$  numerele 1 și -2;  
 2)  $x^2 + 5x + 6 = 0$  numerele -2 și -3.
- 686.**° Aflați coeficienții  $b$  și  $c$  ai ecuației  $x^2 + bx + c = 0$ , dacă rădăcinile ei sunt numerele:  
 1) -8 și 6;                      2) 4 și 5.
- 687.**° Aflați coeficienții  $b$  și  $c$  ai ecuației  $x^2 + bx + c = 0$ , dacă rădăcinile ei sunt numerele:  
 1) -2 și 0,5;                      2) -10 și -20.
- 688.**° Compuneți ecuația pătrată cu coeficienți întregi, rădăcinile căreia sunt numerele:  
 1) 2 și 5;                      3) -0,2 și -10;                      5) 0 și 6;  
 2)  $-\frac{1}{3}$  și 2;                      4)  $2 - \sqrt{3}$  și  $2 + \sqrt{3}$ ;                      6)  $-\sqrt{7}$  și  $\sqrt{7}$ .
- 689.**° Alcătuiți ecuația pătrată cu coeficienți întregi, rădăcinile căreia sunt numerele:  
 1) -7 și -8;                      2) 5 și -0,4;                      3)  $\frac{1}{2}$  și  $\frac{2}{3}$ ;                      4)  $5 - \sqrt{10}$  și  $5 + \sqrt{10}$ .

- 690.\*** Numărul  $-2$  este rădăcina ecuației  $x^2 - 8x + q = 0$ . Aflați valoarea lui  $q$  și a doua rădăcină a ecuației.
- 691.\*** Numărul  $7$  este rădăcina ecuației  $x^2 + px - 42 = 0$ . Aflați valoarea lui  $p$  și a doua rădăcină a ecuației.
- 692.\*** Numărul  $\frac{1}{3}$  este rădăcina ecuației  $6x^2 - bx + 4 = 0$ . Aflați valoarea lui  $b$  și a doua rădăcină a ecuației.
- 693.\*** Numărul  $-0,2$  este rădăcina ecuației  $4x^2 - 5,6x + m = 0$ . Aflați valoarea lui  $m$  și a doua rădăcină a ecuației.
- 694.\*** Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $2x^2 - 7x - 13 = 0$ . Fără a rezolva ecuația aflați valoarea expresie  $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$ .
- 695.\*** Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $5x^2 + 4x - 13 = 0$ . Fără a rezolva ecuația aflați valoarea expresie  $3x_1x_2 - x_1 - x_2$ .
- 696.\*** Pentru care valori ale lui  $b$  rădăcinile ecuației  $x^2 + bx - 17 = 0$  sunt numere opuse? Aflați aceste rădăcini.
- 697.\*** Aplicând teorema, inversă teoremei lui Viete, rezolvați ecuația:
- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$ ; | 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$ ; |
| 2) $x^2 + 5x + 4 = 0$ ; | 6) $x^2 - x - 2 = 0$ ;   |
| 3) $x^2 - 4x - 5 = 0$ ; | 7) $x^2 + 2x - 8 = 0$ ;  |
| 4) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ; | 8) $x^2 - 3x - 18 = 0$ . |
- 698.\*** Folosind teorema, inversă teoremei lui Viete, rezolvați ecuația:
- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 24 = 0$ ; | 3) $x^2 - 2x - 8 = 0$ ; |
| 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$ ;   | 4) $x^2 + x - 12 = 0$ . |
- 699.\*** Care din ecuațiile date au două rădăcini pozitive, care – două negative, iar care – rădăcini cu semne diferite:
- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 12x + 14 = 0$ ; | 4) $x^2 + 16x + 10 = 0$ ;  |
| 2) $x^2 + 6x - 42 = 0$ ;  | 5) $x^2 - 24x + 0,1 = 0$ ; |
| 3) $x^2 - 7x - 30 = 0$ ;  | 6) $x^2 + 20x + 3 = 0$ ?   |
- 700.\*\*** Una din rădăcinile ecuației  $x^2 - 10x + c = 0$  este cu  $8$  mai mică decât cealaltă. Aflați valoarea lui  $c$  și rădăcinile ecuației.
- 701.\*\*** Rădăcinile ecuației  $x^2 + 20x + a = 0$  se raportează ca  $7 : 3$ . Aflați valoarea lui  $a$  și rădăcinile ecuației.
- 702.\*\*** Rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  ale ecuației  $x^2 - 7x + m = 0$  satisfac condiția  $2x_1 - 5x_2 = 28$ . Aflați rădăcinile ecuației și valoarea lui  $m$ .
- 703.\*\*** Rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  ale ecuației  $x^2 + 4x + n = 0$  îndeplinesc condiția  $3x_1 - x_2 = 8$ . Aflați rădăcinile ecuației și valoarea lui  $n$ .

**704.\*\*** Aplicând teorema, inversă teoremei lui Viète, aflați rădăcinile ecuației:

$$1) 2x^2 - 5x + 3 = 0; \quad 3) 16x^2 - 23x + 7 = 0;$$

$$2) 2x^2 + 5x + 3 = 0; \quad 4) -8x^2 - 19x + 27 = 0.$$

**705.\*\*** Folosind teorema, inversă teoremei lui Viète, aflați rădăcinile ecuației:

$$1) 7x^2 + 11x - 18 = 0; \quad 2) 9x^2 - 5x - 4 = 0.$$

**706.\*\*** Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $x^2 - 9x + 6 = 0$ . Fără a rezolva ecuația aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad 2) x_1^2 + x_2^2; \quad 3) (x_1 - x_2)^2; \quad 4) x_1^3 + x_2^3.$$

**707.\*\*** Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $x^2 + 5x - 16 = 0$ . Fără a rezolva ecuația aflați valoarea expresiei:

$$1) x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1; \quad 2) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}; \quad 3) |x_2 - x_1|.$$

**708.\*\*** Alcătuiți ecuația pătrată, ale cărei rădăcini sunt cu 2 mai mici decât rădăcinile corespunzătoare ale ecuației  $x^2 + 8x - 3 = 0$ .

**709.\*\*** Compuneți ecuația pătrată ale cărei rădăcini sunt cu 3 mai mari decât rădăcinile corespunzătoare ale ecuației  $x^2 - 12x + 4 = 0$ .

**710.\*\*** Alcătuiți ecuația pătrată ale cărei rădăcini sunt de 3 ori mai mici decât rădăcinile corespunzătoare ale ecuației  $2x^2 - 14x + 9 = 0$ .

**711.\*\*** Compuneți ecuația pătrată ale cărei rădăcini sunt de 2 ori mai mari decât rădăcinile corespunzătoare ale ecuației  $2x^2 - 15x + 4 = 0$ .

**712.\*** Suma pătratelor ale rădăcinilor ecuației  $3x^2 + ax - 7 = 0$  este egală cu  $\frac{46}{9}$ . Aflați valoarea lui  $a$ .

**713.\*** Rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  ale ecuației  $x^2 - ax + 8 = 0$  satisfac condiția  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$ . Aflați valoarea lui  $a$ .

**714.\*** Oare sunt juste afirmațiile:

- 1) ecuația  $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$  are rădăcini de semne diferite pentru orice valoare a lui  $a$ ;
- 2) dacă ecuația  $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$  are rădăcini, atunci independent de valoare lui  $a$  ele ambele sunt negative?

**715.\*** Aflați toate valorile întregi a lui  $b$ , pentru care are rădăcini întregi ecuația:

$$1) x^2 + bx + 6 = 0; \quad 2) x^2 + bx - 12 = 0.$$

**716.\*** Aflați toate valorile întregi ale lui  $b$  pentru care are rădăcini întregi ecuația:

$$1) x^2 + bx + 8 = 0; \quad 2) x^2 + bx - 18 = 0.$$

- 717.\* Rădăcinile ecuației  $x^2 + bx + c = 0$  sunt egale cu coeficienții  $b$  și  $c$  ai ei. Aflați  $b$  și  $c$ .
- 718.\* Pentru care valori ale lui  $a$  suma pătratelor rădăcinilor ecuației  $x^2 - 4x + a = 0$  este egală cu: 1) 12; 2) 6?
- 719.\* Pentru care valori ale lui  $a$  suma pătratelor rădăcinilor ecuației  $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$  este egală cu 9?

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

720. Simplificați fracția:

$$1) \frac{4a-16}{a^2-16}; \quad 3) \frac{c^2+10c+25}{5c+25}; \quad 5) \frac{n^3-n^5}{n^3-n};$$

$$2) \frac{12b^3-8b^2}{2-3b}; \quad 4) \frac{4-m^2}{m^2-4m+4}; \quad 6) \frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}.$$

721. Într-o livadă au plantat 48 de pomi în rânduri la fel cu aceeași cantitate de pomi în fiecare rând. S-a constatat că rânduri erau cu 8 mai puține decât pomi în fiecare rând. Câți pomi erau în fiecare rând și câte rânduri erau?
722. Fără a efectua construcțiile aflați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor  $y = x^2$  și  $y = x + 2$ . Desenați graficele funcțiilor date și notați punctele găsite.
723. Într-o livadă 60% din pomi constituie vișinii și prunii, din ei 30% - pruni. Ce procent din toți pomii livezii constituie prunii?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

724. Aplicând metoda grupării descompuneți în factori polinomul:

$$1) x^2 - 7x + 10; \quad 3) a^2 + 8a + 12;$$

$$2) y^2 + 3y - 4; \quad 4) x^2 - x - 6.$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

725. Vasile s-a gândit la trei cifre  $x, y, z$ . Petrea numește trei numere  $a, b, c$ . Vasile îi spune lui Petrea valoarea expresiei  $ax + by + cz$ . Ce numere ar trebui să numească Petrea ca din informația obținută de la Vasile să poată determina cifrele la care acela s-a gândit?

### ÎNSĂRCINAREA NR. 5 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

- Care din următoarele ecuații nu este pătrată?
 

A)  $x^2 = 0$ ;      B)  $x^2 + x = 0$ ;      C)  $x^3 + x = 0$ ;      D)  $x^2 + x - 2 = 0$ .
- Rezolvați ecuația  $9x - x^2 = 0$ .
 

A)  $-3; 0; 3$ ;      B)  $0; 3$ ;      C)  $-3; 3$ ;      D)  $0; 9$ .
- Rezolvați ecuația  $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{2}$ .
 

A)  $0; 5$ ;      B)  $5$ ;      C)  $\sqrt{5}$ ;      D)  $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$ .
- Care din următoarele ecuații n-are rădăcini?
 

A)  $x^2 - 5x - 2 = 0$ ;      C)  $x^2 - 2x + 5 = 0$ ;  
 B)  $x^2 - 5x + 2 = 0$ ;      D)  $x^2 + 2x - 5 = 0$ .
- Câte rădăcini are ecuația  $6x^2 + 13x + 5 = 0$ ?
 

A) două;      C) niciuna;  
 B) infinit;      D) una.
- Aflați rădăcinile ecuației  $x^2 + 4x - 21 = 0$ .
 

A)  $7; -3$ ;      B)  $-7; 3$ ;      C)  $-7; -3$ ;      D)  $3; 7$ .
- Cu ce este egală suma rădăcinilor ecuației  $x^2 - 10x - 12 = 0$ ?
 

A)  $10$ ;      B)  $-10$ ;      C)  $-12$ ;      D)  $12$ .
- Cu ce este egal produsul rădăcinilor ecuației  $3x^2 - 16x + 6 = 0$ ?
 

A)  $6$ ;      B)  $2$ ;      C)  $-16$ ;      D)  $\frac{16}{3}$ .
- Pentru care valori ale variabilei expresiile obțin valori egale  $(3x - 1)(x + 2)$  și  $(x - 12)(x - 4)$ ?
 

A)  $-12,5; 2$ ;      B)  $12,5; -2$ ;      C)  $-25; 4$ ;      D)  $25; -4$ .
10. Compuneți ecuația pătrată, ale cărei rădăcini sunt egale cu  $3 - \sqrt{2}$  și  $3 + \sqrt{2}$ .
 

A)  $x^2 + 6x - 7 = 0$ ;      C)  $x^2 + 6x + 7 = 0$ ;  
 B)  $x^2 - 6x - 7 = 0$ ;      D)  $x^2 - 6x + 7 = 0$ ;
- Rezolvați ecuația  $x|x| - 9x - 10 = 0$ .
 

A)  $-1; 10; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$ ;      C)  $-1; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$ ;  
 B)  $10; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$ ;      D)  $-1; 10$ .
- Numărul  $-5$  este rădăcina ecuației  $2x^2 + 9x + c = 0$ . Aflați a doua rădăcină a ecuației și valoarea lui  $c$ .
 

A)  $x_2 = 0,5, c = -5$ ;      C)  $x_2 = 9,5, c = 22,5$ ;  
 B)  $x_2 = -0,5, c = 5$ ;      D)  $x_2 = 9,5, c = -22,5$ .



## 21. Trinomul pătratic

**Definiție.** Trinom pătratic se numește polinomul de formă  $ax^2 + bx + c$ , unde  $x$  – variabila,  $a$ ,  $b$  și  $c$  – niște numere, totodată  $a \neq 0$ .

Să aducem exemple de polinoame, care sunt trinoame pătratice:

$$2x^2 - 3x + 5; x^2 + 7x; x^2 - 5; 3x^2.$$

Menționăm că partea stângă a ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$  este trinom pătratic.

**Definiție.** Rădăcină a trinomului pătratic se numește valoarea variabilei pentru care valoarea trinomului pătratic este egală cu zero.

De exemplu, numărul 2 este rădăcina trinomului pătratic  $x^2 - 6x + 8$ .

Pentru a afla rădăcinile trinomului pătratic  $ax^2 + bx + c$ , trebuie de rezolvat ecuația pătrată corespunzătoare  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Valoarea expresiei  $D = b^2 - 4ac$  se numește **discriminantul trinomului pătratic**  $ax^2 + bx + c$ .

Dacă  $D < 0$ , atunci trinomul pătratic n-are rădăcini. Dacă  $D = 0$ , atunci trinomul pătratic are o singură rădăcină, dacă  $D > 0$  – atunci două rădăcini.

Să cercetăm trinomul pătratic  $x^2 - 3x + 2$ . Să-l descompunem în factori prin metoda grupării (exercițiul asemănător, 724, voi l-ați executat în timpul pregătirii pentru studierea acestui punct).

Avem:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Despre așa o transformare identică se spune că trinomul pătratic  $x^2 - 3x + 2$  a fost descompus în **factori liniari**  $x - 1$  și  $x - 2$ .

Legătura dintre rădăcinile trinomului pătratic și factorii liniari, în care el se descompune, stabilește următoarea teoremă.

**Teorema 21.1.** Dacă discriminantul trinomului pătratic  $ax^2 + bx + c$  este pozitiv, atunci trinomul dat poate fi descompus în factori liniari:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

unde  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile trinomului pătratic.

*Demonstrație.* Deoarece numerele  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile trinomului pătratic  $ax^2 + bx + c = 0$ , atunci pe baza teoremei lui Viete  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \blacktriangle \end{aligned}$$

**Observație.** Dacă discriminantul trinomului pătratic este egal cu zero, atunci se consideră că trinomul pătratic are două rădăcini egale, adică  $x_1 = x_2$ . În acest caz descompunerea trinomului pătratic în factori liniari are următoarea formă:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

**Teorema 21.2.** Dacă discriminantul trinomului pătratic este negativ, atunci trinomul dat nu poate fi descompus în factori liniari.

*Demonstrație.* Admitem, că trinomul pătratic  $ax^2 + bx + c$  poate fi descompus în factori liniari. Atunci există așa numere  $k, m$  și  $n$ , pentru care este justă egalitatea  $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$ . De aici obținem că  $m$  și  $n$  – rădăcini ale trinomului pătratic. Așadar, discriminantul lui nu este negativ, ceea ce contrazice condiția.  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 1** Descompuneți în factori trinomul pătratic:

$$1) x^2 - 14x - 32; \quad 2) -x^2 + 17x - 30; \quad 3) 3x^2 - 7x + 2.$$

*Rezolvare.* 1) Aflăm rădăcinile trinomului dat:

$$\begin{aligned} x^2 - 14x - 32 &= 0; \\ x_1 &= -2, x_2 = 16. \end{aligned}$$

Așadar,  $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$ .

2) Rezolvăm ecuația  $-x^2 + 17x - 30 = 0$ . Avem:

$$\begin{aligned} x^2 - 17x + 30 &= 0; \\ x_1 &= 2, x_2 = 15. \end{aligned}$$

Așadar,  $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$ .

3) Să rezolvăm ecuația  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ . Avem:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2.$$

Atunci  $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$ .  $\blacktriangle$

**EXEMPLU 2** Simplificați fracția  $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$ .

*Rezolvare.* Descompunem în factori trinomul pătratic, care este numărătorul fracției date  $6a^2 - a - 1 = 0$ , obținem:

$$a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}.$$

Acum se poate scrie:

$$\begin{aligned} 6a^2 - a - 1 &= 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = \\ &= 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a + 1)(2a - 1). \end{aligned}$$

Atunci obținem:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Răspuns:  $\frac{2a-1}{3a-1}$ . ▲

**EXEMPLU 3** Pentru ce valoare a lui  $m$  descompunerea în factori a trinomului  $2x^2 + 9x + m$  conține factorul  $(x + 5)$ ?

*Rezolvare.* Deoarece descompunerea trinomului dat în factori trebuie să conțină factorul  $(x + 5)$ , atunci reiese că una din rădăcinile acestui trinom este egal cu  $-5$ .

Atunci avem:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m &= 0; \\ m &= -5. \end{aligned}$$

Răspuns:  $m = -5$ . ▲



1. Care polinom se numește trinom pătratic?
2. Ce se numește rădăcină a trinomului pătratic?
3. Ce se numește discriminant al trinomului pătratic?
4. În care caz trinomul pătratic n-are rădăcini? Are o singură rădăcină? Are două rădăcini?
5. În care caz trinomul pătratic poate fi descompus în factori liniari?
6. După care formulă poate fi descompus în factori liniari trinomul pătratic?
7. În care caz trinomul pătratic nu poate fi descompus în factori liniari?

## EXERCIȚII

726.° Aflați rădăcinile trinomului pătratic:

- |                      |                        |                        |
|----------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $x^2 - x - 12$ ;  | 3) $3x^2 - 16x + 5$ ;  | 5) $4x^2 + 28x + 49$ ; |
| 2) $x^2 + 2x - 35$ ; | 4) $16x^2 - 24x + 3$ ; | 6) $3x^2 + 21x - 90$ . |



736.\* Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

$$1) \frac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{a - 2}{3a + 2} + \frac{a - 1}{1 - 2a};$$

$$2) \frac{b - 4}{b^3 - b} : \left( \frac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \frac{1}{b^2 - 1} \right);$$

$$3) \left( \frac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \frac{2c}{c^2 - 6c + 9} \right) : \frac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2};$$

$$4) \left( \frac{3}{m - 4} + \frac{2m}{m + 1} + \frac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4} \right) \cdot \frac{4m - 16}{2m - 3}.$$

737.\* Demonstrați că pentru toate valorile admisibile ale lui  $a$  valoarea expresiei nu depinde de valoarea variabilei:

$$1) \frac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \frac{5a + 6}{5a - 2} + \frac{9a - 8}{1 - 2a};$$

$$2) \left( \frac{2a}{a + 3} + \frac{1}{a - 1} - \frac{4}{a^2 + 2a - 3} \right) : \frac{2a + 1}{a + 3}.$$

738.\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1};$$

$$2) y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

739.\* Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4};$$

$$2) y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5}.$$

740.\* Descompuneți în factori polinomul:

$$1) x^2 - 6xy + 5y^2;$$

$$3) 3m^2 - 8mn - 3n^2;$$

$$2) a^2 + 5ab - 36b^2;$$

$$4) 4x^2 - 5xy + y^2.$$

741.\* Descompuneți în factori polinomul:

$$1) a^2 - 14ab + 40b^2;$$

$$2) 12b^2 + bc - 6c^2.$$

742.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

$$1) (a^2 - a - 6)x = a^2 - 9;$$

$$2) (a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7.$$

743.\* Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația

$$(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64.$$

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

744. Simplificați fracția:

$$1) \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$$

$$3) \frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - 3};$$

$$5) \frac{9a - b^2}{9a + 6b\sqrt{a + b^2}};$$

$$2) \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - 5\sqrt{2}};$$

$$4) \frac{4a - 2}{2\sqrt{a + \sqrt{2}}};$$

$$6) \frac{a\sqrt{a} - 8}{a + 2\sqrt{a} + 4}.$$

745. Care din graficele, reprezentate în figura 36, este graficul mișcării pietonului, care mergea cu viteză constantă? Determinați viteza mișcării acestui pieton.

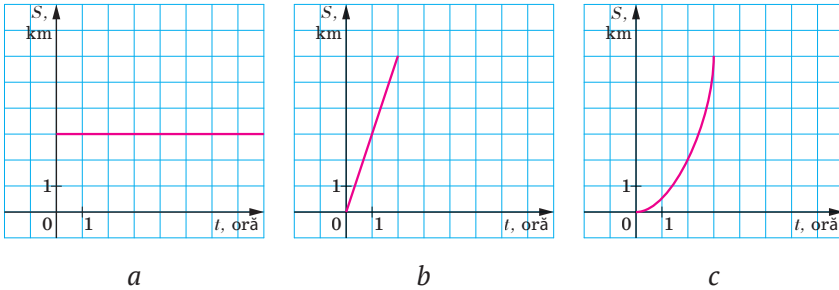


Fig. 36

746. Au amestecat 2 l lapte cu grăsimea de 8% și 3 l lapte cu grăsimea de 6%. Care este grăsimea amestecului obținut?

### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

747. Rezolvați ecuația:

$$1) x^2 = 9;$$

$$3) (4x + 1)^2 = 9;$$

$$5) \sqrt{x} = 9;$$

$$2) x^2 = -9;$$

$$4) (x - 1)^2 = 5;$$

$$6) \sqrt{x} = -9.$$

748. Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2};$$

$$2) \frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1;$$

$$3) \frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1;$$

$$4) \frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}.$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

749. Se consideră toate dreptunghiurile, lungimile laturilor ale cărora sunt numere naturale. Care dreptunghiuri sunt mai multe: cu perimetrul 1000 sau cu perimetrul 1002?

## 22. Rezolvarea ecuațiilor reducibile la ecuații pătrate

**EXEMPLU 1** Rezolvați ecuația  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ .

*Rezolvare.* Fie  $x^2 = t$ . Atunci  $x^4 = t^2$ . Substituind în ecuația dată  $x^2$  și  $x^4$  corespunzător cu  $t$  și  $t^2$ , obținem ecuația pătrată cu variabila  $t$ :

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Rezolvând această ecuație, găsim:  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = 9$ . Deoarece  $t = x^2$ , rezolvarea ecuației inițiale se reduce la rezolvarea a două ecuații:

$$x^2 = 4 \text{ și } x^2 = 9.$$

De aici  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 3$ .

*Răspuns* poate fi scris în două feluri:  $-2; 2; -3; 3$  sau  $\pm 2; \pm 3$ . ▲

**Definiție.** Ecuația de forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , unde  $x$  – variabilă,  $a, b$  și  $c$  – numere oarecare, totodată  $a \neq 0$ , se numește ecuație bipătrată.

Prin înlocuirea  $x^2 = t$  ecuația bipătrată se reduce la ecuația pătrată  $at^2 + bt + c = 0$ . Așa un procedeu de rezolvare a ecuațiilor se numește **metoda înlocuirii variabilei**.

Metoda înlocuirii variabilei se poate folosi la rezolvarea nu numai a ecuațiilor bipătrate.

**EXEMPLU 2** Rezolvați ecuația  $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$ .

*Rezolvare.* Facem înlocuirea:  $(2x - 1)^2 = t$ . Atunci ecuația dată se reduce la ecuația pătrată

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

De aici  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 1$ .

Acum trebuie de rezolvat două astfel de ecuații:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ și } (2x - 1)^2 = 1.$$

Prima din ele n-are rădăcini. Din a doua ecuație obținem:

$$2x - 1 = -1 \text{ sau } 2x - 1 = 1.$$

De aici  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ .

*Răspuns:*  $0; 1$ . ▲

**EXEMPLU 3** Rezolvați ecuația  $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$ .

*Rezolvare.* Fie  $\sqrt{x} = t$ . Atunci  $x = t^2$ . Obținem:  $6t^2 + 5t + 1 = 0$ .

De aici  $t_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2}$ .

Obținem două ecuații:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Deoarece  $\sqrt{x} \geq 0$ , rezultă că aceste ecuații n-au rădăcini, și deci, și ecuația dată n-are rădăcini.

*Răspuns:* rădăcini nu sunt. ▲

**EXEMPLU 4** Rezolvați ecuația  $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$ .

*Rezolvare.* Ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$$

De aici

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \\ x = -3 \text{ sau } x = 6, \\ x \neq 6; \\ x = -3. \end{cases}$$

*Răspuns:*  $-3$ . ▲

**EXEMPLU 5** Rezolvați ecuația  $\frac{5}{x^2 - 4x + 4} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$ .

*Rezolvare.* Avem:  $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0$ ;

$$\frac{5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Deci, ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

De aici

$$\begin{cases} 5x + 10 - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \\ \begin{cases} x^2 - 5x - 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 7 \text{ sau } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 7.$$

Răspuns: 7. ▲



Care ecuație se numește bipătrată?

### EXERCIȚII

750.° Rezolvați ecuația:

1)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$

2)  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0;$

3)  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$

4)  $x^4 + 14x^2 - 32 = 0;$

5)  $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0;$

6)  $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0.$

751.° Rezolvați ecuația:

1)  $x^4 - 29x^2 + 100 = 0;$

2)  $x^4 - 9x^2 + 20 = 0;$

3)  $x^4 - 2x^2 - 24 = 0;$

4)  $x^4 + 3x^2 - 70 = 0;$

5)  $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0;$

6)  $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$

752.° Rezolvați ecuația:

1)  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0;$

2)  $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0;$

3)  $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0;$

4)  $\frac{x^2 - 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10};$

5)  $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2};$

6)  $\frac{x^2 + 10x}{x - 8} = \frac{12x + 48}{x - 8};$

7)  $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0;$

8)  $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0;$

9)  $\frac{x^2 - 6x}{x - 4} = 4;$

10)  $\frac{5x + 18}{x - 2} = x;$

11)  $x + 1 = \frac{6}{x};$

12)  $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}.$

753.° Rezolvați ecuația:

1)  $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0;$

2)  $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0;$

3)  $\frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8};$

4)  $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7};$

5)  $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0;$

6)  $\frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6;$

7)  $\frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y;$

8)  $y - \frac{39}{y} = 10.$

**754.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$ ;
- 2)  $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$ ;
- 3)  $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$ ;
- 4)  $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$ .

**755.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$ ;
- 2)  $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$ .

**756.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ ;
- 2)  $x - \sqrt{x} - 12 = 0$ ;
- 3)  $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$ ;
- 4)  $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$ ;
- 5)  $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$ ;
- 6)  $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$ .

**757.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$ ;
- 2)  $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$ ;
- 3)  $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$ .

**758.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$ ;
- 2)  $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$ ;
- 3)  $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$ ;
- 4)  $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$ .

**759.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$ ;
- 2)  $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$ .

**760.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\frac{2y}{y - 3} = \frac{3y + 3}{y}$ ;
- 2)  $\frac{3x + 4}{x - 3} = \frac{2x - 9}{x + 1}$ ;
- 3)  $\frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7}$ ;
- 4)  $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 3x - 4$ .

**761.°** Знайдіть корені рівняння:

- 1)  $\frac{2x - 13}{x - 6} = \frac{x + 6}{x}$ ;
- 2)  $\frac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2} = 2x - 5$ .

**762.°** Знайдіть корені рівняння:

- 1)  $\frac{10}{x + 2} + \frac{9}{x} = 1$ ;
- 2)  $\frac{48}{14 - x} - \frac{48}{14 + x} = 1$ ;
- 3)  $\frac{x - 1}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$ ;
- 4)  $\frac{x - 1}{x + 3} + \frac{x + 1}{x - 3} = \frac{2x + 18}{x^2 - 9}$ ;
- 5)  $\frac{4x - 10}{x - 1} + \frac{x + 6}{x + 1} = 4$ ;
- 6)  $\frac{1}{x} - \frac{10}{x^2 - 5x} = \frac{3 - x}{x - 5}$ ;
- 7)  $\frac{4x}{x^2 + 4x + 4} - \frac{x - 2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x}$ ;
- 8)  $\frac{6}{x^2 - 36} - \frac{3}{x^2 - 6x} + \frac{x - 12}{x^2 + 6x} = 0$ ;
- 9)  $\frac{x}{x + 7} + \frac{x + 7}{x - 7} = \frac{63 - 5x}{x^2 - 49}$ ;
- 10)  $\frac{4}{x^2 - 10x + 25} - \frac{1}{x + 5} = \frac{10}{x^2 - 25}$ .

**763.\*** Резолваї ецуаїа:

$$1) \frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{5};$$

$$2) \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4};$$

$$3) \frac{9}{x+3} + \frac{14}{x-3} = \frac{24}{x};$$

$$4) \frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0;$$

$$5) \frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x};$$

$$6) \frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0.$$

**764.\*** Pentru care valoare a variabilei:

$$1) \text{suma fracțiilor } \frac{24}{x-2} \text{ și } \frac{16}{x+2} \text{ este egală cu } 3;$$

$$2) \text{valoarea fracției } \frac{42}{x} \text{ este cu } \frac{1}{4} \text{ mai mare decât valoarea fracției } \frac{36}{x+20}?$$

**765.\*** Pentru care valoare a variabilei:

$$1) \text{valoarea fracției } \frac{30}{x+3} \text{ este cu } \frac{1}{2} \text{ mai mică decât valoarea fracției } \frac{30}{x};$$

$$2) \text{valoarea fracției } \frac{20}{x} \text{ este cu } 9 \text{ mai mare decât valoarea fracției } \frac{20}{x+18}?$$

**766.\*\*** Резолваї ецуаїа:

$$1) \frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1};$$

$$2) \frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3};$$

$$3) \frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2};$$

$$4) \frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}.$$

**767.\*\*** Резолваї ецуаїа:

$$1) \frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2};$$

$$2) \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}.$$

**768.\*\*** Резолваї ецуаїа prin metoda înlocuirii variabilei:

$$1) (x^2-2)^2 - 8(x^2-2) + 7 = 0;$$

$$2) (x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0;$$

$$3) (x^2-3x+1)(x^2-3x+3) = 3;$$

$$4) (x^2+2x+2)(x^2+2x-4) = -5.$$

**769.\*\*** Резолваї ецуаїа prin metoda înlocuirii variabilei:

$$1) \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0;$$

$$2) \frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}.$$

**770.\*\*** Резолваї ецуаїа:

$$1) (x^2-6x)^2 + (x^2-6x) - 56 = 0;$$

$$3) \frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0;$$

$$2) (x^2+8x+3)(x^2+8x+5) = 63;$$

$$4) \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}.$$

**771.\*** Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvaї ецуаїа:

$$1) \frac{x^2-8x+7}{x-a} = 0;$$

$$3) \frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x^2-8x+7} = 0;$$

$$4) \frac{a(x-a)}{x+3} = 0.$$

772.\* Pentru care valori ale variabilei  $a$  ecuația  $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$  are o singură rădăcină?

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

773. Oare este adevărată afirmația că pentru toate valorile admisibile ale variabilei valoarea expresiei

$$(a-1)^2 \left( \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-2a+1} \right) + \frac{2}{a+1}$$

este număr pozitiv?

774. Ce număr, rațional sau irațional, este valoarea expresiei  $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$ ?

775. Construiți graficul funcției

$$y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{dacă } x < -2, \\ x^2, & \text{dacă } x \geq -2. \end{cases}$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

776. Pe ecranul unui computer este scris numărul 1. În fiecare secundă calculatorul adună la numărul ce se află pe ecran, suma cifrelor lui. Oare poate peste un oarecare interval de timp să apară pe ecran numărul 123 456 789?

## Rezolvarea ecuațiilor prin metoda înlocuirii variabilei



În p.22 ați făcut cunoștință cu rezolvarea ecuațiilor prin metoda înlocuirii variabilei. Să examinăm încă câteva exemple care ilustrează eficiența acestei metode.

**EXEMPLU 1** Rezolvați ecuația  $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$ .

*Rezolvare.* Fie că  $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = t$ . Atunci  $\frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = \frac{8}{t}$ . Obținem ecuația  $t - \frac{8}{t} = -2$ . Această ecuație este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

De aici  $t_1 = -4$ ,  $t_2 = 2$ .

Acum rezolvarea ecuației date se reduce la rezolvarea a două ecuații:

$$1) \frac{x^2 - 3x - 6}{x} = -4;$$

$$2) \frac{x^2 - 3x - 6}{x} = 2.$$

Rezolvați aceste ecuații de sine stătător.

Răspuns:  $-3; -1; 2; 6$ . ▲

**EXEMPLU 2** Rezolvați ecuația  $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$ .

*Rezolvare.* Să transformăm această ecuație:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Fie  $2x^2 + 3x - 1 = t$ . Atunci  $t^2 - 5t + 4 = 0$ .

De aici  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 4$ .

Deci,  $2x^2 + 3x - 1 = 1$  sau  $2x^2 + 3x - 1 = 4$ .

Rezolvând aceste două ecuații obținem răspunsul.

Răspuns:  $-2; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}; 1$ . ▲

**EXEMPLU 3** Rezolvați ecuația  $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ .

*Rezolvare.* Cu ajutorul verificării ne putem ușor convinge că numărul 0 nu este rădăcina aceste ecuații. Atunci, împărțind ambele părți ale ecuației date la  $x^2$ , trecem la o ecuație echivalentă

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

$$\text{De aici } \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right) \left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$$

Facem înlocuirea:  $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$ . Atunci  $2x + 5 + \frac{1}{x} = t + 8$ . Obținem ecuația  $t(t + 8) = 9$ , de unde  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -9$ .

Luând în seamă înlocuirea obținem două ecuații:

$$1) 2x + \frac{1}{x} - 3 = 1;$$

$$2) 2x + \frac{1}{x} - 3 = -9.$$

Rezolvați aceste ecuații independent.

Răspuns:  $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ . ▲

**EXEMPLU 4** Rezolvați ecuația  $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$ .

*Rezolvare.* Fie  $x + \frac{1}{x} = t$ . Atunci  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$ .

De aici  $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$ ;  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ .

Așa o înlocuire ne dă posibilitatea de-a rescrie ecuația inițială în următorul mod:

$$\begin{aligned} 7t - 2(t^2 - 2) &= 9; \\ 2t^2 - 7t + 5 &= 0. \end{aligned}$$

De aici  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{5}{2}$ .

Deci,  $x + \frac{1}{x} = 1$  sau  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ .

Rezolvați aceste ecuații independent.

*Răspuns:*  $\frac{1}{2}$ ; 2. ▲

**EXEMPLU 5** Rezolvați ecuația  $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$ .

*Rezolvare.* Cu ajutorul verificării ne putem convinge că numărul 0 nu este rădăcina acestei ecuații. De aceea putem împărți ambele părți ale ecuației la  $x^2$ . Obținem ecuație, echivalentă celei date:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10.$$

Înlocuirea  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$  duce la ecuația pătrată

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Terminați rezolvarea independent.

*Răspuns:*  $2 - \sqrt{2}$ ;  $2 + \sqrt{2}$ ;  $-1$ ;  $-2$ . ▲

Poate apărea întrebarea: de ce în procesul rezolvărilor a exemplelor 1 - 5 noi n-am încercat să aducem la o formă mai simplă ecuația cu ajutorul transformărilor identice?

Chestia constă în aceea, că efectuând transformările identice, noi ne-am fi întâlnit cu necesitatea rezolvării a ecuației de formă  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  (vă puteți convinge singuri în aceasta). Pentru  $a \neq 0$  așa o ecuație se numește **ecuație de gradul patru**, pentru  $a = 0$  și  $b \neq 0$  – **ecuație de gradul trei**. Tip particular al ecuației de gradul patru este ecuația bipătrată (cazul când în ecuația de gradul patru  $b = 0$  și  $d = 0$ ). Pe ea voi știți să o rezolvați.

În cazul general pentru a rezolva ecuațiile de gradul trei și patru trebuie de știut formulele aflării a rădăcinilor lor. Cu istoria descoperirii acestor formule voi puteți face cunoștință în povestirea ce urmează.

## EXERCIȚII

Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3;$$

$$2) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$$

$$3) x(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$$

$$4) (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$$

$$5) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$$

$$6) 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1);$$

$$7) (x-6)^4 + (x-4)^4 = 82.$$

## Arma misterioasă a lui Ștignon del Ferro



Voi ușor veți rezolva fiecare din următoarele ecuații de gradul trei:

$$x^3 - 8 = 0, x^3 + x^2 = 0, x^3 - x = 0.$$

Ele toate sunt cazuri particulare ale ecuației de tipul  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , unde  $x$  – variabilă,  $a, b, c$  și  $d$  – niște numere oarecare, totodată  $a \neq 0$ . Deducerea formulei rădăcinilor ei este lucru complicat. Nu în zadar apariția acestei formule se consideră că cea mai remarcabilă descoperire matematică a secolului XVI.

Primul a găsit rezolvarea ecuației de tipul  $x^3 + px = q$ , unde  $p$  și  $q$  – numere pozitive Ștignon del Ferro (1465–1526). Formula găsită el o păstra



**Nikkolo  
Tartaglia**  
(1499–1557)



**Dgirolamo  
Gardano**  
(1501–1576)



**Nils Henric  
Abel**  
(1802–1829)

în taină. Aceasta era condiționat de faptul, că cariera savantului din acele timpuri depindea în mare măsură de discursul lui în turnirele matematice publice. De aceea era convenabil de păstrat descoperirile în taină, contând pe folosirea lor în turnirele matematice ca armă secretă.

După moartea lui del Ferro elevul lui Fiore, stăpânind formula secretă, l-a chemat la luptă matematică pe talentatul matematician – autodidact Tartaglia Nikkolo. Cu câteva zile până la turnir Tartaglia singur a dedus formula rădăcinilor ecuației de gradul trei. Disputa, în care Tartaglia a obținut o victorie desăvârșită, a avut loc în data de 20 februarie anul 1535.

Pentru prima dată formula secretă a fost publicată în cartea cunoscutului savantului italian Dgirolamo Gardano „Marea Artă”. În această lucrare de asemenea este descrisă metoda rezolvării ecuației de gradul patru, descoperită de Luidgi Ferrari (1522–1565).

În sec. XVII – XVIII eforturile multor matematicieni de frunte s-au concentrat în căutarea formulei pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul cinci. La obținerea rezultatului au contribuit lucrările matematicianului italian Paolo Ruffini (1765–1822) și a matematicianului norvegian Nils Henrik Abel. Însuși rezultatul s-a dovedit a fi neașteptat s-a demonstrat, că nu există o formulă, cu ajutorul căreia se pot exprima rădăcinile oricărei ecuații de gradul cinci și de grade mai mari prin coeficienții ecuației, folosind numai patru operații aritmetice și operația extragerii rădăcinii.

## 23. Ecuțiile raționale ca modele matematice ale situațiilor reale

În p. 7 voi deja ați făcut cunoștință cu problemele, în care ecuațiile raționale serveau drept modele matematice ale situațiilor reale. Acum, după ce ați învățat cum să rezolvați ecuațiile pătratice, puteți extinde semnificativ gama de sarcini care sunt considerate.

**EXEMPLU 1** Exemplul 1. Din punctul A s-a pornit un biciclist, iar peste 45 min după aceasta în aceeași direcție a început mișcarea un camion, care l-a ajuns din urmă pe biciclist la distanța de 15 km de la punctul A. Aflați viteza biciclistului și viteza camionului, dacă viteza camionului este cu 18 km/oră mai mare decât viteza biciclistului.

*Rezolvare.* Fie că viteza biciclistului este egală cu  $x$  km/oră, atunci viteza camionului constituie  $(x + 18)$  km/oră. Biciclistul parcurge 15 km în



$\frac{15}{x}$  oră, iar camionul – în  $\frac{15}{x+18}$  oră. Diferența  $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18}$  arată cu câte ore camionul parcurge 15 km mai repede, decât biciclistul. Deoarece camionul a parcurs 15 km cu 45 min, adică cu  $\frac{3}{4}$  oră, ore mai repede, decât biciclistul, obținem ecuația  $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$ .

Să rezolvăm această ecuație:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Rezolvând ecuația pătrată a sistemului, obținem  $x = 12$  sau  $x = -30$ .

Rădăcina  $-30$  nu satisface condiția problemei.

Așadar, viteza biciclistului este egală cu 12 km/oră, iar viteza camionului constituie  $12 + 18 = 30$  (km/oră).

*Răspuns:* 12 km/oră, 30 km/oră. ▲

**EXEMPLU 2** O brigadă a lucrat la repararea drumului 7 ore, după ce la ea s-a alăturat a doua brigadă. După două ore de lucru în comun repararea a fost terminată. În câte ore puteau repara drumul fiecare brigadă, lucrând singură, dacă primei brigăzi îi trebuie pentru aceasta cu 4 ore mai mult, decât celei de a doua?

*Rezolvare.* Fie că prima brigadă poate repara drumul de sine stătătoare în  $x$  ore, atunci celei de-a doua pentru aceasta îi trebuie  $(x - 4)$  oră.

Între-o oră prima brigadă repară  $\frac{1}{x}$  parte din drum, iar a doua  $-\frac{1}{x-4}$  parte din drum. Prima brigadă a lucrat 9 ore și a reparat  $\frac{9}{x}$  din drum, iar a doua brigadă a lucrat 2 ore și a reparat corespunzător  $\frac{2}{x-4}$  de drum. Deoarece

în rezultat a fost reparat tot drumul, atunci se poate compune ecuația

$$\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1.$$

Ecuția obținută are două rădăcini  $x_1 = 12$  și  $x_2 = 3$  (convingeți-vă în aceasta de sine stătător). A doua rădăcină nu satisface condiția problemei, deoarece atunci a doua brigadă ar fi trebuit să repare drumul în  $3 - 4 = -1$  (ore), ceea ce nu are sens.

Așadar, prima brigadă poate repara drumul în 12 ore, iar a doua – în 8 ore.

*Răspuns:* 12 oră, 8 oră. ▲

**EXEMPLU 3** O soluție a sării în apă conține 120 g apă. După ce în soluție au adăugat 10 g sare concentrația ei s-a mărit cu 5%. Câte grame de sare conținea soluția la început?

*Rezolvare.* Fie că soluția inițială conținea  $x$  g de sare. Atunci masa ei era egală cu  $(x + 120)$  g, iar concentrația sării constituia  $\frac{x}{x+120}$ . După ce în soluție au adăugat 10 g sare masa ei în soluție constituia  $(x + 10)$  g, iar masa soluției –  $(x + 130)$  g. Acum concentrația sării constituie  $\frac{x+10}{x+130}$ , ceea ce este cu 5%, adică cu  $\frac{1}{20}$ , mai mult decât  $\frac{x}{x+120}$ . De aici se poate scrie:  $\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}$ .

Ecuția obținută are două rădăcini:  $x_1 = 30$  și  $x_2 = -280$  (convingeți-vă în aceasta de sine stătător), din care a doua rădăcină nu satisface condiția problemei.

Așadar, soluția conținea la început 30 g sare.

*Răspuns:* 30 g. ▲

## EXERCIȚII

- 777.\*** Primii 150 km de drum din orașul  $A$  în orașul  $B$  un automobil le-a parcurs cu o anumită viteză, iar restul 240 km – cu viteza mai mare cu 5 km/oră. Aflați viteza inițială a automobilului, dacă tot drumul din orașul  $A$  până în orașul  $B$  el l-a parcurs în 5 ore.
- 778.\*** Primul motociclist parcurge 90 km cu 18 min mai repede, decât al doilea, deoarece viteza lui este cu 10 km/oră mai mare, decât viteza celui de-al doilea motociclist. Aflați viteza fiecărui motociclist.
- 779.\*** Dintr-un oraș în altul, distanța dintre ele fiind egală cu 240 km, au pornit în același timp un autobuz și un automobil. Autobuzul se mișcă cu viteza, care era cu 20 km/oră mai mică, decât a automobilului și a sosit în punctul de destinație cu o oră mai târziu decât automobilul. Aflați viteza autobuzului și viteza automobilului.

- 780.\*** Un tren întârzie cu 10 min. Pentru a sosi la timp în stația de destinație, el cu 80 km de la această stație și-a mărit viteza cu 16 km/oră. Aflați viteza inițială a trenului.
- 781.\*** Din satul Vișneve până în satul Iabluneve, distanța dintre care este egală cu 15 km, un călăreț a mers în galop cu o anumită viteză. Se înapoia el cu viteza cu 3 km/oră mai mare și a consumat pentru drumul de reîntoarcere cu 15 min mai puțin, decât pentru parcurgerea drumului din Vișneve până în Iabluneve. Aflați viteza inițială a călărețului.
- 782.\*** Operatoarea culegerii la computer trebuia într-un anumit timp să reculeagă 180 pagini text. Dar ea a făcut acest lucru cu 5 ore mai devreme decât termenul prevăzut, deoarece culegea în fiecare oră cu 3 pagini mai mult, decât a planificat. Câte pagini culegea ea în fiecare oră?
- 783.\*** Prima pompă pompează  $90 \text{ m}^3$  de apă mai repede cu 1 oră, decât a doua pompă pompează  $100 \text{ m}^3$ . Câți metri cubi pompează fiecare pompă în 1 oră, dacă prima pompează în 1 oră cu  $5 \text{ m}^3$  mai mult decât a doua?
- 784.\*** Un muncitor avea să confecționeze într-un anumit interval de timp 72 de piese. Dar el confecționa zilnic cu 4 piese mai mult, decât planifica, și a terminat lucrul cu 3 zile mai devreme decât termenul stabilit. În câte zile el a executat lucrul?
- 785.\*** O șalupă a navigat 16 km după cursul apei și 30 km împotriva cursului râului, consumând pentru tot drumul 1 oră 30 min. Aflați viteza proprie a șalupei, dacă viteza curentului de apă a râului constituie 1 km/oră.
- 786.\*** O barcă a parcurs 15 km după cursul râului și s-a înapoiat, cheltuind pentru drumul de întoarcere cu 1 oră mai mult. Aflați viteza luntrii după cursul râului, dacă viteza curentului de apă constituie 2 km/oră.
- 787.\*** După cursul apei de la un chei a pornit o plută. Peste 4 ore de la același chei în aceeași direcție a pornit o barcă care a ajuns din urmă pluta la distanța de 15 km de la chei. Aflați viteza cursului râului, dacă viteza proprie a bărcii constituie 12 km/oră.
- 788.\*** O șalupă a parcurs 15 km după cursul râului și 28 km împotriva cursului, cheltuind pentru tot drumul 4 ore. Aflați viteza cursului râului, dacă viteza proprie a șalupei constituie 18 km/oră.
- 789.\*** Un turist a navigat  $\frac{5}{8}$  din tot drumul pe o șalupă, iar restul l-a parcurs cu automobilul. Viteza automobilului este cu 20 km/oră mai mare decât viteza șalupei. Cu automobilul el s-a deplasat cu 1 oră 30 min mai puțin decât a plutit pe șalupă. Aflați viteza automobilului și viteza șalupei, dacă turistul a parcurs în total 160 km.

- 790.\*** Autobuzul suburban avea de parcurs 72 km. După ce a parcurs 24 km pe el l-au reținut la pasajul de nivel 12 min. Apoi el a mărit viteza cu 12 km/oră și a sosit în punctul de destinație cu întârziere de 4 min. Aflați viteza inițială a autobuzului.
- 791.\*** O grupă de elevi și eleve a pornit într-o excursie din orașul A în orașul B cu autobuzul, iar s-a întors în orașul A pe calea ferată, cheltuind pentru drumul de întoarcere cu 30 min mai mult decât pentru drumul spre orașul B. Aflați viteza trenului, dacă ea este cu 20 km/oră mai mică decât viteza autobuzului, lungimea șoselei dintre orașele A și B constituie 160 km, iar lungimea căii ferate 150 km.
- 792.\*** Un turist a parcurs pe caiac 4 km de lac și 5 km după cursul râului în tot același timp, în care el ar fi parcurs 6 km împotriva cursului. Cu ce viteză turistul a plutit pe lac, dacă viteza cursului râului este egală cu 2 km/oră?
- 793.\*** O motonavă a parcurs 16 km pe lac, iar apoi 18 km pe râul, care ia naștere din acest lac, în 1 oră. Aflați viteza motonavei în apă stătătoare, dacă viteza cursului râului este egală cu 4 km/oră.
- 794.\*** Numitorul unei fracții ordinare este cu 3 mai mare decât numărătorul ei. Dacă am mări cu 4 numărătorul acestei fracții, iar numitorul – cu 8, atunci fracția obținută va fi cu  $\frac{1}{6}$  mai mare decât cea dată. Aflați această fracție.
- 795.\*** Numărătorul unei fracții ordinare este cu 5 mai mic decât numitorul ei. Dacă am micșora numărătorul acestei fracții cu 3, iar numitorul l-am mări cu 4, atunci fracția obținută va fi cu  $\frac{1}{3}$  mai mică, decât cea dată. Aflați fracția dată.
- 796.\*** Două muncitoare, lucrând împreună pot îndeplini însărcinarea de producție în 20 zile. În câte zile ar putea îndeplini această însărcinare fiecare din ele, lucrând de sine stătător, dacă uneia din ele pentru aceasta îi trebuie cu 9 zile mai mult, decât celeilalte?
- 797.\*** Unui zugrav îi trebuie cu 5 ore mai mult decât celuilalt pentru a vopsi fasada unei clădiri. După ce primul zugrav a lucrat 3 ore, iar apoi l-a schimbat al doilea, care a lucrat 2 ore, a ieșit la iveală, că s-a vopsit 40% din aria fasadei. În cât timp poate vopsi fasada fiecare zugrav, lucrând de sine stătător?

- 798.\*** În prima zi o tractoristă a arat o parte din câmp în 6 ore. A doua zi i s-a alăturat a doua tractoristă, și peste 8 ore de lucru în comun ele au terminat arătura. În câte ore poate ara acest câmp fiecare tractoristă, lucrând singură, dacă primei îi trebuie pentru aceasta cu 3 ore mai puțin decât celeilalte?
- 799.\*** La o soluție, care conține 20 g de sare, au adăugat 100 g de apă, după aceasta concentrația sării s-a micșorat cu 10%. Câte grame de apă conținea soluția la început?
- 800.\*** Bara din aliajul de cupru și zinc, care conține 10 kg zinc, au topit-o cu 10 kg de cupru. Conținutul procentual al cuprului în aliajul obținut s-a constatat, că este cu 5% mai mare decât la început. Câte kilograme de cupru conținea bara din aliajul de la început?
- 801.\*\*** După 2 ore 40 min de la plecarea plutei din debarcaderul *A* după cursul râului, în întâmpinarea ei a pornit din debarcaderul *B* o șalupă. Aflați viteza cursului râului, dacă pluta și șalupa s-au întâlnit la distanța de 14 km de la debarcaderul *A*, viteza șalupei în apă stătătoare este egală cu 12 km/oră, iar distanța dintre debarcaderele *A* și *B* constituie 32 km.
- 802.\*\*** Un bazin este conectat la două conducte. Printr-o țevă apă umple bazinul, iar prin alta – apă se scurge din bazin, totodată pentru scurgerea apei trebuie cu 1 oră mai mult, decât pentru a-l umplea. Dacă ar fi deschise în același timp ambele conducte, atunci bazinul s-ar umplea cu apă în 30 ore. În câte ore poate fi umplut bazinul gol cu apă prin prima conductă?
- 803.\*\*** Pentru a umplea un bazin cu apă prin prima conductă este necesar tot atâta timp, ca și la umplerea lui prin a doua și a treia conducte ce funcționează în același timp. Prin prima conductă bazinul se umple cu 2 ore mai repede, decât prin a doua, și cu 8 ore mai degrabă decât prin a treia. Cât timp este necesar pentru a umplea bazinul prin fiecare conductă?
- 804.\*\*** Un autobuz avea de parcurs distanța dintre două orașe, care este egală cu 400 km, cu o oarecare viteză. Deplasându-se 2 ore cu viteza planificată, el a staționat 20 min, și pentru a sosi în punctul de destinație la timp, a mărit viteza de mișcare cu 10 km/oră. Cu ce viteză avea autobuzul să parcurgă distanța dintre orașe?
- 805.\*\*** Un muncitor trebuia să producă într-un anumit timp 360 piese. Primele 5 zile el zilnic confecționa cantitatea planificată de piese, apoi zilnic producea cu 4 piese mai mult, și deja cu o zi înainte de-a expira termenul a produs 372 de piese. Câte piese trebuia să producă zilnic muncitorul, conform planului?

**806.** Pentru a îndeplini o anumită însărcinare de producție, primul muncitor îi trebuie cu 12 ore mai puțin, decât celui de-al doilea, și cu 4 ore mai mult decât ambilor muncitori pentru îndeplinirea împreună a acestei însărcinări. În câte ore poate îndeplini această însărcinare primul muncitor?

### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**807.** Calculați:

$$1) (27 \cdot 3^{-4})^2; \quad 2) \frac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}; \quad 3) (10^9)^2 \cdot 1000^{-6}.$$

**808.** Aflați valoarea expresiei  $a^2 - 2a\sqrt{5} + 2$  pentru  $a = \sqrt{5} - 3$ .

**809.** Construiți graficul funcției  $y = -2x + 4$ .

1) Cu ce este egal zeroul funcției?

2) Indicați valorile lui  $x$ , pentru care  $y > 0$ .

3) Oare trece graficul funcției prin punctul  $M(-36; 68)$ ?

**810.** Pentru care valoare a lui  $k$  graficul funcției  $y = \frac{k}{x}$  trece prin punctul  $A(-\sqrt{12}; \sqrt{3})$ ? Construiți acest grafic.

**811.** Care din egalitățile următoare este justă:

$$\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt{3} - 2 \text{ sau } \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = 2 - \sqrt{3}?$$

Argumentați răspunsul.

**812.** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$1) \left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}; \quad 2) \left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}; \quad 3) (0,2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}.$$

### NE ÎNVĂȚĂM SĂ FACEM PAȘI NESTANDARDIZAȚI

**813.** Pe farfurie sunt 9 bucățele de brânză cu mase diferite. Demonstrați că se poate una din bucățelele de brânză de-o tăiat în două părți astfel, ca cele 10 bucățele obținute să poată fi repartizate în două farfurii și totodată masa brânzei de pe fiecare din ele să fie aceeași.

## Prina MEC din Europa



Dezvoltarea vertiginoasă a tehnicii de calcul din ultimele decenii a dat naștere la un șir de discipline matematice noi și a propus o nouă metodă de cercetări științifice și aplicate – modelarea proceselor la mașinile electronice de calcul (MEC) (cu unele modele matematice ați făcut cunoștință în pp. 7, 23).

La ora actuală este greu să-ți imaginezi viață fără calculator. Și cu atât e mai complicat să crezi că istoria calculatoarelor numără mai puțin de o sută de ani.

Prima mașină electronică de calcul ENIAC din lume a fost creată în SUA la sfârșitul anilor 40-ci ai sec. XX și se folosea pentru calcularea traiectoriilor de zbor ale obuzelor artileriei de coastă.

Iar prima mașină electronică de calcul în Europa continentală, a fost creată în Kiev.

La sfârșitul a. 1947 laboratorul modelării speciale și a tehnicii electronice a Institutului de electrotehnică a Academiei de Știință a Ucrainei sub conducerea academicianului Serghei Olexievici Lebedev a început lucrul asupra creării a așa-numitului „model al mașinii electronice de calcul” – MĂSM. Și în decembrie 1951 MĂSM deja rezolva probleme practice, pe care pentru ea le programau colaboratorii Institutului de matematică al AN a Ucrainei. Mai mult de un an MĂSM era nu numai prima, ci și unica MEC în Europa continentală.

În anul 1957 a fost întemeiat Centrul de calcul al Academiei de Știință a Ucrainei, care în anul 1962 a fost transformat în Institutul de Cibernetică. Întemeietorul și directorul institutului până în anul 1982 a fost academicul Victor Mihailovici Glușcov.



**Clădirea din Suburbia Kievului –  
Feofania, unde a fost creată MECM**



**S. O. Lebedev**  
(1902–1974)

Primele probleme, pentru soluționarea cărora au fost folosite MEC satisfăceau necesitățile tehnicii atomice și de rachete. Cu ajutorul MEC executau calculele traiectoriilor sistemelor pilotate și nepilotate în dimensiunile timpului real, alegerea construcțiilor optime din mulțimea variantelor posibile. Astfel de probleme sunt specifice și pentru calculatoarele rapide și în timpul nostru.

Institutul de Cibernetică a fost leagănul tehnicii de calcul al Uniunii Sovietice, al cadrelor științifice naționale în domeniul ciberneticii, informaticii, tehnicii de calcul. Realizările științifice ale colaboraților lui sunt cunoscute în întreaga lume. Și la ora actuală principiile fundamentale ale construcției bazei de elemente a tehnicii de calcul, ale modelării matematice, teoriei automatelor, a sistemelor automate de dirijare, ale altor discipline, conexe cu chestiunile calculatoarelor în multe se bazează pe lucrările savanților ucraineni. Savanții institutului au creat cunoscutele în întreaga lume școlile ciberneticii matematice și a teoriei mașinilor și sistemelor de calcul, a teoriei optimizării și a analizei de sisteme, a modelării matematice, a teoriei matematice a siguranței, a teoriei programării ș.a.

În anii 1992–1997 pe baza secțiilor autonome ale Institutului de Cibernetică a fost creat Institutul Sistemelor de programare al Academiei Naționale de Știință al Ucrainei, Institutul de probleme ale mașinilor și sistemelor matematice ale ANȘ a Ucrainei, și a Agenției naționale cosmice (NKA) a Ucrainei, Complexul de învățământ și știință „Institutul analizei sistematice aplicative” al Ministerului Învățământului și Științei (MÎȘ) al Ucrainei și ANȘ al Ucrainei, centrul Internațional științifico-didactic de tehnologii și sisteme informaționale al ANȘ a Ucrainei și a MÎȘ al Ucrainei, care au intrat în componența Centrului de Cibernetică al ANȘ al Ucrainei creat în anul 1992.



**V.M. Glușcov**  
(1923–1982)



**Institutul de cibernetică  
V.M. Glușcov  
al ANȘ a Ucrainei**



### ÎNSĂRCINAREA NR. 6 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Aflați rădăcinile trinomului pătratic  $5x^2 - x - 6$ .  
A) 2; -0,6;      B) -2; 0,6;      C) 1; -1,2;      D) -1; 1,2.
2. Descompuneți în factori trinomul pătratic  $-x^2 - 4x + 5$ .  
A)  $(x - 1)(x + 5)$ ;      C)  $-(x - 1)(x + 5)$ ;  
B)  $(x + 1)(x - 5)$ ;      D)  $-(x + 1)(x - 5)$ .
3. Simplificați fracția  $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 6}$ .  
A)  $\frac{x+4}{x-2}$ ;      B)  $\frac{x-4}{x-2}$ ;      C)  $\frac{x+4}{x+2}$ ;      D)  $\frac{x-4}{x+2}$ .
4. Rezolvați ecuația  $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$ .  
A) -3; 3;      B)  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ;      C) -3;  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ; 3;      D)  $\sqrt{2}$ ; 3.
5. Aflați rădăcinile ecuației  $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$ .  
A) -1; 1; 3; 5;      B) -1; 5;      C) 1; 3;      D) 1; 3; 5.
6. Rezolvați ecuația  $x - \sqrt{x} - 12 = 0$ .  
A) -3; 4;      B) -2; 2;      C) 16;      D) 9; 16.
7. Rezolvați ecuația  $\frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}$ .  
A) -2;      B) 3;      C) -2; 3;      D) -3; 2.
8. Rezolvați ecuația  $\frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$ .  
A)  $-\frac{4}{3}$ ; 2;      B)  $\frac{4}{3}$ ; -2;      C)  $-\frac{4}{3}$ ;      D) 2.
9. Dintr-un oraș spre altul, distanța dintre ele fiind egală cu 350 km, au pornit în același timp un camion și o limuzină. Viteza camionului este cu 20 km/oră mai mică, decât a limuzinei, de aceea el a sosit în punctul de destinație cu 2 ore mai târziu decât limuzina.  
Fie că viteza camionului este egală cu  $x$  km/oră. Care din ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiția problemei?  
A)  $\frac{350}{x} - \frac{350}{x + 20} = 2$ ;      C)  $\frac{350}{x + 20} - \frac{350}{x} = 2$ ;  
B)  $\frac{350}{x} + \frac{350}{x + 20} = 2$ ;      D)  $\frac{350}{x} - \frac{350}{x - 20} = 2$ .

10. O șalupă a navigat 30 km după cursul râului și s-a înapoiat, cheltuind pentru tot drumul 3 ore 10 min. Viteza cursului râului este egală cu 1 km/oră.

Fie că viteza proprie a șalupei constituie  $x$  km/oră. Care din ecuații corespunde condițiilor problemei?

A)  $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3,1;$

C)  $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x} = 3\frac{1}{6};$

B)  $\frac{30}{x+1} - \frac{30}{x-1} = 3,1;$

D)  $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3\frac{1}{6}.$

11. Un muncitor avea să producă într-un anumit timp 96 de piese. Zilnic el producea cu 2 piese mai mult, decât planificase, și a terminat lucrul cu 3 zile mai degrabă de termenul stabilit.

Fie că muncitorul producea zilnic  $x$  piese. Care din ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiția problemei?

A)  $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-2} = 3;$

C)  $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-3} = 2;$

B)  $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 3;$

D)  $\frac{96}{x-3} - \frac{96}{x} = 2.$

12. Doi muncitori, lucrând împreună, pot executa o anumită însărcinare de producție în 10 ore, totodată primul din ei poate realiza această însărcinare de sine stătător cu 15 ore mai degrabă decât al doilea.

Fie că primul muncitor poate de sine stătător îndeplini însărcinarea în  $x$  ore. Care din ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiția problemei?

A)  $\frac{15}{x} + \frac{15}{10-x} = 1;$

C)  $\frac{10}{x} + \frac{10}{x+15} = 1;$

B)  $\frac{15}{x} + \frac{15}{x-10} = 1;$

D)  $\frac{10}{x} + \frac{10}{x-15} = 1.$

### PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

#### Ecuatii de gradul întâi

Ecuatia de forma  $ax = b$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$  și  $b$  – numere arbitrare, totodată  $a \neq 0$ , se numește ecuație de gradul întâi.

#### Ecuatii pătrate

Ecuatia de forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$ ,  $b$  și  $c$  – oarecare numere, totodată  $a \neq 0$ , se numește ecuație pătrată.

#### Ecuatie pătrată redusă

Ecuatia pătrată, primul coeficient al căreia este egal cu 1, se numește redusă.

#### Ecuatie pătrată incompletă

Dacă în ecuația pătrată  $ax^2 + bx + c = 0$  cel puțin unul din coeficienții  $b$  sau  $c$  este egal cu 0, atunci așa o ecuație se numește ecuație pătrată incompletă.

#### Rezolvarea ecuației pătrate incomplete

Coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$	Ecuatia pătrată incompletă	Rădăcinile
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Nu sunt rădăcini
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

#### Discriminantul ecuației pătrate

Pentru ecuația de tipul  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $a \neq 0$ , discriminantul ei  $D$  – acesta-i valoarea expresiei  $b^2 - 4ac$ .

#### Rezolvarea ecuației pătrate

Dacă  $D < 0$ , atunci ecuația n-are rădăcini.

Dacă  $D = 0$ , atunci ecuația pătrată are o singură rădăcină  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Dacă  $D > 0$ , atunci ecuația pătrată are două rădăcini  $x_1$  și  $x_2$ :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ,

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ .

**Teorema lui Viete**

Dacă  $x_1$  și  $x_2$  – sunt rădăcinile ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ , atunci  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

**Teorema inversă teoremei lui Viete**

Dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sunt astfel de numere, că  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  și  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ , atunci aceste numere întregi sunt rădăcinile ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Trinomul pătratic**

Polinomul de tipul  $ax^2 + bx + c$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$ ,  $b$  și  $c$  – numere arbitrare, totodată  $a \neq 0$ , se numește trinomul pătratic.

**Descompunerea trinomului pătratic în factori**

Dacă discriminantul trinomului pătratic  $ax^2 + bx + c$  este pozitiv, atunci trinomul dat poate fi descompus în factori liniari:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile trinomului pătratic.

Dacă discriminantul trinomului pătratic  $ax^2 + bx + c$  este egal cu zero, atunci astfel de trinom poate fi descompus în factori liniari:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

**Ecuație bipătrată**

Ecuația de tipul  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , unde  $x$  – variabilă,  $a$ ,  $b$  și  $c$  – numere arbitrare, totodată  $a \neq 0$ , se numește ecuație bipătrată.

## EXERCIȚII PENTRU REPETAREA CURSULUI DE ALGEBRĂ AL CLASEI A 8 – A

814. Aflați valoarea expresiei:

1)  $\frac{3m-n}{m+2n}$ , dacă  $m = -4, n = 3$ ;      2)  $\frac{a^2-2a}{4a+2}$ , dacă  $a = -0,8$ .

815. Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

1)  $7b - 11$ ;

8)  $\frac{x-2}{|x|+7}$ ;

2)  $\frac{9}{x}$ ;

9)  $\frac{4}{x^2-25}$ ;

3)  $\frac{5}{2-y}$ ;

10)  $\frac{3}{|x|-5}$ ;

4)  $\frac{m-3}{7}$ ;

11)  $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$ ;

5)  $\frac{3+t}{4-t}$ ;

12)  $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$ ;

6)  $\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-6}$ ;

13)  $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$ ;

7)  $\frac{5}{x^8+3}$ ;

14)  $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$ ?

816. Simplificați fracția:

1)  $\frac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$ ;

2)  $\frac{25mn^2}{75m^8n}$ ;

3)  $\frac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$ ;

4)  $\frac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$ .

817. Reprezentați câtul în formă de fracție și simplificați fracția obținută:

1)  $4mn^2p : (28m^2np^6)$ ;

3)  $-63xy^9 : (-72xy^7)$ .

2)  $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$ ;

818. Simplificați fracția:

1)  $\frac{3x-6y}{3x}$ ;

5)  $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ ;

9)  $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$ ;

2)  $\frac{3a+9b}{4a+12b}$ ;

6)  $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$ ;

10)  $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$ ;

3)  $\frac{a^2-49}{3a+21}$ ;

7)  $\frac{a^3+64}{3a+12}$ ;

11)  $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$ ;

4)  $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$ ;

8)  $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$ ;

12)  $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$ .

**819.** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\frac{x^5 y^7 - x^3 y^9}{x^3 y^7}$ , dacă  $x = -0,2, y = 0,5$ ;
- 2)  $\frac{4a^2 - 36}{5a^2 - 30a + 45}$ , dacă  $a = 2$ ;
- 3)  $\frac{(3a + 3b)^2}{3a^2 - 3b^2}$ , dacă  $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{6}$ ;
- 4)  $\frac{20x^2 - 140xy + 245y^2}{4x - 14y}$ , dacă  $2x - 7y = -0,5$ .

**820.** Simplificați fracția ( $n$  – număr natural):

- 1)  $\frac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}}$ ;
- 2)  $\frac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n}$ ;
- 3)  $\frac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n}$ ;
- 4)  $\frac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+3}}$ ;
- 5)  $\frac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}$ .

**821.** Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

- 1)  $(a + 2)x = 7$ ;
- 2)  $(a + 6)x = a + 6$ ;
- 3)  $(a + 3)x = a^2 + 6a + 9$ ;
- 4)  $(a^2 - 4)x = a - 2$ .

**822.** Exprimați în formă de fracție expresia:

- 1)  $\frac{7a}{22} + \frac{4a}{22}$ ;
- 2)  $\frac{8x}{3y} - \frac{5x}{3y}$ ;
- 3)  $\frac{7x - 2y}{15p} + \frac{3x + 7y}{15p}$ ;
- 4)  $\frac{x+y}{9p} - \frac{x}{9p}$ ;
- 5)  $\frac{a}{8} - \frac{a-b}{8}$ ;
- 6)  $\frac{7p-17}{5k} + \frac{7-2p}{5k}$ ;
- 7)  $\frac{6a^2 - 4a}{15a} - \frac{a^2 + a}{15a}$ ;
- 8)  $\frac{x-y}{8} + \frac{x+y}{8}$ ;
- 9)  $\frac{10x-6}{x} - \frac{4x+11}{x}$ .

**823.** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- 1)  $\frac{7y}{y^2 - 4} - \frac{14}{y^2 - 4}$ ;
- 2)  $\frac{y^2 - 3y}{25 - y^2} - \frac{7y - 25}{25 - y^2}$ ;
- 3)  $\frac{9p+5}{3p+6} - \frac{10p-12}{3p+6} + \frac{9p-1}{3p+6}$ ;
- 4)  $\frac{7x+5}{3-x} + \frac{5x+11}{x-3}$ ;
- 5)  $\frac{(3a-1)^2}{4a-4} + \frac{(a-3)^2}{4-4a}$ ;
- 6)  $\frac{x^2 - 3x}{(2-x)^2} - \frac{x-4}{(x-2)^2}$ ;
- 7)  $\frac{7}{a-2} - \frac{b}{2-a}$ ;
- 8)  $\frac{6a}{5-a} - \frac{4a}{a-5}$ .

**824.** Efectuați operațiile:

$$1) \frac{8}{x} - \frac{5}{y}; \quad 2) \frac{7}{ab} + \frac{5}{b}; \quad 3) \frac{5}{24xy} - \frac{7}{18xy}; \quad 4) \frac{5b^2 - 8b + 1}{a^2b^2} - \frac{2b - 1}{a^2b}.$$

**825.** Efectuați operațiile:

$$1) \frac{2a - 1}{a - 4} - \frac{3a + 2}{2(a - 4)};$$

$$2) \frac{x + 2}{3x + 9} - \frac{4 - x}{5x + 15};$$

$$3) \frac{m + 1}{m - 3} - \frac{m + 2}{m + 3};$$

$$4) \frac{x}{x + y} - \frac{2y^2}{y^2 - x^2} - \frac{y}{x - y};$$

$$5) \frac{m}{3m - 2n} - \frac{3m^2 - 3mn}{9m^2 - 12m + 4n^2};$$

$$6) \frac{a + 3}{a^2 - 2a} - \frac{a - 2}{5a - 10} + \frac{a + 2}{5a};$$

$$7) \frac{3}{3a - 3} - \frac{a - 1}{2a^2 - 4a + 2};$$

$$8) 2 - \frac{14}{m - 2} - m;$$

$$9) \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + 9} - \frac{8}{x^2 - 9} - \frac{2x - 1}{x^2 + 6x + 9}.$$

**826.** Demonstrați identitatea

$$\frac{1}{(b - c)(c - a)} - \frac{1}{(a - b)(c - b)} + \frac{1}{(a - c)(b - a)} = 0.$$

**827.** Scrieți fracția în formă de sumă a unei expresii întregi și a fracției:

$$1) \frac{a - 7}{a};$$

$$2) \frac{a^2 + 2a - 2}{a + 2};$$

$$3) \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 3}.$$

**828.** Se știe că  $\frac{x}{y} = 4$ . Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{x + y}{x};$$

$$2) \frac{3x + 4y}{x}.$$

**829.** Aflați toate valorile naturale ale lui  $n$ , pentru care este număr natural al valorii expresiei:

$$1) \frac{12n^2 - 5n + 33}{n}; \quad 2) \frac{n^3 - 6n^2 + 54}{n^2}; \quad 3) \frac{10 - 4n}{n}; \quad 4) \frac{12 - 3n}{n}.$$

**830.** Exprimați variabila  $x$  prin alte variabile, dacă:

$$1) x + \frac{a}{b} = 1; \quad 2) \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b; \quad 3) \frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a}.$$

**831.** Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{1}{a^2 + 12a + 36} + \frac{2}{36 - a^2} + \frac{1}{a^2 - 12a + 36} = \frac{144}{(a^2 - 36)^2};$$

$$2) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

**832.\*** Simplificați expresia

$$\frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

**833.\*** Demonstrați, că dacă  $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$ , atunci  $b = 0$  sau  $c = 0$ .

**834.** Efectuați înmulțirea:

$$1) \frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{24x}; \quad 3) \frac{16a^4}{21b^5} \cdot \frac{9b^2}{10a^3}; \quad 5) \frac{24t^7}{16u^3} \cdot 34u^5;$$

$$2) \frac{m^2n^3}{25t} \cdot \left(\frac{-5t}{mn^2}\right); \quad 4) 26m^2 \cdot \frac{3n^2}{13m^4}; \quad 6) \frac{4x^5y^2}{7a^3b} \cdot \frac{21xb^2}{10y^3a^2} \cdot \frac{25a^5y}{3x^4b}.$$

**835.** Faceți înmulțirea:

$$1) \frac{2xy - y^2}{9} \cdot \frac{36}{y^4}; \quad 3) \frac{m^2 - 64}{m^3 - 9m^2} \cdot \frac{m^2 - 81}{m^2 + 8m};$$

$$2) \frac{a^2 - 7ab}{a^2 + 2ab} \cdot \frac{a^2b + 2ab^2}{a^3 - 7a^2b}; \quad 4) \frac{2x^2 - 16x + 32}{3x^2 - 6x + 12} \cdot \frac{x^3 + 8}{4x^2 - 64}.$$

**836.** Exprimați expresia în formă de fracție:

$$1) \left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2; \quad 3) \left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3;$$

$$2) \left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4; \quad 4) \left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3.$$

**837.** Executați împărțirea:

$$1) \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} : \frac{x - 5}{x - 10}; \quad 5) \frac{x^2 - 16y^2}{25x^2 - 4y^2} : \frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{25x^2 + 20xy + 4y^2};$$

$$2) \frac{a^2 - 1}{a - 8} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a - 8}; \quad 6) \frac{n^2 - 3n}{49n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{49n^2 - 14n + 1};$$

$$3) \frac{ab + b^2}{8b} : \frac{ab + a^2}{2a}; \quad 7) \frac{m^{12} - n^{15}}{2m^{10} - 8n^{14}} : \frac{5m^8 + 5m^4n^5 + 5n^{10}}{3m^5 + 6n^7};$$

$$4) \frac{2c - 3}{c - 1} : (2c - 3); \quad 8) \frac{5a^2 - 20ab}{3a^2 + b^2} : \frac{30(a - 4b)^2}{9a^4 - b^4}.$$



838. Considerând fracțiile date ireductibile, înlocuiți  $x$  și  $y$  cu așa monoame, ca să se obțină identitate:

$$1) \frac{x}{7a^2b^3} \cdot \frac{y}{4c} = \frac{6a^3c^2}{b}; \quad 2) \frac{36m^2n^4}{x} : \frac{y}{35p^6} = \frac{21n}{5mp^3}.$$

839. Se dă:  $3x - \frac{1}{x} = 8$ . Aflați valoarea expresiei  $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

840. Se dă:  $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$ . Aflați valoarea expresiei  $2x - \frac{1}{x}$ .

841. Simplificați expresia:

$$1) \frac{x^{3k}}{y^{2n}} : \frac{x^{6k}}{y^{5n}}, \text{ unde } k \text{ și } n - \text{ numere întregi};$$

$$2) \frac{a^{k+5} \cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}} : \frac{a^{k+3} \cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}, \text{ unde } k - \text{ număr întreg};$$

$$3) \frac{(x^n + 3y^n)^2 - 12x^n y^n}{x^{3n} + 27y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 9y^{2n}}{(x^n - 3y^n)^2 + 12x^n y^n}, \text{ unde } n - \text{ numere întregi}.$$

842. Simplificați expresia:

$$1) \left( \frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} \right) \cdot \frac{16-a^2}{32a^3};$$

$$2) \left( 7x - \frac{4x}{x-3} \right) : \frac{14x-50}{3x-9};$$

$$3) \frac{2a}{a-2} + \frac{a+7}{8-4a} \cdot \frac{32}{7a+a^2};$$

$$4) \left( \frac{9c}{c-8} + \frac{7c}{c^2-16c+64} \right) : \frac{9c-65}{c^2-64} - \frac{8c+64}{c-8};$$

$$5) \left( \frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \right) : \left( \frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right);$$

$$6) \left( \frac{b}{b+6} + \frac{36+b^2}{36-b^2} - \frac{b}{b-6} \right) : \frac{6b+b^2}{(6-b)^2};$$

$$7) \left( \frac{2x}{x^3+1} : \frac{1-x}{x^2-x+1} + \frac{2}{x-1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{4} : \frac{x-1}{x+1}.$$

843. Demonstrați, că pentru toate valorile admisibile ale lui  $a$  valoarea expresiei

$$\left( \frac{1}{(a-3)^2} - \frac{6}{9-a^2} + \frac{9}{(a+3)^2} \right) : \frac{4(2a-3)^2}{(a^2-9)(a^2-27)} - \frac{2a^2}{9-a^2}$$

nu depinde de valoarea lui  $a$ .

844. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

$$1) \frac{a + \frac{25}{a+10}}{\frac{25}{a} - a}; \quad 2) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}}.$$

**845.** Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{2x+6}{x+3} = 2;$$

$$3) \frac{2x-9}{2x+5} + \frac{3x}{3x-2} = 2;$$

$$2) \frac{x^2-16}{x+4} = -8;$$

$$4) \frac{5x^2+8}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}.$$

**846.** Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x+2}{x+a} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x-1} = 0.$$

**847.** Aflați valoarea expresiei:

$$1) 2^{-3} + 4^{-2};$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

$$2) \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} + (-1,8)^0 - 5^{-1};$$

$$4) 2^{-3} - 6^{-1} + 3^{-2}.$$

**848.** Transformați expresia astfel, ca ea să nu conțină puteri cu exponenți negativi și zero:

$$1) \frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4};$$

$$2) \frac{1,001^0 m^{-15} n^{-7} p^{-4}}{2^{-3} a^{-11} b^{16} c^{-22}}.$$

**849.** Reprezentați expresia în formă de putere cu baza  $a$  sau  $a$  produsului puterilor cu baze diferite:

$$1) a^{-7} \cdot a^{10};$$

$$9) (a^{-12})^{-2};$$

$$2) a^{-9} \cdot a^5;$$

$$10) (a^{-3})^4 : (a^{-2})^5 : (a^{-1})^{-7};$$

$$3) a^{17} \cdot a^{-4} \cdot a^{-11};$$

$$11) (m^{-3}n^4p^7)^{-4};$$

$$4) a^{-2} : a^3;$$

$$12) (a^{-1}b^{-2})^{-3};$$

$$5) a^{12} : a^{-4};$$

$$13) (x^3y^{-4})^5 \cdot (x^{-2}y^{-3})^3;$$

$$6) a^{-7} : a^{-11};$$

$$14) \left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3};$$

$$7) a^{-12} : a^{-10} \cdot a^4;$$

$$15) \left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}.$$

$$8) (a^3)^{-5};$$

**850.** Aflați valoarea expresiei:

$$1) 11^{-23} \cdot 11^{25};$$

$$4) 10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2};$$

$$2) 3^{17} \cdot 3^{-14};$$

$$5) (14^{-10})^5 \cdot (14^{-6})^{-8};$$

$$3) 4^{-16} : 4^{-12};$$

$$6) \frac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^2}.$$

851. Aflați valoarea expresiei:

1)  $25^{-3} \cdot 5^8$ ;

4)  $\frac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$ ;

2)  $64^{-3} : 32^{-3}$ ;

5)  $\frac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$ .

3)  $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0,001)^{-5}$ ;

6)  $\frac{(0,125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$ .

852. Simplificați expresia:

1)  $\frac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \frac{5}{9}x^4y^{-7}$ ;

7)  $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0,1a^2b^{-3}c)^{-3}$ ;

2)  $0,2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$ ;

8)  $0,1m^{-5}n^4 \cdot (0,01m^{-3}n)^{-2}$ ;

3)  $-0,3a^{10}b^7 \cdot 5a^{-8}b^{-6}$ ;

9)  $-6\frac{1}{4}a^{-7}b^4 \cdot \left(\frac{5}{2}a^{-2}b^2\right)^{-3}$ ;

4)  $0,36a^{-5}b^6c^3 \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)a^4b^{-4}c^{-5}$ ;

10)  $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b^{-3}\right)^{-3}$ ;

5)  $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$ ;

11)  $\frac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \frac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$ ;

6)  $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$ ;

12)  $\left(\frac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot (27x^{-2}y^4)^2$ .

853. Simplificați expresia:

1)  $(a^{-5} - 1)(a^{-5} + 1) - (a^{-5} - 2)^2$ ;

2)  $\frac{y^{-2} - x^{-2}}{x + y}$ ;

3)  $\frac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \frac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}}$ ;

4)  $\frac{m^{-4} + n^{-4}}{n^{-10}} : \frac{m^{-4}n^{-6} + n^{-10}}{n^{-2}}$ ;

5)  $\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} : \left(\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} - \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-2}}\right)$ ;

6)  $\frac{x^{-10} - 4}{x^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-5} + 2} - \frac{x^{-5} + 2}{x^{-5}}$ ;

7)  $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6} + 1} - \frac{c^{-6}}{c^{-12} + 2c^{-6} + 1}\right) : \frac{4c^{-6} + 3}{c^{-12} - 1} + \frac{2c^{-6}}{c^{-6} + 1}$ .

854. Efectuați operațiile și reprezentați rezultatul în formă standard:

1)  $1,3 \cdot 10^4 + 1,8 \cdot 10^5$ ;

3)  $5,6 \cdot 10^3 - 3,2 \cdot 10^2$ ;

2)  $1,5 \cdot 10^2 - 2,8 \cdot 10^{-2}$ ;

4)  $4,8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$ .

**855.** Simplificați fracția ( $n$  – număr întreg):

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}; & 4) \frac{a^6 + a^{11}}{a^{-4} + a}; & 7) \frac{5^{n+2} - 5^{n-2}}{5^n}; \\
 2) \frac{7^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{14^n}; & 5) \frac{a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}}{a^3 + a^2 + a}; & 8) \frac{2^{-n} + 1}{2^n + 1}. \\
 3) \frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{12^n}; & 6) \frac{6^{n+2} - 6^n}{35}; & 
 \end{array}$$

**856.** Funcția este definită cu formula  $y = -\frac{24}{x}$ . Aflați:

- 1) valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egală cu:  $-4; 8; 1,2;$
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu:  $24; -18; 60.$

**857.** Construiți graficul funcției  $y = \frac{6}{x}$ . Folosindu-vă de grafic aflați:

- 1) valoarea funcției, dacă valoarea argumentului este egală cu:  $2; -1,5; 4;$
- 2) valoarea argumentului pentru care valoarea funcției este egală cu:  $-2; 3; -4,5;$
- 3) valorile argumentului pentru care funcția obține valori negative.

**858.** Construiți graficul funcției  $y = \frac{5}{|x|}$ .

**859.** Construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor  $y = \frac{4}{x}$  și  $y = x - 3$  și indicați coordonatele punctelor lor de intersecție.

**860.** Aflați valoarea lui  $p$ , dacă se știe că graficul funcției  $y = \frac{p}{x}$  trece prin punctul: 1)  $A(-3; 2); 2) B\left(-\frac{1}{7}; 3\right); 3) C(-0,4; 1,6).$

**861.** Construiți graficul funcției:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{12}{x}, & \text{dacă } x \leq -3, \\ 1-x, & \text{dacă } x > -3; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x-1, & \text{dacă } x < 2, \\ \frac{10}{x}, & \text{dacă } 2 \leq x < 5, \\ x-3, & \text{dacă } x \geq 5. \end{cases}$$

**862.** Construiți graficul funcției:

$$1) y = \frac{4x+12}{x^2+3x}; \quad 2) y = \frac{32-2x^2}{x^3-16x}.$$

**863.** Aflați valoarea expresiei:

1)  $0,4\sqrt{625} - \frac{1}{4}\sqrt{144}$ ;

4)  $\sqrt{1\frac{11}{25}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} - 0,04\sqrt{10\,000}$ ;

2)  $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} + \sqrt{2^4 + 9}$ ;

5)  $\frac{1}{5}\sqrt{625} - \frac{3}{17}\sqrt{289}$ .

3)  $3\sqrt{0,25} - \sqrt{7^2 + 24^2}$ ;

**864.** Aflați valoarea expresiei:

1)  $(\sqrt{3})^2 - \sqrt{1,69}$ ;

4)  $\sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$ ;

2)  $(3\sqrt{15})^2 - (15\sqrt{3})^2$ ;

5)  $\frac{4}{9}\sqrt{39,69} - \frac{5}{49}\sqrt{59,29} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$ ;

3)  $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot (3\sqrt{2})^2$ ;

6)  $\frac{1}{2}\sqrt{17^2 - 15^2} + \left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2 - 0,3\sqrt{900}$ .

**865.** Rezolvați ecuația:

1)  $\sqrt{x} = 2$ ;

5)  $\sqrt{x} + 5 = 0$ ;

9)  $\sqrt{7x - 4} = 2$ ;

2)  $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$ ;

6)  $\frac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0$ ;

10)  $\frac{28}{\sqrt{x}} = 7$ ;

3)  $\sqrt{x} - 3 = 0$ ;

7)  $\sqrt{7x} - 4 = 0$ ;

11)  $\frac{15}{\sqrt{x+4}} = 3$ ;

4)  $2\sqrt{x} - 7 = 0$ ;

8)  $\sqrt{7x - 4} = 0$ ;

12)  $\sqrt{4 + \sqrt{3+x}} = 5$ .

**866.** Aflați valoarea rădăcinii:

1)  $\sqrt{9 \cdot 100}$ ;

4)  $\sqrt{0,64 \cdot 0,25 \cdot 121}$ ;

7)  $\sqrt{\frac{9}{64} \cdot \frac{1024}{1089}}$ ;

2)  $\sqrt{0,49 \cdot 16}$ ;

5)  $\sqrt{\frac{25}{196}}$ ;

8)  $\sqrt{3\frac{13}{36} \cdot 4\frac{29}{49}}$ .

3)  $\sqrt{676 \cdot 0,04}$ ;

6)  $\sqrt{18\frac{1}{16}}$ ;

**867.** Aflați valoarea rădăcinii:

1)  $\sqrt{75 \cdot 234}$ ;

2)  $\sqrt{2 \cdot 800}$ ;

3)  $\sqrt{1,6 \cdot 12,1}$ ;

4)  $\sqrt{2890 \cdot 2,5}$ .

**868.** Aflați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{108} \cdot \sqrt{3}$ ;

3)  $\sqrt{160} \cdot \sqrt{250}$ ;

5)  $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$ ;

2)  $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$ ;

4)  $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{4,9}$ ;

6)  $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$ .

**869.** Aflați valoarea expresiei:

- |                                 |                          |   |
|---------------------------------|--------------------------|---|
| 1) $\sqrt{(17,1)^2}$ ;          | 4) $-2,4\sqrt{(-4)^2}$ ; | 7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$ ;                   |
| 2) $\sqrt{(-1,17)^2}$ ;         | 5) $\sqrt{11^4}$ ;       | 8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0,1)^2}$ . |
| 3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$ ; | 6) $\sqrt{(-23)^4}$ ;    |   |

**870.** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- 1)  $\sqrt{q^2}$ , dacă  $q > 0$ ;
- 2)  $\sqrt{t^2}$ , dacă  $t \leq 0$ ;
- 3)  $\sqrt{49m^2n^8}$ , dacă  $m \geq 0$ ;
- 4)  $\sqrt{0,81a^6b^{10}}$ , dacă  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$ ;
- 5)  $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$ , dacă  $x \leq 0$ ;
- 6)  $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$ , dacă  $a > 0$ ,  $c < 0$ ;
- 7)  $\frac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$ , dacă  $y > 0$ ,  $x < 0$ ;
- 8)  $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}}$ , dacă  $x \leq 0$ .

**871.** Simplificați expresia:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\sqrt{(10 - \sqrt{11})^2}$ ;        | 4) $\sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$ ;   |
| 2) $\sqrt{(\sqrt{10} - 11)^2}$ ;        | 5) $\sqrt{(\sqrt{24} - 5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24} - 4)^2}$ . |
| 3) $\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{11})^2}$ ; |  |

**872.** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$ ;                         | 4) $\sqrt{26 - 6\sqrt{17}} - \sqrt{66 - 14\sqrt{17}}$ ;  |
| 2) $\sqrt{38 - 12\sqrt{2}}$ ;                        | 5) $\sqrt{46 + 10\sqrt{21}} + \sqrt{46 - 10\sqrt{21}}$ . |
| 3) $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{23 - 8\sqrt{7}}$ ; |  |

**873.** Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

- |                  |                    |                              |   |
|------------------|--------------------|------------------------------|---|
| 1) $\sqrt{24}$ ; | 3) $\sqrt{700}$ ;  | 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$ ; | 7) $-1,6\sqrt{50}$ ;                    |
| 2) $\sqrt{63}$ ; | 4) $\sqrt{0,32}$ ; | 6) $-2,4\sqrt{600}$ ;        | 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$ . |

**874.** Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

- 1)  $\sqrt{10a^2}$ , dacă  $a \geq 0$ ;      4)  $\sqrt{36m^2n}$ , dacă  $m < 0$ ;  
 2)  $\sqrt{15b^2}$ , dacă  $b \leq 0$ ;      5)  $\sqrt{4x^6y^5}$ , dacă  $x > 0$ ;  
 3)  $\sqrt{x^{11}y^{12}}$ , dacă  $y \neq 0$ ;      6)  $\sqrt{700a^5b^{22}}$ , dacă  $b < 0$ .

**875.** Introduceți factorul sub semnul radicalului:

- 1)  $3\sqrt{10}$ ;      3)  $0,3\sqrt{3}$ ;      5)  $\frac{2}{7}\sqrt{98}$ ;      7)  $-0,5\sqrt{30}$ ;  
 2)  $2\sqrt{13}$ ;      4)  $\frac{1}{5}\sqrt{175}$ ;      6)  $-5\sqrt{7}$ ;      8)  $4\sqrt{a}$ .

**876.** Introduceți factorul sub semnul radicalului:

- 1)  $a\sqrt{5}$ ; 2)  $b\sqrt{-b}$ ; 3)  $x\sqrt{x^7}$ ; 4)  $n\sqrt{m}$ , dacă  $n \leq 0$ .

**877.** Comparați numerele:

- 1)  $5\sqrt{6}$  și  $6\sqrt{5}$ ;      3)  $0,3\sqrt{3\frac{1}{2}}$  și  $\sqrt{0,3}$ ;  
 2)  $\sqrt{55}$  și  $3\sqrt{6}$ ;      4)  $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$  și  $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$ .

**878.** Aduceți la o formă mai simplă expresia:

- 1)  $\sqrt{64a} + \sqrt{4a} - \sqrt{121a}$ ;      3)  $6\sqrt{125a} - 2\sqrt{80a} + 3\sqrt{180a}$ .  
 2)  $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{320}$ ;

**879.** Efectuați înmulțirea:

- 1)  $(\sqrt{80} - \sqrt{45})\sqrt{5}$ ;      5)  $(\sqrt{19} - \sqrt{13})(\sqrt{19} + \sqrt{13})$ ;  
 2)  $(2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96})\sqrt{6}$ ;      6)  $(4\sqrt{m} + 9\sqrt{n})(4\sqrt{m} - 9\sqrt{n})$ ;  
 3)  $(12 - \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})$ ;      7)  $(\sqrt{5x} + \sqrt{11y})^2$ ;  
 4)  $(2\sqrt{5} + \sqrt{7})(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$ ;      8)  $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{10})^2$ .

**880.** Simplificați fracția:

- 1)  $\frac{x^2 - 19}{x + \sqrt{19}}$ ;      4)  $\frac{29 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}}$ ;  
 2)  $\frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$ ;      5)  $\frac{a - 6\sqrt{ab} + 9b}{a - 9b}$ , dacă  $a > 0, b > 0$ ;  
 3)  $\frac{m + 8\sqrt{m}}{m - 64}$ ;      6)  $\frac{11 - \sqrt{33}}{\sqrt{33} - 3}$ .

**881.** De se eliberat de iraționalitatea de la numitorul fracției:

$$1) \frac{a^3}{\sqrt{b}}; \quad 3) \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad 5) \frac{n+9}{\sqrt{n+9}}; \quad 7) \frac{6}{\sqrt{21+\sqrt{15}}};$$

$$2) \frac{7}{a\sqrt{a}}; \quad 4) \frac{6}{\sqrt{3}}; \quad 6) \frac{3}{\sqrt{13-2}}; \quad 8) \frac{18}{\sqrt{47-\sqrt{29}}}.$$

**882.\*** De se eliberat de iraționalitatea de la numitorul fracției:

$$1) \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}; \quad 2) \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

**883.** Aflați valoarea expresiei:

$$1) \frac{5}{4-3\sqrt{2}} - \frac{5}{4+3\sqrt{2}}; \quad 3) (\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}})^2.$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1} - \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1};$$

**884.** Simplificați expresia:

$$1) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{x}{x-9}; \quad 2) \left( \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \right) : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

**885.\*** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

$$1) \sqrt{(\sqrt{x+5})^2 - 20\sqrt{x}} + \sqrt{(\sqrt{x-4})^2 + 16\sqrt{x}};$$

$$2) \sqrt{a+2\sqrt{a+3}} + 4 + \sqrt{a-2\sqrt{a+3}} + 4.$$

**886.\*** Simplificați expresia

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

**887.\*** Demonstrați, că

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 1.$$

**888.** Aranjați în ordine crescătoare numerele: 13;  $\sqrt{165}$ ; 12,7;  $\sqrt{171}$ ; 13,4.

**889.** Construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor  $y = \sqrt{x}$  și  $y = x - 6$  și determinați coordonatele punctului lor de intersecție.

**890.** Între care două numere întregi consecutive este situat numărul:

$$1) \sqrt{17}; \quad 2) \sqrt{67}; \quad 3) \sqrt{103}; \quad 4) -\sqrt{51,25}?$$

**891.** Care numere întregi se conțin pe dreapta de coordonate între numerele:

$$1) 6 \text{ și } \sqrt{67}; \quad 2) \sqrt{14} \text{ și } \sqrt{52}; \quad 3) -\sqrt{53} \text{ și } -4,9; \quad 4) -\sqrt{31} \text{ și } 2,7?$$



$$892. \text{ Se dă funcția } f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{dacă } x < 0, \\ 3, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$$

1) Aflați  $f(-0,5), f(0), f(4), f(9)$ .

2) Construiți graficul acestei funcții.

893. Rezolvați ecuația:

1)  $x^2 - 4x - 32 = 0$ ;

5)  $x^2 + 6x - 15 = 0$ ;

2)  $x^2 - 10x + 21 = 0$ ;

6)  $3x^2 - x - 5 = 0$ ;

3)  $6x^2 - 5x + 1 = 0$ ;

7)  $4x^2 + 28x + 49 = 0$ ;

4)  $8x^2 + 2x - 3 = 0$ ;

8)  $x^2 - 16x + 71 = 0$ .

894. Rezolvați ecuația:

1)  $(x - 4)(x + 2) - 2(3x + 1)(x - 3) = x(x + 27)$ ;

2)  $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$ ;

3)  $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$ ;

4)  $\frac{2(x^2 - 9)}{5} - \frac{x + 1}{2} = \frac{x - 41}{4}$ ;

5)  $\frac{x^2 + 5x}{3} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x^2 - 2}{8}$ .

895. Pentru fiecare valoare a lui  $a$  rezolvați ecuația:

1)  $x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0$ ;

2)  $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$ ;

3)  $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$ .

896. Rezolvați ecuația:

1)  $|x^2 - 2x - 6| = 6$ ;

3)  $x|x| + 2x - 15 = 0$ ;

2)  $x^2 - 6|x| - 16 = 0$ ;

4)  $||x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$ .

897. Rezolvați ecuația:

1)  $x^2 - 6x + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 8$ ;

2)  $(\sqrt{x} - 5)(15x^2 - 7x - 2) = 0$ ;

3)  $(x^2 + 6x)(\sqrt{x} - 4)(x^2 - 8x - 48) = 0$ .

**898.** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} = 0;$$

$$2) x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0;$$

$$3) \sqrt{25 - x^2} + |x^2 + 8x - 20| = 0.$$

**899.** Fără a calcula valoarea discriminantului, aflați, pentru care valoare a lui  $a$  ecuația:

$$1) x^2 + 22x + a = 0;$$

$$2) x^2 - ax + 81 = 0$$

are o singură rădăcină. Aflați această rădăcină.

**900.** Pentru care valoare a lui  $b$  rădăcinile ecuației  $x^2 + bx - 23 = 0$  sunt numere opuse? Aflați aceste rădăcini.

**901.** Numărul  $-\frac{1}{3}$  este rădăcina ecuației  $12x^2 - bx + 5 = 0$ . Aflați valoarea lui  $b$  și a doua rădăcină a ecuației.

**902.** Numărul 0,2 este rădăcina ecuației  $8x^2 - 3,2x + k = 0$ . Aflați valoarea lui  $k$  și a doua rădăcină a ecuației.

**903.** Rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  ale ecuației  $x^2 - bx + 20 = 0$  satisfac condiția  $x_1 = 5x_2$ . Aflați valoarea lui  $b$  și rădăcinile ecuației.

**904.** Compuneți ecuația pătrată, ale cărei rădăcini sunt mai mici decât rădăcinile corespunzătoare ale ecuației  $x^2 - 3x - 5 = 0$  cu 1.

**905.** Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x^2 - 7x}{x + 1} = \frac{8}{x + 1};$$

$$5) \frac{63}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{7}{x};$$

$$2) \frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9};$$

$$6) \frac{2x}{x - 2} + \frac{3}{x + 4} = \frac{4x - 2}{(x + 4)(x - 2)};$$

$$3) \frac{4 - x}{4x - 3} = \frac{2x - 2}{7 - x};$$

$$7) \frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x^2 - 4} = \frac{x + 4}{5x(2 - x)};$$

$$4) \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 6} = \frac{7}{12};$$

$$8) \frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{3}{x^2 + x + 1}.$$

**906.** Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x - 1}{x + 5} + \frac{x + 5}{x - 1} = \frac{10}{3};$$

$$3) \frac{x^2}{(3x - 1)^2} - \frac{4x}{3x - 1} - 5 = 0;$$

$$2) \frac{x^2 - 3x + 6}{x} + \frac{2x}{x^2 - 3x + 6} = 3;$$

$$4) \frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$$

**907.\*** Pentru care valori ale lui  $a$  ecuația  $\frac{x^2 - 2ax + 3}{x - 2} = 0$  are o singură rădăcină?

908. Este oare justă afirmația(răspunsul argumentați-l):

- 1) dacă numărul  $m$  este rădăcina ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ , atunci numărul  $-m$  este rădăcina ecuației  $ax^2 - bx + c = 0$ ;
- 2) dacă numărul  $m$  este rădăcina ecuației pătrate  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $c \neq 0$ , atunci numărul  $\frac{1}{m}$  este rădăcina ecuației  $cx^2 + bx + a = 0$ ?

909.\* Aflați toate valorile întregi ale lui  $b$ , pentru care ecuația are rădăcini întregi:

- 1)  $x^2 + bx - 6 = 0$ ;
- 2)  $x^2 + bx + 21 = 0$ .

910.\* Se știe că  $x_1$  și  $x_2$  – rădăcinile ecuației  $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$ . Pentru care valoare a lui  $a$  se realizează egalitatea  $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$ ?

911.\* Pentru care valoare a lui  $a$  produsul rădăcinilor ecuației  $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$  este egal cu 15?

912. Un autobuz avea de parcurs 255 km. Parcurgând  $\frac{7}{17}$  din drum el s-a oprit și a staționat 1 oră, apoi a continuat mișcarea cu viteza ce era cu 5 km/oră mai mică, decât cea inițială. Aflați viteza inițială a autobuzului, dacă în punctul de destinație el a sosit peste 9 ore de la plecare.

913. Într-un lingou din aliajul cuprului cu zincul se conțin 20 kg zinc. La acest lingou la topire au adăugat 3 kg de cupru și 4 kg de zinc. Conținutul procentual al cuprului în aliajul obținut este cu 5 % mai mare decât în aliajul inițial. Câte kilograme de cupru conținea aliajul inițial?

## PRIETENIM CU CALCULATORUL

În clasele anterioare voi deja ați utilizat calculatorul în procesul studierii matematicii. V-ați învățat:

- să vă folosiți de **calculator** pentru calcule;
  - să culegeți și să perfectăți texte necomplicate în **redactorul de texte** (de exemplu, *Microsoft Word*);
  - să compuneți tabele cu ajutorul **procesorului tabelar** (de exemplu, *Microsoft Excel*);
  - să desenați cu ajutorul **redactorului grafic** (de exemplu, *Paint*);
  - să vă folosiți de rețeaua globală **Internet** și să căutați în ea informație.
- Toate aceste deprinderi le veți desăvârși și mai departe.

Dacă vă gândiți ca în viitor să deveniți matematician, programator, inginer, adică să folosiți pe larg matematica în activitatea sa, atunci vă sfătuim să însușiți pachetele matematice specializate, care ajută elevilor și studenților să îndeplinească lucrul tehnic în procesul rezolvării problemelor. Acestea-s, de pildă, *MathLAB*, *MathCAD*. De asemenea este util de-a stăpâni redactorul grafic, cu ajutorul căruia se poate lucra cu figurile geometrice și de construit desene. Exemple de astfel de redactori pot fi *CorelDraw*, *Visio* și altele. Dacă intenționați să țineți un discurs sau să comunicați o informație interesantă, atunci s-o faceți mai intuitivă o să vă ajute **programele pentru construirea prezentărilor** (de exemplu, *PowerPoint*).


Afară de aceasta, există multe programe, elaborate special pentru elevi și menite pentru aceea, ca să ajute la însușirea matematicii. Voi le puteți găsi în largul Internetului.

Dar poate, voi înșiși veți inventa programe interesante pentru studierea matematicii?

||| \_\_\_\_\_ |||

Mai mult de 70 de ani în statul nostru există Mica Academie Științifică a Ucrainei (MAȘ), în filialele științifice și secțiile numeroase ale căreia elevi și eleve pot îndeplini lucru de cercetare și practic în cele mai diverse direcții. Voi puteți participa în activitatea secțiilor ei și în învățământul extrașcolar al ei, competițiilor și concursurilor măiestriei profesionale, a olimpiadelor elevilor din toată Ucraina la obiectele de bază și speciale, să prezentați lucrările voastre la concursul-apărare al lucrărilor științifice și de cercetare ale elevilor și elevelor – membri ai MAȘ.

||| \_\_\_\_\_ |||

În acest capitol sunt expuse însărcinările, pe care voi le puteți executa cu ajutorul calculatorului pe măsura studierii temelor corespunzătoare. Unele din ele reprezintă continuarea și desfășurarea lecțiilor ale acestui manual (astfel de exerciții din textul manualului sunt notate cu semnul «», iar aici este indicat numărul exercițiului corespunzător).

Însărcinările, care necesită folosirea calculatorului, executați-le cu ajutorul microcalculatorului sau a programei speciale „calculator”, care este în computatorul vostru.

Acelora, care se interesează de informatică, le propunem însărcinări la alcătuirea algoritmilor și programelor, în care se pot aplica cunoștințele matematice obținute. Aceste însărcinări sunt notate cu asterisc. Până ce voi nu stăpâniți la nivelul necesar un oarecare limbaj de programare, este suficient de născocit un algoritm și de-l scris cu cuvinte sau în formă de bloc-schemă. Menționăm, că priceperea de-a alcătui algoritmi (consecutivitatea acțiunilor) o să vă prindă bine nu numai la programare, însă și în alte ramuri de activitate.

### La p. 1. „Frații raționale”

De se învățat a calcula valoarea expresiei fracționare cu ajutorul calculatorului. În care cazuri nu este posibil de-a calcula valoarea expresiei fracționare? Oare totdeauna se poate obține valoarea exactă a expresiei raționale?

2–4. Executați unele din aceste însărcinări cu ajutorul calculatorului sau a pachetului matematic specializat.

### La p. 2. „Proprietatea fundamentală a fracției raționale”

46, 47. Alegeți un exemplu oarecare din aceste însărcinări. Aflați valoarea expresiei de două ori: la început cum e scrisă în condiția expresiei, apoi anterior simplificând fracția. Calculele efectuați-le cu ajutorul calculatorului sau a pachetului matematic specializat. Cu cât s-a micșorat numărul de operații după simplificarea fracției? Oare se poate după simplificare de efectuat calculele oral?

63. Construiți graficul funcției cu ajutorul redactorului grafic. Care instrument trebuie ca din graficul funcției  $y = 2x$  de obținut graficul funcției  $y = 2x - 1$ ?

### La p. 3. „Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu aceiași numitori”

74, 75. Alegeți un exercițiu oarecare din însărcinările date. Aflați valoarea expresiei de două ori: la început cum e scrisă în condiția expresiei, apoi anterior simplificându-l. Calculele efectuați-le cu ajutorul calculatorului sau a pachetului matematic specializat. Cu cât s-a micșorat numărul de

operații după simplificarea expresiei? Oare se poate după simplificare de efectuat calculele oral?

#### **La p. 4. „Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu numitori diferiți”**

**138.** Îndepliniți această însărcinare de asemenea cu ajutorul calculatorului. Oare totdeauna se va obține un rezultat „comod”?

#### **La p. 5. „Înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale. Ridicarea la putere a fracției raționale”**

**160, 161.** Executați un oarecare exemplu din aceste însărcinări cu ajutorul calculatorului. Ce concluzie se poate face despre calculele cu fracțiile, executate cu ajutorul calculatorului?

#### **La p. 6. „Transformările identice ale expresiilor raționale”**

**194, 195.** Demonstrați afirmația problemei 194, executând calculele cu ajutorul calculatorului. Care cale a demonstrării s-a dovedit a fi mai intuitivă? Oare se poate cu ajutorul calculatorului de demonstrat afirmația problemei 195?

#### **La p. 7. „Ecuatii echivalente. Ecuatii raționale”**

**222.** Rezolvați această problemă cu ajutorul calculatorului.

#### **La p. 8. „Puterea cu exponentul întreg negativ”**

Oare există în calculator și în alte programe, de care voi vă folosiți pentru a efectua calcule, un procedeu de-a reprezenta numărul în formă standard? Însușiți acest instrument.

\* Faceți cunoștință cu diverse tipuri de date, pe care le propune limbajul de programare, ales de voi, pentru reprezentarea numerelor fracționare. Cum se păstrează aceste numere în memoria calculatorului? Cum influențează procedeu de păstrare asupra preciziei, cu care se reprezintă aceste date?

**262–264.** Îndepliniți una din aceste însărcinări, creând tabelul în procesorul de tabele. Utilizați mijloacele de sortare automată. Construiți pe baza tabelului obținut diagrama respectivă. În ce măsură s-a dovedit a fi ea intuitivă? De ce?

**266.** Rezolvați această problemă cu ajutorul calculatorului. Cu ce această problemă se aseamănă cu problema 222 și cu ce se deosebește de ea? Care elemente comune ale rezolvării voi ați folosit pentru ambele probleme?

\* Alcătuiți un algoritm comun pentru rezolvarea problemelor 222 și 266. Prevedeți posibilitatea folosirii a acestui algoritm pentru un număr arbitrar de ani.

**La p. 9. „Proprietățile puterii cu exponent întreg”**

276. Calculați valoarea unei expresii arbitrare din exemplele 5 – 8 ale acestei însărcinări, executând operațiile cu ajutorul calculatorului în același ordine, în care ele sunt scrise în exemplu (fără simplificarea anterioară). Oare ați obținut voi același rezultat, ca și atunci când rezolvat exemplul pe hârtie? De ce rezultatele se pot deosebi? Ce concluzie se poate face din aceasta?

293, 294. În ce mod folosirea formei standard a numărului simplifică calculele?

\* Aflați în ce mod în memoria calculatorului sunt furnizate datelor în formatul „cu punctul flotabil”; cu care algoritmi se efectuează operațiile cu astfel de numere; în ce mod acest procedeu de reprezentare a datelor influențează asupra preciziei calculelor.

307. Construiți tabelul căutat cu ajutorul procesorului de tabele. Faceți astfel, ca valorile funcției să fie calculate automat.

**La p. 10 «Funcția  $y = \frac{k}{x}$  și graficul ei»**

315, 316. Completați tabelul necesar cu ajutorul procesorului de tabele. Construiți cu ajutorul mijloacelor procesorului de tabele graficul funcției, care este modelul matematic al problemei. Cum trebuie îmbunătățit tabelul, pentru a obține graficul mai aproape de cel real?

**La p. 11 «Funcția  $y = x^2$  și graficul ei»**

357–360. Alegeți o funcție oarecare din aceste însărcinări și construiți graficul ei prin două metode. *Primul procedeu:* determinați din care figuri geometrice constă acest grafic, și reprezentați aceste figuri pe planul de coordonate cu ajutorul redactorului grafic. *A doua metodă:* compuneți tabelul, care conține seria valorilor argumentului și a valorilor corespunzătoare lor ale funcției, și construiți graficul conform acestui tabel cu ajutorul instrumentelor corespunzătoare ale construirii automate a graficelor; pentru acest procedeu alegeți forma exterioară a graficului, în care punctele date se unesc cu segmente. Care grafic mai exact reprezintă funcția dată? În ce mod trebuie de ținut cont de particularitățile acestei funcții în procesul alegerii a mulțimii valorilor argumentului pentru tabel?

**La p. 12. „Rădăcini pătrate. Rădăcina pătrată aritmetică”**

De însușit extragerea rădăcinii pătrate cu ajutorul calculatorului și a altor programe, pe care voi le folosiți la efectuarea calculelor.

**398.** Îndepliniți însărcinarea cu două procedee: 1) simplificând expresia pe hârtie; 2) calculând valoarea ei cu ajutorul calculatorului fără simplificarea anterioară. Faceți concluzii.

\* **421.** Scrieți algoritmul pentru rezolvarea acestei probleme prin metoda sortării.

### **La p. 13. „Mulțimea și elementele ei. Submulțimea”**

Aflați cu ajutorul Internetului niște fapte interesante și descrieți-le folosind cuvintele „mulțime”, „elementul mulțimii”, „submulțime”, „mulțime vidă”. Definiți o oarecare din mulțimile considerate prin enumerarea elementelor și stabilirea proprietății specifice.

### **La P. 14. „Mulțimi numerice”**

Pentru fiecare din mulțimile numerice introduceți în calculator câteva elemente ale acestei mulțimi. Oare orice număr rațional voi îl puteți introduce cu toate cifrele lui? Oare se poate introduce un număr irațional? Cât de precis exprimă calculatorul aceste numere? Faceți concluzii.

Cum poate fi dat în calculator numărul  $\pi$ ?

Născociți o expresie, în care variabilele vor fi numere raționale, care pot fi date exact, iar rezultatul va fi număr real sau irațional, pe care calculatorul îl reprezintă aproximativ. Calculați valoarea acestei expresii cu ajutorul calculatorului.

\* Faceți concluzia: când operațiile cu numerele reale pot să nu dea rezultatul așteptat? Cum în asemenea cazuri trebuie de dobândit rezultatul dorit?

**450, 451.** Executați însărcinarea cu ajutorul calculatorului și / sau a altor programe, pe care voi le folosiți pentru calcule.

### **La p. 15. „Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice”**

**483 (6), 495.** Efectuați calculele cu ajutorul calculatorului, nesimplificând în prealabil expresia. Care procedeu de rezolvare s-a dovedit mai simplu – pe hârtie sau cu ajutorul calculatorului?

### **La p. 16. „Transformări identice ale expresiilor care conțin rădăcini pătrate” perenesti na Pag. 214**

Calculați valorile a câtorva expresii, aduse în problemele 515, 516, 529, cu ajutorul calculatorului fără simplificarea în prealabil a expresiilor. Oare se va obține un rezultat precis?



**La p. 17. «Funcția  $y = \sqrt{x}$  și graficul ei»**

Cu ajutorul procesorului de tabele construiți tabelul, care conține seria de valori ale argumentului și a valorilor corespunzătoare lor ale funcției  $y = \sqrt{x}$ . Construiți graficul după acest tabel.

**La p. 18. „Ecuatii pătrate. Rezolvarea ecuațiilor pătrate incomplete”**

\* Scrieți algoritmul pentru rezolvarea ecuațiilor pătrate incomplete în dependență de tipul lor.

\* **629.** Scrieți algoritmul pentru rezolvarea acestei probleme prin metoda sortării.

**La p. 19. „Formula rădăcinilor ecuației pătrate”**

\* Scrieți algoritmul, care, având coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  ai ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$  găsește rădăcinile ei. Care cazuri particulare trebuie examinate?

\* **643, 644.** Scrieți algoritmul rezolvării acestor probleme cu ajutorul metodei sortării. Care informație din condițiile acestor probleme ne permite să conchidem, că aici, spre deosebire de problemele 653, 654, se poate folosi metoda sortării?

**La p. 20. „Teorema lui Viete”**

Inventați două numere, scrierea zecimală a fiecăruia din ele conține câteva cifre, până și după virgulă. Aplicând consecința din teorema inversă teoremei lui Viete, alcătuiți ecuația pătrată, pentru care numerele date sunt rădăcini. Pentru calcule folosiți calculatorul.

**La p. 21. „Trinomul pătratic”**

\* Scrieți algoritmul pentru descompunerea trinomului pătratic în factori liniari.

\* **746.** Creați modelul matematic pentru rezolvarea acestei probleme în formă generală.

\* **749.** Scrieți algoritmul pentru rezolvarea acestei probleme cu metoda sortării.

**La p. 22. „Rezolvarea ecuațiilor, care se reduc la ecuații pătrate”**

\* Scrieți algoritmul pentru rezolvarea ecuațiilor bipătrate. Se poate folosi ca subprogram algoritmul, pe care l-ați elaborat pentru rezolvarea ecuațiilor pătrate (vezi însărcinarea la p. 19).

\* 776. Scrieți algoritmul pentru rezolvarea acestei probleme cu metoda sortării.

În decursul anului de învățământ în rubrica „Prietenim cu calculatorul” vi s-au propus multe însărcinări pentru rezolvarea cu metoda sortării. Analizați aceste însărcinări și faceți concluzia, de ce în limba engleză metoda sortării poartă denumirea „brute-force”.

### **La p. 23. „Ecuțiile raționale ca modele matematice ale situațiilor reale”**

\* Oare se poate pentru diferite probleme ale acestui punct de creat unul și același model matematic? Încercați să găsiți astfel de probleme și să elaborați algoritmul comun pentru rezolvarea lor.

## LUCRUL ASUPRA PROIECTULUI

Această rubrică se adresează în primul rând celor, care doresc să învețe a dobândi independent cunoștințe, a gândi creativ, a forma, a exprima și a apăra punctul său de vedere, a înainta ipoteze, a găsi cele mai raționale și ne standarde soluții.

Primul pas care poate ajuta la atingerea acestor scopuri este participarea la crearea proiectului.

**Proiectul este o cercetare independentă după tema aleasă, care poate fi realizată atât individual, cât și în grup.**

Să prezentăm câteva sfaturi pentru organizarea lucrului asupra proiectului și definitivarea rezultatelor cercetării.

1. În timpul alegerii temei, trebuie să luați în considerare actualitatea acesteia, disponibilitatea surselor de informații în literatură și resursele internet. Totodată foarte importantă este dorința voastră de a se manifesta ca cercetător în timpul lucrului anume asupra temei alese.
2. Lucrarea se începe cu pregătirea unui plan prealabil, în care se expune ideea și etapele implementării a celor gândite. După ce vă familiarizați cu principalele surse de informații, faceți un plan final cu ajutorul conducătorului de proiect.
3. Este important să formulați explicit scopurile cercetării. Ele pot fi scrise, în așa fel, de exemplu: a studia, a descrie, a analiza, a dovedi, a compara etc.
4. Lucrarea se termină prin rezumarea rezultatelor cercetării, se fac concluzii, se prezintă perspectivele pentru un studiu mai aprofundat al temei.
5. Volumul aproximativ al lucrării – 10–15 pagini. În plus, este posibil de adăugat material ilustrativ.
6. Lucrarea poate fi definitivată ca referat, raport, prezentare pe calculator.

Mai jos este prezentată lista de teme recomandate, din care puteți alege o temă pentru lucrarea de proiect.

1. **Leonard Euler –remarcabil matematician**
2. **Termeni și simboluri în matematică. Istoria apariției și dezvoltării.**
3. **Algoritmii lui Euclid și ecuații diofantice liniare.**
4. **Paradoxurile teoriei mulțimilor.**
5. **Mica teoremă a lui Fermat**
6. **Căutarea invariantului.**
7. **Principiul extremului**

## CUNOȘTINȚE DIN CURSUL DE ALGEBRĂ CLASA A 7-A

### EXPRESII ÎNTREGI

#### 1. Expresii cu variabile. Expresii raționale întregi. Valoarea numerică a expresiei

- ✓ Expresia, compusă din variabile, numere, semnele operațiilor aritmetice și paranteze, se numește expresie cu variabile (sau cu o variabilă, dacă ea este una).
- ✓ Dacă în loc de variabile (variabilă) de înlocuit în expresie valorile lor, atunci obținem expresie numerică, valoarea căreia se numește valoare a expresiei cu variabile, pentru valorile date ale variabilelor.
- ✓ Expresiile numerice și expresiile cu variabilele se numesc expresii algebrice.
- ✓ Expresiile cu variabile, care nu conțin împărțirea la expresii cu variabile, se numesc expresii întregi.

#### 2. Expresii identic egale. Identități

- ✓ Expresiile, valorile corespunzătoare ale cărora sunt egale pentru orice valori ale variabilelor, se numesc identic egale.
- ✓ Egalitatea, justă pentru orice valori ale variabilelor, ce intră în componența ei, se numește identitate.
- ✓ Înlocuirea unei expresii cu alta, care este identic egală cu ea, se numește transformare identică.
- ✓ A demonstra identitatea – asta înseamnă a demonstra că egalitatea dată este identitate.
- ✓ Pentru demonstrarea identităților se aplică așa procedee:
  - se transformă identic una din părțile egalității date, obținând cealaltă parte;
  - se transformă identic fiecare din părțile egalității date, obținând una și aceeași expresie;
  - se arată că diferența părților stângă și dreaptă ale egalității date este identic egală cu zero.
- ✓ Pentru a demonstra că egalitatea nu este identitate este suficient de adus un contraexemplu: de indicat așa valori ale variabilelor (variabilei), pentru care egalitatea dată nu este adevărată.

#### 3. Puterea cu exponent natural

- ✓ Putere a numărului  $a$  cu exponentul natural  $n$ , mai mare ca 1, se numește produsul a  $n$  factori, fiecare din ei egal cu  $a$ .
- ✓ Putere a numărului  $a$  cu exponentul 1 se numește tot acest număr.

- ✓ Puterea cu baza  $a$  și exponentul  $n$  se notează  $a^n$  și se citește: „ $a$  la puterea  $n$ ”. Puterile cu exponenții 2 și 3 se pot citi astfel: scrierea  $a^2$  la pătrat, scrierea: « $a$  la pătrat», scrierea  $a^3$  – „ $a$  la cub”.
- ✓ Puterea numărului nenegativ este număr nenegativ.
- ✓ Dacă ridicăm numărul negativ la putere cu exponent par, atunci obținem număr pozitiv, iar la ridicarea numărului negativ la putere cu exponent impar obținem număr negativ.

#### 4. Proprietățile puterii cu exponent natural

- ✓ Pentru orice număr  $a$  și oricare numere naturale  $m$  și  $n$  este justă egalitatea

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

adică la înmulțirea puterilor cu aceeași bază exponenții se adună, iar baza rămâne aceeași.

- ✓ Pentru orice număr  $a$ , diferit de zero, și pentru numerele naturale arbitrare  $m$  și  $n$  astfel, că  $m > n$ , este justă egalitatea

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

adică la împărțirea puterilor cu aceeași bază de la exponentul puterii deîmpărțitului se scade exponentul puterii împărțitorului, iar baza rămâne aceeași.

- ✓ Pentru orice număr  $a$  și oricare numere naturale  $m$  și  $n$  este justă egalitatea:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

adică la ridicarea puterii la putere se înmulțesc exponenții, iar baza rămâne aceeași.

- ✓ Pentru orice numere  $a$  și  $b$  și orice număr natural  $n$  este adevărată egalitatea

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

adică la ridicarea unui produs la o putere se ridică la putere fiecare factor și rezultatele obținute se înmulțesc.

#### 5. Monoame

- ✓ Expresiile care sunt produse ale numerelor, variabilelor și a puterilor lor, se numesc monoame.
- ✓ Monomul, care conține numai un singur factor numeric diferit de zero și este situat pe primul loc, și la care toți ceilalți factori – puteri cu diferite baze, se numește forma standard a monomului. Aparțin monoamelor de formă standard de asemenea numerelor, diferite de zero, variabilele și puterile lor.
- ✓ Numărul 0, de asemenea monoamele, care sunt identic egale cu zero, se numesc monoame nule. Ele nu aparțin la monoamele de formă standard.

- ✓ Factorul numeric al monomului, scris în formă standard, se numește coeficientul monomului.
- ✓ Monoamele care au aceleași părți literale se numesc asemenea.
- ✓ Gradul monomului se numește suma exponenților a puterilor tuturor variabilelor, care intră în componența lui. Gradul monomului, care este număr, diferit de zero se consideră egal cu zero.
- ✓ Se consideră că monomul nul n-are grad.
- ✓ Produsul a două monoame este monom. Dacă ridicăm un monom la putere, atunci tot obținem monom.

## 6. Polinoame

- ✓ Expresia care este suma a câteva monoame, se numește polinom.
- ✓ Monoamele din care este compus polinomul, se numesc termenii polinomului.
- ✓ Polinomul care constă din doi termeni, se numește binom, iar acel care constă din trei termeni – trinom.
- ✓ Monomul este caz particular al polinomului. Se consideră că un astfel de polinom constă dintr-un singur termen.
- ✓ Dacă printre monoamele din care constă polinomul, sunt asemenea, atunci ele se numesc termeni asemenea ai polinomului.
- ✓ Polinomul, care constă din monoame de formă standard, printre care nu sunt asemenea, se numește polinom de formă standard.
- ✓ Grad al polinomului de formă standard se numește cel mai mare grad al monoamelor din care constă acest polinom.
- ✓ Pentru a aduna două polinoame trebuie fiecare din ele luat în paranteze și de pus semnul „+” între ele, apoi de omis parantezele și de făcut reducerea termenilor asemenea (dacă aceștia sunt).
- ✓ Pentru a scădea dintr-un polinom altul, trebuie fiecare din ele, luat în paranteze, de pus înaintea scăzătorului semnul „-”, apoi de omis parantezele și de făcut reducerea termenilor asemenea (dacă aceștia sunt).
- ✓ Exprimarea polinomului în formă de produs a câteva monoame se numește descompunerea polinomului în factori.

## 7. Înmulțirea monomului la polinom

- ✓ Pentru a înmulți un monom cu un polinom, trebuie de înmulțit acest monom cu fiecare termen al polinomului și produsele obținute de le adunat.

**8. Înmulțirea polinomului cu polinom**

- ✓ Pentru a înmulți un polinom cu alt polinom, se poate fiecare termen al unui polinom de-l înmulți cu fiecare termen al celuiilalt polinom și produsele obținute de le adunat.
- ✓ La înmulțirea unui polinom cu alt polinom totdeauna obținem polinom.

**FORMULELE ÎNMULȚIRII PRESCURTATE****9. Produsul dintre diferența și suma a două expresii**

- ✓ Produsul dintre diferența a două expresii și suma lor este egal cu diferența pătratelor acestor expresii:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

**10. Diferența pătratelor a două expresii**

- ✓ Diferența pătratelor a două expresii este egală cu produsul dintre diferența acestor expresii și suma lor.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

**11. Pătratul sumei și pătratul diferenței a două expresii**

- ✓ Pătratul sumei a două expresii este egal cu pătratul primei expresii, plus produsul îndoi dintre prima expresie și cea de a doua, plus pătratul expresiei a doua:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- ✓ Pătratul diferenței a două expresii este egal cu pătratul primei expresii, minus produsul îndoi dintre prima expresie și cea de a doua, plus pătratul expresiei a doua:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

**12. Transformarea polinomului în pătratul sumei sau a diferenței a două expresii**

- ✓ Formulele

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

permit „a reduce” trinomial în pătratul unui binom.

- ✓ Trinomial care poate fi exprimat în formă de pătratul unui binom se numește pătrat complet.

**13. Suma și diferența cuburilor a două expresii**

- ✓ Polinomul  $a^3 - ab + b^3$  se numește pătrat necomplet al diferenței.

- ✓ Suma cuburilor a două expresii este egală cu produsul dintre suma acestor expresii și pătratul necomplet al diferenței lor:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

- ✓ Polinomul  $a^2 + ab + b^2$  se numește pătratul necomplet al sumei.
- ✓ Diferența cuburilor a două expresii este egală cu produsul dintre diferența acestor expresii și pătratul necomplet al sumei lor:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

## ECUAȚII

### 14. Rădăcina ecuației

- ✓ Rădăcină a ecuației se numește valoarea variabilei, pentru care ecuația se transformă într-o egalitate numerică justă.
- ✓ A rezolva ecuația – aceasta înseamnă a afla toate rădăcinile ei sau a se convinge că ele în general nu există.
- ✓ În procesul rezolvării problemelor este comod de folosit următoarea schemă:
  - 1) de alcătuit ecuația conform condiției problemei (de construit modelul matematic al problemei);
  - 2) de rezolvat ecuația obținută;
  - 3) de clarificat dacă corespunde rădăcina găsită conținutului problemei, și de dat răspunsul.

### 15. Proprietățile ecuațiilor

- ✓ Dacă la ambele părți el ecuației date de adunat (sau din ambele părți de scăzut) unul și același număr, atunci ecuația obținută are tot aceleași rădăcini ca și cea dată.
- ✓ Dacă ecuația dată nu are rădăcini, atunci, adunând la ambele părți unul și același număr, obținem o ecuație, care tot nu are rădăcini.
- ✓ Dacă un oarecare termen de-l trecut dintr-o parte a ecuației în alta, schimbându-i în același timp semnul în opus, atunci obținem ecuația, care are aceleași rădăcini ca și cea dată.
- ✓ Dacă ambele părți ale ecuației de le înmulțit (împărțit) la unul și același număr diferit de zero, atunci obținem ecuația, care are aceleași rădăcini, ca și cea dată.



**16. Ecuația liniară cu o singură variabilă**

- ✓ Ecuația de forma  $ax = b$ , unde  $x$  – variabilă, iar  $a$  și  $b$  – numere, se numește ecuație liniară cu o singură variabilă.

Valorile lui $a$ și $b$	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Rădăcinile ecuației $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	$x$ – număr arbitrar	Nu sunt rădăcini

**FUNCȚII****17. Funcția. Domeniul de definiție și domeniul de valori**

- ✓ Regula cu ajutorul căreia pentru fiecare valoare a variabilei independente se poate găsi o singură valoare a variabilei dependente, se numește funcție, iar dependența corespunzătoare a unei variabile de cealaltă – funcțională.
- ✓ De regulă variabila independentă se notează cu litera  $x$ , cea dependentă – cu litera  $y$ , funcția (regula) – cu litera  $f$ . Dacă variabila  $y$  depinde funcțional de variabila  $x$ , atunci acest fapt se notează astfel:  $y = f(x)$  (se citește: „igrec este egal cu ef de ics”).
- ✓ Variabila independentă mai este numită argumentul funcției.
- ✓ Valoarea funcției  $f$ , care corespunde valorii  $x_0$  a argumentului  $x$ , se notează  $f(x_0)$ .
- ✓ Toate valorile, pe care le primește argumentul, formează domeniul de definiție al funcției. Toate valorile, pe care le primește variabila dependentă, formează domeniul de valori al funcției.

**18. Procedeele de definiție ale funcției**

- ✓ Funcția se consideră definită, dacă se arată domeniul ei de definiție și regula, cu ajutorul căreia se poate după fiecare valoare a variabile independente de găsit valoarea corespunzătoare a variabilei dependente.
- ✓ Procedeele de definire ale funcției: cu ajutorul descrierii, cu ajutorul formulei, tabelelor, grafic.
- ✓ Dacă funcția este definită cu ajutorul formulei, partea dreaptă a căreia – expresie întregă, și totodată nu se indică domeniul ei de definiție, atunci se consideră, că domeniul de definiție al acestei funcții constă din toate numerele.

## 19. Graficul funcției

- ✓ Grafic al funcției  $f$  se numește figura geometrică, care constă din toate acele și numai acele puncte ale planului de coordonate, abscisele cărora sunt egale cu valorile argumentului, iar ordonatele – cu valorile corespunzătoare ale funcției  $f$ .
- ✓ Când o figură este graficul funcției  $f$ , atunci se realizează două condiții:
  - 1) dacă  $x_0$  – o valoare oarecare a argumentului, iar  $f(x_0)$  – valoarea corespunzătoare a funcției, atunci punctul cu coordonatele  $(x_0; f(x_0))$  obligatoriu aparține graficului;
  - 2) dacă  $(x_0; y_0)$  – coordonatele unui punct oarecare al graficului, atunci  $x_0$  și  $y_0$  sunt valorile corespunzătoare ale variabilelor independentă și dependentă ale funcției  $f$ , adică  $y_0 = f(x_0)$ .
- ✓ Figura, reprezentată pe planul de coordonate poate fi graficul unei funcții, dacă orice dreaptă, perpendiculară pe axa absciselor, are cu această figură nu mai mult de un singur punct comun.

## 20. Funcția liniară, graficul și proprietățile ei

- ✓ Funcția care poate fi definită cu formula de forma  $y = kx + b$ , unde  $k$  și  $b$  – numere oarecare,  $x$  – variabilă independentă, se numește funcție liniară.
- ✓ Graficul funcției liniare, al cărei domeniu de definiție sunt toate numerele, este dreapta.
- ✓ Funcția liniară, definită cu formula  $y = kx$ , unde  $k \neq 0$ , se numește proporționalitate directă.
- ✓ Graficul proporționalității directe este dreapta care trece prin originea de coordonate. De aceea pentru construirea graficului proporționalității directe este suficient de arătat un punct oarecare al graficului, diferit de originea de coordonate, și de trasat dreapta prin acest punct și punctul  $O(0; 0)$ .
- ✓ Dacă în formula  $y = kx + b$  de pus  $k = 0$ , atunci obținem  $y = b$ . În acest caz valorile funcției vor rămâne neschimbate pentru orice valori ale argumentului. Grafic al acestei funcții este dreapta, care este paralelă cu axa absciselor.

## SISTEME DE ECUAȚII LINIARE CU DOUĂ VARIABLE

### 21. Ecuatii cu două variabile

- ✓ Perechea de valori ale variabilelor, care transformă ecuația cu două variabile în-tr-o egalitate adevărată, se numește soluția ecuației cu două variabile.

- ✓ A rezolva o ecuație cu două variabile – aceasta înseamnă de găsit toate soluțiile ei sau de arătat, că ea n-are soluții.
- ✓ Proprietățile ecuațiilor cu două variabile sunt analoge cu proprietățile ecuațiilor cu o singură variabilă (vezi p. 15, pag. 221).
- ✓ Grafic al ecuației cu două variabile se numește figura geometrică, care constă din toate acelea și numai acelea puncte ale planului de coordonate, ale căror coordonate (perechi de numere) sunt soluțiile ecuațiilor date.
- ✓ Atunci când figura este graficul ecuației sunt satisfăcute două condiții:
  - 1) toate soluțiile ecuației sunt coordonatele punctelor, care aparțin graficului;
  - 2) coordonatele oricărui punct, care aparține graficului – aceasta-i perechea de numere, care este soluția ecuației date.

## 22. Ecuația liniară cu două variabile și graficul ei

- ✓ Ecuație liniară cu două variabile se numește ecuația de forma  $ax + by = c$ , unde  $x$  și  $y$  – sunt variabile,  $a, b, c$  – numere arbitrare.

Ecuția	Valorile $a, b, c$	Graficul
$ax + by = c$	$b \neq 0, a$ și $c$ – arbitrare	Dreaptă ne verticală
$ax + by = c$	$b = 0, a \neq 0,$ $c$ – arbitrare	Dreaptă verticală
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Tot planul de coordonate
$ax + by = c$	$a = b = 0, c \neq 0$	– (ecuația n-are soluții)

## 23. Sisteme de ecuații cu două variabile

- ✓ Dacă trebuie de aflat toate soluțiile comune ale câtorva ecuații, atunci se spune că trebuie de rezolvat sistemul de ecuații.
- ✓ Sistemul de ecuații se scrie cu ajutorul acoladei.
- ✓ Soluție a sistemului de ecuații, cu două variabile se numește perechea de valori a variabilelor, care transformă fiecare ecuație într-o egalitate adevărată.
- ✓ A rezolva sistemul de ecuații – aceasta înseamnă a afla toate soluțiile lui sau de demonstrat că soluții nu există.

**24. Metoda grafică de rezolvare a sistemelor de două ecuații liniare cu două variabile**

- ✓ Metoda grafică de rezolvare a sistemului de ecuații constă în următoarele:
  - de construit pe același plan de coordonate graficele ecuațiilor, care intră în componența sistemului;
  - de aflat coordonatele tuturor punctelor de intersecție ale graficelor construite;
  - perechile de numere obținute și vor fi soluțiile căutate.
- ✓ Dacă graficele ecuațiilor, care intră în sistemul de ecuații liniare, sunt drepte, atunci numărul de soluții a acestui sistem depinde de repartizarea reciprocă a două drepte pe plan:
  - dacă dreptele se intersectează, atunci sistemul are o singură soluție;
  - dacă dreptele coincid, atunci sistemul are infinit de multe soluții;
  - dacă dreptele sunt paralele, atunci sistemul n-are soluții.

**25. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare cu metoda substituției**

- ✓ Pentru a rezolva sistemul de ecuații liniare cu metoda substituției, trebuie:
  - 1) de exprimat dintr-o oarecare ecuație a sistemului o variabilă prin cealaltă;
  - 2) de substituit în a doua ecuație a sistemului această variabilă prin expresia obținută la primul pas;
  - 3) de rezolvat ecuația cu o singură variabilă, obținută la al doilea pas;
  - 4) de înlocuit valoarea găsită a variabilei în expresia, obținută la primul pas;
  - 5) de calculat valoarea variabilei a doua;
  - 6) de scris răspunsul.

**26. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda adunării**

- ✓ Pentru a rezolva sistemul de ecuații liniare prin metoda adunării, trebuie:
  - 1) se aleg factori pentru fiecare ecuație a sistemului astfel, încât după înmulțirea lor cu aceste numere coeficienții de pe lângă o variabilă să devină numere opuse;
  - 2) să se adune termen cu termen părțile stângă și dreaptă ale ecuațiilor sistemului, obținute la primul pas;
  - 3) să se rezolve ecuația cu o singură variabilă, obținută la al doilea pas;
  - 4) de înlocuit valoarea variabilei, găsite la al treilea pas în oricare ecuație a sistemului inițial;

- 5) de calculat valoarea variabilei a doua;
- 6) de scris răspunsul.

## MODULUL NUMĂRULUI

### 27. Modulul numărului

- ✓ Modulul numărului  $a$  se numește distanța de la originea de evidență până la punctul, care reprezintă acest număr pe dreapta de coordonate.
- ✓ Modulul numărului  $a$  se notează astfel:  $|a|$  (se citește: „modulul lui  $a$ ”).
- ✓ Modulul numărului pozitiv este egal cu acest număr, modulul numărului negativ este egal cu numărul, care-i opus celui dat.

$$|0| = 0.$$

- ✓ Cu ajutorul acoladei proprietatea modulului numărului  $a$  se poate scrie astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0; \\ -a, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

- ✓ Modulul numărului primește numai valori nenegative.
- ✓ Modulii numerelor opuse sunt egali:  $|a| = |-a|$ .

## PLANUL DE COORDONATE

### 28. Sistemul rectangular de coordonate

Să ducem pe plan două drepte de coordonate perpendiculare astfel ca originile lor să coincidă (fig. 37). Aceste drepte se numesc axe de coordonate, punctul  $O$  de intersecție al lor – originea de coordonate. Axa orizontală se numește axa absciselor și se notează cu litera  $x$ , axa verticală se numește axa ordonatelor și se notează cu litera  $y$ .

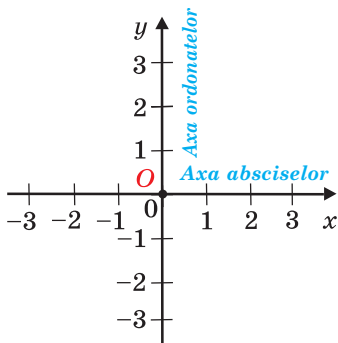


Fig. 37

- ✓ Axa absciselor se mai numește axa  $x$ , iar axa ordonatelor – axa  $y$ , împreună ele formează sistemul de coordonate rectangular. Așa un sistem de coordonate se numește cartezian.
- ✓ Planul pe care este dat sistemul de coordonate cartezian se numește plan de coordonate.
- ✓ Axele de coordonate împart planul în patru părți, care se numesc cadrane și sunt numerotate așa cum se arată în figura 38.

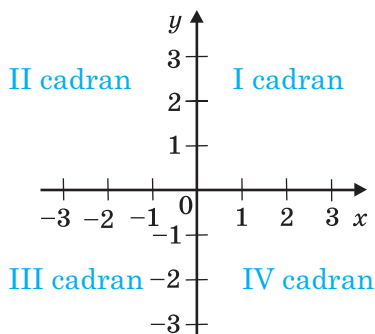


Fig. 38

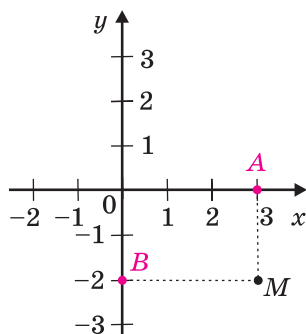


Fig. 39

Pe planul de coordonate este notat punctul  $M$  (fig. 39). Dreapta, care trece prin punctul  $M$  perpendicular la axa absciselor, o intersectează în punctul  $A$ , iar dreapta, care este perpendiculară pe axa ordonatelor și trece prin punctul  $M$ , intersectează această axă în punctul  $B$ . Punctul  $A$  de pe axa  $x$  are coordonata 3, iar punctul  $B$  de pe axa  $y$  – coordonata  $-2$ . Numărul 3 se numește abscisa punctului  $M$ , numărul  $-2$  – ordonata punctului  $M$ . Numerele 3 și  $-2$  determină univoc poziția punctului  $M$  pe planul de coordonate. De aceea ele sunt numite coordonatele punctului  $M$  și se scriu astfel:  $M(3; -2)$ .

Scriind coordonatele punctului, abscisa totdeauna se pune pe primul loc, iar ordonata – pe al doilea.

Dacă punctul este situat pe axa absciselor, atunci ordonata lui este egală cu zero, iar dacă punctul este situat pe axa ordonatelor, atunci abscisa lui este egală cu zero.

## RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA EXERCIȚII

50. 0,3. 51. 5. 53.  $\frac{1}{32}$ . 54. Nu. *Indicație*. Reprezentați fracția dată în forma  $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$ . 58. 1)  $x$  – orice număr, afară de  $-1$ ; 2) nu-s rădăcini; 3) nu-s rădăcini. 59. 1) Nu-s rădăcini; 2)  $-7$ . 60. 1) Dacă  $a = 0$ , atunci nu-s rădăcini; dacă  $a \neq 0$ , atunci  $x = \frac{1}{a}$ ; 2) dacă  $a = 0$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a \neq 0$ , atunci  $x = 1$ ; 3) dacă  $a = 6$ , atunci  $x$  – orice număr; dacă  $a \neq 6$ , atunci  $x = a - 6$ ; 4) dacă  $a = -2$ , atunci nu-s rădăcini; dacă  $a = 2$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a \neq -2$  și  $a \neq 2$ , atunci  $x = \frac{1}{a+2}$ . 61. 1) Dacă  $a = -3$ , atunci nu-s rădăcini; dacă  $a \neq -3$ , atunci  $x = \frac{3}{a+3}$ ; 2) dacă  $a = 0$ , atunci nu-s rădăcini; dacă  $a = 9$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a \neq 0$  și  $a \neq 9$ , atunci  $x = \frac{a-9}{a}$ . 64.  $-4$  pentru  $a = 2b$ . 65. 48 km/oră, 60 km/oră. 76. 1)  $-\frac{1}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{m+2}$ ; 3)  $\frac{1}{1-k}$ . 77. 1)  $\frac{3}{4}$ ; 2)  $\frac{a-5}{a+5}$ . 78. 1)  $\frac{1}{1-a}$ ; 2)  $\frac{3}{b-2}$ ; 3)  $\frac{m}{n-5}$ . 79. 1)  $\frac{1}{(x-7)^2}$ ; 2)  $\frac{y+6}{y+2}$ . 87. 2) 5; 3)  $4\frac{1}{4}$ . 88. 2)  $-3$ ; 3)  $-4,5$ . 89. 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. 90. 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. 91. 15 km/oră, 12 km/oră. 92. 1)  $-2$ ; 2) nu-s rădăcini. 112. 6)  $\frac{5}{p-5}$ ; 7)  $\frac{16}{16y-y^3}$ ; 8)  $\frac{2b+1}{12b-6}$ . 113. 5)  $\frac{1}{x}$ ; 6)  $\frac{8}{y+2}$ . 116. 2) 4. 117. 1)  $\frac{1}{6}$ ; 2) 2,5; 3) 0,1. 118. 1) 1,2; 2)  $\frac{7}{17}$ . 121. 2)  $\frac{3}{b^2-3b+9}$ . 122. 1)  $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$ ; 2)  $\frac{2-2b}{8b^3+1}$ . 124. 1)  $-\frac{a+b}{ab}$ ; 2)  $\frac{1}{2x}$ ; 3)  $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$ ; 4)  $\frac{1}{y-2}$ . 128.  $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$ . *Indicație*. Reprezentați fiecare termen în formă de diferență a două fracții. De exemplu,  $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$ . 129.  $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$ . 132. *Indicație*. La fiecare din fracțiile, scrise în partea stângă a egalității, adunați 1, iar la partea dreaptă adunați 3. 135. 270 km. 160. 1)  $-5$ ; 2) 0,9; 3)  $-5$ ; 4)  $-3,2$ . 161. 1)  $\frac{40}{21}$ ; 2)  $\frac{4}{11}$ . 162. 83. 163. 10. 164. 7 sau  $-7$ . 165. 2 sau  $-2$ . 166. 1) 1; 2) 1. 167. 1)  $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$ ; 2) 1. 170. 1) 0,5; 2)  $x$  – număr arbitrar. 172. 1,2 oră. 173. 50 l, 30 l. 174. 5 bărbați, 1 femeie,

- 6 copii. **178.** 1)  $\frac{3}{1-a}$ ; 2)  $\frac{2}{b-3}$ ; 3)  $\frac{12}{3c-1}$ ; 4)  $\frac{1}{a-2b}$ ; 5)  $\frac{2}{a+5}$ ; 6)  $\frac{x-3}{x+3}$ .
- 179.** 1)  $\frac{2}{3-b}$ ; 2)  $-1$ ; 3)  $x+y$ ; 4)  $\frac{a+2}{a-2}$ . **180.** 1)  $\frac{x+8}{x-8}$ ; 2)  $\frac{a-4}{2a}$ ; 3)  $\frac{1}{b}$ ; 4)  $\frac{a-1}{a}$ ;
- 5) 2; 6)  $a-2$ . **181.** 1)  $\frac{7+x}{7-x}$ ; 2)  $c-5$ ; 3)  $-2$ ; 4)  $\frac{y+2}{6}$ . **184.** 1) 1) Nu depinde; 2) depinde. **186.** 1)  $\frac{1}{a}$ ; 2)  $a-3$ ; 3)  $a+1$ ; 4)  $\frac{a+b}{a}$ . **187.** 1)  $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ; 2)  $-a$ .
- 188.** 1)  $-\frac{a+b}{2ab}$ ; 2)  $\frac{1}{a}$ ; **189.**  $-y$ . **192.** 1)  $\frac{a^2}{b^2}$ ; 2) 1. **193.** 1)  $-1\frac{1}{3}$ ; 2)  $\frac{3}{4}$ . **195.** *Indicație.* Reprezentați expresia dată în forma  $10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$ . **196.** 480 kg. **197.** 500 grn, 700 grn. **198.** 2 ore. **199.** 90 piese. **200.** 9 vrăbii, 10 hulubi, 11 turturele. **207.** 2) Rădăcini nu-s; 3)  $-2$ ; 4)  $x$  – număr arbitrar, afară de 2; 5)  $x$  – număr arbitrar; 6) 3; 7) 0,5; 8) rădăcini nu-s; 9)  $-\frac{1}{3}$ ; 10) 17; 11) 12; 12)  $1\frac{3}{4}$ ; 13)  $-4$ ; 14) 0; 15) 4. **208.** 1)  $-1$ ; 2) rădăcini nu-s; 3) 10; 4) rădăcini nu-s; 5) 4; 6)  $x$  – orice număr, afară de 0; 7) 6; 8)  $x$  – orice număr, afară de  $-0,5$ ; 9)  $-3$ ; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1)  $\frac{13}{4}$ ; 2) rădăcini nu-s; 3) 7; 4) 0;  $-2$ ; 5) rădăcini nu-s; 6)  $-17$ ; 7) 0; 8) rădăcini nu-s. **213.** 1) 10; 2)  $-0,5$ ; 3)  $-3$ ; 4)  $-4$ ; 4; 5) rădăcini nu-s; 6)  $-5$ . **214.** 2 km/oră. **215.** 29 km/oră. **216.** 9 km/oră. **217.** 1) Nu-s rădăcini; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Dacă  $a \neq 1$ , atunci  $x = 1$ ; dacă  $a = 1$ , atunci rădăcini nu-s; 2) dacă  $a \neq -5$ , atunci  $x = a$ ; dacă  $a = -5$ , atunci rădăcini nu-s; 3) dacă  $a = 0$ , atunci  $x$  – orice număr, afară de 3; dacă  $a \neq 0$  și  $a \neq 3$ , atunci  $x = a$ ; dacă  $a = 3$ , atunci rădăcini nu-s; 4) dacă  $a \neq 7$ , atunci  $x = a$  sau  $x = 6$ ; dacă  $a = 7$ , atunci  $x = 6$ ; 5) dacă  $a \neq 4$  și  $a \neq -2$ , atunci  $x = 4$  sau  $x = -2$ ; dacă  $a = 4$ , atunci  $x = -2$ ; dacă  $a = -2$ , atunci  $x = 4$ ; 6) dacă  $a \neq 4$  și  $a \neq -2$ , atunci  $x = a$ ; dacă  $a = 4$  sau  $a = -2$ , atunci rădăcini nu-s. **220.**  $a = 2$  sau  $a = -2$ . **221.**  $a = -9$ , sau  $a = -3$ , sau  $a = 0$ . **222.** 70 000 locuitori. **223.** 60 km. **251.** 1) 2,7; 2)  $9\frac{47}{125}$ .
- 258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 de bare. **266.** 80 000 locuitori. **267.** 2 km. **280.** 6)  $-\frac{1}{6}$ ; 7)  $\frac{4}{9}$ ; 8)  $\frac{4}{7}$ . **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1)  $-3$ ; 2)  $-5$ ; 3)  $-2$ ; 4)  $-7$ ; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3)  $-1$ ; 4) 6. **295.** 8 min. **296.** 5,34 kg. **297.** De 81 de ori. **298.** 1)  $\frac{1}{a+b}$ ; 2)  $-4b^2$ ; 3)  $15c^3 + 5$ ; 4)  $-\frac{1}{m^4}$ . **299.** 1)  $\frac{2a^2}{3a^2-1}$ ; 2)  $\frac{1-6b}{2}$ .
- 300.** 1)  $-1$  sau 0; 2) 3 sau 4; 3) 4 sau 5; 4) 2 sau 3. **301.** 1) 6 sau 7; 2) 4 sau 5;



3) 4 sau 5; 4) 4 sau 5. **302.** 28; 8. **303.** Cu 31,6 %. **304.** 5 oră 45 min. **305.** Așa, trebuie 5 bancnote a câte 5 grn și 3 bancnote a câte 2 grn. **331.** 1) 2; 2) -1; 3) rădăcini nu-s. **332.** 1) 2; 4) 2) -1; 1; 3) rădăcini nu-s. **345.** Rădăcini nu-s. **346.** S-au micșorat cu 9 %. **347.** 36 monede, 24 monede. **348.** 12 km/oră. **353.** 1) Rădăcini nu-s; 2) -1; 3) 3) 2. **354.** 1) -3; -1; 2) rădăcini nu-s; 3) -1. **369.** 4. **371.** 5 km/oră, 3 km/oră. **397.** 1) -10; 2) 25; 3) -23,8; 4) 13; 5) 216; 6) -20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. **399.** 2)  $x \leq 0$ ; 3)  $x$  - număr arbitrar; 4)  $x = 0$ ; 5)  $x \geq 8$ ; 6)  $x \leq 8$ ; 9)  $x$  - număr arbitrar, diferit de 8; 10)  $x \geq 0$  și  $x \neq 9$ ; 11)  $x \geq 0$ ; 12)  $x = 0$ ; 13) așa o valoare a lui  $x$  nu există; 14)  $x$  - număr arbitrar; 15)  $x = 0$ ; 16)  $x$  - orice număr, diferit de zero 0. **400.** 2)  $y \leq 0$ ; 3)  $y \geq 0$ ; 4)  $y \leq 0$ ; 5)  $y = 0$ ; 6)  $y > 0$ ; 7)  $y \geq 0$  și  $y \neq 1$ . **401.** 6) -10; 10. **402.** 4) -7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) rădăcini nu-s. **406.** 1) 4900; 2) rădăcini nu-s. **407.** 1) Dacă  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ , atunci  $a$  și  $b$  - au același semn; dacă  $a = 0$ , atunci  $b$  - număr arbitrar; dacă  $b = 0$ , atunci  $a$  - număr arbitrar; 3) dacă  $b \neq 0$ , atunci  $a \geq 0$ ; dacă  $b = 0$ , atunci  $a$  - număr arbitrar; 5) dacă  $a \neq 0$ , atunci  $b \leq 0$ ; dacă  $a = 0$ , atunci  $b$  - număr arbitrar. **408.** 2) *Indicație.*  $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ . **409.** *Indicație.*  $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$ . **410.** Expresia 2. **411.** 1) 0; 2) rădăcini nu-s; 3) 1; 4) -2; 5) -1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) rădăcini nu-s; 3) 1; 4) 3. **413.** 1)  $a > -1$ ; 2)  $a = -1$ ; 3)  $a < -1$ . **416.** 1) Dacă  $a = 0$ , atunci  $x \geq 1$ ; dacă  $a \neq 0$ , atunci  $x = 1$ ; 2) dacă  $a = 1$ , atunci  $x$  - număr arbitrar; dacă  $a \neq 1$ , atunci  $x = 0$ ; 3) dacă  $a = 0$ , atunci  $x \geq 1$ ; dacă  $a \neq 0$ , atunci  $x = 2$ ; 4) dacă  $a < 0$ , atunci rădăcini nu-s; dacă  $a \geq 0$ , atunci  $x = a^2 + 2$ . **417.**  $a < 0$  sau  $a = 1$ . **418.** 13. **419.**  $\frac{a+10}{5-a}$ . **420.** 27 bancnote a câte 100 grn, 4 bancnote a câte 500 grn. **428.** 2)  $\{-2, 2\}$ ; 4)  $\emptyset$ . **429.** 4)  $\{5\}$ . **439.** 1)  $\frac{5b+15}{b}$ ; 2)  $\frac{3}{1-b}$ . **440.** 1,4 km/oră. **441.**  $\frac{2}{7}$ . **457.** *Indicație.* Fie  $\frac{m}{n}$  și  $\frac{p}{q}$  - două numere raționale. Atunci suma lor este egală cu  $\frac{mq+np}{nq}$ , adică este număr de forma  $\frac{s}{t}$ , unde  $s \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . **458.** *Indicație.* Dacă presupunem, că suma dată este număr rațional, atunci din aceasta rezultă, că numărul irațional dat poate fi reprezentat în formă de diferența a două numere raționale. **459.** 1) Nu, de exemplu,  $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ ; 2) nu, de exemplu,  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$ ; 3) nu, de exemplu,  $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$ . **460.** La a treia scară la etajul șase. **461.**  $\frac{b^2}{a}$ . **463.** 18 l. **493.** 1) Nici pentru o valoare a lui  $x$ ; 2) 3;

- 3)  $-1$ ; 3. **494.** 1)  $-4$ ; 2) 2. **495.**  $-4$ . **496.** 120 ha. **525.** 1)  $6\sqrt{2}$ ; 2)  $11\sqrt{2}$ ;  
 3)  $10\sqrt{3}$ ; 4)  $9\sqrt{5a}$ ; 5)  $-a\sqrt{ab}$ ; 6) 0. **526.** 1)  $-6\sqrt{3}$ ; 2)  $6\sqrt{7b}$ ; 3)  $10a^3\sqrt{a}$ .  
**528.** 1)  $16 + \sqrt{3}$ ; 2)  $-10\sqrt{5} - 5$ ; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **529.** 1)  $10 - 4\sqrt{2}$ ; 2) 74; 3) 4;  
 4) 32. **536.** 1)  $\sqrt{a} - 2$ ; 2)  $\frac{6}{m - 2\sqrt{m}}$ ; 3)  $\frac{4}{\sqrt{xy}}$ ; 4)  $\frac{4\sqrt{a}}{16 - a}$ ; 5)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ ; 6)  $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ ;  
 7)  $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c+5}}$ ; 8)  $\sqrt{a} - 1$ ; 9)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ; 10)  $\sqrt{x}$ . **537.** 1)  $\frac{4}{a + \sqrt{a}}$ ; 2)  $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$ ; 3)  $\frac{3}{\sqrt{y}}$ ;  
 4)  $\sqrt{\frac{n}{m}}$ ; 5)  $\sqrt{x}$ ; 6)  $\frac{22}{9 - a}$ . **538.** 1)  $m^4\sqrt{-m}$ ; 2)  $a^2b^6\sqrt{b}$ ; 3)  $-2x^3\sqrt{y}$ ;  
 4)  $m^3n^3\sqrt{mn}$ ; 5)  $-3xy^7\sqrt{5x}$ ; 6)  $8ab^4\sqrt{b}$ ; 7)  $-11m^5b^9\sqrt{2m}$ ; 8)  $mnp^7\sqrt{-p}$ .  
**539.** 1)  $-m^9\sqrt{-m}$ ; 2)  $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$ ; 3)  $-7a\sqrt{b}$ ; 4)  $a^4b^4\sqrt{ab}$ ; 5)  $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$ ;  
 6)  $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$ . **540.** 2) Deoarece din condiție rezultă, că  $b \leq 0$ , deci  
 $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$ ; 3)  $\sqrt{c^7}$ ; 5)  $-\sqrt{x^3y^5}$ ; 8)  $\sqrt{a^3b^3}$ . **541.** 2)  $-\sqrt{54n^2}$ ; 3)  $\sqrt{p^5}$ ;  
 6)  $-\sqrt{-5a^9b}$ . **543.** 1)  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ; 2)  $\sqrt{a}$ . **544.** 1)  $\sqrt{2} + 1$ ; 2)  $\sqrt{3} + 2$ ; 3)  $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ .  
**545.** 1)  $\sqrt{7} + 1$ ; 2)  $\sqrt{6} + 3$ ; 3)  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . **546.** 9. **549.** 1)  $4 + \sqrt{2}$ ; 2)  $3\sqrt{3} + 1$ .  
**550.** 180 piese. **551.** Cu 25 %. **552.** 6 km/oră, 2 km/oră. **553.** 17 vagoane.  
**571.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) rădăcini nu-s; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **573.** 4)  $5 - 2\sqrt{3}$ .  
**574.** 2)  $-\sqrt{2}$ . **575.** 0. *Indicație.* Partea stângă a acestei ecuații primește nu-  
 mai valori nenegative, iar cea dreaptă – numai nepozitive. **580.** 1)  $\sqrt{7} - 1$ ;  
 2)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ; 3)  $3 - \sqrt{3}$ ; 4)  $6 - \sqrt{2}$ . **581.** 1)  $\sqrt{5} - 2$ ; 2)  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ; 3)  $5 - 2\sqrt{3}$ .  
**582.** Dacă  $a \geq 0$ , atunci o rădăcină; dacă  $a < 0$ , atunci rădăcini nu-s. **583.**  
 $2\sqrt{a} + 1$  pentru  $a > 1$ ; 3 pentru  $0 \leq a \leq 1$ . **584.** 12 pentru  $a > 36$ ;  $2\sqrt{a}$  pentru  
 $0 \leq a \leq 36$ . **585.** 63 kg. **586.** 3 km/oră. **588.** 1 oră 12 min. **605.** 6; 7. **606.** 9;  
 10. **608.** 1) 0; 14; 2) rădăcini nu-s. **609.** 1) 0;  $\frac{4}{3}$ ; 2)  $-2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{2}$ . **615.**  $-3$ ;  $-2$   
 sau 3; 4. **616.**  $-1$ ; 0 sau 0; 1. **617.** 1) 4; 2) 0;  $-8$ ; 3)  $-9$ ; 9. **622.** 1) 0;  $-3$ ; 3; 2)  
 0; 1; 3) 1; 4)  $-2$ ; 2. **623.** 1) 0; 7;  $-7$ ; 2) 0; 5;  $-7$ ; 3)  $-1,5$ ;  $1,5$ . **624.** 1) 2; 2) 3;  
 3) 0,5;  $-2$ ; 4) așa o valoare nu există. **625.** 1)  $a = 4, x_2 = -4$ ; 2)  $a = 0, x_2 = 2$   
 sau  $a = -1, x_2 = \frac{9}{4}$ ; 3)  $a = 3, x_2 = -2$ . **629.** 35. **636.** 1) 1;  $-\frac{7}{6}$ ; 2) 1; 9; 3)  $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ .  
**637.** 1) 2;  $-\frac{7}{3}$ ; 2)  $-3$ ;  $\frac{1}{7}$ . **638.** 1) 4;  $-3,5$ ; 2) 1;  $-\frac{1}{25}$ ; 3) 2;  $\frac{4}{3}$ ; 4)  $-3 \pm \sqrt{15}$ ; 5) 3;

- 6; 6)  $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$ . **639.** 1) 3; 9; 2)  $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$ ; 3) р
- 642.** 6 і 14 або  $-14$  і  $-6$ . **643.** 10; 11. **644.** 13; 14. **645.** 1)  $\sqrt{5}$ ;  $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$ ;  
2)  $-1$ ;  $\sqrt{6}$ ; 3) 6;  $-\frac{2}{3}$ ; 4)  $-1$ ;  $\frac{31}{22}$ . **646.** 1)  $-\sqrt{2}$ ,  $-2\sqrt{2}$ ; 2) 2;  $\sqrt{3}$ ; 3) 1;  $\frac{3}{8}$ . **647.**  $-20$ ;  
4. **648.** 1;  $-\frac{4}{3}$ . **649.** 8 см. **650.** 6 см або 12 см. **651.** 16 см, 30 см. **652.** 9 см,  
40 см. **653.** 9; 11; 13. **654.** 4; 6; 8; 10. **656.** 16 мавп або 48 мавп.  
**657.** 9 команди. **658.** 15 сторінок. **659.** 1)  $-8$ ;  $-7$ ; 0; 1; 2)  $-1$ ; 1; 0,6;  $-0,6$ ;  
3)  $-3 + \sqrt{14}$ ; 4)  $-2$ ; 2; 5) 3; 5;  $-3$ ;  $-5$ ; 6) 2;  $-2$ . **660.** 1)  $-12$ ; 2;  $-2$ ;  $-8$ ; 2) 3;  
3) 15;  $-7 \pm \sqrt{34}$ ; 4) 9;  $-9$ . **661.** 1)  $-10$ ; 2) 3. **662.** 1)  $\frac{1}{6}$ ; 2) 3. **663.** 1)  $b = -2$ ;  
2)  $b = -12$  або  $b = 12$ . **664.** 1)  $b = 13,5$ ; 2)  $b = -8$  або  $b = 8$ . **668.** 1)  $x = -2a - 1$   
або  $x = -a$ ; 2)  $x = 2a$  або  $x = 4$ ; 3) якщо  $a \neq 0$ , тоді  $x = \frac{25}{a}$  або  $x = -\frac{1}{a}$ , якщо  
 $a = 0$ , тоді р
- $a = 0$ , тоді р
- $x = \frac{1}{3}$  або  $x = \frac{1}{2a-1}$ . **669.** 1)  $x = 3a - 5$  або  $x = -a$ ; 2)  $x = -3a$  або  $x = 4$ ;  
3) якщо  $a = 0$ , тоді  $x = 1$ ; якщо  $a \neq 0$ , тоді  $x = 1$  або  $x = \frac{1}{a}$ . **670.** 1)  $b = 0$   
або  $b = -\frac{9}{7}$ ; 2)  $b = -5$ , або  $b = 2\sqrt{6}$ , або  $b = -2\sqrt{6}$ ; 3)  $b = 19$ . **671.** 1)  $b = 0$ , або  
 $b = -0,5$ , або  $b = 0,5$ ; 2)  $b = -3$  або  $b = -5$ . **672.**  $\frac{a-b}{a}$ . **673.** 9. **674.** 4,  $\sqrt{17}$ ,  
 $3\sqrt{2}$ . **675.** 45 т, 75 т. **676.** 14 сторінок. **690.**  $x_2 = 10$ ,  $q = -20$ . **691.**  $x_2 = -6$ ,  $p = -1$ .  
**692.**  $x_2 = 2$ ,  $b = 14$ . **693.**  $x_2 = 1,6$ ,  $m = -1,28$ . **694.**  $-20,5$ . **695.**  $-7$ . **696.**  
 $\sqrt{17}$ ;  $-\sqrt{17}$ . **700.**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 9$ ,  $c = 9$ . **701.**  $x_1 = -14$ ,  $x_2 = -6$ ,  $a = 84$ .  
**702.**  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = -2$ ,  $m = -18$ . **703.**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5$ ,  $n = -5$ . **706.** 1) 1,5; 2) 69.  
Індикація.  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ ; 3) 57; 4) 567. **707.** 1) 80; 2)  $-\frac{57}{16}$ ; 3)  $\sqrt{89}$ .
- Індикація.  $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$ . **708.**  $x^2 + 12x + 17 = 0$ . **709.**  $x^2 - 18x + 49 = 0$ .  
**710.**  $6x^2 - 14x + 3 = 0$ . **711.**  $x^2 - 15x + 8 = 0$ . **712.**  $a = 2$  або  $a = -2$ .  
**713.**  $a = 6$  або  $a = -6$ . **715.** 1) 7;  $-7$ ; 5;  $-5$ ; 2)  $-11$ ; 11;  $-1$ ; 1;  $-4$ ; 4. **716.** 1)  $-9$ ;  
9;  $-6$ ; 6; 2)  $-17$ ; 17;  $-7$ ; 7;  $-3$ ; 3. **717.**  $b = c = 0$  або  $b = 1$ ,  $c = -2$ . **718.** 1)  $a = 2$ ;  
2) а це значення  $a$  не існує. **719.**  $a = 2$ . **721.** 4 рядки по 12 яблук.
- 723.** 18%. **732.** 1)  $\frac{2a-3}{a-6}$ ; 2)  $\frac{b-3}{2b-1}$ ; 3)  $\frac{c+1}{c-2}$ ; 4)  $\frac{m^2+m+1}{m+10}$ ; 5)  $-\frac{x+4}{x+8}$ ; 6)  $\frac{1-4n}{5n+1}$ .

733. 1)  $\frac{4x-3}{x-1}$ ; 2)  $\frac{2y+5}{y-1}$ ; 3)  $\frac{a+1}{a-5}$ ; 4)  $\frac{3-b}{b-1}$ . 734. 1) -3; 2) -2; 3)  $\frac{4}{3}$ . 735. 1) -4;  
 2) -14. 736. 1) 1; 2)  $\frac{2b+1}{b^2}$ ; 3)  $-\frac{4}{c}$ ; 4) 4. 740. 1)  $(x-y)(x-5y)$ ;  
 2)  $(a+9b)(a-4b)$ ; 3)  $(3m+n)(m-3n)$ ; 4)  $(4x-y)(x-y)$ .  
 741. 1)  $(a-4b)(a-10b)$ ; 2)  $(3b-2c)(4b+3c)$ . 742. 1) Dacă  $a=3$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a=-2$ , atunci rădăcini nu-s; dacă  $a \neq 3$  și  $a \neq -2$ , atunci  $x = \frac{a+3}{a+2}$ ; 2) dacă  $a=7$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a=1$ , atunci rădăcini nu-s; dacă  $a \neq 7$  și  $a \neq 1$ , atunci  $x = \frac{2a+1}{a-1}$ . 743. Dacă  $a=-8$ , atunci  $x$  – număr arbitrar; dacă  $a=1$ , atunci rădăcini nu-s; dacă  $a \neq -8$  și  $a \neq 1$ , atunci  $x = \frac{a+8}{a-1}$ . 746. 6,8%. 748. 1) Rădăcini nu-s; 2) -4; 3) 3; 4)  $y$  – număr real arbitrar, diferit de -4 și de 5. 752. 1) -4; 1; 2) -1; 3)  $-\frac{2}{3}$ ; 4) -2; 10; 5) 7; 6) -6; 7) -5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) -2; 9; 11) -3; 2; 12) 4; -0,4. 753. 1) -1; 2) -0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) -3; 6) -3; 12; 7) -1;  $\frac{2}{7}$ ; 8) -3; 13. 758. 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. 759. 1) 10; 2) -7. 760. 1)  $3 \pm \sqrt{18}$ ; 2) -23; 1; 3) -27; -1; 4) 3. 761. 1) 4; 9; 2) 5. 762. 1) -1; 18; 2) -98; 2; 3) -1,5; 4) -2; 5) -3; 4; 6) -3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. 763. 1) -60; 50; 2) -3; 3) -9; 24; 4) 2; 5) -20; 2; 6) 15. 764. 1)  $-\frac{2}{3}$ ; 14; 2) -56; 60. 765. 1) -15; 12; 2) -20; 2. 766. 1) -5; 2) rădăcini nu-s; 3)  $3\frac{1}{3}$ ; 4) 1. 767. 1) -15; 1; 2) 1,5. 769. 1)  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ; -3; 3; 2) -6; -4; -1; 1; 3) 0; 3; 4) -1; -3; 1. 769. 1)  $-\frac{1}{3}$ ; 1; 2) 0,5. 770. 1) -1; 7; 2; 4; 2) -6; -2;  $-4 \pm \sqrt{20}$ ; 3) -2; 1; 4)  $-\frac{5}{3}$ ; 10. 771. 1) Dacă  $a=1$ , atunci  $x=7$ ; dacă  $a=7$ , atunci  $x=1$ ; dacă  $a \neq 1$  și  $a \neq 7$ , atunci  $x=1$  sau  $x=7$ ; 2) dacă  $a \neq 1$  și  $a \neq 7$ , atunci  $x=a$ ; dacă  $a=1$  sau  $a=7$ , atunci rădăcini nu-s; 3) dacă  $a \neq 2$  și  $a \neq \frac{2}{3}$ , atunci  $x=3a$  sau  $x=2$ ; dacă  $a=2$  sau  $a=\frac{2}{3}$ , atunci  $x=2$ ; 4) dacă  $a=0$ , atunci  $x$  – număr arbitrar, diferit de -3; dacă  $a=-3$ , atunci rădăcini nu-s; dacă  $a \neq 0$  și  $a \neq -3$ , atunci  $x=a$ . 772.  $a=2\sqrt{5}$ , sau  $a=-2\sqrt{5}$ , sau  $a=6$ . 777. 75 km/oră. 778. 50 km/oră, 60 km/oră. 779. 80 km/oră, 60 km/oră. 780. 80 km/oră. 781. 12 km/oră. 782. 12 pagini. 783.  $30 \text{ m}^3$ ,  $25 \text{ m}^3$ . 784. 6 zile. 785. 31 km/oră. 786. 10 km/oră. 787. 3 km/oră. 788. 2 km/oră sau 2,25 km/oră. 789. 60 km/oră, 40 km/oră. 790. 60 km/oră. 791. 60 km/

oră. **792.** 8 km/oră. **793.** 32 km/oră. **794.**  $\frac{1}{4}$ . **795.**  $\frac{7}{12}$ . **796.** 45 zile, 36 zile.  
**797.** 15 oră, 10 oră. **798.** 21 oră, 24 oră. **799.** 80 r. **800.** 30 kg. **801.** 3 km/oră.  
**802.** 5 oră. **803.** 4 oră, 6 oră, 12 oră. **804.** 80 km/oră. **805.** 24 piese. **806.** 12 oră.  
**808.** 6. **823.** 3)  $\frac{8}{3}$ . **829.** 4) 1, 2, 3. **832.**  $\frac{4}{a(a+12)}$ . **833.** *Indicație.* Analizați  
diferența dintre părțile stângă și dreaptă a egalității date. **886.**  $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$ .  
**909.** 1) -5; 5; -1; 1; 2) -10; 10; -22; 22. **910.**  $a = 1$ . **911.**  $a = 3$ .

### RĂSPUNSURI LA ÎNSĂRCINĂRILE „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

Numărul însărci- nării	Numărul problemei											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	B	C	A	A	D	A	C	D	C	D	B	C
2	B	D	B	D	A	A	C	B	C	B	C	A
3	C	D	C	B	C	A	B	B	D	A	A	D
4	C	B	B	C	C	A	C	D	C	C	A	B
5	C	D	D	C	A	B	A	B	A	D	B	A
6	D	C	A	B	A	C	A	C	A	D	B	C

## VOCABULAR

- C**oeficientul de gradul întâi  
(Коефіцієнти рівняння першого степеня) 141
- D**ecompunerea trinomului pătratic în factori liniari  
(Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники) 166
- Diagrama lui Euler (Діаграма Ейлера) 102
- Discriminantul ecuației pătrate  
(Дискримінант квадратного рівняння) 148
- trinomul pătratic (тричлена) 166
- E**cuație bipătrată  
(Рівняння біквадратне) 172
- de gradul întâi (першого степеня) 141
- de gradul patru (четвертого степеня) 179
- – trei (третього степеня) 179
- echivalentă (рівносильні) 46
- incompletă (неповне) 142
- liniară (лінійне) 141
- pătrată (квадратне) 142
- rațională (раціональне) 47
- redusă (зведене) 142
- Elementul mulțimii  
(Елемент множини) 100
- Eliberarea de iraționalitatea de la numitorul fracției  
(Звільнення від ірраціональності в знаменнику дроби) 124
- Expresia de sub radical  
(Підкореневий вираз) 89
- Expresii identic egale  
(Тотожно рівні вирази) 10
- Expresii fracționare  
(Вирази дробові) 5
- întregi (цілі) 5
- raționale (раціональні) 5
- Extragerea rădăcinii pătrate  
(Добування квадратного кореня) 89
- F**orma standard a numărului  
(Стандартний вигляд числа) 55
- Formula rădăcinilor ecuației pătrate  
(Формула коренів квадратного рівняння) 149
- Fracția infinită neperiodică zecimală  
(Дріб нескінченний неперіодичний десятковий) 107
- – periodică zecimală  
(періодичний десятковий) 106
- rațională (раціональний) 6
- H**iperbola (Гіпербола) 71
- I**dentitate (Тотожність) 10
- Introducerea factorului sub semnul radicalului  
(Внесення множника під знак кореня) 122
- M**ăsura comună (Спільна міра) 114
- Metoda grafică de rezolvare a ecuațiilor  
(Графічний метод розв'язування рівнянь) 72,73
- Mulțimea (Множина) 100
- numerelor naturale  
(натуральних чисел) 105
- – raționale (раціональних) 106
- – reale (дійсних) 108
- – întregi (цілих) 106
- vidă (порожня) 102
- Mulțimi egale (Рівні множини) 101
- N**umere naturale  
(числа натуральні) 105
- iraționale (іраціональні) 107
- raționale (раціональні) 106
- reale (дійсні) 108
- întregi (цілі) 106
- Numitor comun  
(Спільний знаменник) 24

- Parabola** (Пара́бола) 84
- Perioada fracției**  
(Період дробу) 106
- Proprietatea fundamentală a fracției raționale**  
(Основна властивість раціонального дробу) 11
- Proprietatea specifică**  
(Характеристична властивість) 101
- Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice** (Властивості арифметичного квадратного кореня) 116
- a puterii cu exponent întreg (степеня із цілим показником) 62
- Proportionalitate inversă**  
(Обернена пропорційність) 69
- Puterea cu exponent întreg negativ**  
(Степінь із цілим від'ємним показником) 54
- zero (з нульовим показником) 54
- Radical** (Корінь) 89
- Rădăcina pătrată**  
(Корінь квадратний) 89
- – aritmetică (арифметичний) 89
- trinomului pătrat (квадратного тричлена) 166
- Ramura hiperbolei**  
(Вітка гіперболи) 71
- parabolei (параболи) 84
- Scoaterea factorului de sub radical**  
(Винесення множника з-під знака кореня) 122
- Segmente comensurabile**  
(Спільномірні відрізки) 114
- Semnul rădăcinii pătrate**  
(Знак квадратного кореня) 89
- Simplificarea fracției**  
(Скорочення дробу) 11
- Submulțime**  
(Підмножина) 102
- Teorema lui Viète**  
(Теорема Вієта) 157
- inversă teoremei lui Viète (обернена до теореми Вієта) 158
- Trinomul pătratic**  
(Тричлен квадратний) 166
- Valoarea aproximativă a numărului**  
(Наближене значення числа) 109
- Valorile admisibile ale variabilelor**  
(Допустимі значення змінних) 6
- Vârful parabolei**  
(Вершина параболи) 84

## CUPRINS

<i>Din partea autorilor</i> .....	3
Notații convenționale .....	4
<b>§ 1. Expresii raționale</b> .....	5
1. Frații raționale .....	5
2. Proprietatea fundamentală a fracției raționale .....	10
3. Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu aceiași numitori .....	19
4. Adunarea și scăderea fracțiilor raționale cu numitori diferiți .....	24
<i>Însărcinarea Nr. 1 „Verificați-vă” în formă de test</i> .....	31
5. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale. Ridicarea la putere a fracției raționale .....	32
6. Transformări identice ale expresiilor raționale .....	38
<i>Însărcinarea Nr. 2 „Verificați-vă” în formă de test</i> .....	44
7. Ecuații echivalente. Ecuații raționale .....	46
8. Puterea cu exponent întreg negativ .....	53
9. Proprietățile puterii cu exponent întreg .....	61
10. Funcția $y = \frac{k}{x}$ și graficul ei .....	69
<i>Însărcinarea Nr. 3 „Verificați-vă” în formă de test</i> .....	79
<i>Principalul în paragraful 1</i> .....	80
<b>§ 2. Rădăcini pătrate. Numere reale</b> .....	83
11. Funcția $y = x^2$ și graficul ei .....	83
12. Rădăcini pătrate. Rădăcina pătrată aritmetică .....	88



• Oare cresc în livadă radicalii? .....	98
• Prima problemă a primei olimpiade matematice din Ucraina .....	99
• 13. Mulțimea și elementele ei. Submulțimea .....	100
14. Mulțimi numerice .....	105
• Descoperirea iraționalității .....	113
15. Proprietățile rădăcinii pătrate aritmetice .....	115
16. Transformări identice ale expresiilor care conțin rădăcini pătrate .....	122
17. Funcția $y = \sqrt{x}$ și graficul ei .....	132
<i>Însărcinarea Nr. 4 „Verificați-vă” în formă de test .....</i>	138
<i>Principala în paragraful 2 .....</i>	139
<b>§ 3. Ecuații pătrate .....</b>	141
18. Ecuații pătrate. Rezolvarea ecuațiilor pătrate incomplete .....	141
19. Formula rădăcinilor ecuației pătrate .....	148
20. Teorema lui Viete.....	157
<i>Însărcinarea Nr. 5 „Verificați-vă” în formă de test .....</i>	165
21. Trinomul pătratic .....	166
22. Rezolvarea ecuațiilor reductibile la ecuații pătrate .....	172
• Rezolvarea ecuațiilor prin metoda înlocuirii variabilei .....	177
• Arma misterioasă a lui Ștepon del Ferro .....	180
23. Ecuațiile raționale ca modele matematice ale situațiilor reale.....	181
• Prima MEC din Europa .....	188

---

<i>Însărcinarea Nr. 6 „Verificați-vă” în formă de test.....</i>	190
<i>Principalul în paragraful 3 .....</i>	192
Exerciții pentru repetarea cursului de algebră al clasei a 8 – a .....	194
Prietenim cu calculatorul .....	209
Lucru asupra proiectului .....	216
Cunoștințe din cursul de algebră clasa a 7 – a .....	217
<i>Răspunsuri și indicații la exerciții.....</i>	228
<i>Răspunsuri la însărcinările „Verificați-vă”.....</i>	234
VOCABULAR.....	235

*Навчальне видання*

**МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович  
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович  
ЯКІР Михайло Семенович**

## **АЛГЕБРА**

**Підручник для 8 класу з навчанням  
румунською/молдовською мовами  
закладів загальної середньої освіти**

2-ге видання, перероблене

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам  
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Переклад з української мови

Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Румунською/молдовською мовами

Редактор *І. М. Грінчешин*

Обкладинка *Д. В. Висоцький*

Макет, художнє оформлення,

комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*

Коректор *М. С. Товарницька*

Формат 60×90/16.

Ум. друк. арк. 15,00. Обл.-вид. арк. 13,95.

Тираж 2854 пр. Зам. № 21-295

Державне підприємство «Всеукраїнське спеціалізоване видавництво «Світ»

79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014

[www.svit.gov.ua](http://www.svit.gov.ua)

e-mail: [office@svit.gov.ua](mailto:office@svit.gov.ua)

[svit\\_vydav@ukr.net](mailto:svit_vydav@ukr.net)

Друк ПрАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»

09100, Київська обл., м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, буд. 4

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5454 від 14.08.2017