Merzleak F. G.
Polonski V. B.
Iakir M. S.

GEOMETRIE

manual pentru clasa a 9-a pentru
școlile generale de învățământ cu limba
moldovenească de predare

Recomandat de Ministerul învățământului și Științei al Ucrainei

Львів
Видавництво «Світ»
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х : Гімназія, 2017

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Л. І. Філозоф, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук;

О. В. Тесленко, методист методичного центру Управління освіти адміністрації Слобідського району Харківської міської ради;

Т. А. Євтушевська, учитель Черкаської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступені в № 7, учитель-методист

Експертка з антидискримінації в освіті

Н. М. Дашенкова, доцентка кафедри філософії, співробітниця ЦГО ХНУРЕ

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням молдовською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Ю.М. Гаврилюк – Львів : Світ, 2017. – 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-295-2

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-073-9 (молд.)
ISBN 978-966-474-295-2 (укр.)

DE LA AUTORI

Dragi elevi!

În acest an de învățământ veți continua să studiați geometria. Credem, că voi de-acum ați dovedit să îndrăgiți această știință importantă și frumoasă, și deci, cu interes veți însuși cunoștințe noi. Avem nădejde, că acestui proces va contribui manualul pe care îl dețineți.

Vă rugăm să faceți cunoștință, cu structura lui.

Manualul este împărţit în patru paragrafe, fiecare fiind alcătuit din puncte. În puncte este expus materialul teoretic. Studiindu-l, o atenţie deosebită atrageţi la textul, care este tipărit cu font gras, cu cursiv gras și cursiv; astfel în manual sunt evidenţiate definiţiile, regulile și cele mai importante afirmaţii matematice.

De regulă expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de probleme rezolvate. Aceste scrieri se pot accepta ca unul din variantele posibile de definitivare a rezolvării.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme pentru rezolvare de sine stătător, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceţi după însușirea materialului teoretic. Printre însărcinări sun exerciţii de complexitate precum simplă și mijlocie, atât și probleme complicate (mai ales acelea, care sunt marcate cu „asterix” (⊠)).

Fiecare punct cu numere impare se termină cu rubrica „Observaţi, desenați, construiţi, fantazaţi ”. La ea sunt alese probleme, pentru rezolvarea cărora sunt necesare nu cunoştinţe speciale din geometrie, dar numai gândire raţională, inventivitate și pricepere. Aceste probleme sunt folositoare, ca vitaminele. Ele o să vă ajute să învățați a lua decizii neașteptate și creative nu numai în matematică, dar și în viață.

Dacă după executarea temelor de acasă vă rămâne timp liber și voi doriți să aflași mai multe, atunci vă recomandăm să vă adresați la rubrica ”Când temele sunt îndeplinite”. Materia, expusă acolo, nu este simplă. Dar cu aceasta este și mai interesant, să-ți încerci puterile proprii!

Abnegați! Vă dorim succes!

Stimaţi colegi!

Noi avem mari așteptări, că acest manual va deveni un ajutor de nădejde în munca voastră complicată și nobilă, și vom fi cu adevărat bucuroși, dacă el o să vă placă.

În manual este cules un material didactic vast și divers. Însă într-un an de studiu este imposibil de rezolvat toate problemele, dar aceasta nici nu este necesar. Totodată este cu mult mai comod de lucrat când este o rezervă mare de probleme. Aceasta oferă posibilitatea realizării diferenţieri pe nivele și a individualizării în învăţământ

În programul de învăţământ la matematică pentru elevii claselor 5 – 9-a a școlilor de cultură generală este menţionat următoarele: „Conţinutul materialului de studiu este structurat conform temelor corespunzătoare a cursurilor de învăţământ cu stabilirea numărului de ore pentru studierea lor. O astfel de distribuire a conţinutului și timpului de învăţământ este orientativ. Profesorului și autorilor de manuale li se acordă dreptul de al corecta în dependenţă de concepţia metodică acceptată…”.

Ţinând cont de cele relatate, noi am socotit ca este raţional să mutăm materialul de studiu ale unor anumite teme corespunzător concepției autorilor. Această oferă posibilitatea diversificării materialului didactic al manualului.

Cu culoarea verde sunt marcate numere problemelor, care sunt recomandate pentru temele de acasă, cu culoare albastră – numerele problemelor, care la hotărârea profesorului (ţinând cont de particularităţile individuale ale elevilor clasei) se pot rezolva oral.

Deci să transformăm împreună cursul de geometrie într-o materie înţeleasă și atrăgătoare.

Vă dorim inspirație creatoare și răbdare.

INSEMNĂRI CONVENŢIONALE

n° însărcinări, ce corespund nivelului începător şi mijlociu de pregătire;

$n^\bullet$ însărcinări, ce corespund nivelului satisfăcător de pregătire;

$n^{\bullet\bullet}$ însărcinări, ce corespund nivelului înalt de pregătire;

n^* probleme pentru cercurile şi facultativele de matematică;

probleme cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR §1

În acest paragraf veți afla, ce prezintă sinusul, cosinusul şi tangenta unghiului α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Veți învăță după două laturi ale triunghiului şi a unghiului între ele să găsiți a treia latură, şi totodată după latură şi a două unghiuri alăturate ei să găsiți altele două laturi ale triunghiului.

În clasa a 8-a voi v-ați învățat să rezolvați triunghiurile dreptunghice. Studiind materialul acestui paragraf, voi veți putea rezolva orice triunghiuri.

Veți afla noi formule, cu ajutorul cărora se poate afla aria triunghiului.

1. Sinusul, cosinusul și tangenta unghiului de la 0° până la 180°

Noțiunea de sinus, cosinus și tangenta unghiului ascuțit vă sunt cunoscute din cursul de geometrie clasa a 8-a. Să extindem acest noțiuni pentru un unghi arbitrar α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Să cercetăm în partea superioară a semiplanului de coordonate o semicircumferință cu centrul în originea coordonatelor, raza căreia este egală cu 1 (fig. 1.1). Astfel de semicircumferință se numește **unitară**.

Vom spune, că **unghiului** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **îi corespunde punctul** M al semicircumferinței unitare, dacă $\angle MOA = \alpha$, unde punctele O și A au corespunzător coordonatele (0; 0) și (1; 0) (fig. 1.1). De exemplu, în figura 1. 1 unghiului, care este egal cu 90°, îi corespunde punctul C; unghiului, care este egal cu 180°, – punctul B; unghiului, care este egal cu 0°, – punctul A.

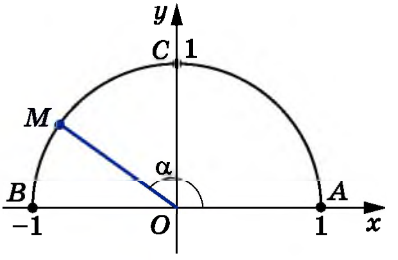


Fig. 1.1

Fie α – un unghi ascuțit. Lui îi corespunde un punct oarecare $M(x; y)$ al arcului AC al semicircumferinței unitare (fig. 1.2). În triunghiul dreptunghiular OMN avem:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Deoarece $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, atunci

$$\cos\alpha = x, \sin\alpha = y.$$

Deci, cosinusul și sinusul unghiului ascuțit α – este abscisa și ordonata punctului M al semicircumferinței unitare, care corespunde unghiului α.

Rezultatul obținut indic, cum de formulat cosinusul și sinusul unghiul arbitrar α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

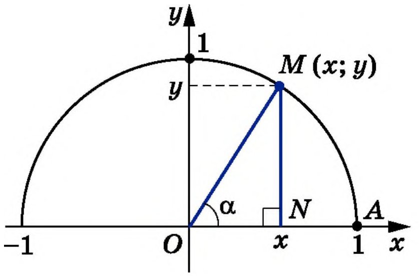


Fig. 1.2

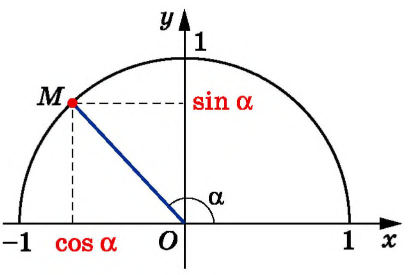


Fig. 1.3

Definiție. Cosinusul și sinusul unghiului α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) se numește corespunzător abscisa și ordonata punctului M al semicircumferinței, care corespunde unghiului α (fig. 1.3).

Folosindune de această definiție, se poate, de exemplu, de stabilit, că $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Dacă $M(x; y)$ – este un punct arbitrar al semicircumferinței unitare, atunci $-1 \leqslant x \leqslant 1$ și $0 \leqslant y \leqslant 1$. Deci, pentru orice unghi α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, avem:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Dacă unghiul α – este unghi obtuz, atunci abscisa punctului ce corespunde acestui unghi, este negativă. Deci, cosinusul unghiul obtuz este număr negativ. Este adevărată și astfel de afirmație: dacă $\cos\alpha < 0$, atunci α – este unghi obtuz sau desfășurat.

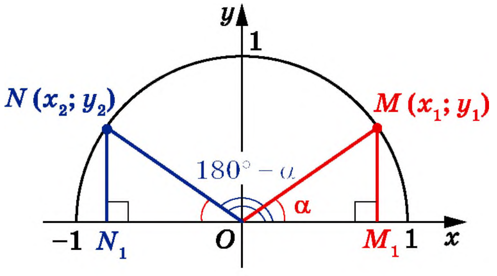


Fig. 1.4

Din cursul de geometrie din clasa a 8-a voi cunoașteți, că pentru orice unghi ascuțit α se execută inegalitățile:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{sin}\,(90° - \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha,\\ \mathbf{cos}\,(90° - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha\end{aligned}}$$

Aceste formule rămân adevărate de-semeni pentru $\alpha = 0°$ și pentru $\alpha = 90°$ (convingeți-vă de aceasta sine stătător).

Fie unghiurilor α și $180° - \alpha$, unde $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ și $\alpha \neq 180°$, le corespund punctele $M\,(x_1; y_1)$ și $N\,(x_2; y_2)$ al circumferinței unitare (fig. 1.4).

Triunghiurile dreptunghice OMM_1 și ONN_1 sunt egale conform ipotenuzei și a unghiului ascuțit ($OM = ON = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). De aici $y_2 = y_1$ și $x_2 = -x_1$. Deci,

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{sin}\,(180° - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha,\\ \mathbf{cos}\,(180° - \alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha\end{aligned}}$$

Convingeți-vă singuri, că aceste egalități rămân adevărate pentru $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Dacă α – este unghi ascuțit, atunci, după cum știți din cursul de geometrie din clasa a 8-a, este adevărată și identitatea, care se numește **identitatea fundamentală a trigonometriei**:

$$\boxed{\mathbf{sin}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = 1}$$

Această identitate rămâne adevărată pentru $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (Convingeți-vă de aceasta sine stătător).

Fie α – este unghi obtuz. Atunci unghiul $180° - \alpha$ este ascuțit. Obținem:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin\,(180° - \alpha))^2 + (-\cos\,(180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2\,(180° - \alpha) + \cos^2\,(180° - \alpha) = 1.$$

Deci, egalitatea $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se execută pentru toate unghiurile $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Definiție. Cosinusul unghiului α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ și $\alpha \neq 90°$, se numește raportul $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, adică

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Deoarece $\cos 90° = 0$, atunci $\mathrm{tg}\,\alpha$ nu este determinată pentru $\alpha = 90°$.

Evident, că fiecărui unghi α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ îi corespunde *un singur* punctul al circumferinței unitare. Deci, fiecărui unghi α îi corespunde un singur număr, care este valoarea sinusului (cosinusului, tangentei pentru $\alpha \neq 90°$). De aceea dependența valorii sinusului (cosinusului, tangentei) de mărimea unghiului este funcțională.

Funcțiile $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$, care corespund acestor dependențe funcționale, se numesc **funcții trigonometrice** ale unghiului α.

Problema 1. Demonstrați, că $\mathrm{tg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$.

Rezolvare

$$\mathrm{tg}\,(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha. \blacktriangleleft$$

Problema 2. Aflați $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\mathrm{tg}\,120°$.

Rezolvare. Avem: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,120° = \mathrm{tg}\,(180° - 60°) = -\mathrm{tg}\,60° = -\sqrt{3}. \blacktriangleleft$$

1. Care semicircumferință se numește unitară?
2. Explicați, în ce caz se vorbește, că unghiul α corespunde punctului M al circumferinței unitare.
3. Ce se numește sinusul unghiului α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Ce se numește cosinusul unghiului α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Cu ce este egal $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$?
6. În ce limite se află valorile $\sin\alpha$, dacă $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. În ce limite se află valorile $\cos\alpha$, dacă $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Ce fel de număr – pozitiv sau negativ – este sinusul unghiului ascuțit? sinusul unghiului obtuz? cosinusul unghiului ascuțit? cosinusul unghiului obtuz?
9. Ce fel de unghi este unghiul α, dacă $\cos\alpha < 0$?
10. Cu ce este egal $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?

11. Cum sunt legate între ele sinusul și cosinusul unuia și aceluiași unghi?

12. Ce se numește tangenta unghiului α, unde $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ și $\alpha \neq 90°$?

13. De ce $\operatorname{tg} \alpha$ nu este determinată pentru $\alpha = 90°$?

14. Ce nume general au funcțiile $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$ și $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$?

ÎNSĂRCINĂRI PREACTICE

1.1.° Desenați o semicircumferință unitară, luând ca unitar astfel de segment, lungimea căruia este de 5 ori mai mare decât latura pătrățelului de caiet. Construiți unghiul, vârful căruia este originea de coordonate, iar una din laturi – semiaxa pozitivă a axei absciselor și:

1) cosinusul căruia este egal cu $\frac{1}{5}$;
2) cosinusul căruia este egal cu –0,4;
3) sinusul căruia este egal cu 0,6;
4) sinusul căruia este egal cu 1;
5) cosinusul căruia este egal cu 0;
6) cosinusul căruia este egal cu –1.

EXERCIȚII

1.2.° Cu ce este egal:
1) $\sin(180° - \alpha)$, dacă $\sin \alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, dacă $\cos \alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180° - \alpha)$, dacă $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, dacă $\operatorname{tg} \alpha = -5$?

1.3.° Unghiurile α și β sunt alăturate (adiacente), $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$.
1) aflați $\cos \beta$.
2) care din unghiurile α și β este ascuțit, și care – obtuz?

1.4.° Găsiți valoarea expresiei:
1) $2 \sin 90° + 3 \cos 0°$;
2) $3 \sin 0° - 5 \cos 180°$;
3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;
4) $6 \operatorname{tg} 180° + 5 \sin 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;
6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

1.5.° Calculați:
1) $4 \cos 90° + 2 \cos 180° - \operatorname{tg} 180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

1.6.° Cu se este egal sinusul unghiului, dacă cosinusul lui este egal cu:
1) 1; 2) 0?

1.7.° Cu se este egal cosinusul unghiului, dacă sinusul lui este egal cu:
1) 1; 2) 0?

1.8.° Aflați sin 135°, cos 135°, tg 135°.

1.9.° Aflați sin 150°, cos 150°, tg 150°.

1.10.° Există oare unghiul α, pentru care:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$; 4) $\cos\alpha = -0{,}99$; 6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

1.11.• Găsiți:

1) $\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ și $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ și $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, dacă $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ și $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

1.12.• Găsiți:

1) $\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, dacă $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ și $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

1.13.• Este oare corectă afirmația (argumentați răspunsul):
1) cosinusul unghiului ascuțit este mai mare decât cosinusul unghiului obtuz;
2) există un unghi obtuz, sinusul și cosinusul căruia sunt egale;
3) există unghiul, sinusul și cosinusul căruia este egal cu zero;
4) cosinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu un număr negativ;
5) sinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu un număr negativ;
6) cosinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu zero;
7) sinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu zero;

8) cosinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu –1;
9) sinusul unghiului unui triunghi poate fi egal cu 1;
10) sinusul unghiului, diferit de cel drept, este mai mic decât sinusul unghiului drept;
11) cosinusul unghiului desfăşurat este mai mic decât cosinusul unghiului, diferit de cel desfăşurat;
12) sinusurile unghiurilor adiacente sunt egale;
13) cosinusurile unghiurilor adiacente neegale sunt numere negative;
14) dacă cosinusurile unghiurilor sunt egale atunci și unghiurile sunt egale;
15) dacă sinusurile unghiurilor sunt egale atunci și unghiurile sunt egale;
16) tangenta unghiului ascuțit este mai mare decât tangenta unghiului obtuz?

1.14.• Comparați cu zero valorile expresiei:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

1.15.• Aflați valoarea expresiei:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $2 \cos^2 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

1.16.• Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.17.• Găsiți valorile expresiei, fără a folosi calculatorul de buzunar:

1) $\dfrac{\sin 18\Upsilon}{\sin 162\Upsilon}$; 2) $\dfrac{\cos 18\Upsilon}{\cos 162\Upsilon}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18\Upsilon}{\operatorname{tg} 162\Upsilon}$.

1.18.• Găsiți valorile expresiei, fără a folosi calculatorul de buzunar:

1) $\dfrac{\sin 28\Upsilon}{\sin 152\Upsilon}$; 2) $\dfrac{\cos 49\Upsilon}{\cos 131\Upsilon}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 14\Upsilon}{\operatorname{tg} 166\Upsilon}$.

1.19.• Aflați suna pătratelor sinusurilor tuturor unghiurilor triunghiului dreptunghic.

1.20.• Aflați suna pătratelor cosinusurilor tuturor unghiurilor triunghiului dreptunghic.

1.21.• Ȋn triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle B = 60°$, punctul O – este centrul circumferinței înscrise. Cu ce este egal cosinusul unghiului AOC?

1.22.• Punctul O – este centrul, circumferinței înscrise Ȋn triunghiul ABC, $\cos \angle BOC = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Găsiți unghiul A al triunghiului.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

1.23. Înălțimea paralelogramului, dusă din vârful unghiului obtuz, este egală cu 5 cm și împarte latura paralelogramului în jumătate. Unghiul ascuțit al paralelogramului este egal cu 30°. Aflați diagonale paralelogramului, dusă din vârful unghiului obtuz, și unghiurile, care le creează ea cu laturile paralelogramului

1.24. Dreapta CE este paralelă laturii laterale AB ale trapezului $ABCD$ și împarte baza AD în segmentele AE și DE astfel, că $AE = 7$ cm, $DE = 10$ cm. Găsiți linia medie a trapezului.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

1.25. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 8 cm și 11 cm. Poate oare unghiul, opus laturii cu lungimea de 8 cm, să fie:

1) obtuz; 2) drept?

Argumentați răspunsul.

1.26. În triunghiul ABC este dusă înălțimea BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ cm. Aflați latura BC.

1.27. Aflați înălțimea BD al triunghiului ABC și și proiecția laturii AB pe latura AC, dacă $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ cm.

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTEZAŢI

1.28. Arătați că orice triunghi se poate de tăiat în 3 părți astfel, că dine părțile obținute se poate de alcătuit un dreptunghi.

2. Teorema cosinusurilor

Din primul criteriu de egalitate a triunghiurilor reiese, că două laturi și unghiul între ele triunghiului determină univoc triunghiului. Deci, conform elementelor menționate se poate, de exemplu, de găsit a treia latură a triunghiului. Cum se poate aceasta de făcut, arată astfel de teoremă.

Teorema 2.1 (Teorema cosinusurilor). ***Pătratul unei laturi a triunghiului este egală cu suma pătratelor altor două laturi minus produsul îndoit al acestor laturi și cosinusul unghiului cuprins între ele.***

Demonstrație. Să cercetăm triunghiul ABC. Vom demonstra, de exemplu, că

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Sunt posibile trei cazuri:

1) Unghiul A este ascuțit;
2) Unghiul A este obtuz;
3) Unghiul A este drept.

Primul caz. Fie unghiul A este ascuțit, atunci măcar unul din unghiurile B sau C nu este ascuțit.

● Fie $\angle C < 90°$. Ducem înălțimea BD. Ea în întregime aparține triunghiului ABC (fig. 2.1).

În triunghiul dreptunghic ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

În triunghiul dreptunghic BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

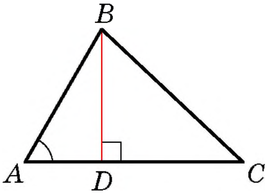


Fig. 2.1

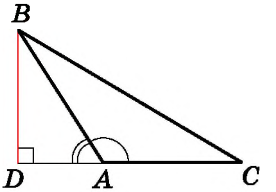


Fig. 2.2

● Fie unghiul $\angle B < 90°$. Ducem înălțimea triunghiului ABC din vârful unghiului C. Ea în întregime aparține triunghiului ABC. Demonstrarea pentru acest caz este analogică celei cercetate mai sus. Demonstrați-o sine stătător.

Cazul doi. Fie unghiul A este obtuz. Ducem înălțimea BD triunghiul ABC (fig. 2.2).

În triunghiul dreptunghic ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin (180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

În triunghiul dreptunghic BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Cazul trei. Fie unghiul A este drept (fig. 2.3). Atunci $\cos A = 0$. Trebuie de demonstrat, că $BC^2 = AB^2 + AC^2$. această egalitate reiese di teorema lui Pitagora pentru triunghiul ABC. ◄

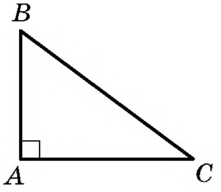


Fig. 2.3

Demonstrarea teoremei cosinusurilor arată, *teorema lui Pitagora este un caz aparte al teoremei cosinusurilor, iar teorema cosinusurilor este generalizarea teoremei lui Pitagora.*

Dacă ne vom folosi de însemnările pentru lungimile laturilor și mărimilor unghiurilor triunghiului ABC (vezi forzațul), atunci, de exemplu, pentru o latură, lungimea căreia este egală cu a, se poate scrie:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Cu ajutorul teoremei cosinusurilor, cunoscând trei laturi ale triunghiului, se pateu determina, dacă el este ascuțitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic.

Teorema 2.2 (consecință din teorema cosinusurilor). ***Fie a, b și c – lungimile laturilor triunghiului, totodată a – lungimea laturi mai mari a lui. Dacă $a^2 < b^2 + c^2$, atunci triunghiul este ascuțitunghic. Dacă $a^2 > b^2 + c^2$, atunci triunghiul este obtuzunghic. Dacă $a^2 = b^2 + c^2$, atunci triunghiul este dreptunghic.***

Demonstrație. Conform teoremei cosinusurilor

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

De aici $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Fie $a^2 < b^2 + c^2$. Atunci $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. De aici $2bc \cos \alpha > 0$, adică $\cos \alpha > 0$. De aceea unghiul α este ascuțit.

Deoarece a – este lungimea celei mai mari laturi a triunghiului, atunci acestei laturi i se opune cel mai mare unghi, care, după cum am demonstrat, este ascuțit. Deci, în acest caz triunghiul este ascuțitunghic.

Fie $a^2 > b^2 + c^2$. Atunci $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. De aici $2bc \cos \alpha < 0$, adică $\cos \alpha < 0$. De aceea unghiul α este obtuz.

Fie $a^2 = b^2 + c^2$. Atunci $2bc \cos \alpha = 0$. De aici $\cos \alpha = 0$. Deci, $\alpha = 90°$. În acest caz triunghiul este dreptunghic. ◄

Problema 1. Demonstrați, că suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor tuturor laturilor lui.

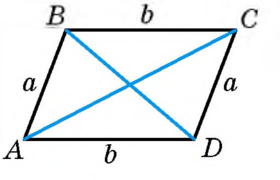


Fig. 2.4

Rezolvare. În figura 2.4. este prezentat paralelogramul $ABCD$.

Fie $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, atunci $\angle ADC = 180° - \alpha$.

Din triunghiul ABD după teorema cosinusurilor obținem:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \quad (1)$$

Din triunghiul ACD după teorema cosinusurilor obținem:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha).$$ De unde

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

Adunând egalitățile (1) și (2), obținem:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacktriangleleft$$

Problema 2. În triunghiul ABC latura AB este cu 4 cm mai mare ca latura BC, $\angle B = 120°$, $AC = 14$ cm. Găsiți laturile AB și BC.

Rezolvare. Conform teoremei cosinusurilor

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

Fie $BC = x$ cm, $x > 0$, atunci $AB = (x + 4)$ cm.

Obținem:

$$14^2 = (x+4)^2 + x^2 - 2x(x+4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x+4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Rădăcina -10 nu satisface condiția $x > 0$.

Deci, $BC = 6$ cm, $AB = 10$ cm.

Răspuns: 10 cm, 6 cm. ◀

Problema 3. Pe latura AC al triunghiului ABC este marcat punctul D astfel, că $CD : AD = 1 : 2$. Calculați segmentul BD, dacă $AB = 14$ cm, $BC = 13$ cm, $AC = 15$ cm.

Rezolvare. Conform teoremei cosinusurilor di triunghiul ABC (fig. 2.5) vom obține:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

De aici $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Deoarece $CD : AD = 1 : 2$, atunci $CD = \dfrac{1}{3}AC =$ $= 5$ (cm).

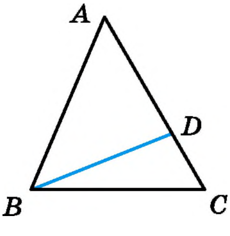


Fig. 2.5

Atunci di triunghiul BCD obținem:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Deci, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (cm).

Răspuns: $8\sqrt{2}$ cm. ◀

Problema 4. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 23 cm, și 30 cm, iar mediana, dusă la cea mai mare latură cunoscută, – 10 cm. Găsiți latura treia a triunghiului.

Rezolvare. Fie în triunghiul ABC este cunoscut, că $AC = 23$ cm, $BC = 30$ cm, segmentul AM – mediană, $AM = 10$ cm.

Pe prelungirea segmentului AM după punctul M segmentul MD, care este egal cu mediana AM (fig. 2.6). Atunci $AD = 20$ cm.

În patrulaterul $ABDC$ diagonalele AD și BC sunt împărțite în jumătate de către punctul M ($BM = MC$ după condiție, $AM = MD$ după construcție). Deci, patrulaterul $ABDC$ – este paralelogram.

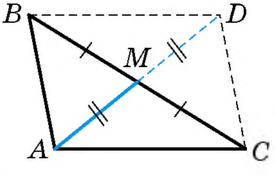


Fig. 2.6

Deoarece suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui (vezi problema cheie nr. 1), atunci

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Totodată

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ cm}.$$

Răspuns: 11 cm. ◀

?

1. Formulați teorema cosinusurilor.
2. Triunghiul cu laturile a, b și c, unde a este lungimea celei mai mari laturi a lui, este ascuțitunghic, dreptunghic, sau obtuzunghic, dacă:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Cum sunt legate între ele diagonalele și laturile paralelogramului?

EXERCIȚII

2.1.° Găsiți latura necunoscută a triunghiului ABC, dacă:

1) $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $\angle A = 135°$.

2.2.° Aflați latura necunoscută a triunghiului DEF, dacă:

1) $DE = 4$ cm, $DF = 2\sqrt{3}$ cm, $\angle D = 30°$;

2) $DF = 3$ cm, $EF = 5$ cm, $\angle F = 120°$.

2.3.° Laturile triunghiului sunt egale cu 12 cm, 20 cm și 28 cm. Găsiți cel mai mare unghi al triunghiului.

2.4.° Laturile triunghiului sunt egale cu $\sqrt{18}$ cm, 5 cm și 7 cm. Găsiți unghiul mijlociu după mărime al triunghiului.

2.5.° Stabiliți, cum este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic triunghiul, laturile căruia sunt egale cu:

1) 5 cm, 7 cm și 9 cm;

2) 5 cm, 12 cm și 13 cm;

3) 10 cm, 15 cm și 18 cm.

2.6.° Laturile triunghiului sunt egale cu 7 cm, 8 cm și 12 cm. Este oare triunghiul dat ascuțitunghic?

2.7.° Demonstrați că triunghiul cu laturile 8 cm, 15 cm și 17 cm este dreptunghic.

2.8.° Laturile paralelogramului sunt egale $2\sqrt{2}$ cm și 5 cm, iar unu din unghiuri este egal cu 45°. Aflați diagonalele paralelogramului.

2.9.° În trapezul $ABCD$ este cunoscuit, că $BC \parallel AD$, $BC = 3$ cm, $AD = 10$ cm, $CD = 4$ cm, $\angle D = 60°$. Aflați diagonalele trapezului.

2.10.° Pe latura AB a triunghiului echilateral ABC este plasat punctul D astfel, că $AD : DB = 2 : 1$. Găsiți segmentul CD, dacă $AB = 6$ cm.

2.11.° Pe ipotenuza AB a triunghiului dreptunghic ABC este plasat punctul M astfel, că $AM : BM = 1 : 3$. Găsiți segmentul CM, dacă $AC = BC = 4$ cm.

2.12.• Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 3 cm, și 4 cm, iar sinusul unghiului cuprins între ele este egal cu $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Aflați a treia latură a triunghiului. Câte soluții are problema?

2.13.• În triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle C = 90°$, $AC = 20$ cm, $BC = 15$ cm. Pe latura AB este însemnat punctul M astfel, că $BM = 4$ cm. Aflați segmentul CM.

2.14.• Pe continuarea ipotenuzei AB a triunghiului isoscel dreptunghic ABC după punctul B este notat punctul D astfel, că $BD = BC$. Găsiți segmentul CD, dacă cateta triunghiului ABC este egală cu a.

2.15.• În triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle C = 90°$, $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm. Pe continuarea ipotenuzei AB după punctul B este însemnat punctul M astfel, că $BD = 26$ cm. Aflați segmentul CD.

2.16.• Centrul circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, se află la distanțele a și b de la capetele ipotenuzei. Aflați ipotenuza triunghiului.

2.17.• Punctul O – centrul circumferinței, înscrise în triunghiul ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Găsiți latura AB.

2.18.• Două laturi ale triunghiului, unghiul dintre care este egal cu 60°, se raportă ca 5 : 8, iar a treia latură este egală cu 21 cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului.

2.19.• Două laturi ale triunghiului se raportă ca $1 : 2\sqrt{3}$ și și creează unghiul, mărimea căruia este de 30°. A treia latură a triunghiului este egală cu $2\sqrt{7}$ cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului.

2.20.• Suma a două laturi ale triunghiului, care formează un unghi cu mărimea de 120°, este egală cu 8 cm, iar lungimea laturii a treia – 7 cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului.

2.21.• Două laturi ale triunghiului, unghiul dintre care este de 120°, se raportă ca 5 : 3. Găsiți laturile triunghiului daca perimetrul lui este de 30 cm.

2.22.• Două laturi ale triunghiului, sunt egale cu 16 cm și 14 cm, unghiul opus laturii mai mici din cele cunoscute, este egal cu 60°. Aflați latura necunoscută a triunghiului.

2.23.• Două laturi ale triunghiului, sunt egale cu 15 cm și 35 cm, unghiul opus laturii mai mici din cele cunoscute, este egal cu 120°. Aflați perimetrul triunghiului.

2.24.• Pe latura BC a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, că $CD = 14$ cm. Aflați segmentul AD, dacă $AB = 37$ cm, $BC = 44$ cm și $AC = 15$ cm.

2.25.• Pe latura AB a triunghiului ABC este notat punctul K, iar pe prelungirea laturii BC după punctul C – punctul M. Găsiți segmentul MK, dacă $AB = 15$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 13$ cm, $AK = 8$ cm, $MC = 3$ cm.

2.26.• O latură a triunghiului este de două ori mai mare decât alta, iar unghiul cuprins între ele alcătuiește 60°. Demonstrați că acest triunghi este dreptunghic.

2.27.• Demonstrați, că atunci când pătratul laturii triunghiului este egală cu suma pătratului necomplet a altor două laturi, atunci unghiul opus acestei latri este egal cu 120°.

2.28.• Demonstrați, că atunci când pătratul laturii triunghiului este egală cu diferența pătratului necomplet a altor două laturi, atunci unghiul opus acestei latri este egal cu 60°.

2.29.• Două laturi ale paralelogramului, sunt egale cu 7 cm și 11 cm, iar una dina diagonale – 12 cm. Aflați cea de-a doua diagonală.

2.30.• Diagonalele paralelogramului, sunt egale cu 13 cm și 11 cm, iar una dina laturi – 9 cm. Aflați perimetrul paralelogramului.

2.31.• Diagonalele paralelogramului, sunt egale cu 8 cm și 14 cm, iar una dina laturi este cu 2 cm mai mare ca alata. Aflați laturile paralelogramului.

2.32.• Laturile paralelogramului, sunt egale cu 11 cm și 23 cm, iar diagonalele se raportă ca 2 : 3. Aflați diagonalele paralelogramului.

2.33.•• În trapezul $ABCD$ se cunoaște, că $AD \parallel BC$, $AB = 5$ cm, $BC = 9$ cm, $AD = 16$ cm, $\cos A = \frac{1}{7}$. Găsiți latura CD a trapezului.

2.34.•• În trapezul $ABCD$ se cunoaște, că $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 4$ cm, $AD = 11$ cm. Găsiți cosinusul unghiului D a trapezului.

2.35.•• Aflați diagonala AC a patrulaterului $ABCD$, dacă în jurul lui se poate circumscrie o circumferință și $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm, $AD = 6$ cm.

2.36.•• Se poate oare circumscrie o circumferință la patrulaterul $ABCD$, dacă $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $BD = 6$ cm și $\angle C = 30°$?

2.37.•• Demonstrați, că unghiului mai marea a paralelogramului i se opune diagonala cea mare. Formulați și demonstrați afirmația inversă.

2.38.•• Laturile triunghiului sunt egale cu 12 cm, 15 cm și 18 cm. Aflați bisectoarea triunghiului dusă din vârful unghiului mai mare.

2.39.•• Baza triunghiului isoscel este egală cu 5 cm, iar latura laterală – 20 cm. Aflați bisectoarea triunghiului, dusă din vârful unghiului de la baza lui.

2.40.•• Laturile triunghiului sunt egale cu 16 cm, 18 cm și 26 cm. Aflați mediana triunghiului dusă la latura lui mai mare.

2.41.•• Baza triunghiului isoscel este egală cu $4\sqrt{2}$ cm, iar mediana, dusă la latura laterală, – 5 cm. Aflați mărimea laturii laterale a triunghiului.

2.42.•• Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 12 cm și 14 cm, iar mediana, dusă la latura a treia, – 7 cm. Aflați latura necunoscută a triunghiului.

2.43.•• În triunghiul ABC se cunoaște, că $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. Pe prelungirea segmentului AB după punctul B este notat punctul D astfel, că $BD = 2AB$. Demonstrați, că triunghiul ACD este isoscel.

2.44.•• Demonstrați, că în triunghiul cu laturile a, b și c se execută egalitatea $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, unde m_c – este mediana triunghiului, dusă la latura, lungimea căreia este egală cu c.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

2.45. În circumferința sunt duse diametrul AC și coarda AB, care este egală cu raza circumferinței. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

2.46. Unul din unghiurile create la intersecția bisectoarei unui unghi a paralelogramului cu una dina laturile lui, este egală cu un unghi al paralelogramului. Găsiți unghiurile paralelogramului.

2.47. În triunghiul ABC este înscris paralelogramul $ADEF$ astfel, că unghiul A la ele este comun, iar punctele D, E și F aparțin corespunzător laturilor AB, BC și AC a triunghiului. Aflați laturile paralelogramului $ADEF$, dacă $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm, $AD : AF = 2 : 3$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

2.48. Aflași unghiul ADC (fig. 2.7), dacă $\angle ABC = 140°$.

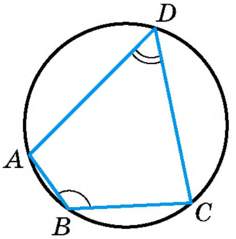


Fig. 2.7

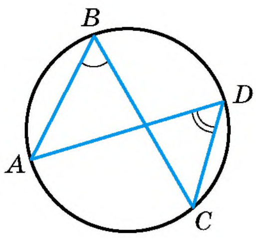


Fig. 2.8

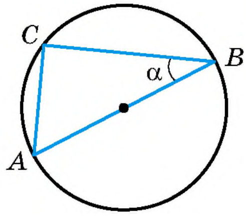


Fig. 2.9

2.49. Aflași unghiul ABC (fig. 2.8), dacă $\angle ADC = 43°$.

2.50. Segmentul AB este diametrul circumferinței, raza căreia este egală cu R, $\angle ABC = \alpha$ (fig. 2.9). Aflați coarda AC.

3. Teorema sinusurilor

În timpul demonstrării unui șir de teoreme și rezolvarea multor probleme se folosește astfel de lemă.

Lemă. ***Coarda circumferinței este egală cu produsul diametrului și a sinusului oricărui unghi înscris, care este întins de această coardă.***

Demonstrație. ⊙ În Figura 3.1 segmentul MN – coarda circumferinței ci centrul O. Ducem diametrul MP. Atunci $\angle MNP = 90°$ ca unghi înscris, ce este întins de diametru. Fie mărimea unghiului înscris MNP egală cu α. Atunci din triunghiul dreptunghic MPN obținem:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

Toate unghiurile înscrise, care sunt întinse de coarda MN, sunt egale cu α sau $180° - \alpha$. Deci, sinusurile lor sunt egale. De aceea egalitatea obținută (1) este adevărată pentru toate unghiurile înscrise, care sunt întinse de coarda MN. ◀

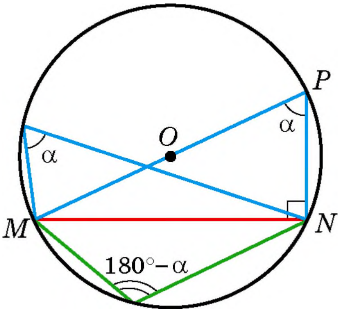


Fig. 3.1

Din altă criteriu de egalitate a triunghiului reiese, că latura și două unghiuri alăturate ei determină univoc triunghiul. Deci, conform elementelor indicate se pot găsi alte două laturi ale triunghiului. Cum se poate de făcut aceasta, ne arată astfel de teoremă.

Teorema 3.1 (teorema sinusurilor). ***Laturile triunghiului sunt proporționale sinusurilor unghiurilor opuse lor.***

Demonstrație. ⊙ Fie în triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Vom demonstra că

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Fie raza circumferinței circumscrise a triunghiului ABC este egală cu R. Atunci conform lemei $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. De aici

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◀

Consecință. ***Raza circumferinței circumscrise unui triunghi, poate fi calculată conform formulei***

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha},}$$

unde a este lungimea laturii triunghiului, α ***– mărimea unghiului opus acestei laturi.***

Problema 1. În triunghiul ABC este cunoscut, că $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle B = 45°$. Aflați unghiul A.

Rezolvare. După teorema sinusurilor

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Atunci

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $BC < AC$, atunci $\angle A < \angle B$. Deci, unghiul A – este ascuțit. De aici, luând în considerarea, că $\sin A = \frac{1}{2}$, obținem $\angle A = 30°$.

Răspuns: 30°. ◀

Problema 2. În triunghiul ABC este cunoscut, că $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle A = 30°$. Aflați unghiul B.

Rezolvare. Conform teoremei sinusurilor $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Atunci

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deoarece $BC < AC$, atunci $\angle A < \angle B$. Atunci unghiul B poate fi precum ascuțit, așa și obtuz. De aici $\angle B = 45°$ sau $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Răspuns: 45° sau 135°. ◀

Problema 3. Pe latura AB a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, că $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (fig. 3.2). Aflați segmentul BD, dacă $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Rezolvare. Unghiul BDC – unghi exterior al triunghiului ADC. Atunci $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, de aici $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

Din triunghiul ADC conform teoremei sinusurilor obținem:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}.$$

Deci, $CD = \dfrac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}$.

Din triunghiul BCD după teoreme sinusurilor obținem:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

Deci,

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} =$$

$$= \frac{m \sin \alpha \sin(180° - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}.$$

Răspuns: $\dfrac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$. ◀

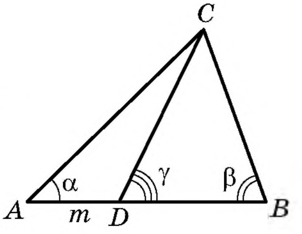


Fig. 3.2

Problema 4. Segmentul BD – este bisectoarea triunghiului ABC, $\angle ABC = 30°$, $\angle C = 105°$ (fig. 3.3). Găsiți raza circumferinței circumscrise triunghiului ABC, dacă dacă raza circumferinței circumscrise triunghiului BDC, este egală cu $8\sqrt{6}$ cm.

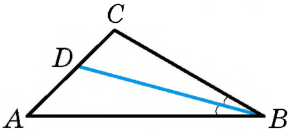


Fig. 3.3

Rezolvare. Fie R_1 – este raza circumferinței circumscrise triunghiului BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ cm.

Deoarece segmentul BD – este bisectoarea triunghiului, atunci $\angle CBD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 15°$.

Din triunghiul BDC vom obține:

$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°$.

Conform consecinței din teorema sinusurilor $\dfrac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. De aici

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60° = 24\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Din triunghiul ABC vom obține:

$$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

Fie R – raza căutată a circumferinței, circumscrise triunghiului ABC.

Atunci $\dfrac{BC}{2 \sin A} = R$, de aici $R = \dfrac{BC}{2 \sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45°} = 24$ (cm).

Răspuns: 24 cm. ◀

?

1. Cum de găsit coarda, dacă este cunoscut diametrul circumferinței și unghiul înscris, care este întins de această coardă?
2. Formulați teorema sinusurilor.
3. Cum de găsit raza circumferinței circumscrise triunghiului cu latura a și a unghiului α opus acestei laturi?

EXERCIȚII

3.1.° Aflați latura BC a triunghiului ABC, prezentat în figura 3.4. (lungimea segmentului este dată în centimetri).

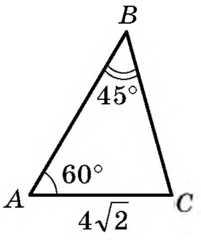


Fig. 3.4

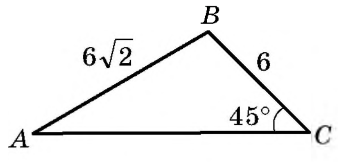


Fig. 3.5

3.2.° Aflați unghiul A al triunghiului ABC, prezentat în figura 3.5. (lungimea segmentului este dată în centimetri).

3.3.° Aflați latura AB a triunghiului ABC, dacă $AC = \sqrt{6}$ cm, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

3.4.° În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, $\sin A = 0{,}2$. Găsiți sinusul unghiului C.

3.5.° În triunghiul DEF este cunoscut, că $DE = 16$ cm, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Găsiți latura EF.

3.6.° În triunghiul MKP este cunoscut, că $KP = 8$ cm, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Găsiți latura MP.

3.7.° Pentru Determinarea distanței de la punctul A până la clopotnița B care se află pe al mal al unui râu (fig. 3.6), cu ajutorul jaloanelor, ruletei și a dispozitivului de măsurare a unghiurilor (teodolitul) s-a însemnat pe loc punctul C astfel, ca $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ m. Cum de aflat distanța de la punctul A până la clopotniță B? Aflați această distanță.

Fig. 3.6

3.8.° În triunghiul ABC este cunoscut, că $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Găsiți laturile AB și AC.

3.9.° Diagonala unui paralelogram este egală cu d și creează cu laturile lui unghiurile α și β. Aflați laturile paralelogramului.

3.10.° Aflați unghiul A al triunghiului ABC, dacă:
1) $AC = 2$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle B = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm, $\angle B = 45°$.
Câte soluții are problema în fiecare din cazuri? Argumentați răspunsul.

3.11.° Există oare un astfel de triunghi ABC, ca $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ cm, $BC = 6$ cm? Argumentați răspunsul.

3.12.° În triunghiul DEF este cunoscut, că $DE = 8$ cm, $\sin F = 0{,}16$. Găsiți raza circumferinței circumscrise triunghiului DEF.

3.13.° Raza circumferinței circumscrise triunghiului MKP, este egală cu 5 cm, $\sin M = 0{,}7$. Găsiți latura KP.

3.14.• Pe prelungirea laturii AB al triunghiului ABC după punctul B s-a notat punctul D. Găsiți raza circumferinței circumscrise triunghiului ACD, dacă $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, iar raza circumferinței, circumscrise triunghiului ABC, este egală cu 4 cm.

3.15.• Raza circumferinței circumscrise triunghiului ABC este egală cu 6 cm. Găsiți raza circumferinței circumscrise triunghiului AOC, unde O este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC, dacă $\angle ABC = 60°$.

3.16.• Folosind datele din figura 3.7, aflați segmentul AD, dacă $CD = a$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.

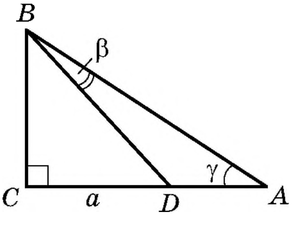


Fig. 3.7

3.17.• Folosind datele din figura 3.8, aflați segmentul AC, dacă $BD = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.

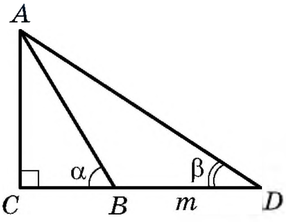


Fig. 3.8

3.18.• Pe latura AB a triunghiului ABC s-a însemnat punctul M astfel, că $\angle AMC = \varphi$. Aflați segmentul CM, dacă $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

3.19.• În triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Pe latura BC s-a notat punctul D astfel, că $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Aflași latura BC.

3.20.• Demonstrați, că bisectoarea triunghiului împarte latura lui în segmente, lungimile cărora sunt invers proporționale sinusurilor unghiurilor adiacente la această latură.

3.21.• Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6 cm și 12 cm, iar înălțimea dusă la a treia latură – 4 cm. Aflați raza circumferinței circumscrise acestui triunghi.

3.22.• Aflați raza circumferinței circumscrise unui triunghi isoscel cu baza egală cu 16 cm și latura laterală cu 10 cm.

3.23.• O latură a uni triunghi este egală cu 24 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui – $8\sqrt{3}$ cm. Cu ce este egal unghiul triunghiului, opus laturii date?

3.24.• Traseul pentru bicicliști are o formă de triunghi, două unghiuri ale căruia sunt egale cu 50° și 100°. Latura mai mică a acestui triunghi unul din bicicliști îl trece într-o ora. In cît timp el va trece tot traseul? Răspunsul dați-l în ore, rotunjindu-l la zecimi.

3.25.•• În triunghiul ABC este cunoscut, că $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Aflați bisectoarea BD a triunghiului.

3.26.•• Baza unui triunghi isoscel este egală cu a, unghiul opus ei este egal cu α. Aflați bisectoarea triunghiului, dusă din vârful unghiului de la bază.

3.27.•• Demonstrați, folosind teorema sinusurilor, că bisectoarea triunghiului împarte latura lui în segmente, lungimile cărora sunt proporționale laturilor alăturate[1].

[1] Va amintim, că afirmația folosirii teoremei despre segmentele proporționale a fost demonstrată în manualul de clasa a -8-a de aceiași autori și editură. Pe parcurs ne v-om referi la acest manual astfel: "Geometria de clasa a 8-a". nota traducătorului.

3.28.•• Bazele unui trapez isoscel sunt egale cu 9 cm și 21 cm, iar înălțimea – 8 cm. Aflați raza circumferinței circumscrise acestui trapez.

3.29.•• Segmentul *CD* este bisectoarea triunghiului *ABC*, în care $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Prin punctul *D* este dusă o dreaptă, care este paralelă laturii *BC* și intersectează latura *AC* în punctul *E*, totodată $AE = a$. Găsiți segmentul *CE*.

3.30.•• Media *AM* a triunghiului *ABC* este egală cu *m* și creează cu laturile *AB* și *AC* unghiurile α și β corespunzător. Aflați laturile *AB* și *AC*.

3.31.•• Media *CD* a triunghiului *ABC* este egală cu m și creează cu laturile *AB* și *AC* unghiurile α și β corespunzător, $BC = a$. Aflați mediana *CD*.

3.32.•• Înălţimile triunghiului ascuţitunghic *ABC* se intersectează în punctul *H*. Demonstraţi, că razele circumferinţelor circumscrise triunghiurilor *AHB*, *BHC*, *AHC* și *ABC*, sunt egale.

3.33.•• Drumurile care leagă satele *A, B* și *C* (fig. 39), creează un triunghi, totodată drumul din satul *A* la satul *C* este asfaltat, iar drumurile din satele *A* la satul *B* și din satul *B* la satul *C* – pietruite. Drumurile, ce duc de la satul *A* la satul *B* și *C*, creează unghiului, mărimea căruia este egală cu 15°, iar drumurile, ce duc din satul *B* la satele *A* și *C*, – unghiul mărimea căruia este de 5°. Viteza mișcării automobilului pe drum de asfalt este de 2 ori mai mare decât viteza lui pe drum pietruit. Care drum este necesar de ales șoferului automobilului, ca să ajungă mai repede din satul *A* la satul *B*?

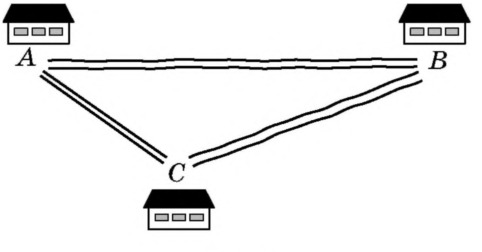


Fig. 3.9

3.34.•• Drumurile din satele *A* și *B* se unesc lângă intersecţia *C* (fig. 3.10). Drumul din satul *A* până la intersecţie creează cu drumul din satul *A* la satul *B* un unghi care este egal cu 30°, iar drumul din satul *B* până la intersecţie creează cu drumul din satul *B* la satul *A* un unghi mărimea căruia este de 70°. În același timp din satul *A* spre intersecţie s-a pornit un autoturism cu viteza de 90 km/h, iar din satul *B* – un autobus cu viteza de 60 km/h. Cine dintre ei va ajunge primul la intersecţie?

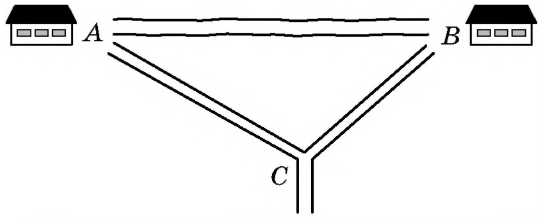


Fig. 3.10

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

3.35. Bisectoarele unghiurilor B și C a dreptunghiului $ABCD$ intersectează latura AD în punctele M și K corespunzător. Demonstraţi, că $BM = CK$.

3.36. În figura 3.11 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Indicaţi, care triunghiuri în această figură sunt asemănătoare.

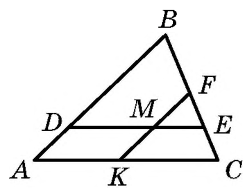


Fig. 3.11

3.37. Pe latura AB a pătratului $ABCD$ este notat punctul K, iar pe latura CD – punctul M astfel, că $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Aflaţi latura pătratului, dacă $MK = 13$ cm.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

3.38. Rezolvaţi triunghiul dreptunghic:

1) conform a două catete $a = 7$ cm și $b = 35$ cm;
2) conform a ipotenuzei $c = 17$ cm și catetei $a = 8$ cm;
3) conform a ipotenuzei $c = 4$ cm și a unghiului ascuţit $\alpha = 50°$;
4) conform catetei $a = 8$ cm și a unghiului opus $\alpha = 42°$.

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTEZAŢI

3.39. Într-o circumferinţa cu raza de 1 cm este înscris un pentagon. Demonstraţi că suma lungimilor laturilor lui și a diagonalelor este mai mică de 17 cm.

4. Rezolvarea triunghiurilor

A rezolva triunghiul înseamnă a afla toate laturile și unghiurile necunoscute ale triunghiului conform laturilor și unghiurilor cunoscute[1].

În clasa a 8-a voi v-ţi învăţat să rezolvaţi triunghiurile dreptunghice. Teoremele cosinusurilor și sinusurilor oferă posibilitatea rezolvării oricăror triunghiuri.

În problemele următoare valorile funcţiilor trigonometrice le vom găsi cu ajutorul calculatorului de buzunar și le vom rotunji până la sutimi. Mărimile unghiurilor le vom găsi în același mod și rotunji aceste valori până la unităţi. Calculând lungimile laturilor, rezultatul îl vom rotunji până la zecimi.

Problema 1. Rezolvaţi triunghiul (fig. 4.1) conform laturii $a = 12$ cm și a două unghiuri $\beta = 36°, \gamma = 119°$.

Rezolvare. Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului obţinem: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

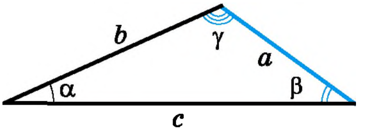


Fig. 4.1

Conform teoremei sinusurilor $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. De aici $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Avem:

$$b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0,59}{0,42} \approx 16,9 \text{ (cm)}.$$

Iarăși aplicăm teorema sinusurilor și scriem:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

De aici $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Obţinem:

$$c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0,87}{0,42} \approx 24,9 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: $b \approx 16,9$ cm, $c \approx 24,9$ cm, $\alpha = 25°$. ◀

Problema 2. Rezolvaţi triunghiul conform a două laturi $a = 14$ cm, $b = 8$ cm și a unghiului $\gamma = 38°$ cuprins între ele.

[1] În problemele acestui punct și în exerciţiile 4.1.–4.9 sunt acceptate însemnările: a, b și c – lungimile laturilor triunghiului, α, β și γ – mărimile unghiurilor, opuse corespunzător laturilor cu lungimile a, b și c.

Rezolvare. După teorema cosinusurilor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
De aici

$$c^2 = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224\cdot 0{,}79 = 83{,}04;$$

$$c \approx 9{,}1 \text{ cm}.$$

Mai departe vom avea:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2\cdot 8\cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

De aici $\alpha \approx 110°$.

Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului, obţinem:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma); \quad \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

Răspuns: $c \approx 9{,}1$ cm, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$. ◀

Problema 3. Rezolvaţi triunghiul conform a trei laturi $a = 7$ cm, $b = 2$ cm, $c = 8$ cm.

Rezolvare. Conform teoremei cosinusurilor $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. De aici

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2\cdot 2\cdot 8} \approx 0{,}59. \text{ Obţinem: } \alpha \approx 54°.$$

După teorema sinusurilor $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. De aici

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}; \quad \sin\beta \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2\cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$$

Deoarece b – lungimea celei mai mici laturi ale triunghiului dat, atunci unghiul β este ascuţit. Atunci aflăm, că $\beta \approx 13°$.

Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului, obţinem:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta); \quad \gamma \approx 180° - 67° = 113°.$$

Răspuns: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$. ◀

Problema 4. Rezolvaţi triunghiul conform a două laturi și a unghiului opus uneia din laturi:

1) $a = 17$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 156°$;
2) $b = 7$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 65°$;
3) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 50°$.

Rezolvare. 1) Conform teoremei sinusurilor $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. De aici

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}; \quad \sin\beta = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6\cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$$

Deoarece unghiul α al triunghiului dat este obtuz atunci unghiul β este ascuţit. Atunci găsim, că $\beta \approx 8°$.

Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului, obţinem: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16°$.

După teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

De aici $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c \approx \frac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17\cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx 11{,}6$ (cm).

Răspuns: $\beta \approx 8°, \gamma \approx 16°, c \approx 11{,}6$ cm.

2) Conform teoremei sinusurilor $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

De aici $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \frac{8\sin 65°}{7} \approx \frac{8\cdot 0{,}91}{7} = 1{,}04 > 1$, ceea ce nu este posibil.

Răspuns: probleme nu are soluţii.

3) 3) Conform teoremei sinusurilor $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. 3) De aici

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b};\quad \sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6\cdot 0{,}77}{5} \approx 0{,}92.$$

Sunt posibile două cazuri: $\alpha \approx 67°$ sau $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Să cercetăm cazul când $\alpha \approx 67°$.

Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului, obţinem:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 117° = 63°.$$

Conform teoremei sinusurilor $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

De aici $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \frac{5\cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx 5{,}8$ (cm).

Să cercetăm cazul când $\alpha \approx 113°$.

Folosind teorema despre suma unghiurilor triunghiului, obţinem:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 163° = 17°.$$

Deoarece $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, atunci $c \approx \frac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \frac{5\cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (cm).

Răspuns: $\alpha \approx 67°, \gamma \approx 63°, c \approx 5{,}8$ cm sau $\alpha \approx 113°, \gamma \approx 17°, c \approx 1{,}9$ cm. ◄

?

Ce înseamnă a rezolva triunghiul?

EXERCIȚII

4.1.° Rezolvați triunghiul după o latură și două unghiuri:
1) $a = 10$ cm, $\beta = 20°, \gamma = 85°$; 2) $b = 16$ cm, $\alpha = 40°, \beta = 110°$.

4.2.° Rezolvați triunghiul conform unei laturi și a două unghiuri:
1) $b = 9$ cm, $\alpha = 35°, \gamma = 70°$; 2) $c = 14$ cm, $\beta = 132°, \gamma = 24°$.

4.3.° Rezolvați triunghiul după două laturi și a unghiului cuprins între ele:
1) $b = 18$ cm, $c = 22$ cm, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 104°$.

4.4.° Rezolvați triunghiul după două laturi și a unghiului cuprins între ele:
1) $a = 8$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 15°$; 2) $b = 7$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 145°$.

4.5.° Rezolvați triunghiul conform celor trei laturi:
1) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm; 2) $a = 26$ cm, $b = 19$ cm, $c = 42$ cm.

4.6.° Rezolvați triunghiul conform celor trei laturi:
1) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm; 2) $a = 21$ cm, $b = 17$ cm, $c = 32$ cm.

4.7.° Rezolvați triunghiul, în care:
1) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, unghi α ascuțit ;
2) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, unghi α obtuz.

4.8.• Rezolvați triunghiul după două laturi și a unghiului, care este opus uneia din laturile date:
1) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $\beta = 46°$; 3) $a = 7$ cm, $c = 3$ cm, $\gamma = 27°$.
2) $b = 15$ cm, $c = 17$ cm, $\beta = 32°$;

4.9.• Rezolvați triunghiul după două laturi și a unghiului, care este opus uneia din laturile date:
1) $a = 23$ cm, $c = 30$ cm, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ cm, $b = 25$ cm, $\alpha = 36°$.

4.10.• În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = BC = 20$ cm, $\angle A = 70°$. Aflați:
1) latura AC;
2) mediana CM;
3) bisectoarea AD;
4) raza circumferinței circumscrise triunghiului ABC.

4.11.• Diagonala AC a trapezului isoscel $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ este egală cu 8 cm, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Aflați:
1) laturile trapezului;
2) raza circumferinței circumscrise triunghiului ABC.

4.12.•• Bazele trapezului sunt egale cu 12 cm și 16 cm, iar laturile laterale – 7 cm, și 9 cm. Aflați unghiurile trapezului..

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

4.13. Bisectoarea unghiului B a paralelogramului $ABCD$ intersectează latura lui AD în punctul M, iar latura CD în continuarea după punctul D – în punctul K. Aflați segmentul DK, dacă $AM = 8$ cm, iar perimetrul paralelogramului este egal cu 50 cm.

4.14. Perimetrul unuia din două triunghiuri asemenea este cu 18 cm mai mic de la perimetrul celui de-al doilea triunghi, iar două laturi corespunzătoare a acestor triunghiuri sunt egale cu 5 cm, și 8 cm. Aflați perimetrele triunghiurilor date.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

4.15. Punctul M – este mijlocul laturii CD a dreptunghiului $ABCD$ (fig. 4.2), $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm. Cu este egală aria triunghiului ACM?

4.16. Pe latura AC a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, că $\angle ADB = \alpha$. Demonstrați că $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha$.

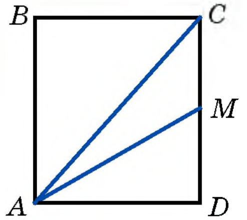


Fig. 4.2

TRIGONOMETRIA – ŞTIINŢĂ DESPRE MĂSURAREA TRIUNGHIURILOR

Voi știți, că călătorii antici se orientau după stele și planete. Ei puteau destul de exact să determine localizarea corăbiei în ocean sau a caravanei în pustiu după amplasarea aștrilor pe bolta cerească. Totodată unul din criteriile de orientare era înălțimea, la care se ridica deasupra orizontului unul sau altul corp ceresc în localitatea dată într-un anumit moment de timp.

Bineînțeles, că nemijlocit de măsurat această înălțime este imposibil. De aceea savanții au început să elaboreze metode de măsurări indirecte. Aici un rol important a jucat rezolvarea triunghiului, două vârfuri ale căruia se aflau pe suprafața Pământului, iar a treia era steaua (fig. 4.3) – vă este cunoscută problema 3.17.

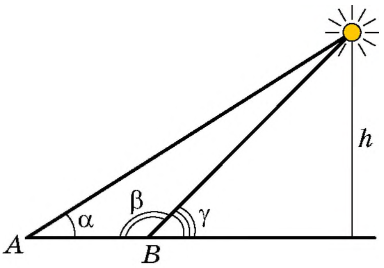


Fig. 4.3

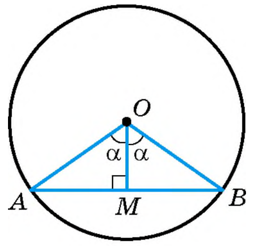


Fig. 4.4

Pentru a rezolva asemenea probleme astronomilor străvechi le era necesar să se învețe a găsi legăturile reciproce între elementele triunghiului. Astfel a apărut știința **trigonometria** – știința, care studiază dependențele între laturile și unghiurile triunghiului. Termenul "trigonometria" (de la cuvintele grecești "trigonon" – triunghi, și "metreo" – măsurare) înseamnă "măsurarea triunghiurilor".

În figura 4.4. este prezentat unghiul central AOB, care este egal cu 2α. Din triunghiul dreptunghic OMB avem: $MB = OB \sin \alpha$. Deci, dacă într-o circumferință unitară de măsurat jumătățile lungimilor corzilor, care întind unghiurile centrale cu mărimea de 2°, 4°, 6°, ..., 180°, atunci astfel noi vom calcula valorile sinusurilor unghiurilor de 1°, 2°, 3°, ..., 90° corespunzător.

Măsurând lungimile semicorzilor, astronomul antic grec Hiparh (sec al II-a î. Hr.) a alcătuit primele tabele trigonometrice.

Noțiunea de sinus și cosinus apare în tractatele trigonometrice ale savanților indieni în sec. IV–V ale erei noastre. În Sec al X-a savanții arabi operau cu noțiunea de tangentă, care a apărut la cerințele gnomonicii – științei despre ceasornicele solare (fig. 4.5).

Fig. 4.5

În Europa prima lucrare, în care trigonometria se cercetează ca știință aparte, a fost tractatul "Cinci cărți despre triunghiurile de toate tipurile ", pri-

Leonhard Euler
(1707–1783)

Ilustru matematician, fizician, mecanic și astronom, autorul a peste 860 de lucrări științifice, membru al academiilor de științe al Petersburgului, Berlinului, Pragăi, a asociație regale din London și a multor alte academii și asociații științifice. Numele lui Euler se întâlnește aproape în toate domeniile matematicii: teoremele lui Euler, identitățile lui Euler, unghiuri, funcții, integrale, formule, ecuații substituții etc.

ma dată tipărit în anul 1533, Autorul lui a fost savantul german Regiomontan (1436–1476). Același savant a descoperit teorema tangentelor:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

Unde a, b și c – lungimile laturilor triunghiului, α, β și γ – mărimile unghiurilor triunghiului, opuse corespunzător laturilor cu lungimile a, b și c.

Aspectul contemporan trigonometria l-a obținut în lucrările marelui matematician Leonhard Euler.

5. Formulele pentru aflarea ariei triunghiului

Din cursul de geometrie clasa a 8-a voi știți că aria S a triunghiului cu laturile a, b și c și înălțimile h_a, h_b și h_c se poate calcula după formulele

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

Acum la noi a apărut posibilitatea de a obține încă câteva formule pentru aflarea ariei triunghiurilor.

Teorema 5.1. ***Aria triunghiului este egală cu jumătatea produsului a două laturi ale lui și a sinusului unghiului cuprins între ele.***

Demonstrație. Să cercetăm triunghiul ABC, aria căruia este egală cu S, astfel, că $BC = a$, $AC = b$ și $\angle C = \gamma$. Vom demonstra, că

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Sunt posibile trei cazuri:
1) unghiul γ ascuțit (fig. 5.1);
2) unghiul γ obtuz (fig. 5.2);
3) unghiul γ drept.

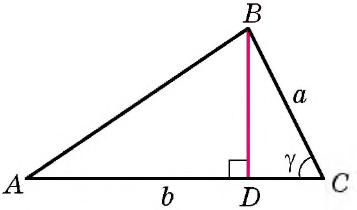


Fig. 5.1

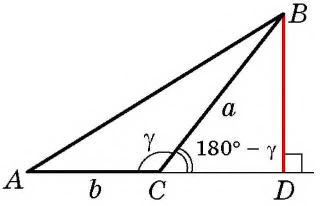


Fig. 5.2

În figurile 5.1 și 5.2 vom duce înălțimea BD a triunghiului ABC. Atunci $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

Din triunghiul dreptunghic BDC î primul caz (vezi fig. 5.1) vom obține: $BD = a\sin\gamma$, iar în al doilea (vezi fig. 5.2): $BD = a\sin(180° - \gamma) = a\sin\gamma$. De aici pentru primele două cazuri avem: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Dacă unghiul C este drept, atunci $\sin\gamma = 1$. Pentru triunghiul dreptunghic ABC cu catetele a și b avem:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangleleft$$

Teorema 5.2 (formula lui Herone[1]). ***Aria S a triunghiului cu laturile a, b și c se pateu calcula după formula***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

unde p – semi perimetrul lui.

Demonstrație. Să cercetăm triunghiul ABC, aria căruia este egală cu S, astfel, că $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Vom demonstra, că

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[1] Heron din Alexandria – savant antic grec, care a trăit în sec. al I-a al e.n. Lucrările lui din matematică sunt enciclopedie a matematicii aplicate.

Fie $\angle C = \gamma$. Vom scrie formula ariei triunghiului:

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma.$ de aici $S^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma.$

Confor teoremei cosinusurilor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Atuci $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Deoarece $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, atunci:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \varnothing \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

De aici $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◄

Teorema 5.3. ***Aria S a triunghiului cu laturile a, b și c se poate calcula după formula***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

unde R – raza circumferinței circumscrise triunghiului.

Demonstrație. Să cercetăm triunghiul ABC, aria căruia este egală cu S, astfel, că $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Vom demonstra, că $S = \dfrac{abc}{4R}$, unde R – raza circumferinței circumscrise triunghiului.

Fie $\angle A = \alpha$. Vom scrie formula ariei triunghiului:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Din lema p. 3. reiese, că $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$.

Atunci $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}bc \cdot \dfrac{a}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$. ◄

Menționam, că formula demonstrată oferă posibilitatea găsirii razei circumferinței circumscrise triunghiului conform formulei

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Teorema 5.4. ***Aria triunghiului este egală cu produsul semi perimetrului lui și a razei circumferinței înscrise în triunghi.***

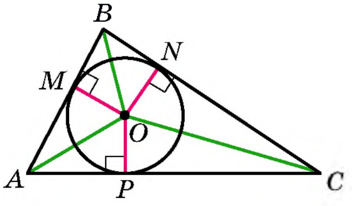


Fig. 5.3

Demonstrație. În figura 5.3 este prezentat triunghiul ABC, în care este înscrisă circumferința cu raza r. Vom demonstra, că

$$\boxed{S = pr,}$$

unde S – aria triunghiului dat, p – semi perimetrul lui.

Fie punctul O – centrul circumferinței înscrise, care se atinge de laturile triunghiului ABC în punctele M, N și P. Aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor AOB, BOC și COA:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Să ducem razele în punctele de tangență. Vom obține: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. De aici:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Deci, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ◄

Teorema 5.4 este generalizată de astfel de teoremă.

Teorema 5.5. ***Aria poligonului circumscris este egală cu produsul perimetrului lui și a razei circumferinței înscrise în el.***

Demonstrați această teoremă sine stătător (fig. 5.4).

Menționăm. Că teorema 5.5 dă posibilitate de a afla raza circumferinței înscrise în poligon după formula

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

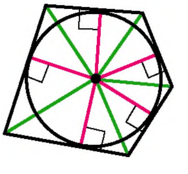


Fig. 5.4

Problema 1. Demonstrați, că aria S a paralelogramului se poate calcula conform formulei

$$\boxed{S = ab\sin\alpha,}$$

unde a și b – lungimile laturilor megieșe ale paralelogramului, α – unghiul cuprins între ele.

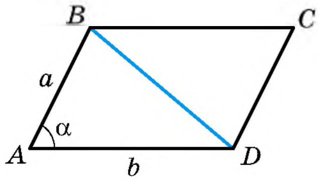


Fig. 5.5

Rezolvare. Să cercetăm paralelogramul $ABCD$, în care $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (fig. 5.5). Ducem diagonale BD. Deoarece $\Delta ABD = \Delta CBD$, atunci scriem:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha.$$

Problema 2. Demonstrați, că aria patrulaterului convex este egală cu jumătatea produsului diagonalelor lui și a sinusului unghiului cuprins între ele.

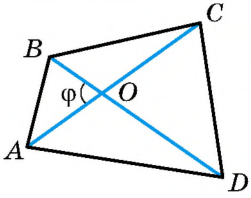


Fig. 5.6

Rezolvare. Fie că unghiul între diagonalele AC și BD a patrulaterului $ABCD$ este egal cu φ. În figura 5.6 $\angle AOB = \varphi$. Atunci $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \varphi$ și $\angle COD = \varphi$. Avem:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin(180° - \varphi) +$$

$$+\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD\cdot OA\cdot\sin(180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}OB(OA + OC)\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD(OC + OA)\cdot\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}OB\cdot AC\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}OD\cdot AC\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}AC(OB + OD)\cdot\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi.$$

Problema 3. Laturile unui triunghi sunt egale cu 17 cm, 65 cm și 80 cm. Aflați cea mai mică înălțime a triunghiului, raza circumferințelor înscrise și circumscrise triunghiului.

Rezolvare. Fie $a = 17$ cm, $b = 65$ cm, $c = 80$ cm.

Aflăm semi perimetrul triunghiului: $p = \dfrac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (cm). Aria triunghiului o vom calcula după formula lui Herone:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81\cdot 64\cdot 16} = 9\cdot 8\cdot 4 = 288 \ (\text{cm}^2).$$

Cea mai mică înălțime este înălțimea, dusă la latura cea mai mare a lui, lungimea căreia este egală cu c.

Deoarece $S = \frac{1}{2}ch_c$, atunci $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (cm).

Raza circumferinței înscrise $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (cm).

Raza circumferinței circumscrise $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (cm).

Răspuns: 7,2 cm, $\frac{32}{9}$ cm, $\frac{5525}{72}$ cm. ◄

1. Cum se poate calcula aria triunghiului, dacă sunt cunoscute două laturi ale lui și unghiul cuprins între ele?
2. Scrieți formula lui Herone pentru calcularea ariei triunghiului.
3. Cum se poate calcula aria triunghiului cu laturile a, b și c și a razei R a circumferinței circumscrise?
4. Cum se poate calcula raza circumferinței circumscrise triunghiului, dacă sunt cunoscute aria triunghiului și laturile lui?
5. Cum se poate afla aria triunghiului, dacă sunt cunoscute semi perimetrul lui și raza circumferinței circumscrise triunghiului?
6. Cum se poate afla raza circumferinței înscrise în triunghi, dacă sunt cunoscute aria triunghiului și laturile lui?
7. Cu ce este egală aria poligonului circumscris?

EXERCIȚII

5.1.° Aflați aria triunghiului ABC, dacă:
1) $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 3$ cm, $BC = 6\sqrt{2}$ cm, $\angle C = 135°$.

5.2.° Aflați aria triunghiului DEF, dacă:
1) $DE = 7$ cm, $DF = 8$ cm, $\angle D = 60°$;
2) $DE = 10$ cm, $EF = 6$ cm, $\angle E = 150°$.

5.3.° Aria triunghiului MKN este egală cu 75 cm². Aflați MK, dacă $KN = 15$ cm, $\angle K = 30°$.

5.4.° Aflați unghiul între laturile date ale triunghiului ABC, dacă:
1) $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, aria triunghiului este egală cu $30\sqrt{3}$ cm^2;
2) $AB = 14$ cm, $AC = 8$ cm, aria triunghiului este egală cu 56 cm^2.

5.5.° Aria triunghiului ABC este egală cu 18 cm^2. Este cunoscut, că $AC = 8$ cm, $BC = 9$ cm. Aflați unghiul C.

5.6.° Aflați aria triunghiului isoscel cu latura laterală egală cu 16 cm și a unghiului de la bază 15°.

5.7.° Aflați aria triunghiului cu laturile:
1) 13 cm, 14 cm, 15 cm; 2) 2 cm, 3 cm, 4 cm.

5.8.° Aflați aria triunghiului cu laturile:
1) 9 cm, 10 cm, 17 cm; 2) 4 cm, 5 cm, 7 cm.

5.9.° Aflați cea mai mică înălțime a triunghiului cu laturile 13 cm, 20 cm și 21 cm.

5.10.° Aflați cea mai mare înălțime a triunghiului cu laturile 11 cm, 25 cm și 30 cm.

5.11.° Perimetrul triunghiului este egal cu 32 cm, iar raza circumferinței înscrise în triunghi – 1,5 cm. Aflați aria triunghiului.

5.12.° Aria triunghiului este egală cu 84 cm^2, iar perimetrul – 72 cm, aflați raza circumferinței înscrise în triunghi.

5.13.° Aflați razele circumferințelor înscrise și circumscrise triunghiului cu laturile:
1) 5 cm, 5 cm și 6 cm; 2) 25 cm, 29 cm și 36 cm.

5.14.° Aflați razele circumferințelor înscrise și circumscrise triunghiului cu laturile 6 cm, 25 cm și 29 cm.

5.15.° Aflați aria paralelogramului conform laturilor lui a și b și a unghiului α cuprins între ele, dacă:
1) $a = 5\sqrt{2}$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 45°$;
2) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm, $\alpha = 150°$.

5.16.° Cu ce este egală aria paralelogramului laturile căruia sunt egale cu 7 cm și 12 cm, iar unul din unghiuri – 120°?

5.17.° Aflați aria rombului cu latura $9\sqrt{3}$ cm și unghiul 60°.

5.18.° Diagonalele patrulaterului convex sunt egale cu 8 cm și 12 cm, iar unghiul cuprins între ele – 30°. Aflați aria patrulaterului.

5.19.° Aflați aria patrulaterului convex diagonalele căruia sunt egale cu $3\sqrt{3}$ cm și 4 cm, iar unghiul cuprins între ele – 60°.

5.20.° Aflați latura laterală a triunghiului isoscel, aria căruia este egală cu 36 cm^2, iar unghiul de la vârf – 30°.

5.21.• Care triunghi cu două laturi date are cea mai mare arie?

5.22.• Se poate oare ca aria triunghiului cu laturile de 4 cm și 6 cm să fie egală cu:
1) 6 cm^2; 2) 14 cm^2; 3) 12 cm^2?

5.23.• Două laturi alăturate ale paralelogramului sunt corespunzător egale cu două laturi ale unui dreptunghi. Cu ce este egal unghiul ascuțit al paralelogramului, dacă aria lui este de ori mai mică decât aria dreptunghiului?

5.24.• Găsiți raportul ariilor S_1 și S_2 ale triunghiurilor, reprezentate în figura 5.7 (lungimile segmentelor sunt date în centimetri).

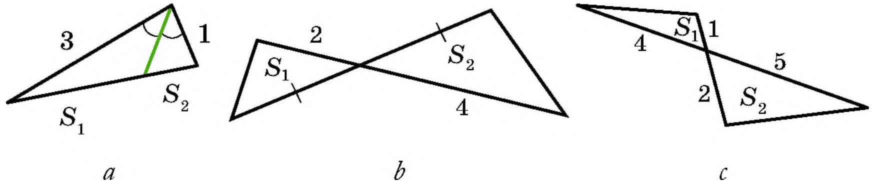


Fig. 5.7

5.25.• Segmentul AD – este bisectoarea triunghiului ABC. Aria triunghiului ABD este egală cu 12 cm^2, iar a triunghiului ACD – 20 cm^2. Aflați raportul laturii AB către latura AC.

5.26.• Aflați aria triunghiului, latura căruia este egală a, iar unghiurile adiacente ei sunt egale cu β și γ.

5.27.• Raza circumferinței circumscrise triunghiului este egală cu R, iar două unghiuri ale triunghiului sunt egale cu α și β. Aflați aria triunghiului.

5.28.• În triunghiul ABC este cunoscut, că $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Aflați aria triunghiului.

5.29.• În triunghiul ABC unghiul A este egal cu α, iar înălțimile BD și CE sunt egale corespunzător cu h_1 și h_2. Aflați aria triunghiului ABC.

5.30.• Segmentul BM – este înălțimea triunghiului ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Aflați aria triunghiului ABC.

5.31.• În triunghiul cu laturile de 17 cm, 25 cm și 28 cm este înscrisă o circumferință, centrul căreia este unit cu vârfurile triunghiului, aflați aria triunghiurilor care totodată s-au obținut.

5.32.•• Segmentul AD – este bisectoarea triunghiului ABC, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $\angle BAC = 120°$. Aflați bisectoarea AD.

5.33.•• Aflaţi aria trapezului, bazele căruia sunt egale cu 10 cm şi 50 cm. Iar laturile laterale – 13 cm şi 37 cm.

5.34.•• Bazele trapezului sunt egale cu 4 cm şi 5 cm, iar diagonalele – 7 cm şi 8 cm. Aflaţi aria trapezului.

5.35.•• Segmentele BM şi CK – sunt înălţimile triunghiului ascuţitunghic ABC, $\angle A = 45°$. Aflaţi raportul ariilor triunghiurilor AMK şi ABC.

5.36.•• Laturile unui triunghi sunt egale cu 39 cm, 41 cm şi 50 cm. Aflaţi raza circumferinţei centrul căreia aparţine celei mi mari laturi ale triunghiului şi care este tangentă la altele două laturi ale lui.

5.37.•• Vârfurile triunghiului sunt unite cu centrul circumferinţei înscrise în el. Segmentele duse împart triunghiul în triunghiuri, ariile cărora sunt egale cu 26 cm², 28 cm² şi 30 cm². Aflaţi laturile triunghiului dat.

5.38.•• Demonstraţi, că $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, unde h_1, h_2 şi h_3 – lungimile înălţimilor triunghiului, r – raza circumferinţei înscrise.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

5.39. Perpendiculara din vârful dreptunghiului la diagonala lui, împarte unghiul dat în raportul de 4 : 5. Determinaţi unghiul între această perpendiculară şi cea de-a doua diagonală.

5.40. Linia medie MK a trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$) este egală cu 56 cm. Prin punctul M al laturii AB este dusă o dreaptă, care este paralelă laturii CD şi intersectează baza AD în punctul E astfel, că $AE : ED = 5 : 8$. Aflaţi bazele trapezului.

5.41. Segmentul CD – este bisectoarea triunghiului ABC. Prin punctul D este dusă dreapta, care este paralelă dreptei AC şi intersectează latura BC în punctul E. Aflaţi segmentul DE, dacă $AC = 16$ cm, $BC = 24$ cm.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

5.42. Aflaţi suma unghiurilor heptangonului convex.

5.43. Există oare un poligon convex, suma unghiurilor căruia să fie egală cu:
1) 1080°; 2) 1200°?

5.44. Există oare un poligon, fiecare unghi al căruia sa fie egal cu:
1) 72°; 2) 171°?

5.45. Există oare corectă afirmaţia (argumentaţi răspunsul):

1) dacă toate laturile poligonului, înscris în circumferinţă, sunt egale, atunci și toate unghiurile lui tot sunt egale;
2) dacă toate unghiurile poligonului, înscris în circumferinţă, sunt egale, atunci de asemenea sunt egale și laturile lui;
3) dacă toate laturile poligonului, circumscris circumferinţei, sunt egale, atunci și toate unghiurile lui tot sunt egale;
4) dacă toate unghiurile poligonului, circumscris circumferinţei, sunt egale, atunci de asemenea sunt egale și laturile lui?

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTEZAŢI

5.46. Este dat un pătrat cu dimensiunile 99×99 pătrăţele (de caiet). Fiecare pătrăţel al pătratului este vopsit în culoare neagră sau albă. Se permite de vopsit din nou toate pătrăţele unei coloane sau a unui oarecare rând în acea culoare, pătrăţelele căruia în această coloană sau rând au fost mai multe până la revopsire. Oare totdeauna se poate de a obţine aceea, ca toate pătrăţelele pătratului să devină de aceiași culoare?

CIRCUMFERINŢA EXÎNSCRISĂ TRIUNGHIULUI

Să ducem bisectoarele a două unghiuri exterioare din vârfurile A și C ale triunghiului ABC (fig. 5.8). Fie O – este punctul de intersecţie ale acestor bisectoare. Atunci punctul O este egal depărtat de la dreptele AB, BC și AC.

Vom duce trei perpendiculare: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Bineînţeles că $OM = OK = ON$. Deci, există o circumferinţă cu centrul în punctul O, care este tangentă la latura triunghiului și la prelungirile altor două laturi ale lui. Astfel de circumferinţă se numește circumferinţă **exînscrisă** triunghiului ABC (fig. 5.8).

Deoarece $OM = ON$, atunci punctul O aparţine bisectoarei unghiului ABC.

Orice triunghi are trei circumferinţe exînscrise. În figura 5.9 centrele lor sunt însemnate O_A, O_B și O_C. Razele acestor circumferinţe le vom însemna respectiv r_a, r_b și r_c.

După proprietatea tangentelor, duse la circumferinţă printr-un punct, avem: $CK = CN$, $AK = AM$ (fig. 5.8). Atunci $AC = CN + AM$. Deci, perimetrul triunghiului ABC este egal cu suma $BM + BN$. Însă $BM = BN$. Atunci $BM = BN = p$, unde p – semiperimetrul triunghiului ABC.

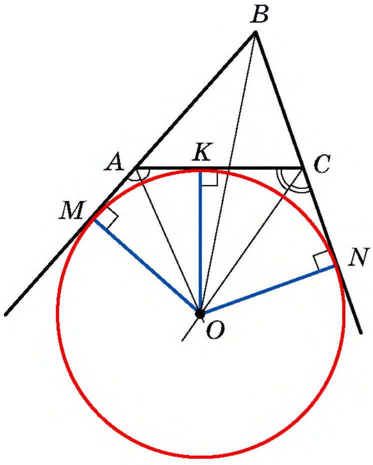


Fig. 5.8

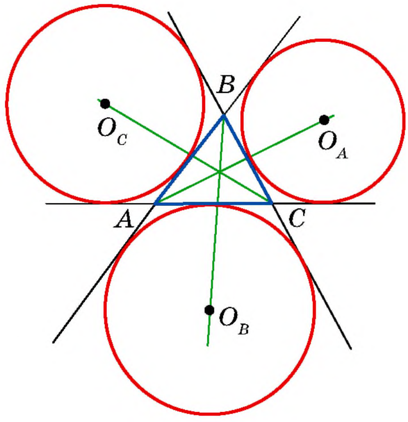


Fig. 5.9

Avem:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}r_b\,(c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b\,(p - b).$$

De aici $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, unde S este aria triunghiului ABC.

Analogic se poate arăta, că $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$.

EXERCIŢII

1. Demonstraţi, că $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, unde r – este raza circumferinţei exînscrise a triunghiului ABC.
2. Demonstraţi, că aria S a triunghiului dreptunghic se poate calcula conform formulei $S = r_c \cdot r$, unde r_c – este raza circumferinţei exînscrise, care este tangentă la ipotenuza triunghiului, r – raza circumferinţei înscrise în triunghiul dat.
3. În triunghiul echilateral cu latura a este înscrisă o circumferinţă. La circumferinţă este dusă o tangentă astfel, că segmentul tangentei, care aparţine triunghiului, este egal cu b. Aflaţi aria triunghiului, pe care această tangentă o retează de la triunghiul echilateral..

4. În patrulaterul $ABCD$ diagonala BD este perpendiculară la latura AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Demonstraţi, că diagonala AC este bisectoarea unghiului BAD.
Indicaţie. Demonstraţi, că punctul C este centrul circumferinţei exînscrise al triunghiul ABD.

5. În triunghiul ABC unghiul B este egal cu 120°. Segmentele AN, CF și BK sunt bisectoarele triunghiului ABC. Demonstraţi, că unghiul NKF este egal cu 90°.
Indicaţie. Pe continuarea laturii AB după punctul B însemnăm punctul M. Atunci $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, adică semidreapta BC este bisectoarea unghiului exterior MBK al triunghiului ABK. De aici reiese că punctul N este centrul circumferinţei exterioare la triunghiul ABK. Analogic se poate demonstra, că punctul F este centrul circumferinţei exînscrise al triunghiului BCK.

6. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu 1 cm. Pe laturile AB și BC sau notat punctele M și N corespunzător astfel, că perimetrul triunghiului MBN este egal cu 2 cm. Aflaţi unghiul MDN.
Indicaţie. Demonstraţi, că punctul D este centrul circumferinţei exînscrise al triunghiul MBN.

ÎNSĂRCINARĂ NR. 1 "CONTROLEAZĂ-TE" ÎN FORMĂ TEST

1. Care din egalități este corectă?
A) $\cos(180° - \alpha) = \sin \alpha$;
B) $\cos(180° - \alpha) = \cos \alpha$;
C) $\sin(180° - \alpha) = \cos \alpha$;
D) $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$.

2. Care din inegalități este corectă?
A) $\sin 100° \cos 110° > 0$;
B) $\sin 100° \cos 10° < 0$;
C) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
D) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Aflați latura a treia a triunghiului, dacă două laturi ale lui sunt egale cu 3 cm și 8 cm, iar ughiul cuprins între ele este egal cu 120°.
A) $\sqrt{97}$ cm; B) 7 cm; C) 9 cm; D) $\sqrt{32}$ cm.

4. Cum este unghiul, ce este opus celei mai mari laturi a triunghiului cu laturile 4 cm, 7 cm și 9 cm?
A) Ascuțit;
B) obtuz;
C) drept;
D) nu este posibil de stabilit.

5. Unghiul între doua laturi ale triunghiului, una dina care este cu 10 cm mai mare decât alta, este egal cu 60°, iar a treia latură este egală cu 14 cm. Care este lungimea laturi mari a triunghiului?
A) 16 cm; B) 14 cm; C) 18 cm; D) 15 cm.

6. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 17 cm și 19 cm, iar laturile lui se raportă ca 2 : 3. Cu ce este egal perimetrul paralelogramului?
A) 25 cm; B) 30 cm; C) 40 cm; D) 50 cm.

7. În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = 8$ cm, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Aflați latura BC.
A) $8\sqrt{2}$ cm; B) $4\sqrt{2}$ cm; C) $16\sqrt{2}$ cm; D) $12\sqrt{2}$ cm.

8. Cu ce este egal raportul $AC : BC$ ale laturilor triunghiului ABC, dacă $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$?
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $\angle C = 135°$. Aflați diametrul circumferinței circumscrise triunghiului.
A) 4 cm; B) 8 cm; C) 16 cm; D) 2 cm.

10. Care este valoarea cea mai mare pe care o poate obține aria triunghiului cu laturile de 8 cm și 12 cm?
A) 96 cm^2;
B) 48 cm^2;
C) 24 cm^2;
D) nu-i posibil de stabilit.

11. Aflați suma razelor circumferințelor înscrise și circumscrise uni triunghi cu laturile de 25 cm, 33 cm și 52 cm.
A) 36 cm; B) 30 cm; C) 32,5 cm; D) 38,5 cm.

12. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 11 cm și 23 cm, iar mediana, dusă la a treia latură, – 10 cm. Aflați latura necunoscută a triunghiului.
A) 15 cm; B) 30 cm; C) 25 cm; D) 20 cm.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Cosinusul și sinusul

Cosinusul și sinusul unghiului **α** (**0° ≤ α ≤ 180°**) se numește corespunzător abscisa și ordonata punctului ***M*** al semicircumferinței, care corespunde unghiului **α.**

Tangenta

Tangenta unghiului **α,** unde $0° < \alpha < 180°$. și **α ≠ 90°** se numește raportul

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

Teorema cosinusurilor

Pătratul unei laturi a triunghiului este egală cu suma pătratelor altor două laturi minus produsul îndoit al acestor laturi și cosinusul unghiului cuprins între ele:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Consecința din teorema cosinusurilor

Fie ***a, b***, și ***c*** – lungimile laturilor triunghiului, totodată ***a*** – lungimea laturi mai mari a lui. Dacă ***a*2 < *b*2 + *c*2,** atunci triunghiul este ascuțitunghic. Dacă ***a*2 > *b*2 + + *c*2** atunci triunghiul este obtuzunghic, Dacă ***a*2 = *b*2 + *c*2**, atunci triunghiul este dreptunghic.

Lema despre coarda circumferinței

Coarda circumferinței este egală cu produsul diametrului și a sinusului oricărui unghi înscris, care este întins de această coardă.

Teorema sinusurilor

Laturile triunghiului sunt proporționale sinusurilor unghiurilor opuse lor:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Formulele pentru aflarea ariei triunghiului $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Formula lui Herone: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Formula pentru aflarea razei circumferinței, înscrise în triunghi

$$r = \frac{S}{p}$$

Formulele pentru aflarea razei circumferinței, circumscrise triunghi

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Aria poligonului, circumscris unei circumferințe

Aria poligonului circumscris este egală cu produsul perimetrului lui și a razei circumferinței înscrise în el.

POLIGOANE REGULATE §2

În acest paragraf veţi afla, care poligoane se numesc regulate. Veţi învăţa proprietăţile poligoanelor regulate. Veţi afla cum cu ajutorul compasului şi a riglei se construiesc unele din ele.

Veţi învăţa să aflaţi razele circumferinţelor circumscrise şi înscrise a poligoanelor regulate, lungimea unui arc de circumferinţă, ariile sectorului şi segmentului de cerc.

6. Poligoanele regulate și proprietăţile lor

Definiție. **Poligonul se numește regulat, dacă în el toate laturile sunt egale și toate unghiurile sunt egale.**

Cu unele poligoane regulate voi deja sunteţi cunoscuţi: triunghiul echilateral – este triunghi regulat, pătratul – este patrulater regulat. În figura 6.1 sunt prezentate pentagonul și octogonul regulate.

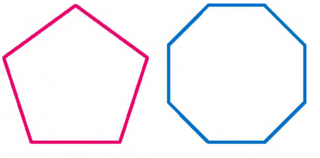


Fig. 6.1

Să facem cunoştinţă cu unele proprietăţi care sunt caracteristice pentru toate poligoanele regulate cu n-unghiuri.

Teorema 6.1. ***Poligonul regulat este poligon convex.***

Cu demonstrația acestei teoreme putem face cunoştinţă pe pag. 60–61.

Fiecare unghi al poligonului regulat cu n-laturi este egal $\frac{180° (n-2)}{n}$. Într-adevăr, de oarece suma unghiurilor poligonului convex cu n-laturi este egală cu $180° (n-2)$ și și toate unghiurile sunt egale, atunci fiecare unghi va fi egal cu $\frac{180° (n-2)}{n}$.

În triunghiul regulat este un punct egal depărtat de la toate vârfurile lui și de la toate laturile. Acest punct este intersecţia bisectoarelor triunghiului regulat. Punctului intersecţiei diagonalelor pătratului tot este caracteristică proprietatea analogică. Faptul, că în orice poligon regulat este un punct egal depărtat de la toate vârfurile lui precum și de la toate laturile, îl confirmă teorema.

Teorema 6.2. ***Oriacre poligon regulat este precum înscris în circumferință așa și circumscris în jurul circumferinței, totodată centrele la circumferințele circumscrise și înscrise coincid.***

Demonstrație. În figura 6.2 este desenat un poligon regulat cu n-laturi $A_1A_2A_3...A_n$. Demonstrăm, că în el se poate înscrie și circumscrie circumferințe.

Ducem bisectoarea unghiurilor A_1 și A_2. Fie O – punctul de intersecţie al lor. Unim punctele O și A_3. Deoarece în triunghiul OA_1A_2 și OA_2A_3 unghiurile 2 și 3 sunt egale, $A_1A_2 = A_2A_3$ și OA_2 – latura comună, atunci aceste triunghiuri sunt egale după primul criteriu de egalitate a triunghiurilor. În afară de aceasta, unghiurile 1 și 2 egale ca jumătăţile unghiurilor egale. De aici triunghiul OA_1A_2 – echilateral, deci, echilateral este și triunghiul OA_2A_3. De aceea $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Unind punctual O cu vârfurile $A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n$, analogic se poate de demonstrate, că $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Astfel, pentru poligonul $A_1A_2A_3...A_n$ există un punct egal depărtat de la toate vârfurile lui. Acesta este punctul O – centrul circumferinței circumscrise.

Deoarece triunghiurile isoscele OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 sunt egale, atunci și înălțimile duse din vârful O tot sunt egale. De aici facem concluzie: punctul O este egal depărtată de la toate laturile poligonului. Deci, punctul O – centrul circumferinței înscrise. ◀

Punctul, care este centrul cercului circumscrise și înscrise a poligonului regulat se numește **centrul poligonului regulat**.

În figura 6.3 este desenat un fragment a unui poligon regulat cu n-laturi cu centrul O și cu latura AB, lungimea cărei o notăm a_n. Unghiul AOB

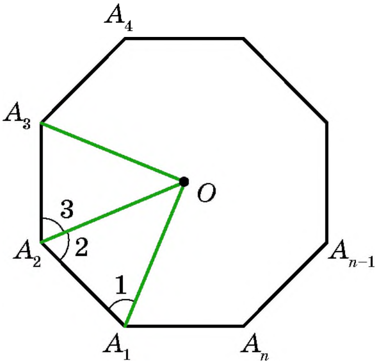


Fig. 6.2

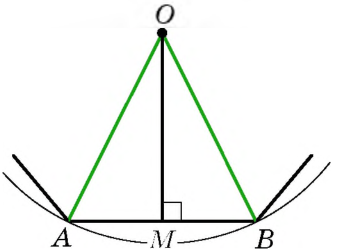


Fig. 6.3

se numeşte unghi de la centru a poligonului regulat. Este clar, că $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

În triunghiul isoscel AOB ducem înălţimea OM. Atunci $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. Din triunghiul OMB obţinem, că

$$OB = \frac{MB}{\sin \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \text{ și } OM = \frac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Segmentele OB și OM – sunt razele circumferințelor circumscrise și înscrise poligonului regulat cu n-laturi. Dacă lungimile lor notăm R_n și r_n atunci rezultatele obţinute se pot scrie în formă de formulele:

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}} \qquad \boxed{r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}}$$

Înlocuind în aceste formule în loc de n cifrele 3, 4, 6, obţinem formulele pentru aflarea razelor circumferințelor circumscrise și înscrise a triunghiului regulat, patrulaterului și a hexagonului cu latura a:

Numărul laturior poligonului regulat cu n-laturi	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Raza circumferinţei circumscrise	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Raza circumferinţei înscrise	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Din rezultatele obţinute rezultă, că latura hexagonului regulat este egală cu raza circumferinței circumscrise lui. Acum se poate scrie algoritmul construirii hexagonului regulat: de la oricare punct M a cercului trebuie una după alta de depus coarde, care sunt egale cu raza (fig. 6.4). În așa fel obţinem vârfurile hexagonului regulat.

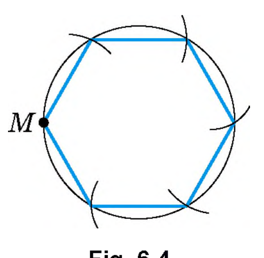


Fig. 6.4

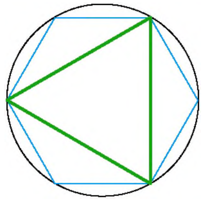


Fig. 6.5

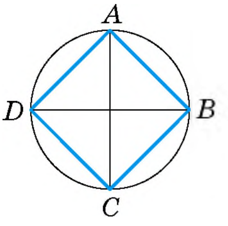


Fig. 6.6

Unind peste unul vârfurile hexagonului regulat, obţinem un triunghi regulat (fig. 6.5).

Pentru a construi un patrulater regulat este destul de dus în circumferință două diametre perpendiculare AC și BD (fig. 6.6). Atunci patrulaterul $ABCD$ – pătrat (demonstraţi aceasta independent.

Dacă sunt construite poligoane regulate cu n-unghiuri, atunci este ușor de construit poligoane regulate cu $2n$-unghiuri. Pentru aceasta trebuie de aflat mijlocurile laturilor poligonului cu n-unghiuri și de dus razele circumferinței circumscrise prin punctele obţinute. Atunci capetele razelor și vârfurile poligonului cu n-laturi dat vor fi vârfurile poligonului regulat cu $2n$-laturi. În figura 6.7 și 6.8 este desenat cum se construiește poligonul regulat cu 8 laturi și 12 laturi.

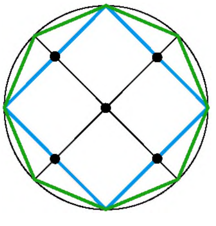


Fig. 6.7

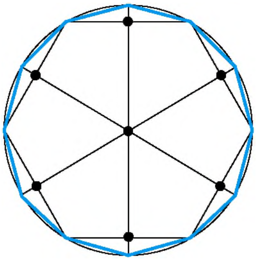


Fig. 6.8

Problema 1. Există oare un poligon regulat, unghiul cărui este egal: 1) 155°; 2) 177°? În cazul răspunsului afirmativ, specificaţi tipul .

1) Fie că n – este numărul de laturi ale poligonului căutat. Pe de o parte, suma unghiurilor este $180° (n - 2)$. 1) Pe de altă parte, această sumă este egală cu $155°n$. Deci, $180° (n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$. Deoarece n trebuie să fie număr natural, atunci așa un poligon regulat nu există

2) Avem: $180° (n - 2) = 177°n$; $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Răspuns: 1) nu există; 2) există, acesta este – poligon cu o sută douăzeci de laturi. ◀

Problema 2. Într-o circumferinţă este înscris un triunghi regulat cu latura 18cm. Aflaţi latura hexagonului regulat circumscris acestei circumferinţe.

Rezolvare. Raza circumferinţei circumscrise triunghiului regulat se calculează după formula $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, unde a – lungimea laturii triunghiului (fig. 6.9). Deci, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (cm).

După condiţie raza circumferinţei înscrise în hexagonul regulat este egală cu raza circumferinţei circumscrise triunghiului regulat, deci $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ cm. Deoarece $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, unde b – lungimea laturii hexagonului regulat, atunci $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (cm).

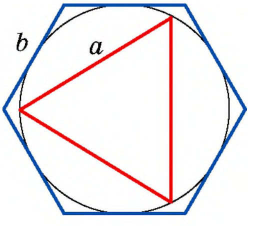


Fig. 6.9

Răspuns: 12 cm. ◀

?

1. Care poligon se numeşte regulat?
2. Cum se mai numeşte triunghi regulat?
3. Cum se mai numeşte patrulater regulat?
4. În jurul cărui poligon regulat se poate circumscrie o circumferinţă?
5. În care poligon regulat se poate înscrie o circumferinţă?
6. Cum sunt situate unul faţă de altul centrele cercurilor circumscrise şi înscrise poligonului regulat?
7. Ce se numeşte centrul poligonului regulat?
8. Scrieţi formulele razelor circumferinţelor circumscrise şi înscrise poligonului regulat, triunghiului, patrulaterului, hexagonului.
9. Descrieţi construirea hexagonului regulat.
10. Descrieţi construirea patrulaterului regulat.
11. Cum, având un poligon regulat cu n-unghiuri, se poate de construit un poligon cu $2n$-unghiuri?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

6.1.° Desenaţi o circumferinţă, raza căreia este egală cu 3 cm. Construiţi înscris în această circumferinţă:
1) hexagon regulat;
2) triunghi regulat;
3) decagon regulat.

6.2.° Desenaţi o circumferinţă, raza căreia este egală cu 2,5 cm. Construiţi înscriind în această circumferinţă:
1) patrulater regulat;
2) octogon regulat.

EXERCIŢII

6.3.° Aflaţi laturile poligonului regulat cu n laturi, dacă:
1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

6.4.° Aflaţi unghiurile poligonului regulat:
1) octogonului; 2) decagonului.

6.5.° Câte laturi are poligonul regulat, unghiul căruia este egal cu:
1) 160°; 2) 171°?

6.6.° Câte laturi are poligonul regulat dacă unghiului lui este egal:
1) 108°; 2) 175°?

6.7.° Există oare poligon regulat, unghiul cărui este egal:
1) 140°; 2) 130°?

6.8.° Câte laturi are poligonul regulat, dacă unghiul adiacent cu unghiul poligonului alcătuiește $\frac{1}{9}$ din ughiul poligonului?

6.9.° Aflaţi numărul de laturi ale poligonului regulat, dacă unghiul lui este cu 168° mai mare da la unghiul adiacent cu el.

6.10.° Câte laturi are poligonul regulat înscris în circumferinţă, dacă măsura în grade a arcului circumferinţei circumscrise pe care o întinde latura poligonului, este egală:
1) 90°; 2) 24°?

6.11.° Aflaţi numărul de laturi a poligonului regulat, unghiul de la centru a cărui este egal:
1) 120°; 2) 72°.

6.12.° Fie, că a – lungimea laturii triunghiului regulat, R și r – razele circumferințelor circumscrise și înscrise. Completaţi tabelul (lungimea segmentului este în centimetri):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.13.° Fie, că a – lungimea laturii pătratului, R și r – razele cercurilor circumscrise și înscrise. Completaţi tabelul (lungimea segmentului este în centimetri):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.14.° Înălţimea triunghiului regulat este egală cu 15 cm. Cu ce este egală raza:
1) circumferinței circumscrise; 2) circumferinței înscrise?

6.15.° circumferinței înscrise $6\sqrt{2}$ cm. Cu ce este egală raza:
1) circumferinței circumscrise; 2) circumferinței înscrise?

6.16.° Raza circumferinței este egală cu 12 cm. Aflaţi latura poligonului regulat înscris în această circumferință:
1) a hexagonului; 2) a decagonului.

6.17.° Raza circumferinței este egală cu $8\sqrt{3}$ cm. Aflaţi latura hexagonului regulat circumscris circumferinței.

6.18.° Demonstraţi, că raza circumferinței circumscrise unui triunghi regulat, este de două ori mai mare decât raza circumferinței înscrise în acest triunghi.

6.19.° Raza circumferinței,circumscrise în jurul triunghiului regulat este cu 4 cm mai mare ca raza circumferinței înscrise. Aflaţi razele circumferințelor înscrise și circumscrise și latura triunghiului.

6.20.° Latura poligonului regulat este egală cu a, raza circumferinței circumscrise este egală cu R. Aflaţi raza circumferinței înscrise.

6.21.° Razele cercurilor înscrise și circumscrise a poligonului regulat sunt egale cu r și R. Aflaţi latura poligonului.

6.22.° Latura poligonului regulat este egală cu a, raza circumferinței înscrise este egală cu r. Aflaţi raza circumferinței circumscrise.

6.23.° Unei circumferințe este circumscris un hexan regulat cu latura $4\sqrt{3}$ cm. Aflaţi latura pătratului înscris în această circumferință.

6.24.° În circumferință este înscris un pătrat cu latura de $6\sqrt{2}$ cm. Aflaţi latura triunghiului regulat care este circumscris acestei circumferințe.

6.25.° Diametrul circumferinței este egal cu 16 cm. Se poate oare din ea de tăiat un pătrat cu latura de 12 cm?

6.26.° Care trebuie să fie cel mai mic diametru al unui buștean rotund ca din el să se poată produce o grindă, a căreia secţiune transversală este un triunghi regulat cu laturile de 15 cm?

6.27.° Care trebuie să fie cel mai mic diametru al unui buștean rotund ca din el să se poată produce o grindă, a căreia secţiune transversală este un pătrat cu laturile de 14 cm?

6.28.• Câte laturi are poligonul regulat, unghiul căruia este cu 36° mai mare ca unghiul de la centru?

6.29.• Unghiul între razele circumferinței înscrise în poligonul regulat duse la punctele de tangență ale acestei circumferințe la laturile megieșeale poligonului, este egal cu 20°. Aflaţi numărul de laturi ale poligonului.

6.30.• Demonstraţi, că toate diagonalele pentagonului regulat sunt egale.

6.31.• Demonstraţi, că fiecare diagonală a pentagonului regulat este paralelă uneia din laturile lui.

6.32.• Coarda comună a două circumferințe, care se intersectează este latura triunghiului regulat înscris într-o circumferință și latura pătratului înscris în altă circumferință. Lungimea acestei coarde este egală cu a. Aflaţi distanţa dintre centrele acestor circumferințe, dacă ele sunt situate:

1) din ambele părți a coardei; 2) de aceiași parte a coardei.

6.33.• Coarda comună a două circumferințe, care se intersectează este latura triunghiului regulat înscris într-o circumferință și latura hexagonului regulat înscris în altă circumferință. Lungimea acestei coarde este egală cu a. Aflaţi distanţa dintre centrele acestor circumferințe, dacă ele sunt situate:

1) din ambele părți a coardei; 2) de aceiași parte a coardei.

6.34.• Într-o circumferință este înscris un triunghi regulat și în jurul ei este circumscris un triunghi regulat. Aflaţi raportul laturilor acestor triunghiuri.

6.35.• Într-o circumferință este înscris un hexagon regulat și în jurul ei este circumscris un hexagon regulat. Aflaţi raportul laturilor acestor hexagoane.

6.36.• Demonstraţi, că latura octogonului regulat este egală cu $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, unde R – raza circumferinței circumscrise lui.

6.37.• Demonstraţi, că latura dodecagonului regulat este egală cu $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, unde R – raza circumferinței circumscrise lui.

6.38.• Care este dimensiunea deschiderii unei chei pentru piuliţă hexagonală, baza cărei are forma unui hexagon regulat (fig. 6.10), dacă lăţimea feţei piuliţei este egală cu 25 mm iar spațiul între feţele piuliţei și cheie este 0,5 mm?

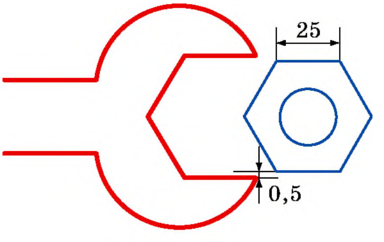


Fig. 6.10

6.39.• Aflaţi aria octogonului regulat, dacă raza circumferinței circumscrise lui este egală cu R.

6.40.• Aflaţi diagonalele și aria hexagonului regulat, latura căruia este egală cu a.

6.41.•• Unghiurile pătratului cu latura de 6 cm sunt tăiate în așa fel, că s-a obținut octogon regulat. Aflaţi latura octogonului obţinut.

6.42.•• Unghiurile triunghiului regulat cu latura de 24 cm sunt tăiate în așa fel, că s-a obținut hexagon regulat. Aflaţi latura hexagonului obţinu.

6.43.•• Aflaţi diagonalele octogonului regulat, latura căruia este egală cu a.

6.44.•• Într-un dodecagon regulat latura căruia este egală cu a, pe rând au fost unite mijlocurile a șase laturi luate peste una. Aflaţi latura hexagonului regulat, care sa format.

6.45.•• În octogonul regulat, latura căruia este egală cu a, pe rând au fost unite mijlocurile a patru laturi luate peste una. Găsiţi latura hexagonului regulat, care sa format.

6.46.• Ce formă a poligoanelor regulate egale pot avea plăcile parchetului, astfel încât cu ele să se poată aşterne podeaua?

6.47.• Este dat hexagonul regulat, latura căruia este egală cu 1 cm. Folosind doar rigla, construiţi un segment cu lungimea de $\sqrt{7}$ cm.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

6.48. Circumferința este împărţită în 5 arcuri egale: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE =$ $= \cup AE$. Aflaţi:
1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

6.49. Pe o parte a unghiului cu vârful în punctual A sau notat punctele B și C (punctul B este situate între punctele A și C), pa altă parte – punctele D și E (punctul D este situate între punctele A și E), precum $AB = 28$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 42$ cm, $BE = 21$ cm. Aflaţi segmentul CD.

6.50. Baza triunghiului isoscel obtuz este egală cu 24 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui, – 13 cm. Aflați aria triunghiulu.

6.51. Prin punctul A la o circumferință sunt duse două tangente. Distanța până la punctul A de tangență este egală cu 12 cm, iar distanța între punctele de tangență – 14.4 cm. Aflaţi raza cercului.

DESPRE CONSTRUIREA POLIGOANELOR REGULATE C n-LATURI

Demonstrăm că orice poligon regulat cu n-laturi este un poligon convex. Pentru aceasta este destul de arătat că orice poligon are cel puțin un unghi mai mic de 180°. Atunci din aceea că în poligonul regulat cu n-laturi toate unghiurile sunt egale, rezultă că toate ele sunt mai mici de 180°, adică poligonul este convex.

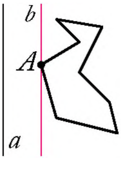


Fig. 6.11

Analizăm un poligon arbitrar și dreapta a, care nu are cu el puncte comune (fig. 6.11). Din fiecare unghi a poligonului ducem perpendiculară pe dreapta a.

Comparând lungimile acestor perpendiculare, noi putem alege vârful poligonului care este mai puţin îndepărtată de la dreapta a (dacă aşa vârfuri sunt câteva, atunci alegem oricare din ele). Fie că această proprietate o are vârful A (fig. 6.11). Prin punctul A ducem dreapta b, paralelă dreptei a. Atunci unghiul A al poligonului este situat într-un semiplan faţă de dreapta b. Deci, $\angle A < 180°$.

Voi deja ştiţi cum cu ajutorul compasului şi riglei să construiţi poligonul regulat cu 4 laturi şi 8 laturi, 16 laturi, 32 laturi, adică orice poligon cu 2^n laturi (n – număr natural, $n > 1$). Priceperea de a construi un triunghi regulat dă posibilitatea construirii unui lanţ de astfel de poligoane regulate: 6 laturi, 12 laturi, 24 laturi şi aşa mai departe, adică oricare $3 \cdot 2^n$ laturi (n – număr natural).

Sarcina de a construi un poligon regulat cu ajutorul compasului şi a riglei au studiat-o geometrii Antici Greci. În special, faţă de poligoane menţionate mai sus, ei puteau construi poligoane regulate cu 5 laturi şi 15 laturi, ceea ce este destul de dificil.

Savanţii antici, care puteau construi orice poligon regulat cu n laturi, unde $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, au încercat să rezolve această problemă şi pentru $n = 7, 9$. Ei nu au reuşit. În general, mai mult de două mii de ani matematicienii nu au putut să se mişte din loc în rezolvarea acestei probleme. În 1796 marele matematician german Carl Friedrich Gauss a putut cu ajutorul compasului şi riglei să construiască poligonul regulat cu 17 laturi. În 1801 Gauss a demonstrat, cu ajutorul riglei şi compasului se poate construi un poligon regulat cu n laturi atunci şi numai atunci, când $n = 2^k$, unde $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, sau $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, unde k – număr întreg ne negative, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ – numere simple de tip $2^{2^m} + 1$, unde m – număr întreg ne negative, care se numesc numere simple Ferma[1]. Acum sunt cunoscute doar cinci numere simple Ferma: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Gauss a dat descoperirii sale atât de mare importanţă, încât a poruncit să-i înfăţişeze poligonul cu 17 laturi pe mormântul lui. Pe piatra funerară a lui Gauss această figură nu este, cu toate că monumentul lui Gauss din Braunschweig este pe piedestal în formă de poligon cu 17 laturi.

[1] Pierre Ferma (1601–1665) – este un matematician francez, unul dintre fondatorii teoriei numerelor.

7. Lungimea circumferinței. Aria cercului

În figura 7.1 sunt prezentate poligoane regulate cu 4 laturi, 8 laturi și 16 laturi înscrise în circumferință.

Noi observăm, că la mărirea numărului de laturi a poligonului regulat cu n-laturi perimetrul P_n tot mai puţin și mai puţin se deosebește de lungimea C circumferinței circumscrise.

Astfel, pentru exemplul nostru putem scrie:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

La mărirea nelimitată a numărului de laturi a poligonului regulat, perimetrul lui v-a fi cât se poate de puțin deferit de la lungimea circumferinței. Acest lucru înseamnă că diferenţa $C - P_n$ se poate face mai mică de, de exemplu, 10^{-6}, 10^{-9} și chiar mai mică de la orice număr pozitiv.

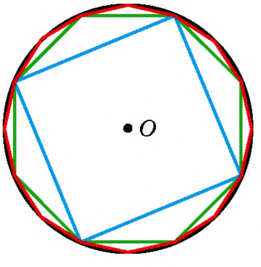


Fig. 7.1

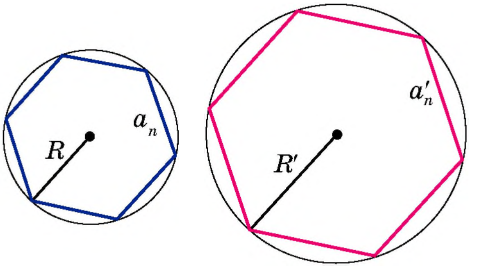


Fig. 7.2

Analizăm două poligoane regulate cu n-laturi cu laturile a_n și a'_n, înscrise în circumferințele, razele cărora sunt corespunzător egale R și R' (fig. 7.2). Atunci perimetrele P_n și P'_n se pot calcula după formul

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

De aici

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Această egalitate este corectă pentru orice valoare a lui n (n – număr natural, $n \geqslant 3$). La mărirea nelimitată a valorii n, perimetrele P_n și P_n' corespunzător vor fi cât se poate de puţin deferite de la lungimile C și C' circumferințelor circumscrise. Atunci la mărirea nelimitată a lui n raportul $\frac{P_n}{P'_n}$ v-a fi cât se poate de puţin deferit de la raportul $\frac{C}{C'}$. Având în vedere egalitatea (*) ajungem la concluzia, că numărul $\frac{2R}{2R'}$ puţin diferă de la numărul $\frac{C}{C'}$. Aceasta este posibil numai atunci, când $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, adică $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Ultima egalitate înseamnă, că ***pentru toate circumferințele raportul lungimii circumferinței la diametrul este unul și același număr***.

Din cursul de matematică clasa 6 voi știţi, că acest număr se notează cu litera grecească π (se citește: “pi”).

Din egalitatea $\frac{C}{2R} = \pi$ obținem formula pentru calculul lungimii circumferinței:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Numărul π este iraţional, deci el nu poate fi reprezentat formă de fracţie zecimală finită. De obicei la rezolvarea problemei ca valoare aproximativă π se consideră numărul 3,14.

Remarcabilul savant al Greciei antice Arhimede (sec. III î.e.n.), a exprimat prin diametrul circumferinței circumscrise perimetrul poligonului regulat cu 96 laturi, a stabilit, că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. De aici rezultă, că $\pi \approx 3{,}14$.

Cu ajutorul calculatoarelor moderne și programe special se poate calcula numărul π cu mare precizie. Înregistrăm numărul π cu 47 de cifre după virgulă:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

În 1989 numărul π a fost calculate cu precizia de până la 1 011 196 691 cifre după virgulă. Acest fapt a fost înscris în cartea recordurilor lui Ghinnes. Acest număr în carte nu este indicat, deoarece pentru acesta ar trebui peste o mie de pagini. În 2017 au fost calculate peste 22 de trilioane de semne a numărului π.

Să găsim formula pentru calculul lungimii arcului de circumferință cu măsura în grade $n°$. Deoarece măsura în grade a circumferinței întregi este egală cu 360°, lungimea arcului de 1° este egală $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Atunci lungimea l a arcului în $n°$ se calculează după formula

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

Deducem formula pentru calculul ariei circumferinței.

Ne adresăm din nou la figura 7.1. Noi vedem că la mărirea numărului de laturi a poligonului regulat cu n laturi aria lui S_n tot mai puţin diferă de la aria S a circumferinței. La creșterea nelimitată a numărului de laturi aria lui se apropie de aria circumferinței.

În figura 7.3 este arătat un fragment de poligon regulat cu n laturi cu centrul în punctul O, cu latura $AB = a_n$ și raza circumferinței circumscrise, care este egală cu R. Ducem perpendicular OM pe latura AB. Avem:

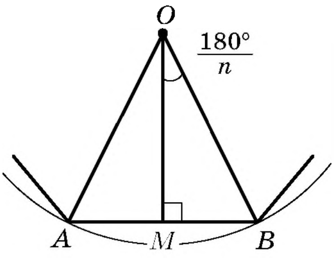


Fig. 7.3

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Deoarece razele sunt duse în vârfurile poligonului regulat cu n laturi, îl împart pe el în n triunghiuri egale, și aria poligonului cu n laturi S_n de n ori este mai mare decât aria triunghiului AOB. Atunci

$S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$. Rezultă

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}, \qquad (**)$$

unde P_n – perimetrul poligonului regulat cu n laturi.

La mărirea nelimitată a valorii n mărimea $\frac{180\Upsilon}{n}$ se va diferenția de la 0°, așadar, $\cos \frac{180\Upsilon}{n}$ se apropie la 1. Perimetrul P_n se v-a apropia de mărimea C a circumferinței, iar aria S_n – la aria S a circumferinței. Atunci după egalitatea (**) se poate scrie: $S = \frac{1}{2} C \varnothing R$.

Din această egalitate obţinem formula pentru calculul ariei cercului:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

În figura 7.4 razele OA și OB împart cercul în două părţi, care sunt colorate în culori diferite. Fiecare din aceste părţi împreună cu razele OA și OB se numesc **sector circular** sau simplu **sector**.

Este clar, că cercul cu raza R se poate împărți în 360 sectoare egale, fiecare din ele va conţine arcul de 1°. Aria acestui sector este egală cu $\frac{\neq R^2}{360}$. Atunci aria S a sectorului, care conţine arcul circumferinței de $n°$, se calculează după formula

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

În figura 7.5 coarda AB împarte cercul în două părţi, care sunt colorate în două culori diferite. Fiecare din aceste părţi împreună cu coarda AB se numește **segmentul circular** sau simplu **segment**. Coarda AB se numește **baza segmentului**.

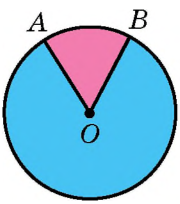


Fig. 7.4

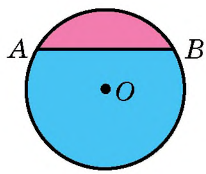


Fig. 7.5

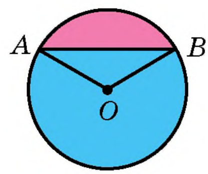


Fig. 7.6

Pentru a afla aria segmentului vopsit în culoare roz (fig. 7.6), trebuie de la aria sectorului, care include coarda AB de scăzut aria triunghiului AOB (punctul O – centrul cercului). Pentru a afla aria segmentului vopsit în azuriu trebuie la aria sectorului, care nu include coarda AB de adunat aria triunghiului AOB.

Dacă coarda AB este diametrul cercului, atunci ea împarte cercul în două segmente, care se numesc semicercuri. Aria S semicercului se calculează după formula $S = \frac{\pi R^2}{2}$, unde R – raza cercului.

Problema 1. Lungimea arcului cercului, raza căruia este 25 cm, este egală cu π cm. Aflaţi măsura în grade a arcului.

Rezolvare. Din formula $l = \frac{\pi R n}{180}$ obţinem $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Deci, măsura în grade căutată $n° = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^{\circ} = 7{,}2°$.

Răspuns: 7,2°. ◄

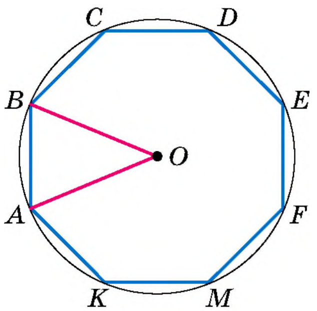


Fig. 7.7

Problema 2. În cercul cu centrul O, raza cărui este egală cu 8 cm este înscris octogonul regulat $ABCDEFMK$ (fig. 7.7). Aflaţi aria sectorului şi a segmentului, care includ arcul AB.

Rezolvare. Unghiul AOB – unghiul de la centru a octogonului regulat, de aceea $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Atunci aria sectorului căutat este egală cu $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (cm^2), aria segmentului:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2}OA^2 \sin \angle AOB = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Răspuns: 8π cm^2, $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ cm^2. ◄

1. Care raport se notează cu litera π?
2. Numiţi valoarea aproximativă a numărului π cu exactitate de sutimi.
3. După ce formulă se calculează lungimea circumferinţei?
4. După ce formulă se calculează lungimea arcului de circumferinţă?
5. După ce formulă se calculează aria cercului?
6. Explicaţi, ce figură geometrică se numeşte sector circular.
7. După ce formulă se calculează aria sectorului circular?
8. Explicaţi, ce figură geometrică se numeşte segment circular.
9. Explicaţi, cum se poate afla aria segmentului circular.

EXERCIŢII

7.1.° Găsiţi lungimea circumferinței, diametrul căreia este egal:
1) 1,2 cm; 2) 3,5 cm.

7.2.° Găsiţi lungimea circumferinței, raza căreia este egal:
1) 6 cm; 2) 1,4 m.

7.3.° Găsiţi aria cercului, raza căruia este egal:
1) 4 cm; 2) 14 dm.

7.4.° Găsiţi aria cercului, diametrul căruia este egal:
1) 20 cm; 2) 3,2 dm.

7.5.° Găsiţi aria cercului, lungimea circumferinței căreia este egală cu l.

7.6.° Găsiţi aria cercului, lungimea circumferinței căreia este egală cu 125,6 cm.

7.7.° Cum se v-a schimba lungimea circumferinței, dacă raza ei:
1) se v-a mări de 2 ori; 2) se v-a micșora de 3 ori?

7.8.° Raza circumferinței a fost mărită cu 1 cm. Cu cât s-a mărit lungimea circumferinței?

7.9.° Lungimea ecuatorului Pământului aproximativ este egal cu 40 000 000 m. Considerăm, că Pământul are forma sferei, calculaţi raza în kilometri.

7.10.° Calculaţi lungimea liniei roșii în figura 7.8.

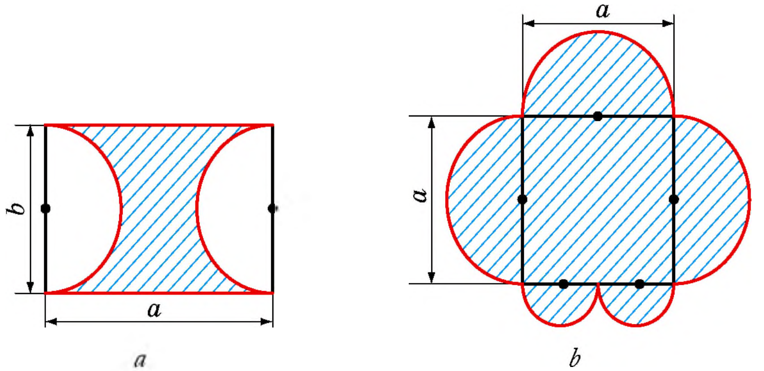


Fig. 7.8

7.11.° Cum se v-a schimba aria cercului, dacă raza lui:
1) sa v-a mări de 4 ori;
2) se v-a micșora de 5 ori?

7.12.° Calculaţi aria figurii hașurate, care este prezentată în figura 7.9.

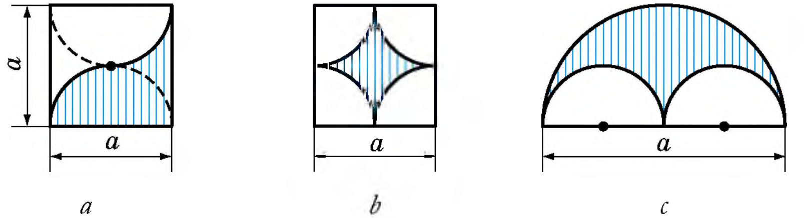


Fig. 7.9

7.13.° Calculaţi aria figurii haşurate (fig. 7.9.), dacă lungimea laturii pătratului este egală cu *a*.

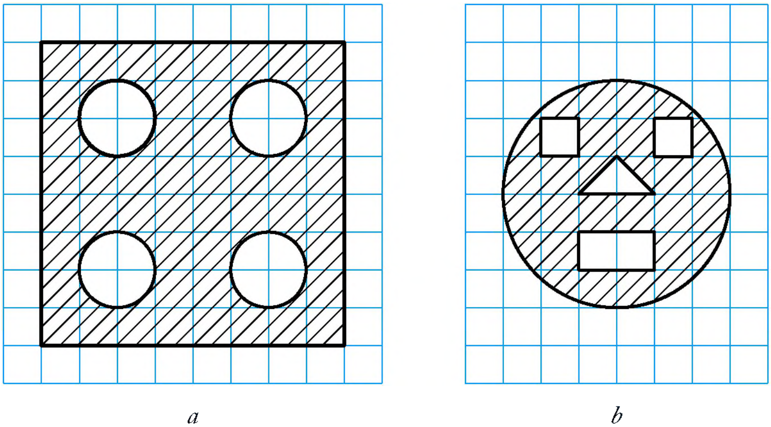


Fig. 7.10

7.14.° Se vând clătite de două feluri: diametrul 30 cm și 20 cm. Dacă toate clătitele au una și aceeași grosime, atunci în ce caz cumpărătorul mănâncă mai mult: când mănâncă unul mare sau două mici?

7.15.° Găsiţi lungimea circumferinței circumscrise unui triunghi regulat cu latura *a*.

7.16.° Găsiţi lungimea circumferinței înscrise în pătratul cu latura *a*.

7.17.° Găsiţi aria cercului circumscris pătratului cu latura *a*.

7.18.° Găsiţi aria cercului înscris în hexagonul regulat cu latura *a*.

7.19.° Găsiţi aria cercului înscris în triunghiul regulat cu latura *a*.

7.20.° Găsiţi aria cercului circumscris dreptunghiului cu latura *a* și *b*.

7.21.° Găsiţi aria cercului circumscris în jurul triunghiului echilateral cu latura lateral *b* și și unghiul α la bază.

7.22.° Găsiţi lungimea circumferinței circumscrise dreptunghiului cu latura *a* și unghiul α cuprins între latura dată și diagonala dreptunghiului.

7.23.° Raza circumferinței este egală cu 8 cm. Aflaţi lungimea arcului circumferinței măsura în grade a căreia este egală cu:
1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°.

7.24.° Lungimea arcului circumferinței este egal cu 12π cm, iar măsura în garde a lui este de 27°. Aflaţi raza circumferinței.

7.25.° Lungimea arcului circumferinței cu raza de 24 cm este egală cu 3π cm. Aflaţi măsura în grade a arcului.

7.26.° Calculaţi lungimea arcului ecuatorului Pământului, măsura în grade căreia este egală cu 1°, dacă raza ecuatorului este aproximativ egală cu 6400 km.

7.27.° Raza cercului este egală cu 6 cm. Găsiţi aria sectorului, dacă măsura în grade a arcului lui este egală cu:
1) 15°; 2) 144°; 3) 280°.

7.28.° Aria sectorului este $\frac{5}{8}$ din aria cercului. Aflaţi măsura în grade a arcului lui.

7.29.° Aria sectorului este 6π dm^2. Aflaţi măsura în grade a arcului acestui sector, dacă raza cercului este egală cu 12 dm.

7.30.° Aria sectorului este $\frac{5\neq}{4}$ cm^2, iar măsura în grade a arcului acestui sector este 75°. Aflaţi raza cercului, parte al căruia este acest sector.

7.31.° Poate oare sectorul cercului să fie segmentul lui?

7.32.° Aflaţi aria segmentului circular, dacă raza cercului este egală cu 5 cm, iar măsura în grade a arcului segmentului este egală:
1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

7.33.° Aflaţi aria segmentului circular, dacă raza cercului este egală cu 2 cm, iar măsura în grade a arcului segmentului este egală:
1) 60°; 2) 300°.

7.34.• Roţile automobilului au diametrul 65 cm. Automobilul merge cu așa viteză, că roţile fac 6 rotaţii în fiecare secundă. Aflaţi viteza automobilului în kilometri pe secundă. Răspunsul rotunjiţi-l până la zecimi.

7.35.• Aflaţi lungimea arcului, care circumscrie indicatorul de oră cu lungimea de 6 cm într-o oră.

7.36.• Aflaţi lungimea arcului, care circumscrie indicatorul de minute cu lungimea de 24 cm în 40 de minute.

7.37.• Raza circumferinței a fost mărită cu *a*. Demonstraţi, că lungimea circumferinței s-a mărit cu mărimea, care nu depinde de raza circumferinței date.

7.38.• Latura triunghiului este egală cu 6 cm, iar unghiurile adiacente sunt egale cu 50° și 100°. Aflaţi lungimile arcurilor, pe care vârfurile triunghiului împart circumferința circumscrisă lui.

7.39.• Latura triunghiului este egală cu $5\sqrt{3}$ cm, iar unghiurile adiacente ei sunt egale cu 35° și 25°. Aflaţi lungimea arcurilor, pe care vârfurile triunghiului împart circumferința circumscrisă lui.

7.40.• Pe cateta AC a triunghiului dreptunghiular ABC ($\angle C = 90°$) ca pe diametru este construită o circumferință. Aflaţi lungimea arcului acestei circumferințe, care aparţine triunghiului, dacă $\angle A = 24°$, $AC = 20$ cm.

7.41.• Unghiul de la baza unui triunghi isoscel este de 70°. La înălţimea triunghiului, care este dusă la bază și este de 27 cm, ca pe diametru s-a construit o circumferință. Aflaţi lungimea arcului circumferinței, care aparţine triunghiului.

7.42.• Segmentul AB este împărţit în n segmente. Pe fiecare dintre ele ca pe diametru a fost construită o semi circumferință. Această acţiune a fost repetată prin împărţirea segmentului dat în m segmente. Aflaţi raportul sumelor lungimilor semi circumferințelor, obţinute în primul și în al doilea caz.

7.43.• Demonstraţi, că aria semicercului construit pe ipotenuza triunghiului dreptunghiular ca pe diametru (fig. 7.11), este egală cu suma arcurilor semicercurilor, construite pe catetele lui ca pe diametre.

7.44.• Două ţevi, diametrele căror sunt egale cu 30 cm și 40 cm, trebuie înlocuite cu o ţeavă cu aceiași capacitate de debit[1]. Care trebuie să fie diametrul acestei ţevi?

7.45.• Cu câte procente se v-a mări aria cercului, dacă raza lui se v-a mări cu 10 %?

7.46.• În cerc este înscris un pătrat cu latura a. Aflaţi aria celui mai mic segment baza cărora este latura pătratului.

7.47.• Dintr-o foaie de tablă, care are formă unui cerc a fost tăiat un hexagon regulat cu cea mai mare arie posibilă. Câte procente de tablă a mers în deșeu?

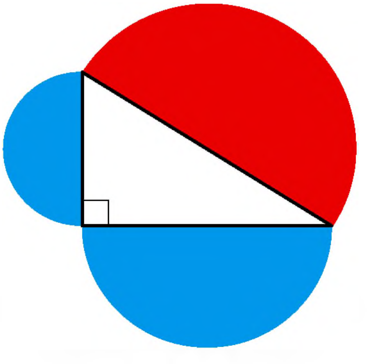


Fig. 7.11

7.48.• În cerc este înscris un triunghi regulat cu latura a. Aflaţi aria celui mai mic segment, baza cărora este latura triunghiului.

7.49.• În sectorul circular, raza cărui este egală cu R, iar unghiul de la centru este de 60°, este înscris un cerc. Găsiţi aria acestui cerc.

7.50.•• Găsiți aria rozetei (figurii hașurate), care este desenată în figura 7.12, dacă latura pătratului $ABCD$ este egală cu a.

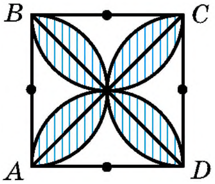


Fig. 7.12

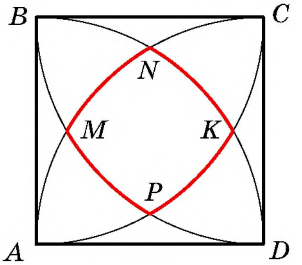


Fig. 7.13

7.51.•• La construirea a patru arcuri cu centrele în vârfurile pătratului $ABCD$ și razele care sunt egale laturii pătratului s-a format figura limitată de linia roșie (fig. 7.13). Aflați lungimea acestei linii, dacă lungimea laturii pătratului este egală cu a.

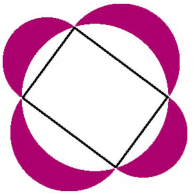


Fig. 7.14

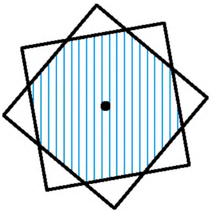


Fig. 7.15

7.52.•• (Problema lui Hippocrates[1]). În jurul dreptunghiului este circumscrisă o circumferință și pe fiecare latură a lui ca pe diametre sunt construite semicircumferințe (fig. 7.14). Demonstraţi, că suma ariilor figurilor vopsite (secerilor lui Hippocrates) este egală cu aria dreptunghiului.

7.53.•• Două pătrate cu latura de 1 cm au un centru comun (fig. 7.15). Demonstraţi, că aria părţii lor comune este mai mare de $\frac{3}{4}$.

[1] Hippocrates din Pios – geometru din Grecia antică (sec al V-a i.e.n.).

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

7.54. Aflaţi latura rombului, dacă înălţimea lui este egală cu 6 cm, iar unghiul între latura rombului și a uneia din diagonale este egal cu 15°.

7.55. Bisectoarea unghiului A al dreptunghiului $ABCD$ împarte latura BC a lui în segmentele BM și MC cu lungimea de 10 cm și 14 cm corespunzător. În segmente de ce lungime împarte această bisectoare diagonala dreptunghiului?

7.56. Suma unghiurilor la baza mai mare a trapezului este de 90°. Demonstraţi, că distanţa între mijlocurile bazelor trapezului este egală cu semi diferenţa bazelor.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

7.57. Cu ce este egală distanţa între punctele A și B de pe axa de coordonate dacă:
1) $A(3)$ și $B(7)$;
2) $A(-2)$ și $B(4)$;
3) $A(-2)$ și $B(-6)$;
4) $A(a)$ și $B(b)$?

7.58. Pe planul de coordonate desenaţi segmentul AB, după desen găsiţi coordonatele mijlocului segmentului și comparaţi-le cu media aritmetică a coordonatelor corespunzătoare a coordonatelor punctelor A și B, dacă:
1) $A(-1; -6)$, $B(5; -6)$;
2) $A(3; 1)$, $B(3; 5)$;
3) $A(3; -5)$, $B(-1; 3)$.

7.59. Pe planul de coordonate desenaţi triunghiul ABC și aflaţi laturile lui, dacă $A(5; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(-3; -1)$.

7.60. În ce cadran de coordonate se află punctul:
1) $A(3; -4)$; 2) $B(-3; 1)$; 3) $C(-4; -5)$; 4) $D(1; 9)$?

7.61. În ce cadran se află punctul M, dacă:
1) abscisa este pozitivă iar ordonata este negativă;
2) produsul abscisei și ordonatei este număr negativ;
3) abscisa și ordonata negative?

7.62. Ce se poate de spus despre coordonatele punctului punctele A, dacă:
1) punctul A este situat pe axa abscisei;
2) punctul A este situat pe axa ordonatei;
3) punctul A este situat pe bisectoarea celui de-al patrulea unghi de coordonate;
4) punctul A este situat pe bisectoarea celui de-al treilea unghi de coordonate;
5) punctul A este situat pe bisectoarea primului unghi de coordonate?

7.63. Indicaţi coordonatele vârfurilor dreptunghiului $ABCD$ (fig. 7.16).

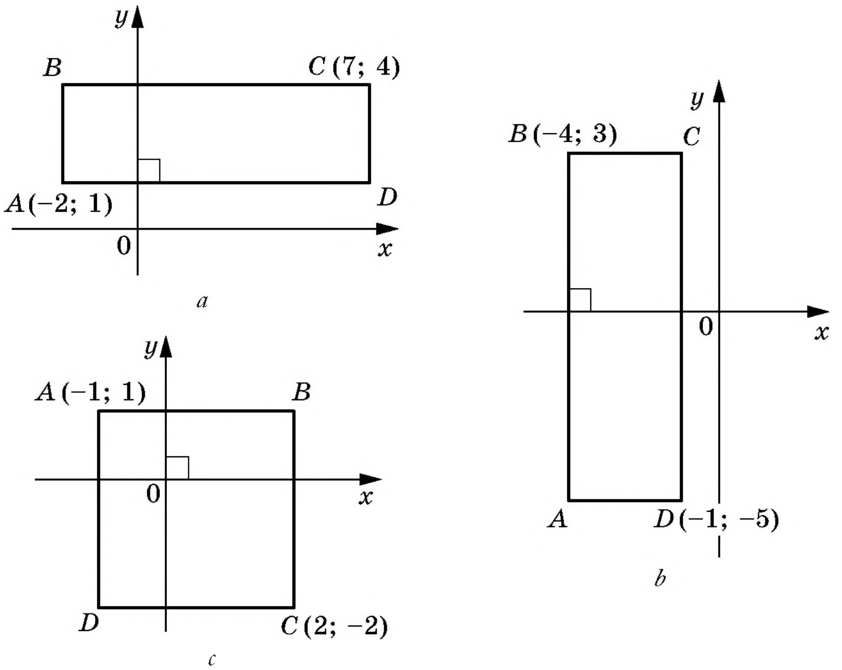


Fig. 7.16

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTAZAŢI

7.64. Pe plan sunt notate câteva puncte. Unele dintre acestea sunt vopsite în roşu, restul – albastru. Este cunoscut faptul că puncte de fiecare culoare sunt nu mai puţin de trei şi nici trei puncte de o culoare nu sunt situate pe o dreaptă. Demonstraţi că oricare trei puncte de aceeaşi culoare sunt vârfurile unui triunghi, pe laturile cărui pot fi situate nu mai mult de două puncte de altă culoare.

ÎNSĂRCINARĂ NR. 2 "CONTROLEAZĂ-TE" ÎN FORMĂ TEST

1. Găsiţi numărul de laturi a poligonului regulat, dacă unghiul lui este egal cu 170°.
A) 30; C) 36;
B) 32; D) așa un poligon nu există.

2. Cu ce este egal unghiul de la centru al decagonului regulat?
A) 18°; B) 36°; C) 144°; D) 10°.

3. Care cel mai mare unghi de la centru poate avea poligonul regulat?
A) 90°; C) 150°;
B) 120°; D) nu se poate indica.

4. În circumferință este înscris un hexagon regulat, latura căruia este a. Aflaţi latura triunghiului, circumscris acestei circumferințe.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $a\sqrt{3}$; D) $2a\sqrt{3}$.

5. Cu ce este egală raza circumferinței înscrise în hexagonul regulat, diagonala cea mai mică este egală cu 12 cm?
A) 6 cm; B) $6\sqrt{3}$ cm; C) $2\sqrt{3}$ cm; D) 12 cm.

6. Găsiţi lungimea arcului de circumferință, măsura în grade a căruia este egală cu 207°, dacă raza circumferinței – 4 cm.
A) 23 cm; B) 4,6 cm; C) 23π cm; D) $4{,}6\pi$ cm.

7. Ce parte a ariei cercului este aria sectorului, unghiul centralizat este egal cu 140°?

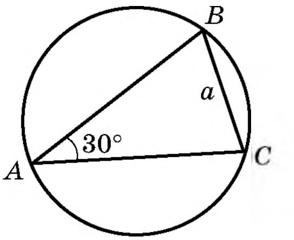
A) $\frac{7}{9}$; B) $\frac{7}{12}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{7}{18}$.

8. Unghiul înscris în circumferință care este egal cu 40°, se sprijină pe un arc cu lungimea de 8 cm. Care este lungimea circumferinței date?
A) 72 cm; B) 72π cm; C) 36 cm; D) 36π cm.

9. Care trebuie să fie lungimea coardei circumferinței, raza căreia este egală cu R, pentru ca lungimile arcurilor, pe care capete acestei coarde împart circumferința, să se rapoarte ca 2 : 1?

A) R; B) $2R$; C) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; D) $R\sqrt{3}$.

10. În figură este desenat triunghiul ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. înscris în circumferință. Cu ce este egală aria segmentului, baza căruia întinde arcul BAC?



A) $\dfrac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

B) $\dfrac{a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

C) $\dfrac{a^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

D) $\dfrac{a^2\left(10\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. În triunghiul ABC se știe, că $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ cm. Circumferința cu centrul în punctul A este tangentă la dreapta BC. Aflaţi lungimea arcului acestei circumferințe care aparţine triunghiului ABC.

A) $\dfrac{7\neq}{18}$ cm;   B) $\dfrac{7\neq}{9}$ cm;   C) $\dfrac{7\neq}{12}$ cm;   D) $\dfrac{7\neq}{6}$ cm.

12. Raza cercului circumscris unui poligon regulat este egală $6\sqrt{3}$ cm, iar raza cercului înscris în el – 9cm. Câte laturi are poligonul?

A) 6;   B) 12;   C) 9;   D) 18.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Poligon regulat

Poligonul se numește regulat, dacă la el toate laturile sunt egale și toate unghiurile sunt egale.

Proprietățile poligonului regulat

- Poligonul regulat este poligon convex.
- Orice poligon regulat este cum înscris în cerc așa și circumscris în jurul cercului, centrele cercurilor circumscrise și înscrise coincid.

Formule pentru aflarea razelor cercurilor circumscrise și înscrise a poligonului regulat

Numărul de laturi a n-gonului cu la latura a	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Raza cercului circumscris	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Raza cercului înscris	$r_n = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lungimea cercului

$$C = 2\pi R$$

Lungimea arcului cercului de $n°$

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Aria cercului

$$S = \pi R^2$$

Aria sectorului, care conține arcul cercului de $n°$

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

CORDONATELE CARTIZIENE PE PLAN §3

Studiind materialul din acest paragraf, voi veţi extinde cunoştinţele voastre despre planul de coordonate.

Veţi învăţa să găsiţi lungimea segmentului şi coordonatele mijlocului lui ştiind coordonatele capetelor lui.

Veţi obţine conoştinţă despre ecuaţia figurii, veţi deduce ecuaţia dreptei şi a circumferinţei.

Veţi face cunoştinţă cu metoda coordonatelor, care permite rezolvarea problemelor geometrice cu metode algebrice.

8. Distanţa între două puncte cu coordonatele date. Coordonatele mijlocului segmentului

În clasa a 6 voi aţi făcut cunoştinţă cu planul de coordonate şi anume cu planul pe care sunt reprezentate două drepte de coordonate perpendiculare (axa absciselor şi axa ordonatelor) cu origine comună (fig. 8.1). Voi ştiţi cum de reprezetat punctele după coordonatele date şi invers, să găsiţi coordonatele punctului mărcate pe planul de coordonate.

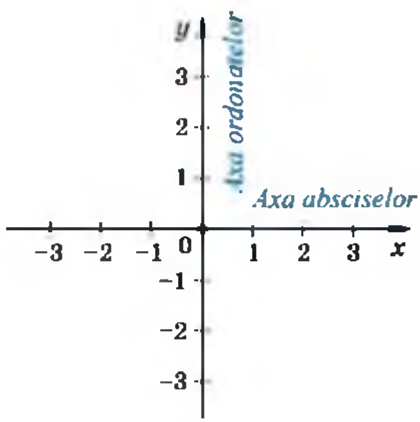


Fig. 8.1

Ne-am înțeles ca, planul de coordonate cu axa x (axa absciselor) și axa y (axa ordonatelor) de-l numit **planul *xy***.

Coordonatele punctului pe planul xy se numesc **cordonate cartiziene** în cinstea matematicianului francez Rene Descartes (vezi articol pe pag. 101).

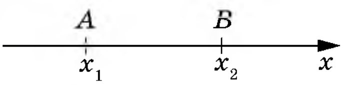


Fig. 8.2

Voi ştiţi cum de aflat distanţa între două puncte cu coordonatele date pe dreapta de coordonate. Pentru punctele $A(x_1)$ și $B(x_2)$ (fig. 8.2) avem:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Să învăţăm să găsim distanţa între punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$, date pe planul xy.

Studiem cazul, când segmetul AB nu este perpendicular la nici o axă de coordonate (fig. 8.3).

Prin punctele A și B ducem drepte perpendicularea la axă de coordonate. Obţinem triunghiul dreptunghic ABC în care $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. De aici $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + \; |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Atunci formula distanţei între punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ se poate scrie astfel:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Demonstraţi independent, că acestă formulă este corectă și pentru cazul, când segmetul AB este perpendicular la o axă de coordonate.

Fie, că $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ – punctul planului xy. Găsiţi coordonatele $(x_0; y_0)$ a punctului M – mijlocul segmetului AB.

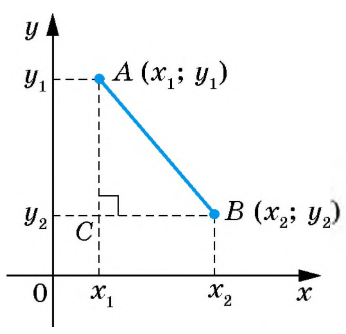


Fig. 8.3

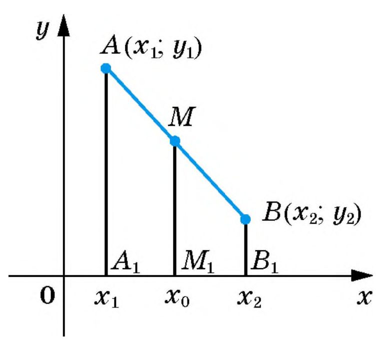


Fig. 8.4

Să examinăm cazul, când segmetul AB nu este perpendicular la nici o axă de coordonate (fig. 8.4). Considerăm, că $x_2 > x_1$ (cazul, când $x_2 < x_1$, se studiază analogic). Prin punctele A, M și B ducem drepte perpendiculare la axa absciselor care intersectează aceasta axă în punctele A_1, M_1 și B_1. După teorema lui Fales $A_1M_1 = M_1B_1$, atuci $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Deoarece $x_2 > x_0 > x_1$, putem scrie: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. De aici

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Analogic se demostrează, că

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Formula pentru găsirea coordonatelor mijlocului segmetului este corectă și în cazul când segmetul AB este perpendicular la o axă de coordonate. Demonstrați aceasta individual.

Problema 1. Demnstrași, că triunghil, vârfurile căruia sunt punctele $A(-1; 7)$, $B(1; 3)$ și $C(5; 5)$, este triunghi isoscel.

Rezolvare. Folosind formula distanţei între două puncte, găsim laturile triunghiului dat:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Deci, $AB = BC$, adică triunghiul ABC isoscel.

Deoarece $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, atunci triunghiul ABC dreptunghiular. ◀

Problema 2. Punctul $M(2; -5)$ – mijlocul segmetului AB, $A(-1; 3)$. Găsiţi coordonatele punctului B.

Rezolvare. Notăm $(x_B; y_B)$ – coordonatele puctului B, $(x_A; y_A)$ – coordonatele puctului A, $(x_M; y_M)$ – coordonatele puctului M.

Deoarece $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M$, atunci: $\dfrac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Analogic $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\dfrac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Răspuns: $B(5; -13)$. ◀

Problema 3. Demonstraţi, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A\,(2; -1)$, $B\,(1; 3)$, $C\,(-3; 2)$ şi $D\,(-2; -2)$ este dreptunghi.

Rezolvare. Fei, că punctul M – mijlocul diagonalei AC. Atunci

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Deci, $M\,(-0{,}5; 0{,}5)$.

Fie, că punctul K – mijlocul diagonalei BD. Atunci

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

Deci, $K\,(-0{,}5; 0{,}5)$.

În aşa fel, punctele M şi K coincid, atunci diagonalele patrulaterului $ABCD$ au mijlocul comun. De aici rezultă, că petrulaterul $ABCD$ – paralelogram.

Găsim diagonalele paralelogramului:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Deci, diagonalele paralelogramului $ABCD$ sunt egale. De aici rezultă, că acest paralelogram este dreptunghi. ◄

1. Cum de determinat distanţa îantre două puncte, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?
2. Cum de găsit coordonatele mijlocului segmentului, dacă sunt cunoscute coordonatele capetelor lui?

EXERCIŢII

8.1.° Găsiţi distanţa între puctele A şi B, dacă:
1) $A\,(10; 14)$, $B\,(5; 2)$; 2) $A\,(-1; 2)$, $B\,(4; -3)$.

8.2.° Găsiţi distanţa între puctele C şi D, dacă:
1) $C\,(-2; -4)$, $D\,(4; -12)$; 2) $C\,(6; 3)$, $D\,(7; -1)$.

8.3.° Vârfurile triunghiului sunt punctele $A\,(-1; 3)$, $B\,(5; 9)$, $C\,(6; 2)$. Demonstraţi că triunghiul ABC isoscel.

8.4.° Demonstraţi, că punctual $M\,(0; -1)$ este centrul circumferinţei circumscris în jurul triunghiului ABC, dacă $A\,(6; -9)$, $B\,(-6; 7)$, $C\,(8; 5)$.

8.5.° Demonstraţi, că unghiurile B şi C triunghiului ABC sunt egale, dacă $A\,(5; -7)$, $B\,(-3; 8)$, $C\,(-10; -15)$.

8.6.° Găsiţi coordonatele mijlocului segmetului BC, dacă:
1) $B\,(5; 4)$, $C\,(3; 2)$; 2) $B\,(-2; -1)$, $C\,(-1; 7)$.

8.7.° Puctul C – mijlocul segmetului AB. Găsiţi coordonatele puctului B, dacă:
1) $A\,(3; -4)$, $C\,(2; 1)$; 2) $A\,(-1; 1)$, $C\,(0{,}5; -1)$.

8.8.° Punctul K – mijlocul segmentului AD. Complectaţi tebelul:

Punct	Coordonata punctuli		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(–4; 6)	(1; 2)

8.9.° Găsiţi mediana BM a triunghiului, vârfurile cărui sunt punctele A (3; –2), B (2; 3) şi C (7; 4).

8.10.° Sunt date punctele A (–2; 4) şi B (2; –8). Găsiţi distanţa de la originea de coordonate până la mijlocul segmetului AB.

8.11.• Demonstraţi, că triunghiul cu vârfurile în punctele A (2; 7), B (–1; 4) şi C (1; 2) este dreptunghiular.

8.12.• Punctele A (–1; 2) şi B (7; 4) sunt vârfurile triunghiului dreptunghic. Poate oare al treilea vârf avea coordonata:
1) (7; 2); 2) (2; –3)?

8.13.• Sunt oare situate pe o dreaptă punctele:
1) A (–2; –7), B (–1; –4) şi C (5; 14);
2) D (–1; 3), E (2; 13) şi F (5; 21)?

8.14.• Demonstraţi, că punctele M (–4; 5), N (–10; 7) şi K (8; 1) sunt situate pe o dreaptă şi demonstraţi care din puncte este situat între altele două.

8.15.• La ce valoare a lui x distanţa între punctele C (3; 2) şi D (x; –1) este egală cu5?

8.16.• Pe axa absciselor, găsiţi punctul egal depărtată de la punctele A (–1; –1) şi B (2; 4).

8.17.• Aflaţi coordonatele punctului, care este situat pe axa ordonatelor şi este egal depărtată de la punctele D (–2; –3) şi E (4; 1).

8.18.• Aflaţi coordonatele puctului, care împarte segmentul AB în raport 1 : 3, pornind de la punctul A, dacă A (5; –3) şi B (–3; 7).

8.19.• Patrulaterul $ABCD$ – paralelogram, A (–5; 1), B (–4; 4), C (–1; 5). Găsiţi coordonatele vîrfului D.

8.20.• Patrulaterul $ABCD$ – paralelogram, A (–2; –2), C (4; 1), D (–1; 1). Găsiţi coordonatele vîrfului B.

8.21.• Demonstraţi, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele A (–2; 8), B (3; –3), C (6; 2) şi D (1; 13) este paralelogram.

8.22.• Demonstraţi, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele A (–3; –2), B (–1; 2), C (1; –2) şi D (–1; –6) este romb.

8.23.• Demonstraţi, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A(-2; 6)$, $B(-8; -2)$, $C(0; -8)$ și $D(6; 0)$ este pătrat.

8.24.• Punctele $D(1; 4)$ și $E(2; 2)$ – sunt mijlocurile laturilor AC și BC a triunghiului ABC. Găsiţi coordonatele vîrfurilor A și C, dacă $B(-3; -1)$.

8.25.• Găsiţi lungimea segmetului, capetele căruia aparţin axelor de coordonate, iar mijlocul este punctul $M(-3; 8)$.

8.26.•• Găsiţi coordonatele vârfului C a triunghiului echilateral ABC, dacă $A(2; -3)$ și $B(-2; 3)$.

8.27.•• Găsiţi coordonatele vârfului E a triunghiului echilateral DEF, dacă $D(-6; 0)$ și $F(2; 0)$.

8.28.•• În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = BC$, $A(5; 9)$, $C(1; -3)$, modulele coordonatelor punctului B sunt egale. Aflaţi coordonatele punctului B.

8.29.•• Găsiţi coordonatele tuturor astfel de puncte C pe axa absciselor, ca triughiul ABC să fie isoscel și $A(1; 1)$, $B(2; 3)$.

8.30.•• Găsiţi coordonatele tuturor astfel de puncte B pe axa ordonatelor încât triughiul ABC să fie dreptunghic și $A(1; 3)$, $C(3; 7)$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

8.31. În triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle C = 90°$, $AB = 9$ cm, $BC = 3$ cm. Pe ipotenuza AB notăm punctual M astfel, că $AM : MB = 1 : 2$. Găsiţi segmetul CM.

8.32. Aflaţi unghiurile rombului, dacă unghiul între înălţimea și digonala rombului dus dintrun vârf este egal cu 28°.

8.33. Diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ este egală cu 24 cm, punctul E – mijlocul laturii BC. Găsiţi segmetele pe care dreapta AE împarte diagonala BD.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

8.34. Punctul $A(1; -6)$ – centrul circumferinţei, punctul $B(10; 6)$ aparţine acestei circumferinţe. Cu ce este egală raza circumferinţei?

8.35. Segmetul CD – diametrul circumferinţei. Găsiţi coordonatele centrului circumferinţei, dacă $C(6; -4)$, $D(-2; 10)$.

8.36. Care figură este graficul ecuaţiei:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Ecuaţia figurii. Ecuaţia circumferinţei

Din cursul de algebră clasa a 7-a voi deja ştiţi ce figură este numită graficul ecuaţiei. În acest punct voi veţi face cunoştinţă cu noțiunea ecuaţia figurii.

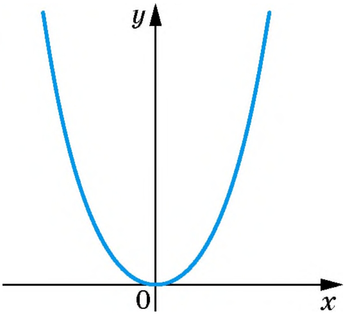


Fig. 9.1

Coordonatele (x; y) a fiecărului punct a parabolei prezentate în figura 9.1, este soluţia ecuaţiei $y = x^2$. Şi invers, fiecare soluţie a ecuaţiei cu două varaibile $y = x^2$ sunt coordonatele punctului care este situat pe această parabolă. În acest caz, spunem că ecuaţia parabolei prezentată în figura 9.1, are forma $y = x^2$.

Definiție. Ecuaţia figurii F, dată pe planul xy, se numeşte ecuaţie cu două variabile x şi y, care are următoarele proprietăţi:

1) **dacă punctul aparţine figurii F, atunci coordonatle lui sunt soluţia ecuaţiei;**
2) **orice soluţie (x; y) a ecuaţiei date sunt coordonatele punctului, care aparţine figurii F.**

De exemplu, ecuaţia dreptei desenată în figura 9.2 are forma $y = 2x - 1$, iar ecuaţia hiperbolii, desenată în figura 9.3, are formă $y = \frac{1}{x}$. Este primit de spus, că, de exemplu, ecuaţiile $y = 2x - 1$ și $y = \frac{1}{x}$ **dtermină** dreapta și hiperbola orespunzător.

Dacă ecuaţia dată este ecuaţia figurii F, atunci această figură se poate considera ca locul geometric al punctelor (LGP), coordonatele cărora satisfac această ecuaţie.

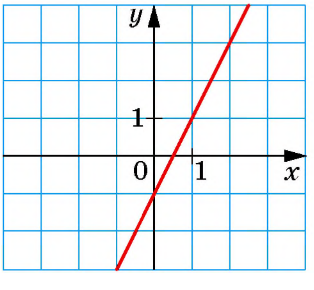


Fig. 9.2

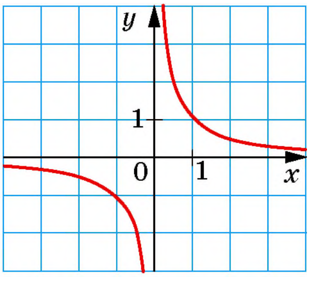


Fig. 9.3

Folosind aceste consideraţii, deducem ecuaţia circumferinţei cu raza R şi centrul în punctul $A\,(a;\, b)$.

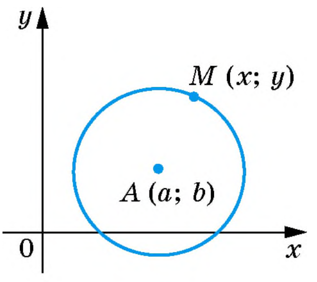


Fig. 9.4

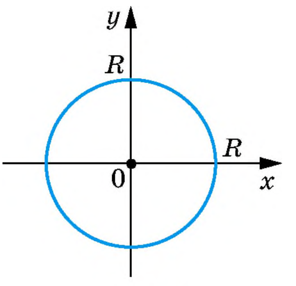


Fig. 9.5

Fie $M\,(x;\, y)$ – punct arbitrar al circumferinţei date (fig. 9.4). Atunci $AM = R$. Folosind formula distanţei între puncte, obţinem: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. De aici

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Noi am arătat, că coordonatele $(x;\, y)$ a punctului arbitrar M al circumferinţei date este soluţia ecuaţiei (*). Acum arătăm, că orice soluţie a ecuaţiei $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ sunt coordonatele punctului, care aparţine circumferinţei date.

Fie perechea de numere $(x_1;\, y_1)$ – soluţia arbitrară a ecuaţiei (*). Atunci $(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = R^2$. De unde $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} = R$.

Această egalitate arată, că puctul $N\,(x_1;\, y_1)$ este depărtat de la centrul circumferinţei $A\,(a;\, b)$ la distanţa, care este egală cu raza circumferinţei, deci punctul $N\,(x_1;\, y_1)$ aparţine circumferinţei date.

Deci, noi am demonstrat astfel de teoremă.

Teorema 9.1. ***Ecuaţia circumferinţei cu raza R şi cu centrul în punctul A (a; b) are forma***

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Corectă este şi afirmaţia: *orice ecuaţie de forma* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, *unde a, b şi R – unele numere, totodată R>0, este ecuaţia circumferinţei cu raza R cu centrul în puctul cu coordonatele* $(a;\, b)$.

Dacă centrul circumferinţei este originea de coordonate (fig. 9.5), atunci $a = b = 0$. În acest caz ecuaţia are forma

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Problema 1. Alcătuiți ecuaţia cercului, diametrul cărui este segmetul AB, dacă $A\,(-5;\,9)$, $B\,(7;\,-3)$.

Rezolvare. Deoarece centrul circumferinţei este mijlocul diametrului, atunci putem afla coordonatele $(a;\,b)$ centrului C a circumferinţei:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Deci, $C\,(1;\,3)$.

Raza circumferinţei R este egală cu segmetului AC. Atunci $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72$.

Deci, ecuaţia căutată are forma

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72.$$

Răspuns: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72$. ◀

Problema 2. Demonstraţi, că ecuaţia $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ determină circumferința. Găsiţi coordonatele centrului și raza acestei circumferinţe.

Rezolvare. Prezentăm ecuaţia dată în forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$$

Deci, ecuaţia dată este ecuaţia circumferinţei cu centrul în puctul $(-3;\,7)$ și raza $2\sqrt{2}$.

Răspuns: $(-3;\,7)$, $2\sqrt{2}$. ◀

Problema 3. Demonstraţi, că triunghiul cu vârfurile în puctele $A\,(-2;\,-3)$, $B\,(1;\,3)$ și $C\,(5;\,1)$ este dreptunghiuc, și alcătuiți ecuaţia circumferinţei circumscrise triunghiului ABC.

Rezolvare. Aflăm pătratul laturilor acestui triunghi:

$$AB^2 = (1 + 2)^2 + (3 + 3)^2 = 45;$$

$$AC^2 = (5 + 2)^2 + (1 + 3)^2 = 65;$$

$$BC^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 20.$$

Deoarece $AB^2 + BC^2 = AC^2$, atunci triunghiul dat este dreptunghicr cu unghiul drept în vârful B. Centrul circumferinţei circumscrise este mijlocul ipotenuzei AC – punctul $(1{,}5;\,-1)$, raza circumferinţei $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Deci, ecuaţia căutată are formă

$$(x - 1{,}5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}.$$

Răspuns: $(x - 1{,}5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}$. ◀

1. Ce se numeşte ecuaţia figurii date pe planul xy?
2. Ce formă are ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $(a; b)$ şi raza R?
3. Ce formă are ecuaţia circumferinţei cu centrul în originea de coordonate şi raza R?

EXERCIŢII

9.1.° Determinaţi după ecuaţia circumferinţei, coordonatele centrului și raza ei:

1) $(x-8)^2+(y-3)^2=25$; 3) $x^2+y^2=7$;
2) $(x+5)^2+y^2=9$; 4) $x^2+(y+1)^2=3$.

9.2.° Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, dacă sut cunoscute coordonatele centrului A și raza R:

1) $A\,(3; 4)$, $R=4$; 3) $A\,(7; -6)$, $R=\sqrt{2}$;
2) $A\,(-2; 0)$, $R=1$; 4) $A\,(0; 5)$, $R=\sqrt{7}$.

9.3.° Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, dacă sut cunoscute coordonatele centrului B și raza R:

1) $B\,(-1; 9)$, $R=9$; 2) $B\,(-8; -8)$, $R=\sqrt{3}$.

9.4.° Determinaţi coordonatele centrului și a razei circumferinţei, desenate în figura 9.6 şi scrieţi ecuaţia acestei circumferinţe.

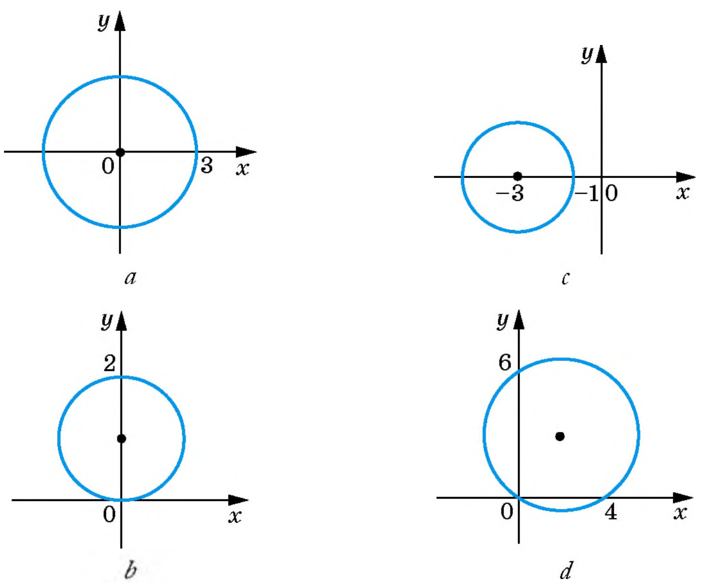


Fig. 9.6

9.5.° Raza circumferinţei cu centrul în punctul A este egală cu 4 (fig. 9.7). Alcătuiți ecuaţia acestei circumferinţe.

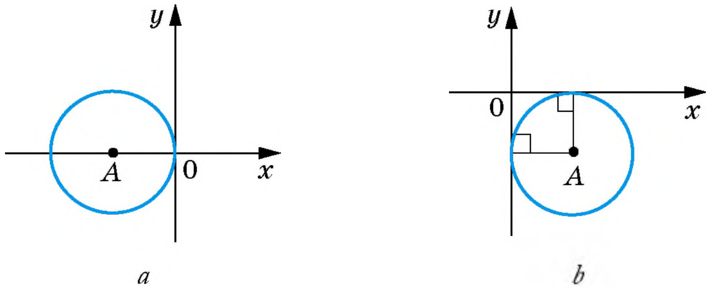


Fig. 9.7

9.6.° Construiţi pe planul de coordonate circumferinţa, ecuaţia căreia are forma: 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

9.7.° Construiţi pe planul de coordonate circumferinţa, ecuaţia căreia are forma $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

9.8.° Circumferinţa este determinată de ecuaţia $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Aflaţi care din punctele date $A(-3; 0)$, $B(-5; -2)$, $C(1; 0)$, $D(-4; 3)$, $E(-7; -3)$, $F(-9; 0)$ se află: 1) pe circumferinţă; 2) în interiorul circumferinţei; 3) în afara circumferinţei.

9.9.° Aparţin oare circumferinţei $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ punctele: 1) $A(8; -8)$; 2) $B(6; -9)$; 3) $C(-3; 7)$; 4) $D(-4; 6)$?

9.10.° Alcătuiți ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctual $M(-3; 1)$, care trece prin punctul $K(-1; 5)$.

9.11.° Alcătuiți ecuaţia circumferinţei, diametrul căruia este segmentul AB, dacă $A(2; -7)$, $B(-2; 3)$.

9.12.• Demonstraţi, că segmental AB este diametrul circumferinţeic $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, dacă $A(1; -5)$, $B(9; -3)$.

9.13.• Demonstraţi, că segmental CD este coarda circumferinţei $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, dacă $C(5; -3)$, $D(-12; 4)$.

9.14.• Alcătuiți ecuaţia circumferinţei, centrul cărei este punctual $P(-6; 7)$ și care este tangentă la axa ordonatelor.

9.15.• Alcătuiți ecuaţia circumferinţei, centrul cărei se află pe dreapta $y = -5$ și care este tangentă la axa absciselor în punctual $S(2; 0)$.

9.16.• Câte circumgerinţe există care trec prin punctual (3; 5), razele cărei sunt egale $3\sqrt{5}$ și centrele cărora aprţin axei ordonatelor? Scrieţi ecuţia fiecărei circumferinţe.

9.17.• Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, care trece prin punctele $A\,(-4;\,1)$ şi $B\,(8;\,5)$ și centrul cărei aparţine axei absciselor.

9.18.• Demonstraţi, că circumferinţa $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:

1) ste tangentă la axa ordonatelor;
2) intersectează axa abceselor;
3) nu are puncte comune cu dreapta $y = 10$.

9.19.•• Stabiliţi dacă ecuaţia dată este ecuaţia circumferinţei. În cazul răspunsului afirmativ indicaţi coordonatele centrului și raza R a acestei circumferinţe:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

9.20.•• Demonstraţi că ecuaţia dată este ecuaţia circumferinţei și indicaţi coordonatele centrului și raza R a acestei circumferinţe:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

9.21.•• Demonstraţi, că triunghiul cu vârfurile în punctele $A\,(-1;\,-2)$, $B\,(-1;\,2)$, $C\,(5;\,2)$ este dreptunghic și alcătuiţi ecuaţia circumferinţei circumscrise acestui triunghi.

9.22.•• Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, raza căreia este egală cu 5 și care trece prin punctele $C\,(-1;\,5)$ și $D\,(6;\,4)$.

9.23.•• Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, raza căreia este egală cu $\sqrt{10}$ şi care trece prin punctele $M\,(-2;\,1)$ și $K\,(-4;\,-1)$.

9.24.•• Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, care este tangentă la axele de coordonate și la dreapta $y = -4$.

9.25.•• Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, care este tangentă la axele de coordonate și la dreapta $x = 2$.

9.26.* Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, care trece prin punctele:

1) $A\,(-3;\,7)$, $B\,(-8,\,2)$, $C\,(-6,\,-2)$;
2) $M\,(-1;\,10)$, $N\,(12;\,-3)$, $K\,(4;\,9)$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

9.27. Bisectoarea unghiului B a paralelogramului ABCD intersectează latura AD în punctual E, $AB = BE = 12$ cm, $ED = 18$ cm. Aflaţi aria paralelogramului.

9.28. Perpendiculara care este dcoborâtă din vârful dreptunghiului pe diagonală, împarte acestă diagonal în două segmente cu lungimeile 9 cm și 16 cm. Aflaţi perimetrul dreptunghiului.

9.29. În trapezul isoscel este înscrisă circumferinţa cu raza 12 cm. Una din laturile laterale, de punctul de tangenţă, este împăţită în două segmente, unul din care este egal cu 16 cm. Găsiţi aria trapezului.

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTAZAŢI

9.30. Pe plan sunt notate punctele A și B. Cu ajutorul compasului construiţi punctul C astfel, ca punctual B să fie mijlocul segmentului AC.

10. Ecuaţia dreptei

În punctul precedent am considerat circumferinţa ca LGP egal depărtate de la punctul dat, am determinat ecuaţia ei. Pentru a deduce ecuaţia dreptei, considerăm pe ea ca LGP egal depărtate de la două puncte date.

Fie a – dreapta dată. Alegem două puncte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ astfe, ca dreapta a să fie mediatoarea segmentului AB (fig. 10.1).

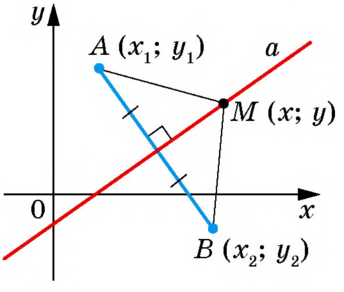


Fig. 10.1

Fie $M(x; y)$ – punct arbitrar al dreptei a. Atunci după proprietatea mediatoarei se îndeplinește egalitatea $MA = MB$, adică

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Noi am arătat că coordonatele $(x; y)$ a punctului arbitrar M a dreptei a este soluţia ecuaţiei (*).

Acum arătăm, că orice soluţie a ecuaţieie (*) sunt coordonatele punctului ce aparţine dreptei a.

Fie $(x_0; y_0)$ – soluţia arbitrară a ecuaţiei (*).

Atunci $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$. Această egalitate înseamnă, că puctul $N(x_0; y_0)$ este egal depărtată de la puctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$, deci, punctul N aparţine mediatoarei segmentului AB, adică dreptei a.

În așa mod am demonstrat, că ecuaţia (*) este ecuaţia dreptei date a.

Însă din cursul de algebră clasa a 7-a ştiţi, că ecuaţia dreptei are o formă mult mai simplă și anume: $ax + by = c$, unde a, b și c – numere arbitrare și a și b nu sunt egale cu zero în același timp. Arătăm, că ecuaţia (*) se poate reduce la așa o formă.

Ridicăm ambele părţi a ecuaţieie (*) la pătrat. Avem: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$.

Deschidem parantezele și reducem termenii asemănea. Obținem:

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Notând $2\,(x_2 - x_1) = a$, $2\,(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, obţinem ecuaţia $ax + by = c$.

Deoarece punctele $A\,(x_1; y_1)$ și $B\,(x_2; y_2)$ sunt diferite, atunci măcar una din diferenţele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$ nu este egală cu zero. Deci, numerele a și b nu sunt egale cu zero în acelaşi timp.

Astfel, noi am demonstrat așa o teoremă.

Teorema 10.1. ***Ecuația dreptei are forma***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

unde a, b și c – numere arbitrare, a și b nu sunt egale cu zero în acealași timp.

Este corectă și astfel deafirmaţie: *orice ecuație de forma $ax + by = c$, unde a, b și c – numere arbitrare și a și b nu sunt egale cu zero în același timp, este ecuația dreptei.*

Dacă $a = b = c = 0$, atunci graficul ecuaţiei $ax + by = c$ este tot planul xy. Dacă $a = b = 0$ și $c \neq 0$, atunci ecuaţia nu are soluție.

Din cursul de algebră clasa a 7-a, știți că ecuaţia de forma $ax + by = c$ se numește ecuaţie liniară cu două variabile. Ecuaţia dreptei este un tip aparte a ecuației liniare. Schema părezentată în figura 10.2, ilustrează cele spuse.

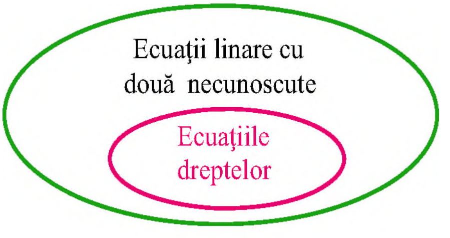


Fig. 10.2

De asemenea la lecţiile de algebră clasa a 7-a noi ama primit fără demonstrare faptul, că graficul funcției liniare $y = kx + p$ este o dreaptă. Acum noi putem să demonstrăm aceasta.

Transcriem ecuaţia $y = kx + p$ astfel: $-kx + y = p$. Noi am obținut ecuația de tipul $ax + by = c$ pentru exemplul, când $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Deoare în această ecuaţie $b \neq 0$, noi am obţinut ecuaţia dreptei.

Dar oare orice dreaptă de pe plan se poate determina în formă de ecuaţia $y = kx + p$? Răspunsul la această întrebare este negativ.

Faptul că dreapta este perpendiculară pe axa absciselor, nu poate fi graficul funcției, deci, nu poate fi determinată de ecuaţia de formă $y = kx + p$.

Totodată, dacă în ecuaţia dreptei $ax + by = c$ de înlocuit $b = 0$, atunci ea se poate transcrie astfel: $x = \frac{c}{a}$. Noi am obţinut un tip aparte de ecuaţie a dreptei, toate punctele căreia au aceeași abscisă. Deci, această dreaptă este perpendiculară la axa absciselor. Ea se numește verticală.

Când $b \neq 0$, atunci ecuaţia dreptei $ax + by = c$ se poate scrie astfel: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Notăm $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, obţinem ecuaţia $y = kx + p$.

Deci, ***dacă $b = 0$ și $a \neq 0$, atunci dreapta $ax + by = c$ determină o dreaptă verticală; dacă $b \neq 0$, atunci această ecuaţie determină o dreaptă ne verticală.***

Ecuaţia dreptei ne verticale este comod de scris în forma $y = kx + p$.

În tabelul de mai jos este generalizat materialul examinat în punctul dat.

Ecuaţia	Valorile a, b și c	Graficul
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a și c – oricare	Dreaptă ne verticală
	$b = 0$, $a \neq 0$, c – orice	Dreaptă verticală
	$a = b = c = 0$	Tot planul coordonatelor
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	–

Problema 1. Alcătuiţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele:

1) $A(-3; 5)$ și $B(-3; -6)$; 2) $C(6; 1)$ și $D(-18; -7)$.

Rezolvare. 1) Deoarece punctele date au abscisele egale, atunci dreapta AB este verticală. Ecuaţia ei are forma $x = -3$.

2) Deoarece punctele date au abscise diferite, atunci dreapta CD nu este verticală. Atunci se poate de se folosit de ecuașia dreptei $y = kx + p$.

Înlocuind coordonatele punctelor C și D în ecuaţia $y = kx + p$, obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuaţii, aflăm, că $k=\frac{1}{3}$, $p=-1$.

Răspuns: 1) $x=-3$; 2) $y=\frac{1}{3}x-1$. ◄

Problema 2. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului, limitat de dreapta $5x+12y=-60$ şi de axele de coordonate.

Rezolvare. Aflăm punctele de intersecţie a dreptei date cu axele de coordonate.

Cu axa absciselor: pentru $y=0$ obţinem $5x=-60$; $x=-12$.

Cu axa ordonatelor: pentru $x=0$ obţinem $12y=-60$; $y=-5$.

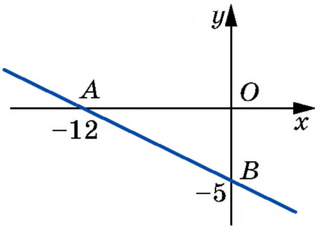


Fig. 10.3

Deci, dreapta dată şi axele de coordonate limitază triughiul dreptunghic AOB (fig. 10.3) cu vârfurile A $(-12; 0)$, B $(0; -5)$ şi O $(0; 0)$. Aflăm laturile triunghiului: $OA=12$, $OB=5$, $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=13$. Atunci perimetrul şi aria căutată sunt egale $P=OA+OB+AB=30$, $S=\frac{1}{2}OA\cdot OB=30$.

Răspuns: $P=30$, $S=30$. ◄

?

1. Ce formă are ecuaşia dreptei pe planul xy?
2. Cum se numeşte dreapta, punctele cărei au aceeaşi abscisă? Cum este situată dreapta dată faţă de axa absciselor?
3. Oare orice ecuaţia liniară cu două variabile este ecuaţia dreptei?
4. În ce formă se scrie ecuaţia dreptei neverticale?
5. Oare orice dreaptă de pe plan se poate scrie în forma $y=kx+p$?
6. Pentru care condiţie ecuaţia dreptei $ax+by=c$ este ecuaţia dreptei verticale? dreptei neverticale?

EXERCIŢII

10.1.° Care din ecuaţiile date sunt ecuaţiile dreptelor:

1) $2x-3y=5$;	4) $2x=5$;	7) $0x+0y=0$;
2) $2x-3y=0$;	5) $-3y=5$;	8) $0x+0y=5$?
3) $2x^2-3y=5$;	6) $2x+0y=0$;	

10.2.° Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie a dreptei $4x - 5y = 20$ cu axele de coordinate. Aparţin oatrer acestei drepte punctele:
1) $A\,(10; 4)$; 2) $B\,(6; 1)$; 3) $C\,(-1{,}5; 5{,}2)$; 4) $D\,(-1; 5)$?

10.3.° Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie a dreptei $3x + 4y = 12$ cu axele de coordinate. Care din punctele $M\,(-2; 4)$ și $K\,(8; -3)$ aparţin acestei drepte?

10.4.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin puctul $A\,(6; -3)$ și este perpendiculară la axa x. Ce coordonate are punctul de intersecţie a acestei drepte cu axa x?

10.5.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin puctul $B\,(5; -8)$ și este perpendiculară la axa y. Ce coordonate are punctul de intersecţie al acestei drepte cu axa y?

10.6.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin puctul $C\,(-4; 9)$ paralel: 1) cu axa absciselor; 2) cu axa ordonatelor.

10.7.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin puctele:
1) $A\,(1; -3)$ și $B\,(-2; -9)$; 3) $E\,(-4; -1)$ și $F\,(9; -1)$;
2) $C\,(3; 5)$ și $D\,(3; -10)$; 4) $M\,(3; -3)$ și $K\,(-6; 12)$.

10.8.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin puctele:
1) $A\,(2; -5)$ și $B\,(-3; 10)$; 2) $C\,(6; -1)$ și $D\,(24; 2)$.

10.9.° Găsiţi coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor:
1) $y = 3x - 7$ și $y = 5x + 9$; 2) $2x - 7y = -16$ și $6x + 11y = 16$.

10.10.° Găsiţi coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor:
1) $y = -4x + 1$ și $y = 2x - 11$; 2) $3x + 2y = 10$ și $x - 8y = 12$.

10.11.• Punctele $A\,(-6; -1)$, $B\,(1; 2)$ și $C\,(-5; -8)$ – vârfurile triunghiului ABC. Alcătuiți ecuaţia dreptei, care conţine mediana AK a triunghiului.

10.12.• Punctele $A\,(-3; -4)$, $B\,(-2; 2)$, $C\,(1; 3)$ și $D\,(3; -2)$ – vârfurile trepezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Alcătuiți ecuaţia dreptei, care conţine linia medie a trepezului.

10.13.• Abscisele mijlocurilor laturilor laterale ale trapezului sunt egale. Se poate oare afirma, că bazele trepezului sunt perpendiculare la axa absciselor?

10.14.• Aflaţi perimetrul triunghiului, limitat de axele de coordonate și de dreapta $4x - 3y = 12$.

10.15.• Aflaţi aria triunghiului, limitat de axele de coordonate și de dreapta $7y - 2x = 28$.

10.16.• Aflaţi aria triunghiului, limitat de dreptele $3x + 2y = 6$ și $y = -\frac{9}{4}x$ și axa ordonatelor.

10.17.• Demonstrați, că circumferința $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 9$ și dreapta $x + y = 7$ se intersectează, și aflați coordonatele punctelor de intersecție.

10.18.• Demonstrați, că dreapta $x + y = 5$ este tangentă la circumferința $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$, și aflați coordonatele punctului de intersecție.

10.19.• Demonstrați, că circumferința $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ și dreapta $3x + y = 3$ nu au puncte comune.

10.20.•• Găsiți distanța de la originea de coordonate până la dreapta $5x - 2y = 10$.

10.21.•• Găsiți distanța de la originea de coordonate până la dreapta $x + + y = -8$.

10.22.•• Găsiți lungimea coardei circumferinței $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$, care este situată pe dreapta $y = 3x$.

10.23.•• Alcătuiți ecuația locului geometric al centrelor circumferințelor, care trec prin puctele $A\,(1; -7)$ și $B\,(-3; 5)$.

10.24.•• Alcătuiți ecuația locului geometric al centrelor circumferințelor, care trec prin puctele $C\,(2; 3)$ și $D\,(-5; -2)$.

10.25.•• Găsiți coordonatele punctului, care este egal depărtat de la axele de coordonate și de la punctul $A\,(3; 6)$.

10.26.•• Găsiți coordonatele punctului, care este egal depărtat de la axele de coordonate și de la punctul $B\,(-4; 2)$.

10.27.* Alcătuiți ecuația circumferinței, care trece prin punctele $A\,(2; 0)$ și $B\,(4; 0)$ și centrul cărei aparține dreptei $2x + 3y = 18$.

10.28.* Alcătuiți ecuația loculuui geometric al centrelor circumferințelor raza căror este de 5 și care taie pe axa absciselor coarda cu lungimea egală cu 6.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

10.29. Diagonalele paralelogramului sunt egale $6\sqrt{2}$ cm și 8 cm, iar unghiul între ele este de 45°. Găsiți laturile paralelogramului.

10.30. Una din laturi ale triunghiului este cu 15 cm mai mare ca a doua, iar înălțimea dusă la a treia latură o împarte pe ea în segmentele 32 cm și 7 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

10.31. Centrul circumferinței circumscrise trapezului isoscel este situate pe baza mare. Aflați raza circumferinței, dacă diagonala trepezului este de 20 cm, iar înălțimea – 12 cm.

11. Coeficientul unghiular al dreptei

Să analizăm ecuaţia $y = kx$. Ea deteermnă dreapta neverticală, care trece prin originea de coordonate.

Vom arăta, că dreptele $y = kx$ şi $y = kx + b$, unde $b \neq 0$, sunt paralele.

Punctele O (0; 0) şi C (1; k) aparţin dreptei $y = kx$, iar punctele A (0; b) şi B (1; $k + b$) aparţin dreptei $y = kx + b$ (fig. 11.1). Este uşor de se convins (faceţi independent), că mijlocul diagonalelor AC şi OB a patrulaterului $OABC$ coincid. Deci, patrulaterul $OABC$ – paralelogram. De aici $AB \parallel OC$.

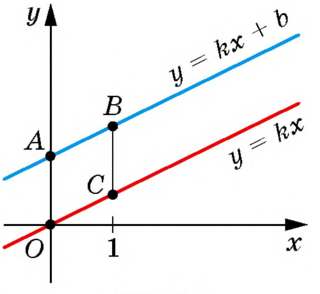


Fig. 11.1

Acum putem face astfel de concluzie:

***Dacă $k_1 = k_2$ şi $b_1 \neq b_2$, atunci dreptele $y = k_1x + b_1$ şi $y = k_2x + b_2$ sunt paralele* (1).**

Fie ca dreapta $y = kx$ intersectează semicercul unitar în punctul M (x_0; y_0) (fig. 11.2). Unghiul AOM se numeşte **unghiul între dreapta dată şi direcţia pozitivă a axei absciselor**.

Dacă dreapta $y = kx$ coincide cu axa absciselor, atunci unghiul între această dreaptă şi direcţia pozitivă a axei absciselor se consideră egală cu 0°.

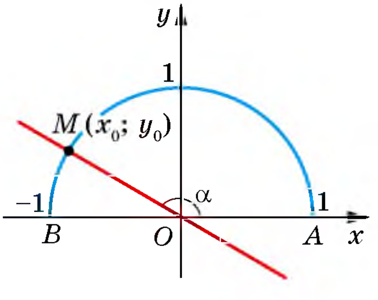


Fig. 11.2

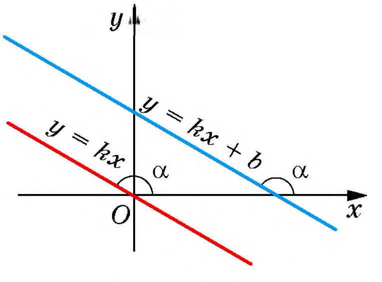


Fig. 11.3

Dacă dreapta $y = kx$ formează cu direcţia pozitivă a axei absciselor unghiul α, se consideră, că dreapta $y = kx + b$, care este paralelă dreptei $y = kx$, tot formează unghiul α cu direcţia pozitivă a axei absciselor (fig. 11.3).

Să examinăm dreapta MO, ecuaţia căreia are forma $y = kx$ (fig. 11.2). Dacă $\angle MOA = \alpha$, atunci $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Deoarece punctul $M(x_0; y_0)$ aparţine dreptei $y = kx$, atunci $\frac{y_0}{x_0} = k$. De aici $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Astfel, pentru dreapta $y = kx + b$ obţinem, că

$$\boxed{k = \operatorname{tg} \alpha,}$$

unde α – unghiul, care formează acestă dreaptă cu direcţia pozitivă a axei absciselor. De aceea coeficientul k se numește **coeficientul unghiular** a acestei dreapte.

Când dreptele neverticale sunt paralele, ele formează unghiuri egale cu direcţia pozitivă a axei absciselor. Atunci tangentele acestor unghiuri sunt egale, deci sunt egali și coeficienţii unghiulari.

Astfel,

dacă dreptele $y = k_1x + b_1$ și $y = k_2x + b_2$ sunt paralele, atunci $k_1 = k_2$ **(2)**.

Concluzie **(1)** și **(2)** le unim într–o teoremă.

Teorema 11.1. ***Dreptele $y = k_1x + b_1$ și $y = k_2x + b_2$ sunt paralele, atunci și numai atunci, când $k_1 = k_2$ și $b_1 \neq b_2$.***

Problema. Alcătuiţi ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $A(-4; 3)$ și este paralelă dreptei $y = 0{,}5x - 4$.

Rezolvare. Fie, ecuaţia dreptei căutate este $y = kx + p$. Deoarece această dreaptă și dreapta $y = 0{,}5x - 4$ sunt paralele, atunci coeficienţii unghiulari sunt egali, adică $k = 0{,}5$.

Deci, ecuaţia căutată are formă $y = 0{,}5x + p$. Considerând că dreapta dată trece prin punctul $A(-4; 3)$, obţinem: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$. De aici $p = 5$.

Ecuaţia căutată are formă $y = 0{,}5x + 5$.

Răspuns: $y = 0{,}5x + 5$. ◀

1. Lămuriţi, ce se numeşte unghi între dreaptă şi direcţia pozitivă a axei abscisei.
2. De ce se consideră că unghiul între dreapta care este paralelă la axa abscisei sau coincide şi direcţia pozitivă a axei abscisei este egal?
3. Ce se numeşte coeficientul unghiular al dreptei?
4. Cum sunt leagate coeficientul unghiular a dreptei şi unghiul între dtraptă şi direcţia pozitivă a axei abscisei?

5. Formulaţi condiţia necesară şi suficientă de paralelism a două drepte neverticale pe planul de coordonate.

EXERCIȚII

11.1.° Cu ce este egal coeficientul unghiular al dreptei:
1) $y = 2x - 7$;
2) $y = -3x$;
3) $y = x + 10$;
4) $y = 5 - x$;
5) $y = 4$;
6) $3x - 2y = 4$?

11.2.° Care din drepte $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ şi $y = 600 + 0{,}6x$ sunt paralele?

11.3.° Care număr trebuie înlocuit în loc de asterix, ca dreptele să fie paralele:
1) $y = 8x - 14$ şi $y = {}^{*}x + 2$;
2) $y = {}^{*}x - 1$ şi $y = 3 - 4x$?

11.4.° Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin originea de coordinate şi este paralelă dreptei:
1) $y = 14x - 11$;
2) $y = -1{,}15x + 2$.

11.5.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $A\,(-3; 7)$ şi şi coeficientul unghiular al căreia este egal:
1) 4;
2) –3;
3) 0.

11.6.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $B\,(2; -5)$ şi coeficientul unghiular al căreia este egal cu –0,5.

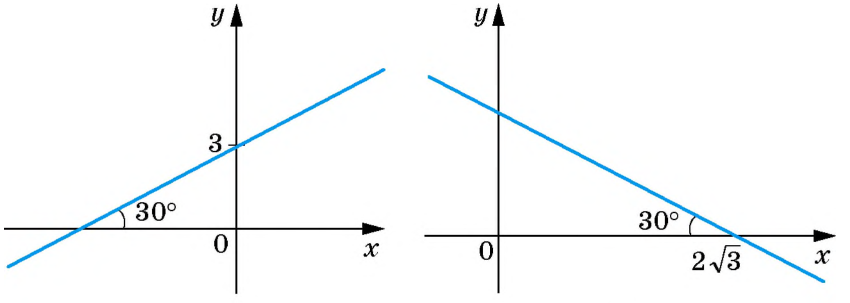
11.7.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $M\,(-1; 9)$ şi este paralelă dreptei:
1) $y = -7x + 3$;
2) $3x - 4y = -8$.

11.8.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ şi-i paralelă dreptei:
1) $y = 9x - 16$;
2) $6x + 2y = 7$.

11.9.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $A\,(2; 6)$ şi formează cu direcţia pozitivă a axei absciselor unghiul:
1) 60°;
2) 120°.

11.10.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $B\,(3; -2)$ şi formează cu direcţia pozitivă a axei absciselor unghi:
1) 45°;
2) 135°.

11.11.• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care este prezentată în 11.4.



a *b*

Fig. 11.4

11.12.• Determinaţi, dacă dreptele sunt paralele:

1) $2x - 5y = 9$ și $5y - 2x = 1$; 3) $7x - 2y = 12$ și $7x - 3y = 12$;

2) $8x + 12y = 15$ și $4x + 6y = 9$; 4) $3x + 2y = 3$ și $6x + 4y = 6$.

11.13.• Demonstraţi, că dreptele $7x - 6y = 3$ și $6y - 7x = 6$ sunt paralele.

11.14.•• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care este paralelă dreptei $y = 4x + 2$ și intersectează dreapta $y = -8x + 9$ în punctul, care aparţine axei ordonatelor.

11.15.•• Alcătuiți ecuaţia dreptei, care este paralelă dreptei $y = 3x + 4$ și intersectează dreapta $y = -4x + 16$ în punctul, care aparţine axei abscisei.

11.16.* Alcătuiți ecuaţia dreptei, care este perpendiculară la drepta $y = -x + 3$ și trece prin punctual A (1; 5).

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

11.17. În patrulaterul convex $ABCD$ bisectoarele unghiurilor A și B se intersectează în punctul O (fig. 11.5). Demonstraţi, că unghiul AOB este egal cu semisuma unghiurilor C și D.

11.18. Înălţimea rombului, care este dusă din vîrful unghiului obtuz, împarte latura rombului în segmentele 7 cm și 18 cm, socotind de la vîrful unghiului ascuţit. Găsiţi diagonalele rombului.

11.19. Medianele triunghiului isoscel sunt egale cu 15 cm, 15 cm și 18 cm. Aflaţi aria triunghiului.

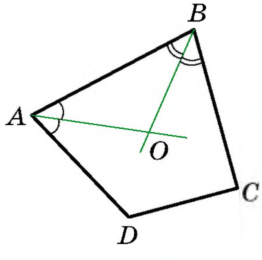


Fig. 11.5

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTAZAŢI

11.20. Ce valoare minimă poate obține raza circumferinţei, din care se poate tăia un triunghi cu laturile 2 cm, 3 cm, 4 cm?

METODA COORDONATELOR

Noi de multe ori spunem: drepta $y = 2x - 1$, parabola $y = x^2$, circumferința $x^2 + y^2 = 1$, identificând astfel o figură cu ecuaţia ei. Așa o abordare face posibilă reducerea problemei despre căutarea proprietăţilor figurii la problema despre stuidierea ecuaţiei ei. În aceasta si constăesența metodei de coordonate.

Vom ilustra cele de mai sus într-un așa exemplu.

Din raționamente intuiutive este evident, că dreapta și cercul au nu mai mult de două puncte comune. Cu toate aceasta afirmaţia nu este exiomă, de aceea ea trebuie de domonstrat.

Această problemă se reduce la studierea numărului de soluţii a sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2, \end{cases}$$

unde numerele a și b nu sunt egale cu zero în acelaşi timp și $R > 0$.

Rezolvând acest sistem prin metoda substituției, noi obţinem o ecuaţie pătrată, care poate avea două soluţi, o soluţie sau nici o soluţie. Deci, pentru sistemul dat există trei cazuri posibile:

1) sistemul are două soluţii – dreapta și circumferința se intersectează în două puncte;
2) sistemul are o soluţie – dreapta se atinge de (este tangentă) circumferință;
3) sistemul nu are soluţii – dreapta și circumferința nu au puncte comune.

Cu fiecare din aceste cazuri, v–aţi întâlnit rezolvând problemele 10.17–10.19.

Metoda de coordonate este deosebit de eficientă în cazurile când trebuie de găsit figura la care toate punctele ei posedă proprietatea dată, adică de aflat LGP.

Notăm pe plan două puncte A și B. Este interesant de aflat, ce figură foprmează toate punctele M astfel, că $\dfrac{MA}{MB} = 1$. Aceasta este mediatoarea

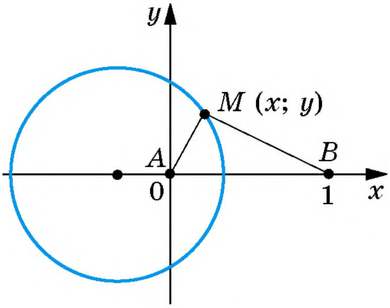


Fig. 11.6

segmentului AB. Este interesant de aflat, ce figură foprmează toate punctele M, pentru care $\frac{MA}{MB} = k$, unde $k \neq 1$. Rezolvăm această problemă pentru $k = \frac{1}{2}$.

Planul pe care sunt notate punctele A și B îl "transformăm" în planul de coordonate. Facem aceasta așa: pentru origine luăm punctul A, pentru segmentul unitar – segmetul AB, axa abscisei ducem așa ca puctul B să aibă coordonatele (1; 0) (fig. 11.6).

Fie $M(x; y)$ – punct arbitrar a figurii căutate F. Atunci $2MA = MB$; $4MA^2 = MB^2$. De aici

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$
$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$
$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \quad (*)$$

Deci, dacă punctul $M(x; y)$ aparţine figurii F, atunci coordonatele lui sunt rezolvarea ecuație (*).

Fie $(x_1; y_1)$ – o soluţie a ecuaţieie (*). Atunci este ușor de arătat, că $4(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. Aceasta înseamnă, că punctul $N(x_1; y_1)$ este așa, că $4NA^2 = NB^2$. Atunci $2NA = NB$. Deci, punctul N aparţine figurii F.

Astfel, ecuaţia figurii F este ecuaţia (*), adică figura F – este circumferinața cu centrul în punctul $O\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$ și raza $\frac{2}{3}$.

Noi am rezolvat problema pentru cazul particular, când $k = \frac{1}{2}$. Se poate de arătat, că figura căutată pentru orice pozitiv $k \neq 1$ v–a fi circyumferință. Această circumferință se umește **circumferința lui Apollonius**[1].

[1] Apollonius Pergcukyy (III–II î.e.n) – matematician și astronom din Grecia Antică.

CUM S–A CONSTITUIT LEGĂTURA ÎNTRE GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ

Ideia coordonatelor a apărut foarte demult. Deci încă în antichitate oamenii studiau Pământul, urmăreau stelele și după rezultatele cercetărilor sale formau mape și scheme.

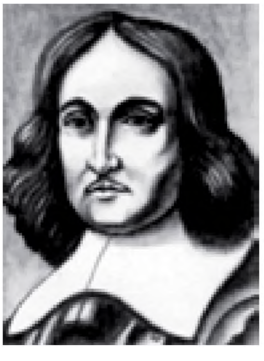
În sec. a II-a î. e.n. savantul din Grcia Antică Hipparchus pentru prima dată a folosit ideia de coordonate pentru a determina locaţia obiectelor pe suprafaţa Pământului.

Abia în sec. al XIV-a savantul francez Nikola Orem (aproape 1323–1382) pentru prima dată a folosit în matematică ideia lui Hipparchus: a împărţit planul în pătrate (cum este împărţită foia caietului vostru) și a început a stabili locul punctelor prin latitudine și longitudine.

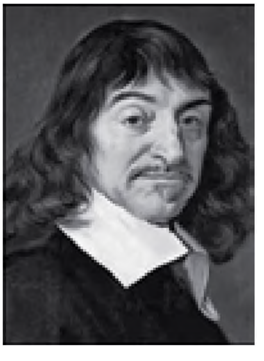
Însă posibilităţile mari ale acestei idei au fost descoperite abiai în sec. al XVII-a în lucrările marilor matematicieni Pierre de Fermat și Rene Descartes. În lucrările sale savanţii au arătat, cum datorită sistemului de coordonate se poate trece dela puncte la numere, de la linii la ecuaţii, de la geometrie la algebră..

Măcar că P. Ferma a publicat lucrarea sa cu un an mai de vreme de la

R. Descartes, sistemul de coordoate cu care noi ne folosim astăzi se numește cartezian. R. Descartes în lucrarea sa “Raţionamentul despre metode”a propus o nouă simbolică de litere comodă, cu care ne folosim și astăzi, cu puţine schimbări. UIrmându-l pe Descartes noi notăm variabilele cu ultimele litere ale alfabetului latin x, y, z, iar coeficienţii – cu primele: $a, b, c, \dots$. Însemnările obișnuite pentru noi ale puterilor x^2, y^3, z^5 etc., tot le-a întrodus Descartes.



Pierre de Fermat
(1601–1665)



Rene Descartes
(1596–1650)

ÎNSĂRCINAREA NR. 3 "CONTROLEAZĂ-TE" ÎN FORMĂ TEST

1. Ce coordonate are mijlocul segmentului AB, dacă A (–6; 7), B (4; –9)?

A) (–5; 8); C) (–5; –1);
B) (–1; –1); D) (–1; 8).

2. Cu ce este egală distanţa între punctele C (8; –11) şi D (2; –3)?

A) 100; C) $\sqrt{296}$;
B) 10; D) $\sqrt{164}$.

3. Ce coordonate are centrul circumferinței $(x – 5)^2 + (y + 9)^2 = 16$?

A) (5; –9); C) (5; 9);
B) (–5; 9); D) (–5; –9).

4. Centrul căreia din circumferințele date este originea de coordonate?

A) $x^2 + (y – 1)^2 = 1$; C) $x^2 + y^2 = 1$;
B) $(x – 1)^2 + y^2 = 1$; D) $(x – 1)^2 + (y – 1)^2 = 1$.

5. Afalași raza c circumferinței, diametrul cărea este segmentul MK, dacă M (14; 12) și K (–10; 2).

A) 26; C) 25;
B) 13; D) 5.

6. Care sunt coordonatele puctului de intersecșie a dreptei $5x – 3y = 15$ cu axa absciselor?

A) (0; –5); C) (0; 3);
B) (–5; 0); D) (3; 0).

7. Patrulaterul $ABCD$ – paralelogram. Sunt date trei vârfuri: B (–2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Aflaţi coordonatele vârfului A.

A) (1; 6); C) (–5; –6);
B) (19; –3); D) (6; 5).

8. Ce coordonate are punctul axei ordonatei, egal depărtat de la punctele A (–3; 4) și B (1; 8)?

A) (–5; 0); C) (5; 0);
B) (0; –5); D) (0; 5).

9. Aflaţi abscisa punctului dreptei AB, ordonata căruia este egală cu 2, dacă A (–7; 4), B (9; 12).

A) 8,5; C) 4;
B) –11; D) –2.

10. Cu ce este egală distanţa între punctul de intersecţia a dreptelor $x - y = 4$ și $x + 3y = 12$ și punctul $M(1; 7)$?

A) 5;
C) $5\sqrt{2}$;
B) 50;
D) $2\sqrt{5}$.

11. Care este ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $P(-1; 6)$ și paralelă dreptei $y = 2x - 5$?

A) $y = 6 - 5x$;
C) $y = 5x - 6$;
B) $y = 2x + 8$;
D) $y = 2x - 8$.

12. Cu ce egală raza circumferinței $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$?

A) $\sqrt{7}$;
C) 14;
B) 7;
D) $\sqrt{14}$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Distanţa între două puncte

Distanţa între două puncte $A\,(x_1; y_1)$ și $B\,(x_2; y_2)$ se poate calcula după formula $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Coordonatele mijlocului segmentului

Coordonatele $(x_0; y_0)$ mijlocul segmentului cu extremiotățile $(x_1; y_1)$ și $(x_2; y_2)$ se poate calcula după formula:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ecuaţia figurii

Ecuaţia figurii F, dată pe planul xy se numește ecuaţia cu două variabile x și y, care are așa proprietăţi:

1) dacă punnctul aparţine figurii F, atunci coordonatele ei sunt soluţia acestei ecuaţii;
2) orice soluţie $(x; y)$ a ecuaţiei date sunt coordonatele punctului, care aparţine figurii F.

Ecuaţia circumferinţei

Ecuaţia circumferinţei cu raza R și central în punctul $A\,(a; b)$ are forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Orice ecuaţie de forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, unde a, b și R – niste numere, totodată $R > 0$, este ecuaţia circumferinţei cu raza R cu central în punctul cu coordonatele $(a; b)$.

Ecuaţia dreptei

Ecuația dreptei are forma $ax + by = c$, unde a, b și c – orice numere, totodată a și b nu sunt egale cu zero în același timp.

Orice ecuație de tipul $ax + by = c$, unde a, b și c – orice numere, totodată a și b nu sunt egale cu zero în același timp.

Dacă $b = 0$ și $a \neq 0$, atunci ecuația dreptei $ax + by = c$ determină p dreaptă verticā; dacă $b \neq 0$, atunci această ecuație determină o dreptă neverticală.

Coeficientul unghiular al dreptei

Coeficientul k în ecuaţia dreptei $y = kx + b$ se numeşte coeficientul unghiular al dreptei şi el este egal cu tantgenta unghiului care formează această dreaptă cu direcţia pozitivă a absciselor.

Condiaţia necesară și suficientă a paralelismului dreptelor nevertica

Dreptele $y = k_1x + b_1$ și $y = k_2x + b_2$ sunt paralele atunci şi numai atunci, cân $k_1 = k_2$ și $b_1 \neq b_2$.

VECTORII §4

Studiind materialul acestui paragraf, veţi afla , că vectorii se folosesc nu numai în fizică, dar şi geometrie.

O să vă învăţaţi a aduna şi scădea vectorii, a înmulţi un vector cu un număr, a găsi unghiurile între doi vectori, a aplica proprietățile vectorilor pentru rezolvarea problemelor.

12. Noţiune de vector

Voi cunoaşteţi multe mărimi, care se determină prin mărimile sale numerice: masa, aria, lungimea, volumul, timpul, temperatura etc. Astfel de mărimi se numesc **mărimi scalare** sau **scalare**.

Din cursul de fizică vă sunt cunoscute mărimi, pentru reprezentarea cărora nu este suficient să cunoşti valoarea numerică a lor. De exemplu, dacă asupra unui arc acţionează o forţă de 5 H, atunci nu este clar, dacă arcul se va comprima sau întinde (fig. 12.1). Este necesar de cunoscut, în ce direcţie acţionează forţa.

Fig. 12.1

Mărimile, care sunt determinate nu numai de valorile numerice, dar şi de direcţie, se numesc **mărimi vectoriale** sau **vectori**[1].

Forţa, deplasarea, viteza, acceleraţia, greutatea sunt exemple de mărimi vectoriale.

Sunt vectori şi în geometrie.

[1] Termenul «vector" pentru prima data a apărut în a 1845, el a fost introdus în folosinţă de matematicianul şi astronomul irlandez V. Hamilton.

Să cercetăm segmentul AB. Dacă noi ne înțelegem ca punctul A s-ăl socotim **începutul (originea)** segmentului, iar B – **sfârșitul (extremitatea)** lui. Atunci acest segment se va caracteriza nu numai prin lungime, dar și prin direcția de la punctul A spre punctul B.

Dacă este indicat, care punct este originea segmentului și care punct – extremitatea lui, atunci astfel de segment se numește **segment orientat** sau **vector.**

Vectorul cu originea în punctul A și extremitatea în punctul B se înseamnă astfel: $\overrightarrow{AB}$ (se citește: “vectorul AB”).

Pe figuri vectorii se reprezintă prin segmente cu săgeți, care indică extremitatea lui. În figura 12.2 sunt reprezentați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{MN}$.

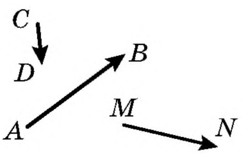


Fig. 12.2

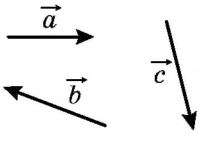


Fig. 12.3

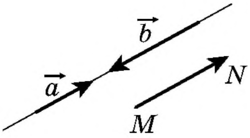


Fig. 12.4

Pentru însemnarea vectorilor de-asemenea se folosesc literele mici ale alfabetului latin cu săgeți deasupra. În figura 12.3 sunt reprezentați vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$.

Vectorul originea și extremitatea căruia este unul și același punct, se numește **vector nul** sau **nul-vector** și se înseamnă $\vec{0}$. Dacă originea și extremitatea vectorului nul este punctul A, atunci el se poate însemna și astfel: $\overrightarrow{AA}$. În figură vectorul nul se reprezintă prin punct.

Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se numește lungimea segmentului AB. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se însemnă astfel: $|\overrightarrow{AB}|$, iar modulul vectorului $\vec{a}$ – astfel: $|\vec{a}|$.

Modulul vectorului nul este socotit egal cu zero: $|\vec{0}| = 0$.

Definiție. Vectorii nenuli se numesc colineari, dacă ei se află pe drepte paralele sau pe o dreaptă.

Vectorul nul este acceptat ca coliniar oricărui vector.

În figura 12.4. sunt reprezentați vectorii coliniari $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\overrightarrow{MN}$.

Acel fapt, că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari, se înseamnă astfel: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

În figura 12.5 vectorii nenuli coliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt la fel orientați. Astfel de vectori se numesc **coorientați** și se scrie: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

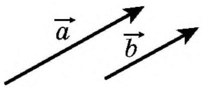


Fig. 12.5

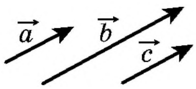


Fig. 12.6

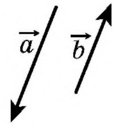


Fig. 12.7

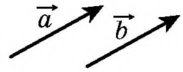


Fig. 12.8

***Dacă** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ și $\vec{b} \parallel \vec{c}$, **atunci** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.*

O proprietate analogică posedă și vectorii coorientați adică ***dacă*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***și*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***atunci*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (fig. 12.6).

În figura 12.7 vectorii nenuli coliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt **orientați opus**. Acest fapt se înseamnă astfel: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Definiție. Vectorii nenuli se numesc egali, dacă modulele lor sunt egale și ei sunt coorientați. Oricare doi vectori nuli sunt egali.

În figura 12.8 sunt reprezentați vectorii egali $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Aceasta se înseamnă: $\vec{a} = \vec{b}$.

Egalitatea vectorilor nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ înseamnă, că $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ și $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Nu este complicat de demonstrat, că atunci când $\vec{a} = \vec{b}$ și $\vec{b} = \vec{c}$, atunci $\vec{a} = \vec{c}$. Convingeți-vă de aceasta sine stătător.

Adesea, vorbind despre vectori, noi nu concretizăm, care punct este originea vectorului. Astfel, în figura 12.9 sunt reprezentați vectorul $\vec{a}$ și vectorii, egali cu vectorul $\vec{a}$. Fiecare din ei de-asemenea este primit să se numească vectorul $\vec{a}$.

În figura 12.10, *a* este reprezentat vectorul $\vec{a}$ și punctul *A*. Dacă este construit vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal vectorului $\vec{a}$, atunci se spune, că vectorul $\vec{a}$ **este depus de la punctul** *A* (fig. 12.10, *b*).

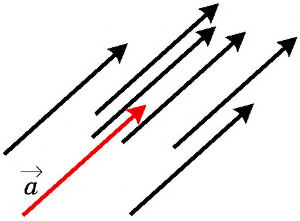
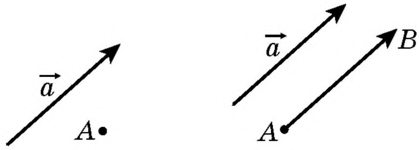


Fig. 12.9



a *b*

Fig. 12.10

Să arătăm, cum de la un punct arbitrar M de depus un vector, egal vectorului dat $\vec{a}$.

Dacă vectorul $\vec{a}$ este ne nul, atunci vectorul căutat va fi vectorul $\overline{MM}$.

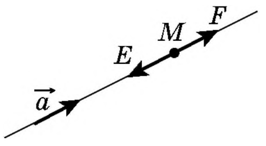


Fig. 12.11

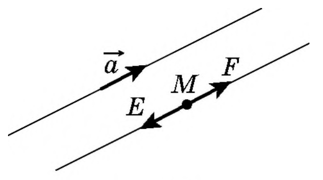


Fig. 12.12

Acum să cercetăm cazul, când $\vec{a} \uparrow \vec{0}$. Fie punctul M se află pe dreapta, care conține vectorul $\vec{a}$ (fig. 12.11). Pe această dreaptă există două puncte punctele E și F astfel, că $ME = MF = |\vec{a}|$. În figura indicată vectorul $\overrightarrow{MF}$ este egal cu vectorul $\vec{a}$. El și trebuie ales.

Dacă punctul M nu aparține dreptei, care conține vectorul $\vec{a}$, atunci prin punctul M ducem o dreaptă paralelă ei (fig. 12.12). Construirea de mai departe este analogică celei deja cercetate.

De la punctul dat se poate de depus numai un singur vector, egal celui dat.

Problema. Este dat un patrulater $ABCD$. Este cunoscut, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ și $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Determinat tipul patrulaterului $ABCD$.

Rezolvare. Conform condiției $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ reiese, că $AB \parallel DC$ și $AB = DC$. Deci, patrulaterul $ABCD$ – paralelogram.

Egalitatea $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ înseamnă, că diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt egale. Iar paralelogramul cu diagonalele egale este dreptunghi. ◄

1. Dați exemple de mărimi scalare.
2. Care mărimi se numesc vectori?
3. Ce se numesc în geometrie vectori?
4. Care mărimi sunt vectori: timpul, greutatea, accelerația, impulsul, masa, deplasarea, calea, aria, presiunea?
5. Care segment se numește segmente orientat sau vector?

6. Cum se înseamnă vectorul cu originea în punctul A și extremitatea în punctul B?
7. Care vector se numește nul?
8. Ce se numește modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$?
9. Cu ce este egal modulul vectorului nul?
10. Care vectori se numesc coliniari?
11. Cum se înseamnă vectorii coorientați? Vectori orientați opus?
12. Care vectori se numesc egali?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

12.1.° Însemnați trei puncte A, B și C, care nu se află pe aceiași dreaptă. Desenați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CB}$.

12.2. O șalupă s-a deplasat din punctul A la nord cu 40 km în punctul B, apoi la apus cu 60 km din punctul B în punctul C. Alegând scara, desenați vectorii, care vor reprezenta deplasarea din punctul A în punctul B, din punctul B în punctul C, din punctul A în punctul C.

12.3.° Desenați triunghiul ABC. Desenați vectorul coorientat cu vectorul $\overrightarrow{CA}$, originea căruia este punctul B.

12.4.° Este dat vectorul $\vec{a}$ și punctul A (fig. 12.13). Depuneți de la punctul A un vector, egal vectorului $\vec{a}$.

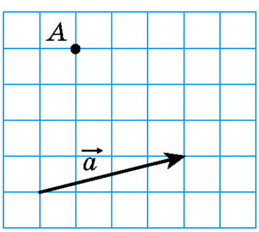


Fig. 12.13

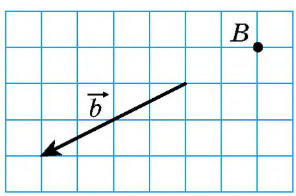


Fig. 12.14

12.5.° Este dat vectorul $\vec{b}$ și punctul B (fig. 12.14). Depuneți de la punctul B un vector, egal vectorului $\vec{b}$.

12.6.° Însemnați punctele A și B. Desenați vectorul $\overrightarrow{BC}$, egal vectorului $\overrightarrow{AB}$.

12.7.° Desenați vectorul $\vec{a}$ și însemnați punctele M și N. Depuneți de la aceste puncte vectorii, egali vectorului $\vec{a}$.

12.8.• Desenați triunghiul ABC și notați punctul M – mijlocul laturi BC. De la punctul M depuneți vectorul, egal vectorului $\overline{AM}$, iar din punctul B – vectorul, egal vectorului $\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că extremitățile vectorilor construiți coincid.

12.9.• Desenați triunghiul ABC. De la punctele B și C depuneți vectorii egali cu vectorii $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că extremitățile vectorilor construiți coincid.

EXERCIȚII

12.10.° Indicați vectorii egali, originea și extremitățile cărora se află în vârfurile pătratului $ABCD$.

12.11.° În rombul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O. Indicați vectorii egali, originea și extremitățile cărora se află în punctele A, B, C, D și O.

12.12.° Care din vectorii, reprezentați în figura 12.15 sunt:

1) egali;
2) coorientați;
3) invers orientați;
4) colineari?

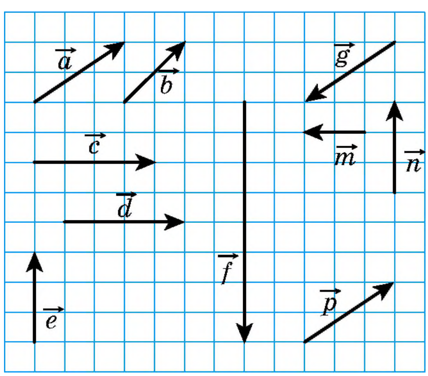


Fig. 12.15

12.13.° Punctele M și N sunt corespunzător mijloacele laturilor AB și CD ale paralelogramului $ABCD$. Indicați vectorii, originea și extremitățile cărora se află în punctele A, B, C, D, M și N:

1) vectori egali vectorului $\overline{AM}$;

2) coliniari vectorului $\overrightarrow{CD}$;

3) orientați opus vectorului $\overrightarrow{NC}$;

4) coorientați vectorului $\overrightarrow{BC}$.

12.14.° Fie O – punctul intersecției diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Indicați vectorii, originea și extremitățile cărora se află în punctele A, B, C, D și O:

1) egali;

2) coorientați;

3) orientați opus.

12.15.° Punctele M, N și P – sunt corespunzător mijlocurile laturilor AB, BC și CA ale triunghiului ABC. Indicați vectorii, originea și extremitățile cărora se află în punctele A, B, C, M, N și P:

1) egali vectorului $\overrightarrow{MN}$;

2) coliniari vectorului $\overrightarrow{AB}$;

3) orientați opus cu vectorul $\overrightarrow{MP}$;

4) coorientați cu vectorul $\overrightarrow{CA}$.

12.16.° Este oare corectă afirmația:

1) dacă $\vec{m} = \vec{n}$, atunci $|\vec{m}| = |\vec{n}|$; 3) dacă $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, atunci $|\vec{m}| \uparrow |\vec{n}|$?

2) dacă $\vec{m} = \vec{n}$, atunci $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

12.17.° Demonstrați, că atunci când patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

12.18.° Determinați tipul patrulaterului $ABCD$, dacă $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

12.19.° Determinați tipul patrulaterului $ABCD$, dacă vectorii $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari și $|\overrightarrow{BC}| \uparrow |\overrightarrow{AD}|$.

12.20.° Găsiți modulele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 12.16), dacă latura unui pătrățel este egală cu 0,5 cm.

12.21.° În patrulaterul $ABCD$ este cunoscut, că $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, punctul O este intersecția diagonalelor. Aflați modulele vectorilor $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ și $\overrightarrow{OC}$.

12.22.° În patrulaterul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O. Este cunoscut, că $|\overrightarrow{AB}| = 5$ cm, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ cm. Aflați modulele vectorilor $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AD}$.

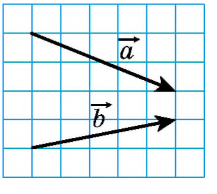


Fig. 12.16

12.23.° Este cunoscut, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Se poate oare afirma, că punctele A, B, C și D sunt vârfurile paralelogramului?

12.24.° Este cunoscut, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Încă care vectori egali stabilesc punctele A, B, C și D?

12.25.° Se dă patrulaterul $ABCD$. Este cunoscut, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ și $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

12.26.° Se dă patrulaterul $ABCD$. Este cunoscut, că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari și $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

12.27.° Ce se poate spune despre vectorul $\overrightarrow{AB}$, dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

12.28.• În triunghiul dreptunghic ABC punctul M este mijlocul ipotenuzei AB și $\angle B = 30°$. Aflați modulele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{MC}$, dacă $AC = 2$ cm.

12.29.• În triunghiul dreptunghic ABC ($\angle C = 90°$) mediana CM este egală cu 6 cm. Aflați modulele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, dacă $\angle A = 30°$.

12.30.• Este cunoscut, că vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sunt necoliniari. Vectorul $\vec{a}$ este coliniar fiecărui din vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Demonstrați, că vectorul $\vec{a}$ nu este nul.

12.31.• Este cunoscut, că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari. Demonstrați, că punctele A, B și C se află pe aceiași dreaptă. Este oare corectă afirmația inversă: dacă punctele A, B și C se află pe aceiași dreaptă, atunci vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari?

12.32.• Pentru patru puncte A, B, C și D este cunoscut, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Demonstrați, că mijlocurile segmentelor AD și BC coincid. Demonstrați afirmația inversă: dacă mijlocurile segmentelor AD și BC coincid, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

12.33.• Este cunoscut, că $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Demonstrați, că punctul O este mijlocul segmentului MN. Demonstrați afirmația inversă: dacă punctul O este mijlocul segmentului MN, atunci $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

12.34. Unul din unghiurile paralelogramului este egal cu semisuma celorlalte trei unghiuri. Aflați unghiurile paralelogramului.

12.35. Perimetrul unuia din două triunghiuri asemenea este cu 8 cm mai mare ca perimetrul triunghiului al doilea, Aflați perimetrele triunghiurilor date, dacă coeficientul asemănării este egal cu $\frac{1}{3}$.

12.36. Pe laturile BC și AD ale rombului $ABCD$ sunt notate punctele M și K astfel, că $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Aflați segmental MK, dacă $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

13. Coordonatele vectorilor

Să cercetăm pe planul de coordonate vectorul $\vec{a}$. Depunem din originea de coordonate vectorul $\overrightarrow{OA}$ egal cu el (fig. 13.1). **Coordonatele vectorului** $\vec{a}$ se numesc coordonatele punctului A. Înscrierea $\vec{a}\,(x; y)$ înseamnă, că vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(x; y)$.

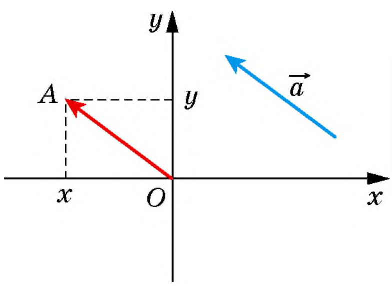


Fig. 13.1

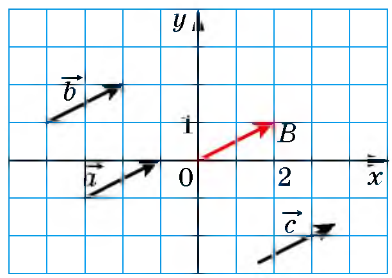


Fig. 13.2

Numerele x și y se numesc corespunzător **prima** și a **doua coordonate ale vectorului** $\vec{a}$.

Din definiție reiese, că ***vectorii egali au coordonatele corespunzătoare egale***. De exemplu, fiecare din vectorii egali $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ (fig. 13.2) au coordona tele $(2; 1)$.

Este adevărată și afirmația inversă: ***dacă coordonatele corespunzătoare ale vectorilor sunt egale, atunci și înseși vectorii sunt egali***.

Într-adevăr, dacă depunem astfel de vectori din originea de coordonate, atunci extremitățile lor vor coincide.

Este evident, că vectorul nul are coordonatele $(0; 0)$.

Teorema 13.1. ***Dacă punctele $A\,(x_1; y_1)$ și $B\,(x_2; y_2)$ corespunzător sunt originea și extremitatea vectorului $\vec{a}$, atunci numerele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$ sunt egale corespunzător primei și a doua coordonate ale vectorului $\vec{a}$.***

Demonstrație. Fie vectorul $\vec{a}$, egal vectorului $\overrightarrow{AB}$, are coordonatele $(a_1; a_2)$. Vom demonstra, că $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Dacă $\vec{a} = \vec{0}$, atunci afirmația teoremei este evidentă.

Fie $\vec{a} \uparrow \vec{0}$. Depunem din originea de coordonate vectorul $\overrightarrow{OM}$, egal vectorului $\overrightarrow{AB}$. Atunci coordonatele punctului M sunt egale $(a_1; a_2)$.

Deoarece $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, atunci, folosind rezultatele problemei 12.32, putem face concluziile, că mijlocurile segmentelor OB și AM coincid. Coordonatele segmentelor OB și AM corespunzător sunt egale $\left(\frac{0 + x_2}{2}; \frac{0 + y_2}{2}\right)$ și $\left(\frac{x_1 + a_1}{2}; \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Atunci $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}$. Aceste egalități se îndeplinesc și atunci, când punctul O coincide cu punctul B sau punctul A coincide cu punctul M.

De aici $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◀

Din formula pentru distanța dintre două puncte reiese, că atunci când vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$, atunci

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Problema. Sunt date coordonatele a trei vârfuri ale paralelogramului $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Aflați coordonatele vârfului D.

Rezolvare. Deoarece patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Deci coordonatele acestor vectori sunt egale.

Fie coordonatele punctului D sunt egale cu $(x; y)$. Pentru aflarea coordonatelor vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ ne vom folosi de teorema 13.1. Obținem:

$\overrightarrow{AB}(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}(-2 - x; -3 - y)$. De aici

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Răspuns: $D(5; -6)$. ◀

1. Explicați, ce se numesc coordonatele vectorului dat.
2. Ce se poate spune despre coordonatele vectorilor egali?
3. Ce se poate spune despre vectorii, coordonatele cărora sunt corespunzător egale?
4. Cum de găsit coordonatele vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele originii și extremității lui?
5. Cum de aflat modulul vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele lui?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

13.1.° Cu ajutorul compasului și riglei construiți punctul, coordonatele căruia sunt egale coordonatelor vectorului dat $\vec{a}$ (fig. 13.3).

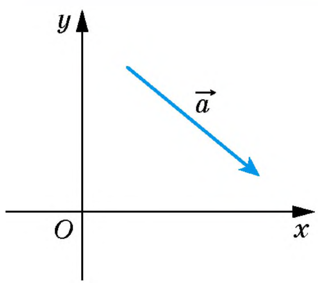


Fig. 13.3

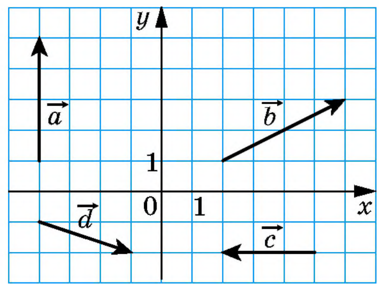


Fig. 13.4

13.2.° Depuneți din originea de coordonate vectorii $\vec{a}\,(-3;\ 2)$, $\vec{b}\,(0;\ -2)$ și $\vec{c}\,(4;\ 0)$.

13.3.° Depuneți de la punctul $M\,(-1;\ 2)$ vectorii $\vec{a}\,(1;\ -3)$, $\vec{b}\,(-2;\ 0)$ și $\vec{c}\,(0;\ -1)$.

EXERCIȚII

13.4.° Aflați coordonatele vectorilor, ce sunt reprezentați în figura 13.4.

13.5.° Aflați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:

1) $A\,(2;\ 3)$, $B\,(-1;\ 4)$;
2) $A\,(3;\ 0)$, $B\,(0;\ -3)$;
3) $A\,(0;\ 0)$, $B\,(-2;\ -8)$;
4) $A\,(m;\ n)$, $B\,(p,\ k)$.

13.6.° Sunt date punctul $A\,(1;\ 3)$ și vectorul $\vec{a}\,(-2;\ 1)$. Aflați coordonatele unui astfel de punct B, că $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

13.7.° Sunt date punctul $A\,(3;\ -7)$, $B\,(4;\ -5)$ și $C\,(5;\ 8)$. Aflați coordonatele unui astfel de punct D, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.8.° De la punctul $A\,(4;\ -3)$ este depus vectorul $\vec{m}\,(-1;\ 8)$. Aflați coordonatele extremității vectorului.

13.9.° Sunt date punctele A (3; –4), B (–2; 7), C (–4; 16) și D (1; 5). Demonstrați, că $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

13.10.° Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele A (1; –5), B (2; 3), C (–3; 1) și D (–4; –7) este paralelogram.

13.11.° Printre vectorii $\vec{a}\,(3;\,-4)$, $\vec{b}\,(-4;\,2)$, $\vec{c}\,(3;\,\sqrt{11})$, $\vec{d}\,(-2;\,-4)$, $\vec{e}\,(-1;\,-2\sqrt{6})$ și $\vec{f}\,(-4;\,5)$ găsiți acei, care au moduluri egale.

13.12.° Sunt date punctele A (1; –4), B (–2; 5), C (1 + a; –4 + b) și D (–2 + a; 5 + b). Demonstrați, că $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

13.13.° Găsiți toate valorile x, pentru care modulul vectorului $\vec{a}\,(x;\,-8)$ este egal cu 10.

13.14.° Pentru care valori y modulul vectorului $\vec{b}\,(12;\,y)$ este egal cu 13?

13.15.• Segmentul BM este mediana triunghiului ABC cu vârfurile A (3; –5), B (2; –3) și C (–1; 7). Aflați coordonatele și modulul vectorului $\overrightarrow{BM}$.

13.16.• Punctul F împarte latura BC a patrulaterului $ABCD$ în raportul 1 : 2, socotind de la vârful B (fig. 13.5). Aflați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AF}$ și $\overrightarrow{FD}$.

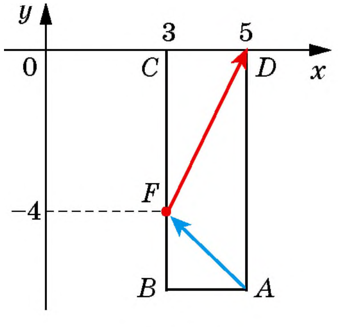


Fig. 13.5

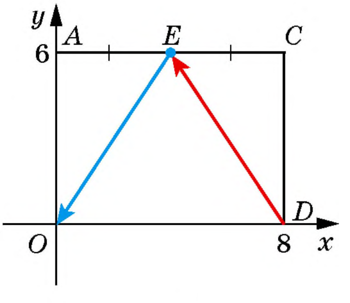


Fig. 13.6

13.17.• Punctul E este mijlocul laturii AC a dreptunghiului $OACD$ (fig. 13.6). Aflați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{EO}$.

13.18.• Modulului vectorului $\vec{a}$ este egal cu 10. Prima coordonată a lui este cu 2 mai mare ca cea de-a doua. Aflați coordonatele vectorului $\vec{a}$.

13.19.• Modulul vectorului $\vec{c}$ este egal cu 2. Iar coordonatele lui sunt egale.. Aflați coordonatele vectorului $\vec{c}$.

13.20.•• Punctele $A\,(2;\ 5)$ și $B\,(7;\ 5)$ – vârfuri ale dreptunghiului $ABCD$. Modulul vectorului $\overrightarrow{BD}$ este egal cu 13. Aflați coordonatele punctelor C și D.

13.21.•• Punctele $A\,(1;\ 2)$ și $D\,(1;\ -6)$ – vârfuri ale dreptunghiului $ABCD$. Modulul vectorului $\overrightarrow{AC}$ este egal cu 17. Aflați coordonatele punctelor B și C.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

13.22. Două triunghiuri isoscele ADB și CBD ($AB = BD = CD$) au o latură laterală comună (fig. 13.7). Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

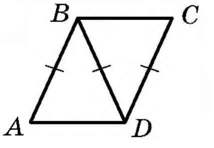


Fig. 13.7

13.23. Perimetrul triunghiului este egal cu 48 cm, iar bisectoarea lui împarte latura triunghiului în segmente cu lungimile 5 cm și 15 cm. Aflați laturile triunghiului.

13.24. Latura laterală a trapezului isoscel, circumscris unei circumferințe, este egală cu a, iar unul din unghiuri – 60°. Aflați aria trapezului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, FANTAZAȚI

13.25. Se poate oare dintr-un pătrat cu latura de 10 cm de tăiat câteva cercuri, suma diametrelor cărora este mai mare de 5 m?

14. Adunarea și scăderea vectorilor

Dacă un corp s-a deplasat din punctul A în punctul B, apoi din punctul B în punctul C, atunci deplasarea sumară din punctul A în punctul C este natural de o reprezentat în aspectul vectorului $\overrightarrow{AC}$, acceptând acest vector ca sumă a vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, adică $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (fig. 14.1).

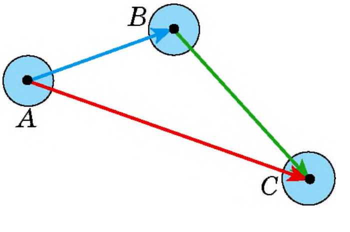


Fig. 14.1

Acest exemplu arată cum de introdus noțiunea de sumă a vectorilor, adică cum, de adunat doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Depunem de la un punct arbitrar A vectorul $\overrightarrow{AB}$, *egal cu vectorul* $\vec{a}$. *Mai departe de la punctul B depunem vectorul* $\overrightarrow{BC}$, *egal cu vectorul* $\vec{b}$. *Vectorul* $\overrightarrow{AC}$ *este numit* **suma vectorilor** $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ (fig. 14.2) *și se scrie:* $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Algoritmul descris pentru adunarea a doi vectori este numit **regula triunghiului**.

Aceasta este legat cu faptul, că atunci când vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ nu sunt coliniari, atunci punctele A, B și C sunt vârfurile uni triunghi (fig. 14.2).

Conform regulii triunghiului se pot aduna și vectorii coliniari. În figura 14.3 vectorul $\overrightarrow{AC}$ este egal cu suma vectorilor coliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

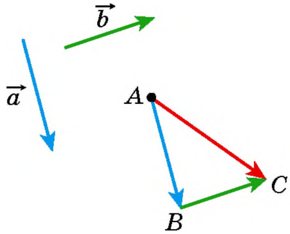


Fig. 14.2

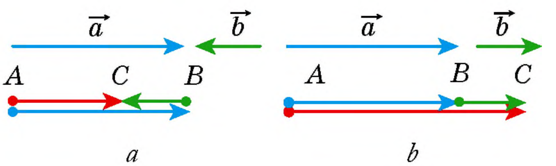


Fig. 14.3

Deci, ***pentru oricare trei puncte A, B și C se îndeplinește egalitatea*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, care exprimă regula triunghiului pentru adunarea vectorilor.

Teorema 14.1. ***Dacă coordonatele vectorilor*** $\vec{a}$ ***și*** $\vec{b}$ ***corespunzător sunt egale cu*** $(a_1; a_2)$ ***și*** $(b_1; b_2)$***, atunci coordonatele vectorului*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***sunt egale cu*** $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Demonstrație. ⊙ Fie punctele $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ și $C(x_3; y_3)$ astfel, că $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ și $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Dispune de: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Vom demonstra, că coordonatele vectorului $\overrightarrow{AC}$ sunt egale cu $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Să aflăm coordonatele vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, $\vec{b}\,(x_3-x_2;\ y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

Avem:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1;\ y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_2+x_2-x_1;\ y_3-y_2+y_2-y_1).$$

Ținând cont de faptul, că $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1$, $y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, obținem: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$. ◀

Observație. Descriind regula triunghiului pentru aflarea sumei vectorilor $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$, noi depuneam vectorul $\vec{a}$ de la un punct arbitrar. Dacă punctul A de-l schimbat cu punctul A_1, atunci în loc de vectorul $\overrightarrow{AC}$, care este egal cu suma vectorilor $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$, vom obține un vector oarecare $\overrightarrow{A_1C_1}$. Din teorema 14.1. reiese, că coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{A_1C_1}$ sunt egale cu $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, deci, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Aceasta însemnă , că suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ nu depinde de faptul, de la care punct este depus vectorul $\vec{a}$.

Proprietățile adunării vectorilor sunt analogice proprietăților adunării numerelor.

Pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***și*** $\vec{c}$ ***se îndeplinesc egalitățile:***

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – proprietatea comutativă;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – proprietatea asociativă.

Pentru demonstrarea acestor proprietăți este suficient de comparat coordonatele respective ale vectorilor, scrise în părțile dreaptă și stângă ale egalităților. Faceți aceasta sine stătător.

Suma a tei și mai mulți vectori se află astfel: la început se adună primul si al doilea vectori, apoi la vectorul obținut se adună al treilea vector și a.m.d. De exemplu, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Din proprietățile comutativă și asociativă a adunării vectorilor reiese, că la adunarea câtorva vectori termenii se pot schimba cu locurile și de pus parantezele în orice mod.

În fizică adeseori suntem nevoiți de adunat vectori, depuși de la un punct. Astfel, dacă la un corp sunt aplicate forțele $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$ (fig. 14.4), atunci rezultanta acestor forțe este egală cu suma $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Pentru aflarea sumei a doi vectori necoliniari, depuși de la un punct, este comod de se folosit de **regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.**

Fie este necesar de găsit suma vectorilor necoliniari $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$ (fig. 14.5). Depunem vectorul $\overrightarrow{BC}$, egal vectorului $\overrightarrow{AD}$. Atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$

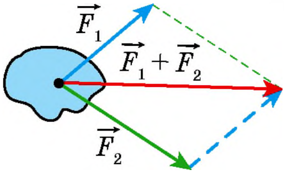


Fig. 14.4

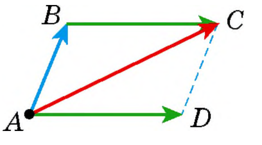


Fig. 14.5

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Deoarece vectorii $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt egali, atunci patrulaterul *ABCD* este paralelogram cu diagonala *AC*.

Raționamentele găsite permit a formula regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Depunem de la un punct arbitrar A vectorul $\overrightarrow{AB}$, *egal vectorului* $\vec{a}$, *și vectorul* $\overrightarrow{AD}$, *egal vectorului* $\vec{b}$. *Construim paralelogramul ABCD* (fig. 14.6). *Atunci suma căutată* $\vec{a} + \vec{b}$ *este egală cu vectorul* $\overrightarrow{AC}$.

Definiție. Diferența vectorilor $\vec{a}$ ***și*** $\vec{b}$ **se numește un astfel de vector** $\vec{c}$, **suma căruia cu vectorul** $\vec{b}$ **este egal cu vectorul** $\vec{a}$.

Se scrie: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Vom arăta cum de construit vectorul, egal diferenței vectorilor dați $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

De la un punct arbitrar *O* depunem vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$, corespunzător egali vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 14.7). Atunci vectorul $\overrightarrow{BA}$ este egal diferenței $\vec{a} - \vec{b}$. Într-adevăr, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Deci, după definiția diferenței a doi vectori $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, adică $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

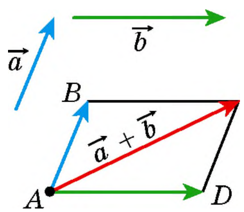


Fig. 14.6

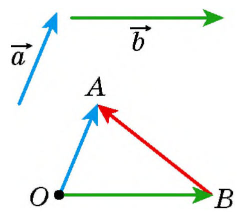


Fig. 14.7

În figura 14.7 vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari. Însă algoritmul descris se poate aplica și pentru găsirea diferenței vectorilor coliniari. În figura 14.8 vectorul $\overrightarrow{BA}$ este egal cu diferența vectorilor coliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

a *b*

Fig. 14.8

Deci, ***pentru oricare trei puncte O, A și B se îndeplinește egalitatea*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, care exprimă **regula aflării diferenței a doi vectori,** depuși de la un punct.

Teorema 14.2. ***Dacă coordonatele vectorilor*** $\vec{a}$ ***și*** $\vec{b}$ **corespunzător sunt egale cu** $(a_1; a_2)$ **și** $(b_1; b_2)$, ***atunci coordonatele vectorului*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***sunt egale cu*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Demonstrați această teoremă sine stătător.

Din teorema 14.2 reiese, că pentru oricare vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ există un singur astfel de vector $\vec{c}$, că $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Definiție. Doi vectori nenuli se numesc opuși, dacă modulele lor sunt egale și vectorii sunt orientați opus.

Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt opuși, atunci se spune, că vectorul $\vec{a}$ este **opus** vectorului $\vec{b}$, vectorul $\vec{b}$ este opus vectorului $\vec{a}$.

Vectorului, opus vectorului nul, este primit vectorul nul.

Vectorul opus vectorului $\vec{a}$, se înseamnă astfel: $-\vec{a}$.

Din definiție reiese, că opus pentru vectorul $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $\overrightarrow{BA}$. Atunci ***pentru oricare punte A și B se îndeplinește egalitatea*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Din regula triunghiului reiese, că

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}.$$

Dar din această egalitatea reiese, că atunci când vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$, atunci vectorul $-\vec{a}$ are coordonatele $(-a_1; -a_2)$.

Teorema 14.3. ***Pentru oricare vectori*** $\vec{a}$ ***și*** $\vec{b}$ ***se îndeplinește egalitatea*** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

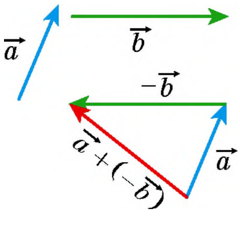


Fig. 14.9

Pentru demonstrație este suficient de comparat coordonatele corespunzătoare ale vectorilor, scrise în părțile dreaptă și stângă a egalității, Faceți aceasta singuri.

Teorema 14.3. oferă posibilitatea a reduce scăderea vectorilor la adunare: *pentru a scădea din vectorul* $\vec{a}$ *vectorul* $\vec{b}$, *se poate la vectorul* $\vec{a}$ *de adunat vectorul* $-\vec{b}$ (fig. 14.9).

Problema. Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul O (fig. 14.10). Exprimați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CB}$ prin vectorii $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Rezolvare. Deoarece punctul O este mijlocul segmentelor AC și BD, atunci $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Avem:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$. ◀

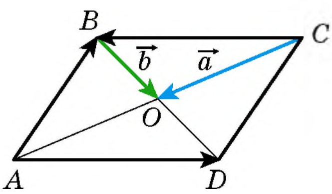


Fig. 14.10

?

1. Descrieți regula triunghiului pentru găsirea sumei vectorilor.
2. Care egalitate exprimă regula triunghiurilor pentru aflarea simei vectorilor?
3. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, care este egal cu suma a doi vectori dați?
4. Scrieți egalitățile, care exprimă proprietățile adunării vectorilor.
5. Descrieți regula paralelogramului pentru aflarea sumei a doi vectori.
6. Care vector este numit diferență a doi vectori?
7. Care egalitate exprimă regula aflării diferenței a doi vectori, depuși de la un punct?
8. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, egal cu diferența a doi vectori dați?
9. Care vectori se numesc opuși?
10. Cum se înseamnă vectorul, opus vectorului $\vec{a}$?
11. Cum se poate de redus scăderea vectorilor la adunarea vectorilor?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

14.1.° Cu ajutorul regulii triunghiului construiți suma vectorilor $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$, reprezentate în figura 14.11.

14.2.° Cu ajutorul regulii paralelogramului construiți suma vectorilor $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$, reprezentate în figura 14.11, *a–d*.

14.3.° Pentru vectorii $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$, prezentați în figura 14.11, construiți vectorul $\vec{a} - \vec{b}$.

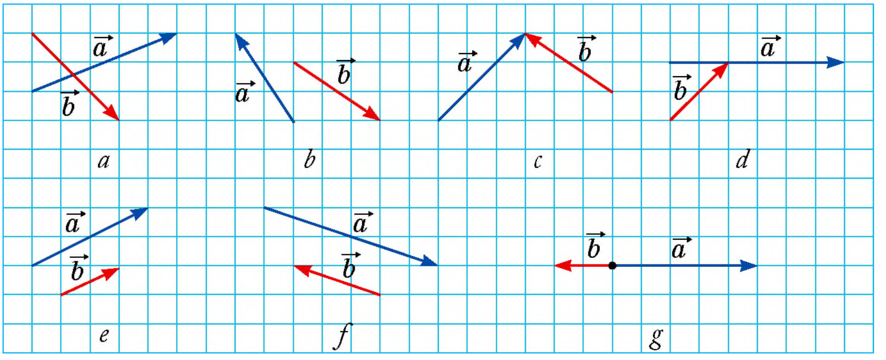


Fig. 14.11

14.4.° Desenați triunghiul ABC. Depuneți de la punctul A vectorul, opus vectorului:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

14.5.° Desenați paralelogramul $ABCD$. Construiți vectorii $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

14.6.° Desenați triunghiul MNP. Construiți vectorii $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

14.7.° Desenați paralelogramul $ABCD$. Construiți vectorii $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

14.8.° Desenați triunghiul ABC. Construiți vectorii $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

14.9.° Notați patru puncte M, N, P și Q. Construiți vectorul $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

14.10.° Pentru vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$, prezentați în figura 14.12, construiți vectorul:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

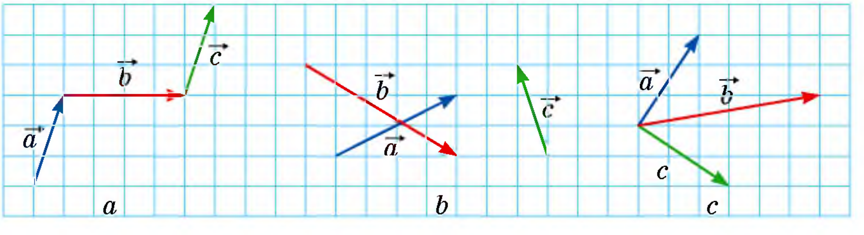


Fig. 14.12

14.11.• Depuneți de la un punct trei vectori, modulele cărora sunt egale, astfel, ca suma a doi din ei să fie egală cu al treilea vector.

14.12.• Depuneți de la un punct tei vectori, modulele cărora sunt egale, astfel, ca suma lor să fie egală cu vectorul nul.

14.13.• Pentru punctele *A*, *B*, *C* și *D*, prezentate în figura 14.13, construiți un astfel de vector $\vec{x}$, că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

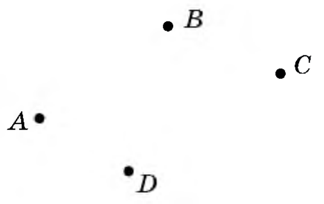


Fig. 14.13

14.14.• Desenați triunghiul ABC. Construiți un astfel de punct *X*, că:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

EXERCIȚII

14.15.° Este dat triunghiul *ABC*. Exprimați vectorul $\overrightarrow{BC}$ prin vectorii:

1) $\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

14.16.° Se dă paralelogramul *ABCD*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DA}$ prin vectorii $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

14.17.° Se dă paralelogramul *ABCD*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{BC}$ prin vectorii $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

14.18.° Se dă paralelogramul *ABCD*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{DA}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

14.19.° Demonstrați, că pentru oricare din punctele *A*, *B*, *C* și *D* se îndeplinește egalitatea:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;

3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

14.20.° Demonstrați, că pentru oricare din punctele *A*, *B*, *C* și *D* se îndeplinește egalitatea:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

14.21.° Punctele *M* și *N* – sunt mijlocurile laturilor corespunzătoare *BA* și *BC* ale triunghiului *ABC*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{NB}$ prin vectorii $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ și $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$.

14.22.° În paralelogramul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O. Demonstrați, că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

14.23.° Se dă patrulaterul $ABCD$ și un punct oarecare O. Se știe, că $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

14.24.° Se dă patrulaterul $ABCD$ și un punct oarecare O. Se știe, că $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

14.25.° Se dau vectorii $\vec{a}\,(4;\,-5)$ și $\vec{b}\,(-1;\,7)$. Aflați:

1) coordonatele vectorilor $\vec{a}+\vec{b}$ și $\vec{a}-\vec{b}$;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$ și $|\vec{a}-\vec{b}|$.

14.26.° Se dau punctele $A\,(1;-3)$, $B\,(4;5)$, $C\,(-2;-1)$ și $D\,(3;0)$. Aflați:

1) coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ și $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

14.27.° Suma vectorilor $\vec{a}\,(5;\,-3)$ și $\vec{b}\,(x;\,4)$ este egală vectorului $\vec{c}\,(2;\,y)$. Aflați x și y.

14.28.° Suma vectorilor $\vec{a}\,(x;\,-1)$ și $\vec{b}\,(2;\,y)$ este egală vectorului $\vec{c}\,(-3;\,4)$. Aflați x și y.

14.29.° Se dă vectorul $\overline{MN}\,(3;-5)$. Aflați coordonatele vectorului $\overline{NM}$.

14.30.° O latura a triunghiului echilateral ABC este egală cu 3 cm. Aflați $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

14.31.° O catetă a triunghiului dreptunghic isoscel ABC ($\angle C=90°$) este egală cu 4 cm. Aflați $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

14.32.° Sunt date punctele $N\,(3;\,-5)$ și $F\,(4;\,1)$. Găsiți $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ și $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, unde O – punct arbitrar.

14.33.° O înotătoare trece râul cu viteza de $\sqrt{3}$ m/s față de apă în direcția perpendiculară la malurile paralele. Viteza cursului apei este egală cu 1 m/s. Sub ce unghi față de direcția perpendiculară la maluri, se va deplasa înotătoarea?

14.34.• Demonstrați, că pentru oricare n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se îndeplinește egalitatea

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}.$$

14.35.• Demonstrați, că pentru oricare puncte A, B, C, D și E îndeplinește egalitatea

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}.$$

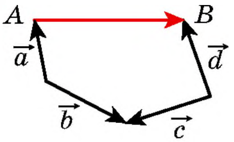


Fig. 14.14

14.36.• Exprimați vectorul $\overrightarrow{AB}$ prin vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ și $\vec{d}$ (fig. 14.14).

14.37.• În paralelogramul *ABCD* punctele *M, N* și *K* – mijlocurile corespunzătoare ale laturilor *AB, BC* și *CD*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AD}$ prin vectorii $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$ și $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

14.38.• În paralelogramul *ABCD* diagonalele se intersectează în punctul *O*. Exprimați vectorii $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AD}$ prin vectorii $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

14.39.• Patrulaterul *ABCD* este paralelogram. Demonstrați, că:
1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

14.40.• În triunghiul *ABC* este dusă mediana *BM*. Demonstrați, că:
1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

14.41.• Demonstrați, că pentru vectorii necoliniari $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ se îndeplinește inegalitatea $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.42.• Demonstrați, că pentru vectorii necoliniari $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ se îndeplinește inegalitatea $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.43.•• Pentru vectorii ne nuli $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ se îndeplinește egalitatea $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Demonstrați, că $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

14.44.•• Pentru vectorii ne nuli $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ se îndeplinește egalitatea $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Demonstrați, că $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

14.45.•• Poate oare sa fie nul vectorul sumei a tei vectori, modulele cărora sunt egale:
1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

14.46.•• Diagonalele patrulaterului *ABCD* se intersectează în punctul *O*. Este cunoscut, că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Demonstrați, că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

14.47.•• Vectorii $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{EF}$ în perechi sunt necoliniari, totodată $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. Demonstrați, că există un astfel de triunghi, laturile căruia sunt egale cu segmentele *MN*, *PQ* și *EF*.

14.48.•• Demonstrați, că pentru paralelogramul *ABCD* și punctul arbitrar *X* se îndeplinește egalitatea $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

14.49.•• Se dau două puncte A și B. Găsiți locul geometric al astfel de puncte X, că $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$.

14.50.•• Se dau două puncte A și B. Găsiți locul geometric al astfel de puncte X, că $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.

14.51.•• Un vâslaș din punctul A tece peste râul cu lățimea de 240 m cu viteză proprie constantă, direcționând nasul luntrei perpendicular malului opus. Peste 4 min luntrea a ancorat la malul opus în punctul C, amplasat mai jos după curs de punctul A cu 48 m. Găsiți viteza cursului apei și viteza luntrei față de malurile râului.

14.52.•• O șalupă din punctul A tece peste râul cu lățimea de 300 m cu viteză proprie constantă. Peste 100 s șalupa a ancorat la malul opus în punctul B. Dreapta AB este perpendiculară la malurile paralele ale râului. Viteza cursului apei râului $\sqrt{3}$ m/s. Sub ce unghi față de malurile râului a fost direcționat nasul șalupei?

14.53.* Medianele triunghiului ABC se intersectează în punctul M, demonstrați, că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

14.54.* Pe laturile triunghiului ABC în partea exterioară sunt construite paralelogramele AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 în perechi sunt ne paralele. Demonstrați, că există așa un triunghi, laturile căruia sunt egale cu segmentele A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

14.55. În triunghiul ABC este înscris paralelogramul $CDMK$ astfel, că unghiul C la ei este comun, iar punctele D, M și K aparțin corespunzător laturilor AC, AB și BC ale triunghiului. Aflați laturile paralelogramului $CDMK$, dacă perimetrul lui este egal cu 20 cm, $AC = 12$ cm, $BC = 9$ cm.

14.56. Tei circumferințe, razele cărora sunt egale cu 1 cm, 2 cm și 3 cm, se ating una de alta în perechi prin exterior. Aflați raza circumferinței ce trece prin centrele acestor circumferințe.

14.57. Demonstrați, că aria unui hexagon regulat, înscris în circumferință, alcătuiește $\frac{3}{4}$ din aria hexagonului regulat circumscris acestei circumferințe.

15. Înmulțirea vectorului cu un număr

Admitem că se dă un vector nenul $\vec{a}$. În figura 15.1 este prezentat vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal vectorului $\vec{a}+\vec{a}$, și vectorul $\overrightarrow{CD}$, egal vectorului $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Evident, că

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\vec{a}\right| \text{ și } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = 3\left|\vec{a}\right| \text{ și } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

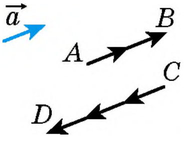


Fig. 15.1

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ se înseamnă $2\vec{a}$ și și se consideră, că el este obținut în rezultatul **înmulțirii vectorului $\vec{a}$ la numărul** 2. Analogic se consideră, că vectorul $\overrightarrow{CD}$ este obținut în rezultatul înmulțirii vectorului $\vec{a}$ la numărul -3, și se scrie: $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Acest exemplu ne indică, cum de introdus noțiunea «Înmulțirea vectorului cu un număr».

Definiție. Produsul vectorului nenul $\vec{a}$ și a numărului k, diferit de zero, se numește un astfel de vector $\vec{b}$, că:

1) $\left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$;

2) dacă $k > 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; dacă $k < 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Se scrie: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $k = 0$, atunci se consideră, că $k\vec{a} = \vec{0}$.

În figura 15.2 sunt reprezentați vectorii $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

Din definiție reiese, că

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$

$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

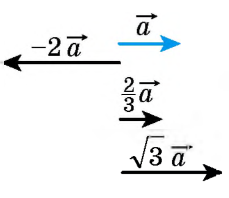


Fig. 15.2

De-asemeni din definiție reiese, că *atunci când $\vec{b} = k\vec{a}$, vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.*

Dar dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari, atunci se poate oare de prezentat vectorul $\vec{b}$ în formă de produs $k\vec{a}$? Răspuns la această întrebare ne dă teorema.

Teorema 15.1. ***Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari și $\vec{a} \uparrow \vec{0}$, atunci există așa un număr k, că $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Demonstrație. Dacă $\vec{b} = \vec{0}$, atunci pentru $k = 0$ obținem, că $\vec{b} = k\vec{a}$.

Dacă $\vec{b} \uparrow \vec{0}$, atunci sau $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, sau $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Fie $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Să cercetăm vectorul $\vec{c} = k\vec{a}$, unde $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Deoarece $k > 0$, atunci $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, deci, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Totodată, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Astfel, vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sunt coorientați și modulele lor sunt egale. De aici $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Fie $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Cercetăm vectorul $\vec{c} = k\vec{a}$, unde $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Pentru acest caz terminați demonstrația sine stătător. ◄

Teorema 15.2. ***Dacă vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$, atunci vectorul $k\vec{a}$ are coordonatele $(ka_1; ka_2)$.***

Demonstrație. ⊛ Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $k = 0$, atunci atunci afirmația teoremei este evidentă.

Fie $\vec{a} \uparrow \vec{0}$ și $k \neq 0$. cercetăm vectorul $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Vom arăta, că $\vec{b} = k\vec{a}$.

Dispunem de: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k|\,|\vec{a}|$.

Depunem de la originea de coordonate vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$, egali corespunzător vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Deoarece dreapta OA trece prin originea coordonatelor atunci ecuația ei are aspectul $ax + by = 0$.

Acestei drepte îi aparține punctul $A\,(a_1; a_2)$. Atunci

$$aa_1 + ba_2 = 0. \text{ De aici } a\,(ka_1) + b\,(ka_2) = 0.$$

Deci, punctul $B\,(ka_1; ka_2)$ tot aparține dreptei OA, de aceea vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari, adică $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

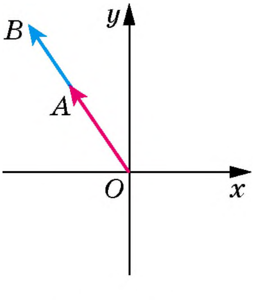


Fig. 15.3

Pentru $k > 0$ numerele a_1 și ka_1 au aceleași semne (sau ambii sunt egali cu zero). Aceeași proprietate o au și numerele a_2 și ka_2. Deci, pentru $k > 0$ punctele A și B se află într-un cadran de coordonate (sau pe aceiași semidreaptă de coordonate , de aceea vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt coorientați (fig. 15.3), adică $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Pentru $k < 0$ vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt opus orientați, adică $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Deci, obținem, că $\vec{b} = k\vec{a}$. ◄

Consecința 1. ***Vectorii $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ și $\vec{b}\,(ka_1;\, ka_2)$ sunt coliniari.***

Consecința 2. ***Dacă vectorii $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ și $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ sunt coliniari și totodată $\vec{a} \uparrow \vec{0}$, atunci există un astfel de număr k, că $b_1 = ka_1$ și $b_2 = ka_2$.***

Cu ajutorul teoremei 15.2 se pot demonstra astfel de proprietăți ale înmulțirii vectorului cu un număr.

Pentru oricare numere k, m și oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ se îndeplinesc egalitățile:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – proprietatea asociativă;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – prima proprietate distributivă;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – a doua proprietate distributivă.

Pentru demonstrarea acestor proprietăți este suficient de comparat coordonatele corespunzătoare ale vectorilor, scrise în partea dreaptă și stângă ale egalităților. Executați aceasta singuri.

Aceste proprietăți oferă posibilitatea transformării expresiilor, care conțin suma vectorilor, diferența vectorilor și produsul vectorului cu un număr, analogic cum,noi transformăm o expresie algebrică.De exemplu, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) =$ $= 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Problema 1. Demonstrați, că atunci când $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, atunci punctele O, A și B se află pe o dreaptă.

Rezolvare. Din condiție decurge, că vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari. În același timp acești vectori sunt depuși de la același punct O. Deci, punctele O, A și B se falâ pe o dreaptă. ◄

Problema 2. Punctul M este mijlocul segmentului AB și X – un punct arbitrar (fig. 15.4). Demonstrați, că $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Rezolvare. Aplicând regula triunghiului, scriem:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Adunăm aceste două egalități:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BM}$ sunt opus orientați,atunci $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Avem: $2\overrightarrow{XM} =$ $= \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. De aici $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◄

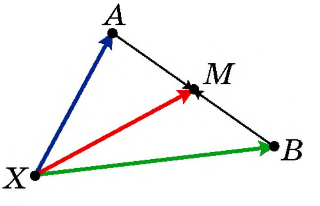


Fig. 15.4

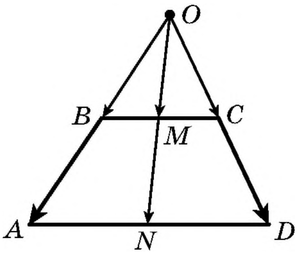


Fig. 15.5

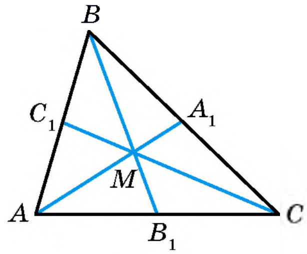


Fig. 15.6

Problema 3. Demonstrați, că mijlocurile bazelor trapezului și punctul intersecției continuării laturilor lui laterale se află pe o dreaptă.

Rezolvare. Fie punctele M și N – mijlocurile bazelor BC și AD a trapezului $ABCD$, O – punctul de intersecție al dreptelor AB și CD (fig. 15.5).

Aplicând problema cheie 2, scriem: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Deoarece $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, atunci $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, unde k și k_1 – orice numere.

Deoarece $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, atunci $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Deci, $k = k_1$.

Avem: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}$.

Din problema cheie 1 decurge, că punctele O, M și N se află pe o dreaptă. ◀

Problema 4. Demonstrați, că atunci când punctul M este punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC (fig. 15.6), atunci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Rezolvare[1]. Fie segmentele AA_1, BB_1 și CC_1 – sunt medianele triunghiului ABC (fig. 15.6). Avem:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}).$$

[1] În indicații la problema 14.53 este prezentată altă metodă de rezolvare a problemei 4.

De aici $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$.

Din proprietatea medianelor triunghiului reiese, că $AM = \frac{2}{3}AA_1$. Atunci $\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Analogic $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. De aici $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \vec{0}$. ◄

?

1. Ce se numeşte produsul vectorului nenul $\vec{a}$ şi a numărului k, diferit de zero?
2. Cu ce este egal produsul $k\vec{a}$, dacă $k = 0$ sau $\vec{a} = \vec{0}$?
3. Ce se poate spune despre vectorii nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă $\vec{b} = k\vec{a}$, unde k – este un număr oarecare?
4. Se cunoaşte, că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari, şi $\vec{a} \uparrow \vec{0}$. Cum se poate exprima vectorul $\vec{b}$ prin vectorul $\vec{a}$?
5. Vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului $k\vec{a}$?
6. Ce se poate spune despre vectorii coordonatele cărora sunt egale cu $(a_1; a_2)$ şi $(ka_1; ka_2)$?
7. Cum sunt legate între ele coordonatele corespunzătoare ale vectorilor coliniari $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ şi $\vec{b}\,(b_1; b_2)$?
8. Scrieţi proprietăţile asociative şi distributive ale înmulţirii vectorului cu un număr.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

15.1.° Se dau vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (fig. 15.7). Construiţi vectorul:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

15.2.° Se dau vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (fig. 15.7). Construiţi vectorul:

1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

15.3.° Se dau vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 15.8). Construiţi vectorul:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

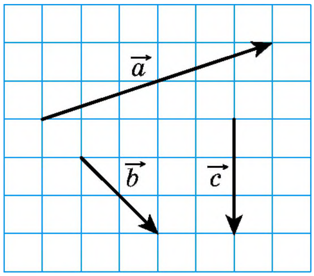


Fig. 15.7

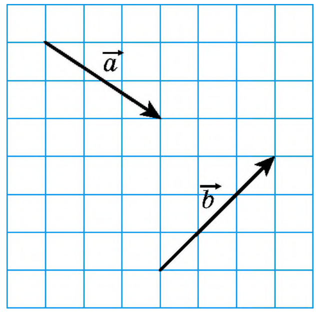


Fig. 15.8

15.4.° Construiți doi vectori necoliniari $\vec{x}$ și $\vec{y}$. Însemnați un punct arbitrar O. De la punctul O depuneți vectorul:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

15.5.• Construiți trei puncte A, B și C astfel, ca:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

15.6.• Desenați un triunghi ABC. Notați punctul M – mijlocul laturii AC.

1) De la punctul M depuneți vectorul, egal vectorului $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) De la punctul B depuneți vectorul, egal vectorului $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

15.7.• Desenați trapezul $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Notați punctul M – mijlocul laturii AB. De la punctul M depuneți vectorul, egal vectorului $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+$ $+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

15.8.• Desenați triunghiul ABC. Construiși vectorul, egal vectorului $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, astfel, ca originea lui să aparțină laturii AB, iar extremitatea – laturii BC.

EXERCIȚII

15.9.° Aflați modulele vectorilor $3\vec{m}$ și $-\frac{1}{2}\vec{m}$, dacă $|\vec{m}|=4$.

15.10.° Care din vectorii, $3\vec{a}$ și $-\frac{1}{3}\vec{a}$, este coorientat cu vectorul $\vec{a}$, dacă $\vec{a} \uparrow \vec{0}$?

15.11.° Determinați sunt coorientați sau orientați opus vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$.

Aflați raportul $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

15.12.° Exprimați vectorul $\vec{p}$ din egalitatea:

1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$.

15.13.° În paralelogramul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O. Exprimați:

1) vectorul $\overrightarrow{AO}$ prin vectorul $\overrightarrow{AC}$;

2) vectorul $\overrightarrow{BD}$ prin vectorul $\overrightarrow{BO}$;

3) vectorul $\overrightarrow{CO}$ prin vectorul $\overrightarrow{AC}$.

15.14.° În paralelogramul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Exprimați vectorul $\overrightarrow{AO}$ prin vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

15.15.° În paralelogramul $ABCD$ pe diagonala AC este notat punctul M astfel, că $AM : MC = 1 : 3$. Exprimai vectorul $\overrightarrow{MC}$ prin vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

15.16.° În paralelogramul $ABCD$ punctul M este mijlocul laturii BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{MD}$ prin vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

15.17.° În triunghiul ABC punctele M și N sunt mijlocurile laturilor AB și BC corespunzător. Exprimați:

1) vectorul $\overrightarrow{MN}$ prin vectorul $\overrightarrow{CA}$;

2) vectorul $\overrightarrow{AC}$ prin vectorul $\overrightarrow{MN}$.

15.18.° Pe segmentul AB cu lungimea de 18 cm este notat punctul C astfel, că $BC = 6$ cm. Exprimați:

1) vectorul $\overrightarrow{AB}$ prin vectorul $\overrightarrow{AC}$;

2) vectorul $\overrightarrow{BC}$ prin vectorul $\overrightarrow{AB}$;

3) vectorul $\overrightarrow{AC}$ prin vectorul $\overrightarrow{BC}$.

15.19.° Este dat vectorul $\vec{a}\,(-4;\ 2)$. Aflați coordonatele și modulele vectorilor $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ și $\frac{3}{2}\vec{a}$.

15.20.° Este dat vectorul $\vec{b}\,(-6;\ 12)$. Aflați coordonatele și modulele vectorilor $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ și $\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.21.° Este dat vectorul $\vec{a}\,(3;\ -2)$. Care din vectorii $\vec{b}\,(-3;\ -2)$, $\vec{c}\,(-6;\ 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$, $\vec{e}\left(-1;\ -\frac{2}{3}\right)$ și $\vec{f}\left(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$ este coliniar vectorului $\vec{a}$?

15.22.° Sunt dați vectorii $\vec{a}\,(3;\ -3)$ și $\vec{b}\,(-16;\ 8)$. Aflați coordinatele vectorului:

1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

15.23.° Sunt dați vectorii $\vec{m}\,(-2;\ 4)$ și $\vec{n}\,(3;\ -1)$. Aflați coordinatele vectorului:

1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

15.24.• Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC sunt notate corespunzător punctele M și N astfel, că $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Exprimați vectorul $\overrightarrow{MN}$ prin vectorul $\overrightarrow{CB}$.

15.25.• Punctele O, A și B se află pe o dreaptă. Demonstrați, că există un astfel de număr k, că $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$.

15.26.• Pe laturile AB și BC paralelogramului $ABCD$ sunt notate punctele M și N astfel, că $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Exprimați vectorul $\overrightarrow{NM}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

15.27.• Pe laturile BC și CD paralelogramului $ABCD$ sunt notate punctele E și F astfel, că $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Exprimați vectorul $\overrightarrow{EF}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

15.28.• Demonstrați, că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari, dacă $A\,(1;\ 1)$, $B\,(3;\ -2)$, $C\,(-1;\ 3)$, $D\,(5;\ -6)$.

15.29.• Printre vectorii $\vec{a}\,(1;\ -2)$, $\vec{b}\,(-3;\ -6)$, $\vec{c}\,(-4;\ 8)$ și $\vec{d}\,(-1;\ -2)$ indicații perechile de vectori coliniari.

15.30.• Sunt dați vectorii $\vec{m}\,(4;\ -6)$, $\vec{n}\left(-1;\ \frac{3}{2}\right)$ și $\vec{k}\left(3;\ -\frac{9}{2}\right)$. Indicați perechile de vectori coorientați și orientați opus.

15.31.• Aflați valorile x, pentru care vectorii $\vec{a}\,(1;\,x)$ și $\vec{b}\left(\frac{x}{4};\,4\right)$ sunt coliniari.

15.32.• Pentru care valori y vectorii $\vec{a}\,(2;\,3)$ și $\vec{b}\,(-1;\,y)$ sunt coliniari?

15.33.• Se dă vectorul $\vec{b}\,(-3;\,1)$. Aflați coordonatele vectorului, coliniar cu vectorul $\vec{b}$, modulul căruia este de două ori mai mare decât modulul vectorului $\vec{b}$. Câte soluții are problema?

15.34.• Aflați coordonatele vectorului $\vec{m}$, orientat opus vectorului $\vec{n}\,(5;\,-12)$, dacă $|\vec{m}| = 39$.

15.35.• Aflați coordonatele vectorului $\vec{a}$, coorientat vectorului $\vec{b}\,(-9;\,12)$, dacă $|\vec{a}| = 5$.

15.36.• Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile $A\,(-1;\,2)$, $B\,(3;\,5)$, $C\,(14;\,6)$ și $D\,(2;\,-3)$ este trapez.

15.37.• Demonstrați, că punctele $A\,(-1;\,3)$, $B\,(4;\,-7)$ și $D\,(-2;\,5)$ se află pe o dreaptă.

15.38.• Sunt dați vectorii $\vec{a}\,(1;\,-4)$, $\vec{b}\,(0;\,3)$ și $\vec{c}\,(2;\,-17)$. Găsiți astfel de numere x și y, că $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

15.39.•• În paralelogramul $ABCD$ diagonalele se intersectează în punctul O. Pe latura BC este notat punctul K astfel, că $BK : KC = 2 : 3$. Exprimați vectorul $\overrightarrow{OK}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.40.•• Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul O astfel, că $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{DA}$ prin vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

15.41.•• Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC sunt notate corespunzător punctele K și F astfel, că $AK : KB = 1 : 2$ și $BF : FC = 2 : 3$. Exprimați vectorii $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ și $\overrightarrow{KF}$ prin vectorii $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ și $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

15.42.•• Pe laturile AC și BC ale triunghiului ABC sunt notate corespunzător punctele M și N astfel, că $AM : MC = 1 : 3$ și $BN : NC = 4 : 3$. Exprimați vectorii $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{NM}$ prin vectorii $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ și $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

15.43.•• Medianele triunghiului ABC se intersectează în punctul M. Exprimați vectorul $\overrightarrow{BM}$ prin vectorii $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BC}$.

15.44.•• Cu ajutorul vectorilor demonstrați teorema liniei medii a triunghiului.

15.45.•• Punctele M_1 și M_2 – sunt mijlocurile laturilor A_1B_1 și A_2B_2 corespunzător. Demonstrați, că $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

15.46.•• Folosind problema 15.45, demonstrați teorema liniei medii a trapezului.

15.47.•• Punctele M și N – sunt corespunzător mijlocurile diagonalelor AC și BD a patrulaterului $ABCD$. Folosind problema 15.45, demonstrați, că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

15.48.•• Punctele M și N – sunt corespunzător mijlocurile diagonalelor AC și BD a trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Folosind problema 15.45, demonstrați, că $MN \parallel AD$.

15.49.•• Pe latura AC a triunghiului ABC este notat punctul M astfel, că $AM : MC = 2 : 3$. Demonstrați, că $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

15.50.•• Pe latura BC a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, că $BD : DC = 1 : 2$. Demonstrați, că $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

15.51.* Demonstrați că există un triunghi, laturile căruia sunt egale cu medianele triunghiului dat.

15.52.* Punctele M_1 și M_2 – mijlocurile segmentelor A_1B_1 și A_2B_2 corespunzător. Demonstrați că mijlocurile segmentelor A_1A_2, M_1M_2 și B_1B_2 se află pe o dreaptă.

15.53.* Pe latura AD și pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ sunt notate corespunzător punctele M și N astfel, că $AM = \frac{1}{5}AD$ și $AN = \frac{1}{6}AC$. Demonstrați, că punctele M, N și B se află pe o dreaptă.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

15.54. Baza mai mică și latura laterală a trapezului isoscel sunt egale cu 12 cm. Cu ce este egală linia medie a trapezului, dacă unul din unghiurile lui este egal cu 60°?

15.55. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 6 cm și 16 cm, iar una din laturi – 7 cm. Aflați unghiul dintre diagonalele paralelogramului și aria lui.

15.56. Găsiți coarda circumferinței cu raza R, capetele căreia împart circumferința în două arcuri, lungimile cărora se raportă ca 2 : 1.

OBSERVAŢI, DESENAŢI, CONSTRUIŢI, FANTAZAŢI

15.57. Este dat un pătrat cu dimensiunile 101×101 pătrățele, Pătrățelele pătratului sau vopsit în ordinea tablei de șah în albe și negre astfel, că pătrățelul din centru sa dovedit a fi neagru. Pentru fiecare pereche de pătrățele de diferită culoarea se depune un vector, originea căruia coincide cu centrul pătrățelului negru, iar extremitatea – cu centrul celei albe. Demonstrați, că suma tuturor vectorilor depuși este egală cu nul-vectorul.

APLICAREA VECTORILOR

În timpul aplicării vectorilor la rezolvarea problemelor frecvent se folosește o astfel de lemă.

Lemă. ***Fie M – un astfel de punct al segmentului AB, că*** $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{m}{n}$ (fig. 15.9).

Atunci pentru oricare punct X se satisface egalitatea

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Demonstrație. Avem: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Deoarece $AM = \dfrac{m}{m+n}AB$, atunci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Scriem: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Deoarece $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, atunci avem:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA});$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$ ◄

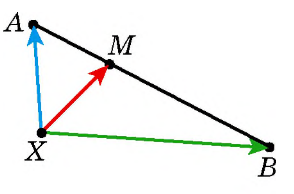


Fig. 15.9

Menționăm, că această lemă este generalizarea problemei cheie 2 punctul 15.

Problema. Fie M – punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC și X – un punct arbitrar (fig. 15.10). Demonstrați, că

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

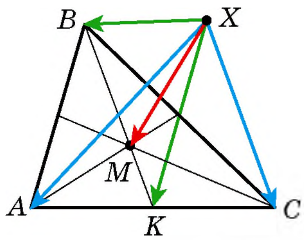


Fig. 15.10

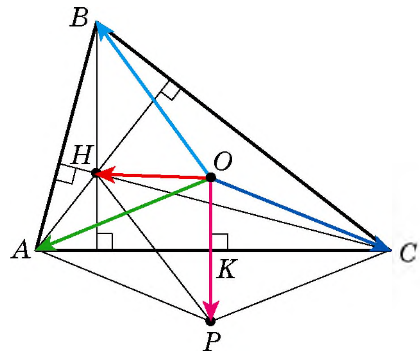


Fig. 15.11

Rezolvare. Fie punctul K este mijlocul segmentului AC. Avem: $BM : MK = 2 : 1$. Atunci, folosind lema, se poate scrie: $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. ◄

Să demonstrăm egalitatea vectorială, care este leagă două puncte minunate[1] ale triunghiului.

Teoremă. ***Dacă punctul H este centrul ortic al triunghiului ABC, iar punctul O este centrul circumferinței circumscrise lui, atunci***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Demonstrație. Pentru triunghiul dreptunghic egalitatea (*) este evidentă.

Fie triunghiul ABC nu este dreptunghic. Coborâm din punctul O perpendicularа OK pe latura AC a triunghiului ABC (fig. 15.11). Din cursul de geometrie de clasa a 8-a a fost demonstrat, că $BH = 2OK$.

Pe semidreapta OK notăm un astfel de punct P astfel, că $OK = KP$. Atunci $BH = OP$. Deoarece $BH \parallel OP$, atunci patrulaterul $HBOP$ este paralelogram.

Conform regulii paralelogramului $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Deoarece punctul K este mijlocul segmentului AC, atunci în patrulaterul $AOCP$ diagonalele prin punctul de intersecție se împart în jumătate. Deci, acest patrulater este paralelogram. De aici $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Avem: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◄

Să ne adresăm la egalitatea vectorială $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$, unde M este punctul de intersecție a medianelor triunghiului ABC. Deoarece X este

[1] Materialul despre două puncta minunate vezi în manualul «Geometria clasa 8-a».

punct arbitrar, atunci egalitatea rămâne adevărată, dacă ca punct X de ales punctul O – centrul circumferinței circumscrise triunghiului ABC.

Avem: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Ținând cont de egalitatea (*), obținem: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Această egalitate înseamnă, că punctele O, M și H se află pe o dreaptă, care se numește **dreapta lui Euler**. Vă amintim că această proprietate minunată a fost demonstrată în manualul de clasa a 8-a, dar prin altă metodă.

16. Produsul scalar al vectorilor

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ – doi vectori nenuli și coorientați (fig. 16.1). De la un punct arbitrar O depunem vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$, corespunzător egali vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Mărimea unghiului AOB o vom numi **unghiul între vectorii** $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Unghiul între vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se înseamnă astfel: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. De exemplu, în figura 16.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, iar în figura 16.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

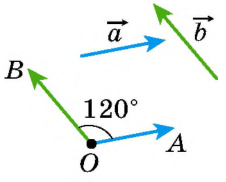


Fig. 16.1

Fig. 16.2

Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coorientați, atunci se consideră, că $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Dacă măcar unul din vectori $\vec{a}$ sau $\vec{b}$ este nul, atunci de asemeni se consideră, că $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Deci pentru oricare vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are loc inegalitatea:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se numesc **perpendiculari**, dacă unghiul între ei este egal cu 90°. Se scrie: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Voi puteți să adunați și să scădeți vectori, să înmulțiți un vector cu un număr. De-asemenea din cursul de fizică voi cunoașteți, că atunci când sub acțiunea unei forțe constante $\vec{F}$ corpul s-a deplasat din punctul A în punctul

B (fig. 16.3), atunci lucrul efectuat este egal cu $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, unde $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

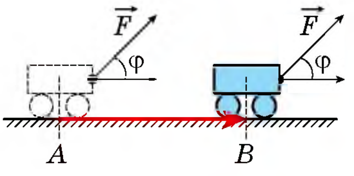


Fig. 16.3

Cele expuse mai sus indică, că este rațional de introdus încă o acțiune asupra vectorilor.

Definiție. Produs scalar a doi vectori se numește produsul modulelor lor și a cosinusului unghiului între ei.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se înseamnă astfel: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Avem:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Dacă măcar unul din vectori $\vec{a}$ sau $\vec{b}$ este nul, atunci evident, că $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Fie $\vec{a} = \vec{b}$. Atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{a}$ se numește **pătratul scalar** al vectorului $\vec{a}$ și se înseamnă $\vec{a}^2$.

Noi am obținut, că $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, adică ***pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui.***

Teorema 16.1. ***Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci și numai atunci, când acești vectori sunt perpendiculari.***

Demonstrație. ⊙ Fie $\vec{a} \perp \vec{b}$. Vom demonstra, că $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Avem: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$. De aici $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Fie acum $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Să demonstrăm, că $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Scriem: $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Deoarece $|\vec{a}| \uparrow 0$ și $|\vec{b}| \uparrow 0$, atunci $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. De aici $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, adică $\vec{a} \perp \vec{b}$. ◄

Teorema 16.2. ***Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ și $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ poate fi calculat după formula***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Demonstrație. La început cercetăm cazul, când vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt necoliniari.

Depunem de la originea de coordonate vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$, Corespunzător egali vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 16.4). Atunci $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

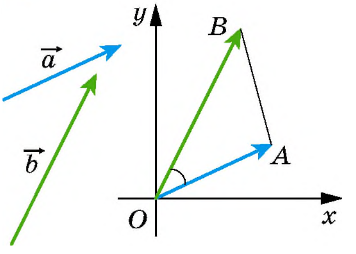


Fig. 16.4

Aplicăm teorema cosinusurilor pentru triunghiul AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB.$$

De aici

$$OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Deoarece $|\vec{a}| = OA$ și $|\vec{b}| = OB$, atunci $OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB = \vec{a}\varnothing\vec{b}$.

Totodată, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. De aici $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$.

Avem: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Utilizând formula calculării modulului unui vector după coordonatele lui, scriem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Simplificând expresia, care este scrisă în partea dreaptă a ultimii egalități, obținem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Să cercetăm cazul, când vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci evident, că $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Dacă $\vec{a} \uparrow \vec{0}$ și $\vec{b} \uparrow \vec{0}$, atunci există un astfel de număr k, că $\vec{b} = k\vec{a}$, adică $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Dacă $k > 0$, atunci $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Avem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{a}) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}|\cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k(a_1^2 + a_2^2) =$$
$$= a_1\cdot ka_1 + a_2\cdot ka_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Cazul, când $k < 0$, cercetați-l sine stătător. ◀

Consecință. ***Cosinusul unghiului între vectorii nenuli $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ și $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ se poate calcula conform formulei***

$$\boxed{\cos\angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Demonstrație. ⊙ Din definiția produsului scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ reiese, că $\cos\angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Folosind teorema 16.2 și formula aflării modulului vectorului după coordonatele lui, obținem formula (*). ◀

Cu ajutorul teoremei 16.2 ușor se poate demonstra astfel de proprietăți ale produsului scalar.

Pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ și a oricărui număr k se îndeplinesc egalitățile:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – proprietatea distributivă;

2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ – proprietatea comutativă;

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – proprietatea asociativă.

Pentru demonstrarea acestor proprietăți este suficient de exprimat prin coordonatele vectorilor produsele scalare, scrise în părțile dreaptă și stângă ale egalității, și de le comparat. Executați acesta singuri.

Acest proprietăți împreună cu proprietățile adunării vectorilor, și înmulțirii vectorului la un număr oferă posibilitatea de a transforma expresiile, care conțin produsul scalar al vectorilor, analogic, cum noi transformăm expresiile algebrice.

De exemplu, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{a} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b} =$

$$= \vec{a}^{\,2} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$

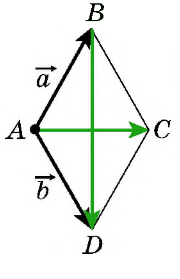


Fig. 16.5

Problema 1. Cu ajutorul vectorilor demonstrați, că diagonalele rombului sunt perpendiculare.

Rezolvare. În figura 16.5 este prezentat rombul $ABCD$. Fie $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Evident, că $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. După regula paralelogramului avem: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ și $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. De aici

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b}^{\,2} - \vec{a}^{\,2} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$$

Deci, $AC \perp BD$. ◀

Problema 2. Este cunoscut, că $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Aflați $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Rezolvare. Deoarece pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui, atunci $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. De aici

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Răspuns: $3\sqrt{7}$. ◄

Problema 3. În triunghiul ABC este cunoscut, că $AB = 4$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm, $\angle ABC = 30°$. Aflați mediana BM.

Rezolvare. Folosind problema cheie nr. 2 din punctul 15, scriem: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (fig. 16.6). De aici

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$

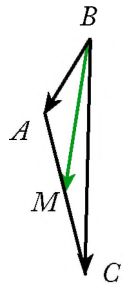


Fig. 16.6

Deci, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ cm.

Răspuns: 7 cm. ◄

?

1. Descrieți, cum se poate construi unghiul, mărimea căruia este egală unghiului între doi vectori nenuli și ne coorientați.
2. Cu ce este egal unghiul între doi vectori coorientați?
3. Cu ce este egal unghiul între vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă măcar unul din ei este nul?
4. Cum se înseamnă unghiul între vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$?
5. În ce limite se află unghiul între oricare doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$?
6. Care vectori se numesc perpendiculari?
7. Ce se numește produsul scalar a doi vectori?
8. Ce se numește pătratul scalar al vectorului?

9. Cu ce este egal păstratul scalar al vectorului?
10. Formulaţi condiţia perpendicularităţii a doi vectori nenuli.
11. Ce reiese din egalitatea $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dacă $\vec{a} \uparrow \vec{0}$ şi $\vec{b} \uparrow \vec{0}$?
12. Cum de aflaţi produsul scalar al vectorilor, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?
13. Cum de găsit cosinusul unghiului între doi vectori nenuli, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?
14. Scrieţi proprietăţile produsului scalar al vectorilor.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

16.1.° Construiți unghiul, mărimea căruia este egal unghiului între vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 16.7).

16.2.° Construiți unghiul, mărimea căruia este egal unghiului între vectorii $\vec{m}$ și $\vec{n}$ (fig. 16.8).

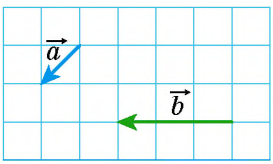


Fig. 16.7

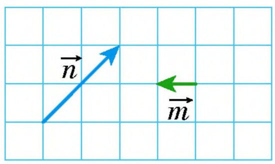


Fig. 16.8

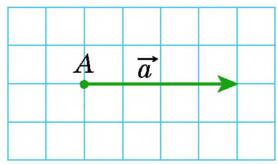


Fig. 16.9

16.3.° În figura 16.9. este reprezentat vectorul $\vec{a}$ (lungimea laturii unui pătrățel este egal cu 0,5 cm). Depuneți de la punctul A vectorul $\vec{b}$ astfel, că $|\vec{b}| = 3$ cm și $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Câte soluții are problema?

EXERCIȚII

16.4.° În figura 16.10 este reprezentat triunghiul echilateral ABC, medianele AM și BK ale căruia se intersectează în punctul F. Aflați unghiul între vectorii:

1) $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BC}$;
2) $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AM}$;
4) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AM}$;
5) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BK}$;
6) $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BK}$;
7) $\overrightarrow{CF}$ și $\overrightarrow{AB}$.

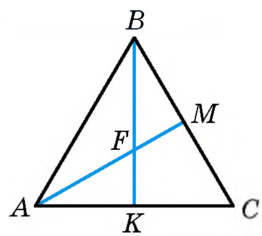


Fig. 16.10

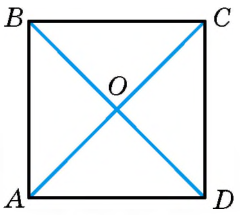


Fig. 16.11

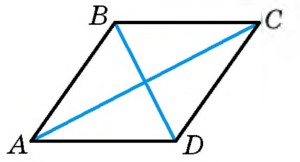


Fig. 16.12

16.5.° În figura 16.11 este prezentat pătatul $ABCD$, diagonalele căruia se intersectează în punctul O. Găsiți unghiul între vectorii:

1) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CA}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ și $\overrightarrow{CD}$.
2) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{CB}$;

16.6.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

1) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;
2) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2\sqrt{2},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;
3) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;
4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2},\ |\vec{b}| = 6,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$;
5) $|\vec{a}| = 0{,}3,\ |\vec{b}| = 0,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137°$.

16.7.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{m}$ și $\vec{n}$, dacă:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2},\ |\vec{n}| = 4,\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;
2) $|\vec{m}| = 8,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

16.8.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{a}\,(2; -1),\ \vec{b}\,(1; -3)$; 3) $\vec{a}\,(1; -4),\ \vec{b}\,(8; 2)$.
2) $\vec{a}\,(-5; 1),\ \vec{b}\,(2; 7)$;

16.9.° Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{m}$ și $\vec{n}$, dacă:

1) $\vec{m}\,(3; -2),\ \vec{n}\,(1; 0)$; 2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right),\ \vec{n}\,(6; 9)$.

16.10.° În figura 16.12 este reprezentat rombul $ABCD$, în care $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$. Aflați produsul scalar al vectorilor:

1) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AD}$.
2) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{DC}$;

16.11.° În triunghiul ABC este cunoscut, că $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Aflați produsul scalar al vectorilor:

1) $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{BA}$.

16.12.° Aflați lucrul forței cu mărimea de 6 H pentru deplasare corpului la distanța de 7 m, dacă unghiul între direcția acțiunii forței și deplasare este egal cu 60°.

16.13.° Aflați cosinusul unghiului între vectorii $\vec{a}\,(1; -2)$ și $\vec{b}\,(2; -3)$.

16.14.° Ce semn are produsul scalar al vectorilor, dacă unghiul între ele este:

1) ascuțit; 2) obtuz?

16.15.° Se cunoaște, că produsul scalar al vectorilor este:

1) număr pozitiv; 2) număr negativ.

Determinați tipul unghiul între vectori.

16.16.• În triunghiul echilateral ABC, latura căruia este egală cu 1, medianele AA_1 și BB_1 se intersectează în punctul M. Calculați:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

16.17.• Punctul O – este centrul unui hexagon regulat $ABCDEF$, latura căruia este egală cu 1. Calculați:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

16.18.• Pentru care valoare a lui x vectorii $\vec{a}\,(3; x)$ și $\vec{b}\,(1; 9)$ sunt perpendiculari?

16.19.• Se știe, că $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Demonstrați, că vectorii $\vec{a}\,(-x; y)$ și $\vec{b}\,(y; x)$ sunt perpendiculari.

16.20.• Pentru care valoare a lui x vectorii $\vec{a}\,(2x; -3)$ și $\vec{b}\,(x; 6)$ sunt perpendiculari?

16.21.• Pentru care valoare a lui y produsul scalar al vectorilor $\vec{a}\,(4; y)$ și $\vec{b}\,(3; -2)$ este egal cu 14?

16.22.• Pentru care valoare a lui x unghiul între vectorii $\vec{a}\,(2; 5)$ și $\vec{b}\,(x; 4)$:

1) ascuțit; 2) obtuz?

16.23.• Aflați coordonatele vectorului $\vec{b}$, coliniar vectorului $\vec{a}\,(3; -4)$, dacă $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

16.24.• Se cunoaște, că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt necoliniari și $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. Pentru care valori ale lui x vectorii $\vec{a} + x\vec{b}$ și $\vec{a} - x\vec{b}$ sunt perpendiculari?

16.25.• Vectorii $\vec{a}+\vec{b}$ și $\vec{a}-\vec{b}$ sunt perpendiculari. Demonstrați, că $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

16.26.• Este cunoscut, că $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=45°$. Aflați produsul scalar $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$.

16.27.• Aflați produsul scalar $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, dacă

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b})=120°.$$

16.28.• Se știe, că $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=150°$. Aflați $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

16.29.• Se știe, că $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n})=60°$. Aflați $|2\vec{m}-3\vec{n}|$.

16.30.• Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile $A(3; -2)$, $B(4; 0)$, $C(2; 1)$ și $D(1; -1)$ este dreptunghi.

16.31.• Demonstrați, că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile $A(-1; 4)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 6)$ și $D(0; 5)$ este pătrat.

16.32.• Aflați cosinusurile unghiurilor triunghiului cu vârfurile $A(1; 6)$, $B(-2; 3)$ și $C(2; -1)$.

16.33.• Aflați unghiurile triunghiului cu vârfurile $A(0; 6)$, $B(4\sqrt{3}; 6)$ și $C(3\sqrt{3}; 3)$.

16.34.• Demonstrați, că pentru oricare doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se îndeplinește inegalitatea $-|\vec{a}||\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.35.• Determinați amplasarea reciprocă a doi vectori nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.36.•• Aflați unghiul între vectorii $\vec{m}$ și $\vec{n}$, dacă

$$(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3.$$

16.37.•• Aflați unghiul între vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

16.38.•• În triunghiul ABC se știe, că $\angle C=90°$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Demonstrați, că medianele lui AK și CM sunt perpendiculare.

16.39.•• În patrulaterul $ABCD$ diagonalele AC și BD sunt perpendiculare și se intersectează în punctul O. Se știe, că $OB=OC=1$, $OA=2$, $OD=3$. Aflați unghiul între dreptele AB și DC.

16.40.•• În triunghiul ABC s-a dus mediana BD. Este cunoscut, că $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Aflați unghiul ABD.

16.41.* Pe laturile AB și BC ale triunghiul ABC din partea exterioară s-au construit pătratele $ABMN$ și $BCKF$. Demonstrați, că mediana BD a triunghiului ABC este perpendiculară dreptei MF.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

16.42. Punctul M este mijlocul diagonalei AC a patrulaterului convex $ABCD$ (fig. 16.13). Demonstrați, că patrulaterele $ABMD$ și $CBMD$ sunt de diferită mărime.

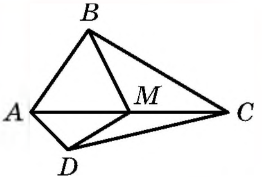


Fig. 16.13

16.43. Perpendiculara coborâtă din punctul de intersecție ale diagonalelor rombului, împarte latura lui în segmentele, unul din care este cu 7 cm mai mare ca altul. Aflați perimetrul rombului, dacă înălțimea lui este egală cu 24 cm.

16.44. Pe înălțimea triunghiului regulat cu latura de $6\sqrt{3}$ cm ca pe diametru este construită o circumferință. Aflați lungimea arcului acestei circumferințe, care este amplasat în afara triunghiului.

ÎNSĂRCINARĂ NR. 4 "CONTROLEAZĂ-TE" ÎN FORMĂ TEST

1. Care din mărimile prezentate este vector?

A) Masa; C) viteza;
B) volumul; D) timpul.

2. Cu ce este egal modulul vectorului, originea și extremitatea căruia coincid?

A) 1; C) 5;
B) –1; D) 0.

3. Se dă paralelogramul $ABCD$. Care din egalitățile date este corectă?

A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; C) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;
B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Se cunoaște, că $\overline{AM} = \overrightarrow{MB}$. Care din afirmațiile date este corectă?

A) Punctul B – mijlocul segmentului AM;
B) punctul A – mijlocul segmentului MB;
C) punctul M – mijlocul segmentului AB;
D) punctul M – C) vârful triunghiului isoscel AMB.

5. Sunt date punctele A (–3; 4) și B (1; –8). Punctul M – mijlocul segmentului AB. Aflați coordonatele vectorului $\overline{AM}$.

A) (2; –6); C) (–2; –6);
B) (–2; 6); D) (6; –2).

6. Pentru care valori x vectorii $\vec{a}\,(x;\ 2)$ și $\vec{b}\,(-4;\ 8)$ sunt coliniari?

A) –1; C) 0;
B) 1; D) $\frac{1}{2}$.

7. Care din egalitățile date este corectă?

A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$;
B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

8. Este dat vectorul $\vec{a}\left(\sqrt{3};\ -2\right)$. care din vectori este egal cu vectorul $\sqrt{3}\vec{a}$?

A) $\vec{m}\left(1;\ -2\sqrt{3}\right)$; C) $\vec{p}\,(3;\ -2)$;
B) $\vec{n}\left(-3;\ -2\sqrt{3}\right)$; D) $\vec{q}\left(3;\ -2\sqrt{3}\right)$.

9. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Care din egalitățile date este corectă?

A) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

B) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}\,(2;\ -3)$ și $\vec{b}\,(3;\ -2)$.

A) 12; C) 0;
B) –12; D) 6.

11. Pentru care valoare x vectorii $\vec{a}\,(2x;\ -3)$ și $\vec{b}\,(1;\ 4)$ sunt perpendiculari?

A) –6; C) 12;
B) 3; D) 6.

12. Aflați cosinusul unghiului între vectorii $\vec{a}\,(5;\ -12)$ și $\vec{b}\,(-3;\ 4)$.

A) $\frac{63}{65}$; C) $-\frac{63}{65}$;

B) $\frac{65}{63}$; D) $\frac{1}{2}$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Vectorul

Dacă este indicat, care punct este originea segmentului și care punct – extremitatea lui, atunci astfel de segment se numește segment orientat sau vector.

Vectori coliniari

Vectorii nenuli se numesc colineari dacă ei se află pe drepte paralele sau pe o dreaptă. Vectorul nul este considerat coliniar oricărui vector.

Vectori egali

Vectorii nenuli se numesc egali, dacă modulele lor sunt egale și ei sunt coorientați. Oricare doi vectori nuli sunt egali. Vectorii egali au coordonate corespunzătoare egale. Dacă coordonatele corespunzătoare ale vectorilor sunt egale, atunci și vectorii sunt egali.

Coordonatele vectorului

Dacă punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ corespunzător sunt originea și extremitatea vectorului $\vec{a}$, atunci numerele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$ sunt egale corespunzător primei și a doua coordonate ale vectorului $\vec{a}$.

Modulul vectorului

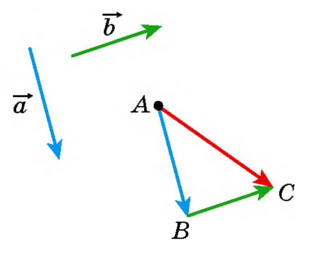
Dacă vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$, atunci $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Regulile adunării a doi vectori

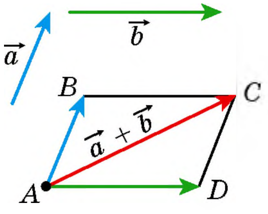
Regula triunghiurilor

Depunem de la un punct arbitrar A vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal cu vectorul $\vec{a}$, mai departe de la punctul B depunem vectorul $\overrightarrow{BC}$, egal cu vectorul $\vec{b}$. Vectorul $\overrightarrow{AC}$ este suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Pentru oricare trei puncte A, B și C se îndeplinește egalitatea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Regula paralelogramului



Depunem de la un punct arbitrar A vectorul $\overrightarrow{AB}$, egal vectorului $\vec{a}$, și vectorul $\overrightarrow{AD}$, egal vectorului $\vec{b}$. Construim paralelogramul $ABCD$. Atunci vectorul $\overrightarrow{AC}$ este suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Coordonatele sumei vectorilor

Dacă coordonatele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ corespunzător sunt egale cu $(a_1; a_2)$ și $(b_1; b_2)$, atunci coordonatele vectorului $\vec{a}+\vec{b}$ sunt egale cu $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Proprietățile adunării vectorilor

Pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ se îndeplinesc egalitățile:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – 5) proprietatea comutativă;

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – 6) proprietatea asociativă.

Diferența vectorilor

Diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se numește un astfel de vector $\vec{c}$, suma căruia cu vectorul $\vec{b}$ este egal cu vectorul $\vec{a}$.

Pentru oricare trei puncte O, A și B se îndeplinește egalitatea $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Coordonatele diferenței vectorilor

Dacă coordonatele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ corespunzător sunt egale cu $(a_1; a_2)$ și $(b_1; b_2)$, atunci coordonatele vectorului $\vec{a}-\vec{b}$ sunt egale cu $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

Vectori opus orientați

Doi vectori nenuli se numesc opuși, dacă modulele lor sunt egale și vectorii sunt opus orientați.

Pentru oricare punte A și B se îndeplinește egalitatea $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Înmulțirea vectorului cu un număr

Produsul vectorului nenul $\vec{a}$ a numărului k, diferit de zero, se numește un astfel de vector $\vec{b}$, că:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) dacă $k > 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; dacă $k < 0$, atunci $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $k = 0$, atunci se consideră, că $k\vec{a} = \vec{0}$.

Dacă vectorul $\vec{a}$ are coordonatele $(a_1; a_2)$, atunci vectorul $k\vec{a}$ are coordonatele $(ka_1; ka_2)$.

Proprietățile vectorilor coliniari

Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari și totodată $\vec{a} \uparrow \vec{0}$, atunci există așa un număr k, că $\vec{b} = k\vec{a}$.

Dacă vectorii $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ și $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ sunt coliniari și totodată $\vec{a} \uparrow \vec{0}$, atunci există un astfel de număr k, că $b_1 = ka_1$ și $b_2 = ka_2$.

Proprietățile înmulțirii vectorului cu un număr

Pentru oricare numere k, m și oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ se îndeplinesc egalitățile:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – proprietatea asociativă;

2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – prima proprietate distributivă;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – a doua proprietate distributivă.

Produsul scalar al vectorilor

Produs scalar a doi vectori se numește produsul modulelor lor și a cosinusului unghiului între ei:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ și $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ poate fi calculat după formula $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Proprietățile produsul scalar

Pentru oricare vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ și a oricărui număr k se îndeplinesc egalitățile:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – proprietatea comutativă;

2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – proprietatea asociativă;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – proprietatea distributivă.

Condiția de perpendicularitate a doi vectori

Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci și numai atunci, când acești vectori sunt perpendiculari.

Cosinusul unghiului dintre doi vectori

Cosinusul unghiului între vectorii nenuli $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ și $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$ se poate calcula conform formulei

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE §5*

În acest paragraf veți afla, ce sunt transformările figurii. Veți face cunoștință cu tipurile de transformări, precum deplasarea paralelă, simetria centrală, simetria axială, rotația, omotetia, asemănarea.

O să va învățați a aplica proprietățile transformărilor în timpul rezolvării problemelor și demonstrării teoremelor.

17. Mișcarea (deplasarea) figurii. Deplasarea paralelă

Exemplul 1. În figura 17.1 este prezentat segmentul AB, dreapta a și punctul O, care nu aparține nici dreptei a nici dreptei AB. Fiecărui punct X al segmentului AB asociem în corespondență punctul X_1 al dreptei a astfel, ca punctele O, X și X_1 să se afle pe o dreaptă. Punctului A îi va fi corespondent punctul A_1, punctului B – punctul B_1. Este clar, că toate aceste puncte X_1 creează segmentul A_1B_1.

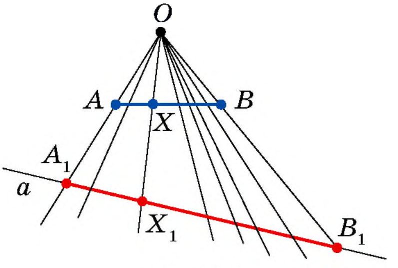


Fig. 17.1

Noi am indicat regula, cu ajutorul căreia fiecărui punct X al segmentului AB este aplicat în corespondență un singur punct X_1 al segmentului A_1B_1. În acest caz se spune, că segmentul A_1B_1 este obținut în rezultatul **transformării** segmentului AB.

Exemplul 2. În figura 17.2 este prezentată semicircumferința AB și dreapta a paralelă diametrului AB. Fiecărui punct X al semicircumferinței asociem punctul X_1 pe dreapta a așa ca dreapta XX_1 sa fie perpendiculară până la dreapta a. Clar, că toate aceste puncte X_1 formează segmentul A_1B_1. În acest caz se spune, că segmentul A_1B_1 este obținut în rezultatul transformării semicircumferinței AB.

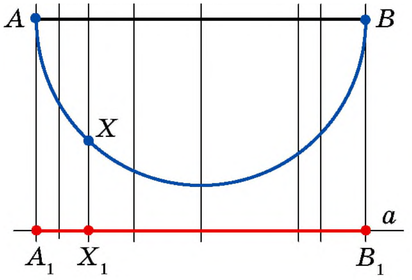


Fig. 17.2

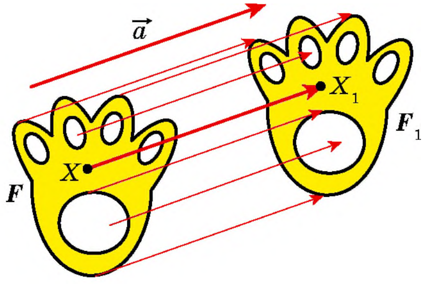


Fig. 17.3

Exemplul 3. Fie că este dată figura F și vectorul $\vec{a}$ (fig. 17.3). Fiecărui punct X al figurii F asociem în corespondență un astfel de punct X_1, că $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. În urma unei astfel de transformări al figurii F vom obține figura F_1 (fig. 17.3). Astfel de transformare al figurii F se numește **deplasare paralelă cu vectorul $\vec{a}$.**

Să generalizăm exemplele prezentate.

Fie este dată o figură oarecare F. Fiecărui punct al figurii F să asociem în corespondență după o anumită regulă un punct oarecare. Toate punctele obținute prin asociere creează figura F_1. Se pune, că **figura F_1 este obținută în rezultatul transformării figurii F.** Totodată figura F_1 se numește **imaginea (transformata)** figurii F, iar figura F – **preimaginea** figurii F_1.

Astfel, în exemplul 1 segmentul A_1B_1 este imaginea segmentului AB. Punctul X_1 este imaginea punctului X. Segmentul AB este preimaginea segmentului A_1B_1.

Atragem atenția la faptul, că în exemplul 3 figura F este egală imaginii sale F_1. Transformările descrise în exemplele 1 și 2, astfel de proprietate nu posedă.

Ce proprietăți trebuie să posede transformarea, ca imaginea și preimaginea să fie figuri egale? Se dovedește, că este suficient doar de o singură proprietate: transformarea trebuie să păstreze distanța dintre puncte, adică dacă A și B sunt puncte arbitrare ale fisurii F, iar punctele A_1 și B_1 – sunt imaginile lor, atunci trebuie să se satisfacă egalitatea $AB = A_1B_1$.

Definiție. Transformarea figurii F, care păstrează distanța între puncte, se numește mișcare (deplasare) a figurii F.

Dacă fiecărui punct X al figurii F este pus în corespondență același punct X, atunci astfel de transformare a figurii F se numește **identică**. La transformarea identică imaginea furii F este înseși figura F. Clar, că transformarea identică este mișcare.

Dacă transformarea este mișcare, atunci:

- *imaginea dreptei este dreaptă;*
- *imaginea segmentului este segment, egal celui dat;*
- *imaginea unghiului este unghi, egal celui dat;*
- *imaginea triunghiului este triunghi, egal celui dat.*

Demonstrarea acestor proprietăți ies din limitele ce se cercetează în cursul dat de geometrie.

Definiție. Două figuri sunt egale, dacă dacă există mișcarea, în urma căreia o figură este imaginea altei figuri.

Scrierea $F = F_1$ înseamnă, că figurile F și F_1 sunt egale.

Dacă există o astfel de mișcare, la care figura F_1 este imaginea figurii F, atunci obligat există mișcarea, în urma căreia figura F este imaginea figurii F_1. Astfel de mișcări se numesc **reciproc inverse**.

Atragem, atenția. Înainte noi numeam figuri asemenea astfel de figuri, care nu se schimbau la suprapunere. Termenul "suprapunere" intuitiv este înțeles, și în imaginația noastră, era legat cu suprapunerea corpurilor reale. Dar figurile geometrice nu se pot suprapune în sensul direct al acestui cuvânt. Acum suprapunerea figurii F pe figura F_1 se poate constata ca mișcarea figurii F, la care imaginea ei este figura F_1.

Termenul "mișcare" de-asemeni se asociază cu o anumită acțiune fizică: modificarea locației corpului fără deformații. Anume cu aceasta este legata apariția acestui termen în matematică. Cu toate acestea în geometrie obiectul cercetării nu este procesul, care se petrece în timp, ci doar proprietățile figurii și a imaginii ei.

Aceea, că figurile F și F_1 reprezentate în fig. 17.3 sunt egale, este clar din percepția intuitivă. Confirmarea strictă a acestui fapt o dă astfel de teoremă.

Teorema 17.1 (proprietatea translării paralele). ***Deplasarea (translația) paralelă este mișcare.***

Demonstrație. Fie $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ – sunt puncte arbitrare ale figurii F (fig. 17.4), punctele A_1 și B_1 – imaginile lor corespunzătoare la translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ $(m;\ n)$. Să demonstrăm, că $AB = A_1B_1$.

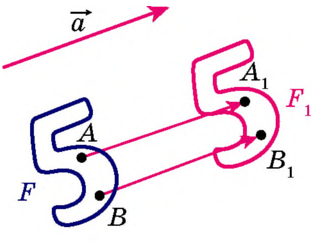


Fig. 17.4

Avem: $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \vec{a}$. Vectorii $\overline{AA_1}$ și $\overline{BB_1}$ au coordonatele $(m;\ n)$. Deci, coordonate ale punctelor A_1 și B_1 sunt corespunzător perechile de numere $(x_1 + m; y_1 + n)$ și $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Să găsim distanța între punctele A și B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Să găsim distanța între punctele A_1 și B_1:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Deci, noi am arătat, că $AB = A_1B_1$, adică translarea paralelă păstrează distanța între puncte. ◀

Consecință. ***Dacă figura F_1 – este imaginea figurii F la translația paralelă, atunci $F_1 = F$.***

Această proprietate se folosește la crearea desenelor pe materiale, tapete, acoperirea podelelor etc. (fig. 17.5).

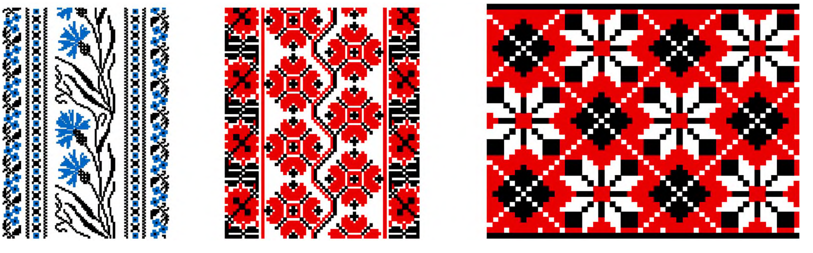


Fig. 17.5

Dacă figura F_1 este imaginea figurii F la translarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$, atunci figura F este imaginea figurii F_1 la translarea paralelă cu vectorul $-\vec{a}$ (fig. 17.6). Translarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$ și $-\vec{a}$ sunt mișcări reciproc inverse.

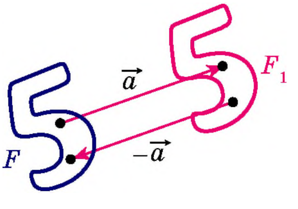


Fig. 17.6

Problema 1. Fiecărui punct $X(x;\ y)$ al figurii F se aplică în corespondență punctul $X_1\ (x+m;\ y+n)$, unde m și n – numere date. Demonstrați, că astfel de transformare a figurii F este deplasare paralelă cu vectorul $\vec{a}\ (m;\ n)$.

Rezolvare. Să constatăm vectorul $\vec{a}\ (m;\ n)$. Menționam, că coordonatele vectorului $\overline{XX_1}$ sunt egale $(m;\ n)$, adică $\overline{XX_1} = \vec{a}$. Deci, transformarea descrisă a figurii F este o translație paralelă cu vectorul $\vec{a}$. ◀

Problema 2. Punctul $A_1\,(-2;\,3)$ este imaginea punctului $A\,(-1;\,2)$ la translarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$. Aflați coordonatele vectorului $\vec{a}$ și coordonatele imaginii punctului $B\,(-7;\,-3)$.

Rezolvare. Din condiție reiese, că $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. De aici $\vec{a}\ (-1;\ 1)$.

Fie $B_1\,(x;\,y)$ – este imaginea punctului $B\,(-7;\,-3)$. Atunci $\overline{BB_1} = \vec{a}$, adică $x+7=-1$ și $y+3=1$. De aici $x=-8,\ y=-2$.

Răspuns: $\vec{a}\ (-1;\ 1),\ B_1\,(-8;\,-2)$. ◀

Problema 3. Se dă unghiul ABC și dreapta p, neparalelă nici unei laturi ale acestui unghi (fig. 17.7). Construiți dreapta p_1, paralelă dreptei p, astfel, ca laturile unghiului să taie pe ea un segment cu lungimea dată a.

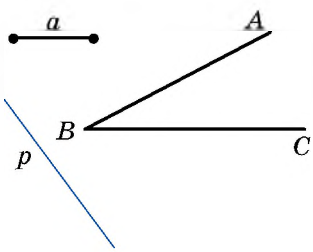


Fig. 17.7

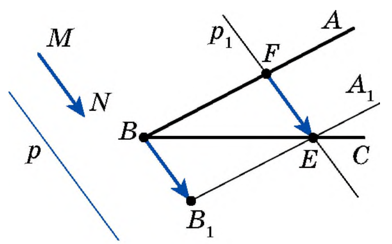


Fig. 17.8

Rezolvare. Să considerăm vectorul $\overline{MN}$ astfel, că $MN \parallel p$ și $|\overline{MN}| = a$ (fig. 17.8). Construim semidreapta B_1A_1, care este imaginea semidreptei BA la translația paralelă cu vectorul $\overline{MN}$. Însemnăm punctul intersecției semidreaptelor BC și B_1A_1 cu litera E. Fie F preimaginea punctului E la translația paralelă, ce se consideră. Atunci $\overrightarrow{FE} = \overline{MN}$, adică $|\overrightarrow{FE}| = a$ și $FE \parallel p$.

Raționamentele prezentate ne insuflă astfel de algoritm de construcție:

1) de găsit imaginea semidreaptei BA la deplasarea paralelă cu vectorul $\overline{MN}$;
2) de notat punctul de intersecție al semidreptei BC cu imaginea construită;
3) prin punctul găsit de dus dreapta p_1, paralelă dreptei p. Dreapta p_1 va fi cea căutată. ◀

?

1. Descrieți ce este transformarea figurii.
2. Dați exemple de transformare ale figurilor.
3. Descrieți deplasarea figurii F, care se numește deplasare paralelă cu vectorul $\vec{a}$.
4. În care caz figura F_1 se numește imaginea figurii F, iar figura F – preimaginea figurii F_1?
5. Care transformare a figurii se numește mișcare?
6. Care transformare a figurii se numește identică?
7. Formulați proprietățile mișcării.
8. Care două figuri se numesc egale?
9. Descrieți mișcările care se numesc reciproc inverse.
10. Formulați proprietatea translării paralele.
11. Ce mișcări sunt translațiile paralele cu vectorii $\vec{a}$ și $-\vec{a}$?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

17.1.° În figura 17.9. este reprezentat unghiul AOB și dreapta p, neparalelă laturilor lui. Fiecărui punct X al laturii OA este aplicat în corespondență un astfel de punct X_1 al laturii OB, că $XX_1 \parallel p$ (punctului O îi este asociat în corespondență punctul O). Construiți imaginea punctului M și preimaginea punctului K pentru transformarea dată a semidreptei OA. Care figură este imaginea semidreptei OA?

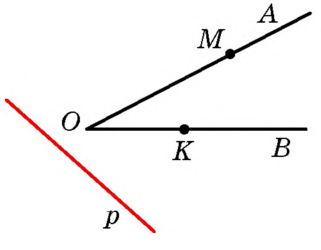


Fig. 17.9

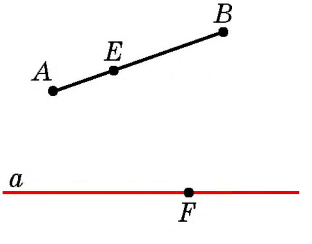


Fig. 17.10

17.2.° În figura 17.10 este reprezentat segmentul AB și dreapta a. Fiecărui punct X al segmentului AB este aplicat în corespondență baza perpendicularei, coborâte din punctul X pe dreapta a. Construiți imaginea punctului E și preimaginea punctului F pentru transformarea dată a segmentului AB. Există oare puncte ale dreptei a, care nu au preimagine? Construiți imaginea segmentului AB.

17.3.° Construiți imaginile segmentului AB și a semidreptei OM pentru translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ (fig. 17.11).

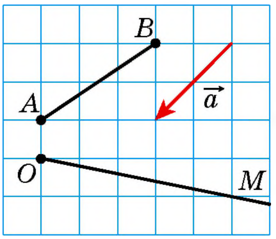


Fig. 17.11

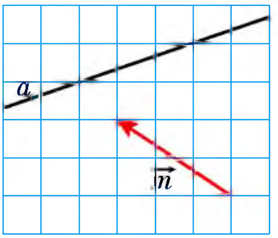


Fig. 17.12

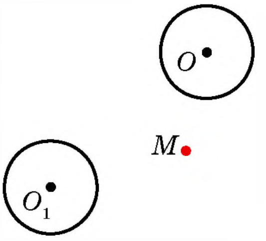


Fig. 17.13

17.4.° În figura 17.12. dreapta a este imaginea unei oarecare drepte la deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{m}$. Construiți imaginea dreptei a.

17.5.° Circumferința cu centrul O_1 este imaginea circumferinței cu centrul O la translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ (fig. 17.13). Depuneți vectorul $\vec{a}$ de la punctul M.

17.6.• Construiți imaginea parabolei $y = x^2$ la translația paralelă cu vectorul: 1) $\vec{a}\,(0;\ 2)$; 2) $\vec{b}\,(-1;\ 0)$; 3) $\vec{c}\,(-1;\ 2)$. Scrieți ecuațiile imaginii parabolei $y = x^2$ pentru translația paralelă dată.

17.7.• Construiți imaginea circumferinței $x^2 + y^2 = 4$ pentru translația paralelă cu vectorul: 1) $\vec{a}\,(2;\ 0)$; 2) $\vec{b}\,(0;\ -1)$; 3) $\vec{c}\,(2;\ -1)$. Scrieți ecuația imaginii circumferinței $x^2 + y^2 = 4$ pentru deplasarea paralelă dată.

17.8.• Dreapta a este tangentă la semicircumferința AB cu centrul O (fig. 17.14). Stabiliți o transformare oarecare, pentru care dreapta a este imaginea semicircumferinței AB cu punctele A și B "scoase".

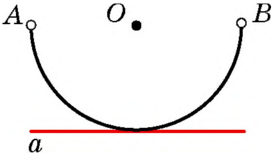


Fig. 17.14

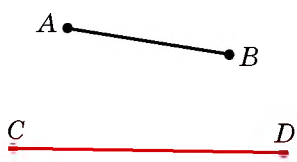


Fig. 17.15

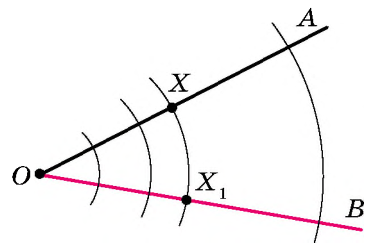


Fig. 17.16

17.9.• Executați o transformare oarecare, pentru care segmentul CD este imaginea segmentul AB (fig. 17.15).

EXERCIȚII

17.10.° Să cercetăm circumferința cu raza r și centrul O. Fiecărui punct X al circumferinței asociem în corespondență punctul X_1, care aparține razei OX, astfel, că $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Care figură este imaginea circumferinței date? Este oare mișcare transformarea dată?

17.11.° Se dă unghiul AOB (fig. 17.16), fiecărui punct X al laturii OA aplicăm în corespondență punctul X_1, care aparține laturii OB și se află pe circumferința cu raza OX și centrul O (punctului O asociem în corespondență punctul O). Ce figură este imaginea laturii OA? Demonstrați că transformarea dată este mișcare.

17.12.° Se dă unghiul MON. Fiecărui punct X al laturii OM asociem în corespondență un astfel de punct X_1 al laturii ON, că dreapta XX_1 este perpendiculară la bisectoarea unghiului MON (punctului O aplicăm în corespondență punctul O). Demonstrați, că transformarea descrisă este mișcare.

17.13.° Este dată dreapta a și și segmentul AB, care nu are cu ea puncte comune. Fiecărui punct X al segmentului AB asociem în corespondență baza perpendicularei, coborâte din punctul X pe dreapta a. Pentru care amplasare reciprocă a dreptei a și a segmentului AB transformarea descrisă este mușcare?

17.14.° Punctele A_1 și B_1 nu aparțin dreptei AB și și sunt imaginile punctelor A și B corespunzător la translația paralelă a dreptei AB. Demonstrați, că patrulaterul AA_1B_1B este paralelogram.

17.15.° Punctele A_1 și B_1 sunt imaginile punctelor A și B corespunzător la translația paralelă a dreptei AB. Aflați segmentul A_1B_1, dacă $AB = 5$ cm.

17.16.° Vectorul $\vec{m}$ este paralel dreptei *a*. Ce figură este imaginea dreptei *a* la deplasarea paralelă a ei cu vectorul $\vec{m}$?

17.17.° Se dă paralelogramul *ABCD*. Care vector va stabili deplasarea paralelă, pentru care latura *AD* va fi imaginea laturii *BC*?

17.18.° Există oare translație paralelă a triunghiului echilateral *ABC*, pentru care latura *AB* este imaginea laturii *BC*?

17.19.° Găsiți punctele, care sunt imaginile punctelor $A(-2; 3)$ și $B(1; -4)$ la translație paralelă cu vectorul $\vec{a}(-1; -3)$.

17.20.° Există oare deplasare paralelă, pentru care imaginea punctului $A(1; 3)$ este punctul $A_1(4; 0)$, iar imaginea punctului $B(-2; 1)$ – punctul $B_1(1; 4)$?

17.21.° La deplasare paralelă cu vectorul $\vec{a}(2; -1)$ imaginea punctului *A* este punctul $A_1(-3; 4)$. Aflați coordonatele punctului *A*.

17.22.° Punctul $M_1(x; 2)$ este imaginea punctului $M(3; y)$ la translația paralelă, pentru care punctul $A(2; 3)$ este imaginea originii coordonatelor. Găsiți *x* și *y*.

17.23.• Câte deplasări paralele a dreptei *a* există, pentru care imaginea ei este dreapta *a*?

17.24.• Să cercetăm figura ce este alcătuită din toate punctele, care aparțin laturilor triunghiului. Descrieți o deplasare oarecare a acestei figuri, pentru care imaginea ei este circumferință.

17.25.• Să examinăm figura ce este alcătuită din toate punctele, care aparțin laturilor dreptunghiului. Descrieți o deplasare oarecare a acestei figuri, pentru care imaginea ei este figura, care se alcătuiește din toate punctele laturilor rombului.

17.26.• Se cunoaște, că la transformarea figurii *F* imaginea ei este aceiași figură *F*. Se poate oare afirma, că această transformare este identică?

17.27.• Se dau punctele $A(3; -2)$ și $B(5; -4)$. La translarea paralelă a segmentului *AB* imaginea mijlocului ei este punctul $M_1(-4; 3)$. Găsiți imaginile punctelor *A* și *B* la o astfel de deplasare paralelă.

17.28.• Trei puncte $A(1; 3)$, $B(2; 6)$, $C(-3; 1)$ sunt vârfurile paralelogramului *ABCD*. La translația paralelă a paralelogramului *ABCD* imaginea punctului intersecției diagonalelor lui este punctul $O_1(-2; -4)$. Găsiți imaginile punctelor *A*, *B*, *C* și *D* pentru o astfel de deplasare paralelă.

17.29.• Găsiți ecuația circumferinței, care este imaginea circumferinței $x^2 + y^2 = 1$ pentru deplasare paralelă cu vectorul $\vec{a}(-3; 4)$.

17.30.• Găsiți ecuația parabolei, care este imaginea parabolei $y = x^2$ la translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ (2; −3).

17.31.•• Construiți un trapez conform bazelor și diagonalelor.

17.32.•• Construiți un trapez conform a patru laturi.

17.33.•• Construiți un segment, egal și paralel segmentului *AB* dat, astfel ca un capăt al lui să aparțină dreptei date, iar altul – circumferinței date.

17.34.•• Construiți coarda circumferinței date, care este egală și paralelă segmentului dat *AB*.

17.35.* Construiți patrulaterul, la care laturile opuse sunt în perechi neparalele, conform a patru unghiuri și a două laturi opuse.

17.36.* În care loc este necesar de construit podul *MN* peste râul, care împarte două localități punctele *A* și *B* (fig. 17.17), ca calea *AMNB* să fie cea mai scurtă (malurile râului admitem că sunt paralele, podul perpendicular pe malurile râului)?

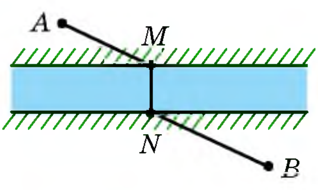


Fig. 17.17

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

17.37. Prin vârful fiecărui unghi al triunghiului este dusă o dreaptă, paralelă laturii opuse. Cu ce este egal perimetrul triunghiului, care este format în urma aceastǎ, dacă perimetrul triunghiului dat este egal cu 18 cm?

17.38. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile *A* (–3; –4), *B* (0; 3), *C* (7; 6) și *D* (4; –1) este romb, și găsiți aria lui.

17.39. În trapezul dreptunghic este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală mai mare a trapezului în segmente de 4 cm și 25 cm. Aflați aria trapezului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, FANTAZAȚI

17.40. În mijlocul unui hexagon regulat cu latura de 1 m sunt amplasate 7 puncte. Demonstrați, că printre ele se vor găsi 2 puncte, distanța dintre care nu este mai mare de 1 m.

18. Simetrie axială

Definiție. **Punctele A și A_1 se numesc simetrice față de (în raport cu) dreapta l, dacă dreapta l este mediatoarea segmentului AA_1** (fig. 18.1). **Dacă punctul A aparține dreptei l, atunci el este considerat simetric singur lui față de dreapta l.**

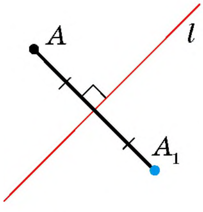


Fig. 18.1

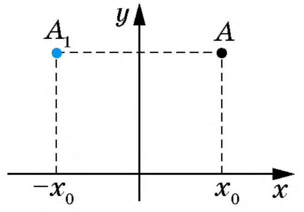


Fig. 18.2

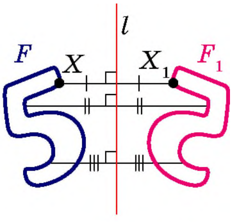


Fig. 18.3

De exemplu, punctele A și A_1, la are ordonatele sunt egale, iar abscisele numere opuse, sunt simetrice în raport cu axa ordonatelor (fig. 18.2).

Să examinăm figura F și dreapta l. Fiecărui punct X al figurii F îi aplicăm în corespondență un punct X_1 simetric față de dreapta l. În consecința a astfel de transformare a figurii F obținem figura F_1 (fig. 18.3). Astfel de transformare a figurii F se numește **simetrie axială în raport cu dreapta l**. Dreapta l se numește **axă de simetrie**. Se spune, că figurile F și F_1 sunt **simetrice față de dreapta l**.

Teorema 18.1 (proprietatea simetriei axiale). ***Simetria axială este mișcare.***

Demonstrație. Alegem sistemul de coordonate astfel, ca axa de simetrie să coincidă cu axa ordonatelor. Fie $A\ (x_1; y_1)$ și $B\ (x_2; y_2)$ – sunt puncte arbitrare ale figurii F. Atunci punctele $A_1\ (-x_1; y_1)$ și $B_1\ (-x_2; y_2)$ – imaginile lor corespunzătoare pentru simetria axială în raport cu axa ordonatelor. Avem:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Noi am obținut, că $AB = A_1B_1$, adică simetria axială păstrează distanța dintre puncte. Deci, simetria axială este mișcare. ◀

Consecință. ***Dacă figurile F și F_1 sunt simetrice față de o dreaptă, atunci $F = F_1$.***

Definiție. **Figura se numește simetrică în raport cu dreapta l, dacă pentru fiecare punct al figurii date punctul, simetric față de dreapta l, de asemenea aparține acestei figuri.**

Dreapta l se numește **axă de simetrie**. De asemenea se spune, că **figura are axă de simetrie**.

Aducem exemple de figuri, care au axă de simetrie.

În figura 18.4 este reprezentat triunghiul isoscel. Dreapta care conține înălțimea lui, coborâtă la bază, este axa de simetrie a triunghiului.

Orice unghi are axă de simetrie aceasta este dreapta, care conține bisectoarea lui (fig. 18.5).

Triunghiul echilateral are trei axe de simetrie (fig. 18.6).

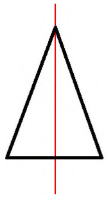


Fig. 18.4

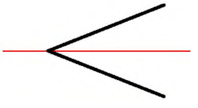


Fig. 18.5

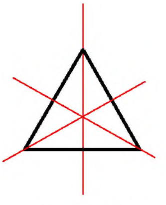


Fig. 18.6

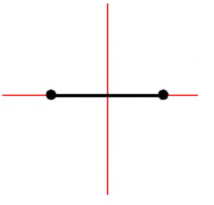


Fig. 18.7

Două axe de simetrie are un segment, acestea-s mediatoarea și dreapta, care conține acest segment (fig. 18.7).

Pătratul are patru axe de simetrie (fig. 18.8).

Există figuri, care au nenumărate axe de simetrie, de exemplu circumferința. Orice dreaptă, ce trece prin centrul circumferinței, este axa de simetrie a ei (fig. 18.9).

Nenumărate axe de simetrie are și dreapta: înseși dreapta și orice dreaptă, perpendiculară pe ea, sunt axele ei de simetrie.

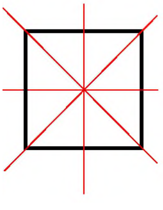


Fig. 18.8

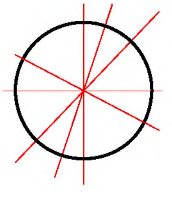


Fig. 18.9

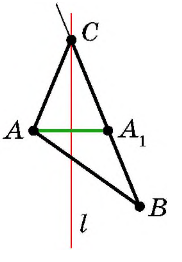


Fig. 18.10

Problema 1. S-a desenat un triunghi ne isoscel ABC. S-a dus dreapta l, care conține bisectoarea unghiului C. Apoi desenul l-au șters. Lăsând doar punctele A și B și dreapta l. Restabiliți triunghiul ABC.

Rezolvare. Deoarece dreapta l este axa de simetrie a unghiului ACB, atunci punctul A_1 – este imaginea punctului A la simetria față de dreapta l care aparține semidreptei CB. Atunci intersecția dreptelor l și BA_1 este vârful C al triunghiului căutat ABC (fig. 18.10).

Aceste raționamente ne indică cum să construim un triunghi căutat. Construim punctul A_1, simetric punctului A în raport cu dreapta l. Aflăm vârful C ca intersecție a dreptelor l și BA_1. ◀

Problema 2. Punctul O aparține unghiului ascuțit ABC (fig. 18.11). Pe laturile BA și BC ale unghiului găsiți astfel de puncte E și F, ca perimetrul triunghiului OEF sa fie cel mai mic.

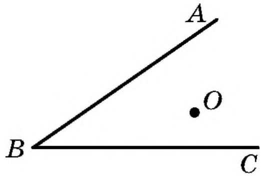


Fig. 18.11

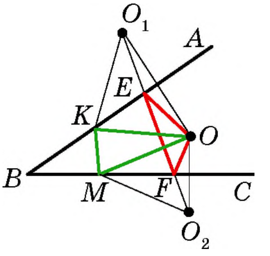


Fig. 18.12

Rezolvare. Fie punctele O_1 și O_2 – imaginile punctului O pentru simetriile față de dreptele BA și BC corespunzător (fig. 18.12), iar dreapta O_1O_2 intersectează laturile BA și BC în punctele E și F corespunzător. Vom demonstra, că punctele E și F sunt cele căutate.

Atragem atenția, că segmentele EO_1 și EO sunt simetrice față de dreapta BA. Deci, $EO_1 = EO$. Analogic $FO = FO_2$. Atunci perimetrul triunghiului OEF este egal cu lungimea segmentului O_1O_2.

Vom arăta, că triunghiul construit are cel mai mic perimetru din cele posibile. Să examinăm triunghiul KOM, unde punctele K și M puncta arbitrare față de semidreptele BA și BC, totodată punctul K nu coincide cu punctul E sau punctul M nu coincide cu punctul F. Este clar, că $KO = KO_1$ și $MO = MO_2$. Atunci perimetrul triunghiului KOM este egal cu suma $O_1K + KM + MO_2$. Însă $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$. ◀

?

1. Care puncte se numesc simetrice față de dreapta l? Cum se numește dreapta l?
2. Care figuri se numesc simetrice în raport cu dreapta l?
3. Formulați proprietățile simetriei axiale.
4. Ce proprietăți posedă figurile, simetrice față de o dreaptă?
5. Despre care figură se spune că ea are axă de simetrie?
6. Dați exemple de figuri, care au axă de simetrie.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

18.1.° Construiți imaginile figurilor, prezentate în figura 18.13 la simetria față de dreapta *l*.

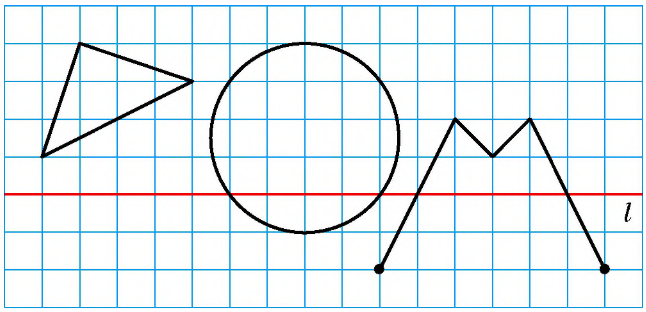


Fig. 18.13

18.2.° Schițați un triunghi. Construiți triunghiul, simetric lui față de dreapta, care conține una din liniile lui medii.

18.3.° Punctele *A* și *B* sunt simetrice în raport cu dreapta *l* (fig. 18.14). Construiți dreapta *l*.

Fig. 18.14

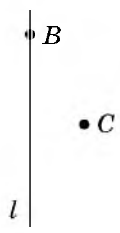


Fig. 18.15

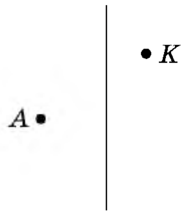


Fig. 18.16

ANOTIMPUL PLOILOR

Fig. 18.17

18.4.• Duceți dreptele a și a_1, care se intersectează. Construiți dreapta, față de care dreapta a_1 va fi simetrică față de dreapta a. Câte soluții are problema?

18.5.• Duceți dreptele paralele a și a_1. Construiți dreapta, față de care dreapta a_1 va fi simetrică față de dreapta a.

18.6.• Construiți rombul *ABCD* după vârfurile *B* și *C* și dreapta *l*, care conține diagonala lui *BD* (fig. 18.15).

18.7.• Construiți un triunghi isoscel *ABC* după vârful *A*, punctul *K*, care aparține laturii laterale *BC*, și dreapta, care conține înălțimea, coborâtă la baza *AB* (fig. 18.16).

18.8.• Studiați figura 18.17 printr-o eprubetă de sticlă, umplută cu apă. De ce unele litere în al doilea cuvânt sau dovedit a fi întoarse, iar în primul – nu?

18.9.•• Circumferințele cu centrele O_1 și O_2 au două puncte comune (fig. 18.19). Cu ajutorul doar a compasului construiți circumferințele, simetrice celor date față de dreapta *AB*.

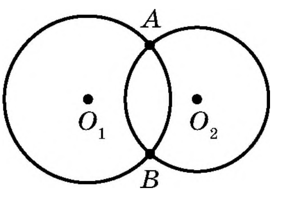


Fig. 18.18

EXERCIȚII

18.10.° Dreapta *l* tece prin mijlocul segmentului *AB*. Este oare obligat ca punctele *A* și *B* să fie simetrice în raport cu dreapta *l*?

18.11.° Demonstrați, că dreapta, care conține mediana triunghiului isoscel, dusă la bază, este axa de simetrie a lui.

18.12.° În figura 18.19 este prezentat triunghiul isoscel *ABC* și dreapta *l*, care conține înălțimea lui, dusă la baza *AC*. Segmentele *AM* și *CN* – medianele triunghiului. Indicați imaginea punctelor *A* și *B*, medianei *CN* și laturii *AC* la simetria în raport cu dreapta *l*.

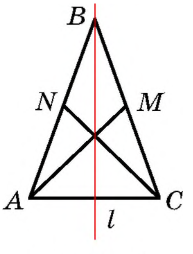


Fig. 18.19

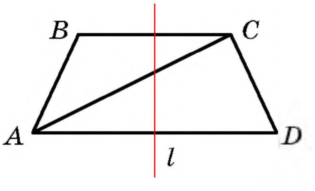


Fig. 18.20

18.13.° Demonstrați, că dreapta, care trece prin mijlocul bazelor trapezului isoscel, este axa lui de simetrie.

18.14.° În figura 18.20 este reprezentat un trapez isoscel *ABCD* și dreapta *l*, care trece prin mijlocul bazelor lui. Indicați imaginile punctelor *B* și *D*, a diagonalelor *AC* și baze *BC* pentru simetria față de dreapta *l*.

18.15.° Demonstrați că dreptele care conțin diagonalele rombului, sunt axele lui de simetrie.

18.16.° Demonstrați, că dreptele, care trec prin mijlocurile laturilor opuse ale dreptunghiului, sunt axele lui de simetrie.

18.17.° Punctele A_1 și B_1 sunt corespunzător imaginile punctelor A și B la simetria axială. Se cunoaște, că $AB = 5$ cm. Aflați segmentul A_1B_1.

18.18.° Demonstrați, că dreapta, care conține bisectoarea unghiului este axa ei de simetrie.

18.19.° Găsiți coordonatele punctelor simetrice punctelor A (–2; 1) și B (0; –4) față de axele de coordonate.

18.20.° Punctele A (x; 3) și B (–2; y) sunt simetrice în raport cu:
1) axa absciselor;
2) axa ordonatelor.
Aflați x și y.

18.21.• Imaginea dreptei a în simetria față de dreapta l este înseși dreapta a. Care este amplasarea reciprocă a dreptelor a și l?

18.22.• Demonstrați, că triunghiul, care are axă de simetrie, este isoscel.

18.23.• Demonstrați, că triunghiul, care are două axe de simetrie, este echilateral. Poate oare triunghiul să aibă exact două axe de simetrie?

18.24.• Demonstrați, că atunci când paralelogramul are exact două axe de simetrie, atunci el este sau dreptunghi, sau romb.

18.25.• Demonstrați, că atunci când patrulaterul are patru axe de simetrie, atunci el este pătrat.

18.26.• Circumferințele cu centrele O_1 și O_2 se intersectează în punctele A și B. Demonstrați, că punctele A și B sun simetrice în raport cu dreapta O_1O_2.

18.27.• Punctul M aparține unghiului drept ABC (fig. 18.21). Punctele M_1 și M_2 – imaginile punctului M la simetria față de dreptele BA și BC corespunzător. Demonstrați, că punctele M_1, B și M_2 se află pe o dreaptă.

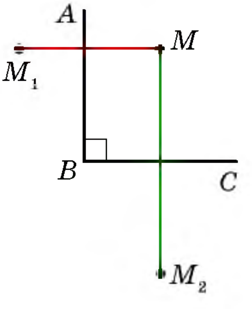


Fig. 18.21

18.28.• Aflați coordonatele punctelor simetrice punctelor A (–2; 0) și B (3; –1) față de dreapta, care conține bisectoarele: 1) primului și al treilea unghiuri ale cadranelor de coordonate; 2) al doilea și al patrulea cadrane de coordonate.

18.29.• Punctele A (x; –1) și B (y; 2) sunt simetrice față de dreapta, care conține bisectoarele primului și al treilea unghi ale cadranelor de coordonate. Aflați x și y.

18.30.•• Punctele A și B se află în semiplanuri diferite față de dreapta a. Pe dreapta a găsiți așa un punct X, ca dreapta a să conțină bisectoarea unghiului AXB.

18.31.•• Punctele A și B se află într-un plan față de dreapta a. Găsiți pe dreapta a un astfel de punct X, ca semidreptele XA și XB să creeze cu această dreaptă unghiuri egale.

18.32.•• Punctele A și B se află într-un plan față de dreapta a. Găsiți pe dreapta a un astfel de punct X, ca suma $AX + XB$ să fie cea mai mică.

18.33.* Construiți triunghiul ABC după două laturi AB și AC ($AB < AC$) și diferența unghiurilor B și C.

18.34.* Punctele C și D se află într-un plan față de dreapta AB (fig. 18.22). Pe dreapta AB aflați un astfel de punct X, că $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.

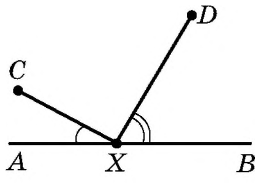


Fig. 18.22

18.35.* Demonstrați că aria patrulaterului convex $ABCD$ nu este mai mare de $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

18.36.* Se dă triunghiul ABC. Găsiți un punct, imaginea simetrică a căruia față de oricare latură a triunghiului să se afle pe circumferința, circumscrisă acestui triunghi.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

18.37. Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu 48 cm, AD = 7 cm. Pe care latură a paralelogramului o intersectează bisectoarea unghiului B? Găsiți segmentele, pe care bisectoarea împarte latura paralelogramului.

18.38. Două triunghiuri au câte două laturi egale, iar suma unghiurilor între laturile corespunzător egale este egală cu 180°. Demonstrați, că triunghiurile date sunt la fel de mari.

18.39. Se dau punctele A (5; 2), B (–7; 1) și C (1; –5), segmentul AM este mediana triunghiului ABC. Alcătuiți ecuația dreptei AM.

PRIMA OLIMPIADĂ UCRAINEANĂ A TINERILOR MATEMATICIENI

Credem, că problema 18.36 va plăcut și voi ați simțit bucuria, rezolvând-o. Această problemă este demnă de atenție pentru că în 1961 ea a fost propusă participanților primei olimpiade Ucrainene a tinerilor matematicieni.

În genere olimpiadele de matematică în Ucraina au tradiție veche. Prima olimpiada orășenească a tinerilor matematicieni a avut loc în a 1935 în Kiev.

De atunci au trecut peste 80 de ani, și pe parcursul timpului olimpiadele de matematică au devenit pentru mulți elevi talentați primul pas pe calea creației științifice. Azi astfel de nume, ca O. V. Pogorelov, S. G. Krein, M. O. Krasnoselskii, V. G. Drinfeld, sunt cunoscute întregii lumi științifice. Ei toți în diferiți ani au fost învingători ale olimpiadelor de matematică în Ucraina.

Vrem cu plăcere să recunoaștem că și acum olimpiadele de matematică în Ucraina sunt foarte populare. Zeci de mii de școlari al țării noastre participă la diferite etape ale acestei competiții de matematică. La organizarea și petrecerea olimpiadelor sunt invitați cei mai buni savanți, metodiști, profesori. Anume datorită entuziasmului și profesionalismului lor comanda Ucrainei destoinic reprezintă țara noastră la olimpiadele internaționale de matematică.

Vă sfătuim și pe voi, să participați la olimpiadele de matematică. Mai jos vă prezentăm unele probleme ale primei olimpiade Ucrainene a tinerilor matematicieni. Încercați-vă puterile voastre.

1. Circumferința, înscrisă în triunghiul ABC, este tangentă la laturile lui în punctele K, L, M. Fie punctele O_1, O_2, O_3 sunt centrele circumferințelor, înscrise exterior în același triunghi. De demonstrat, că triunghiurile KLM și $O_1O_2O_3$ sunt asemenea.

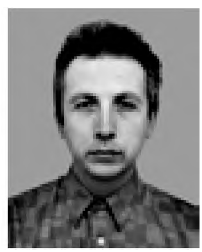
2. În interiorul triunghiului, aria căruia este egală cu 4 m^2, sunt amplasate 7 dreptunghiuri, totodată aria fiecăruia din ele este egală cu 1 m^2. De demonstrat, că cel puțin două dreptunghiuri au o parte comună, aria căreia nu este mai mică de $\frac{1}{7}$ m^2.

3. Fie că laturile unui patrulater sunt egale corespunzător cu a, b, c, d, iar aria lui este egală cu S. De demonstrate, că $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Alexei Vasilievici Pogorelov
(1919–2002)

Selim Grigorievici Krein
(1917–1999)

Mark Alexandrovici Krasnoselskii
(1920–1997)



Vladimir Gerșunovici Drinfeld
(n. 1954)

19. Simetrie centrală. Rotație

Definiție. Punctele A și A_1 se numesc simetrice în raport cu (față de) punctul O, dacă punctul O este mijlocul segmentului AA_1 (fig. 19.1). **Punctul O este considerat simetric singur lui.**

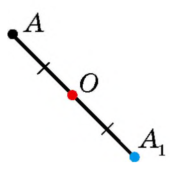


Fig. 19.1

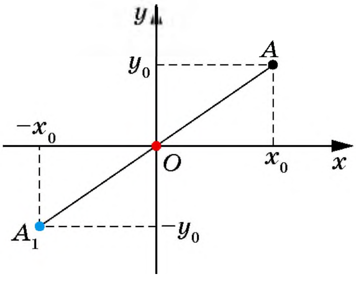


Fig. 19.2

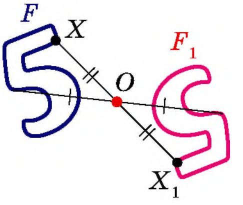


Fig. 19.3

De exemplu, punctele A și A_1, la care abscisele, precum și ordonatele sunt numere opuse, sunt simetrice față de originea de coordonate (fig. 19.2).

Să examinăm figura F și punctul O. Fiecărui punct X al figurii F asociem în corespondență punctul X_1 simetric lui față de punctul O. În consecința unei astfel de transformări al figurii F obținem figura F_1 (fig. 19.3). Astfel de transformare a figurii F se numește **simetrie centrală în raport cu punctul** O. Punctul O se numește **centru de simetrie**. De-asemenea se spune, că figurile F și F_1 sunt **simetrice față de punctul** O.

Teorema 19.1 (proprietățile simetriei centrale). ***Simetria centrală este mișcare.***

Demonstrație. ⊙ Alegem sistemul de coordonate astfel, ca centrul de simetrie să coincidă cu originea de coordonate. Fie punctele A $(x_1; y_1)$ și B $(x_2; y_2)$ – puncte arbitrare ale figurii F. Punctele A_1 $(-x_1; -y_1)$ și B_1 $(-x_2; -y_2)$ – sunt corespunzător imaginile lor la simetria centrală față de originea de coordonate. Avem:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Noi am obținut, că $AB = A_1B_1$, adică simetria centrală păstrează distanța între puncte. Deci, simetria centrală este mișcare. ◄

Consecință. ***Dacă figurile F și F_1 sunt simetrice în raport cu un punct, atunci, atunci $F = F_1$.***

Definiție. Figura se numește *simetrică față de punctul* O, dacă pentru fiecare punct al figurii date punctul, simetric lui față de punctul O, de-semeni aparține acestei figuri.

Punctul O se numește **centru de simetrie al figurii**. De-semeni se spune, că **figura are centru de simetrie**.

Fig. 19.4

Să prezentăm exemple de figuri, care posedă centru de simetrie.

Centrul de simetrie al segmentului este mijlocul lui (fig. 19.4).

Punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului este centrul lui de simetrie(fig. 19.5).

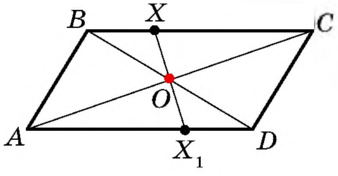


Fig. 19.5

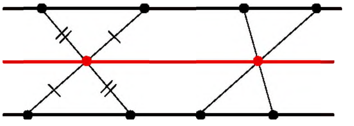


Fig. 19.6

Există figuri ce au nenumărate puncte de simetrie. De exemplu. Fiecare punct al dreptei este centrul ei de simetrie.

De asemenea nenumărate puncte de simetrie are figura, care se alcătuiește din două drepte paralele. Oricare punct al dreptei, egal depărtată de la cele date, este centrul de simetrie al figurii examinate (fig. 19.6).

Problema 1. Demonstrați, că imaginea dreptei date l la simetria față de punctul O, care nu aparține dreptei l, este dreapta, paralelă celei date.

Rezolvare. Deoarece simetria centrală este mișcare, atunci imagine a dreptei l va fi o dreaptă. Pentru construirea dreptei este suficient de găsit oricare două puncte ale ei.

Alegem pe dreapta l două puncte arbitrare A și B (fig. 19.7). Fie punctele A_1 și B_1 – sunt imaginile lor la simetria centrală față de punctul O. Atunci A_1B_1 este imaginea dreptei l.

Deoarece $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, unghiurile AOB și A_1OB_1 sunt egale ca verticale, atunci triunghiurile AOB și A_1OB_1 sunt egale conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. De aici $\angle 1 = \angle 2$ (fig. 19.7). Deci, după criteriul paralelismului dreptelor $l \parallel A_1B_1$. ◀

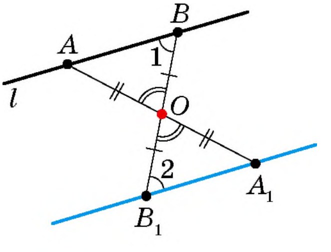


Fig. 19.7

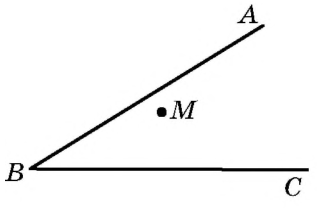


Fig. 19.8

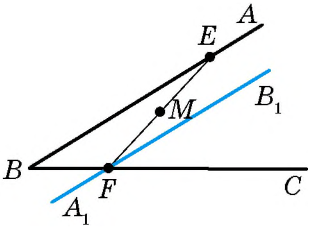


Fig. 19.9

Problema 2. Punctul M aparține unghiului ABC (fig. 19.8). Pe laturile BA și BC ale unghiului construiți astfel de puncte E și F, ca punctul M să fie mijlocul segmentului EF.

Rezolvare. Fie dreapta A_1B_1 este imaginea dreptei AB la simetria centrală față de punctul M (fig. 19.9). Însemnăm cu litera F punctul intersecției dreptelor A_1B_1 și BC.

Să găsim imaginea punctului F. Evident, că el se află pe dreapta AB. De aceea este suficient de găsit punctul de intersecție al dreptelor FM și AB. Însemnăm acest punct cu litera E. Atunci E și F sunt punctele căutate. ◀

Studiind lumea înconjurătoare, noi adesea vedem exemple de aparență a simetriei în natură (fig. 19.10). Obiectele, care au axă de simetrie sau centru de simetrie, sunt acceptate ușor și sunt plăcute la vedere. Nu în zădar în Grecia Antică cuvântul simetrie servea ca sinonim cuvintelor “armonie”, “frumusețe”.

Fig. 19.10

Ideea simetriei se folosește pe larg în arta plastică, arhitectură și tehnică (fig. 19.11).

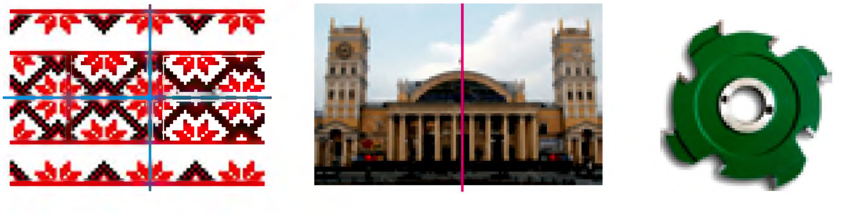


Fig. 19.11

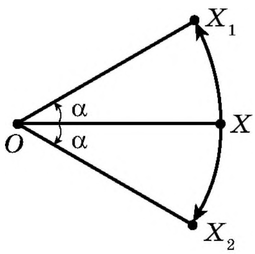
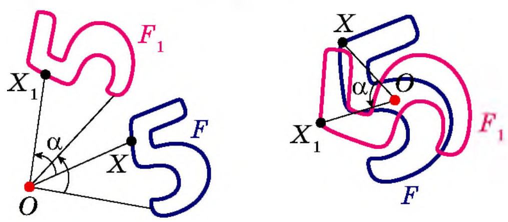


Fig. 19.12

În figura 19.12 sunt prezentate punctele O, X, X_1 și X_2 astfel, că $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Se spune, că punctul X_1 este imaginea punctului X la **rotirea în jurul centrului O contra acelor ceasornicului cu unghiul** α. De asemenea se spune că punctul X_2 este imaginea punctului X la **rotirea în jurul centrului O după acele ceasornicului cu unghiul** α.

Punctul O este numit **centrul de rotație**, unghiul α – **unghi de rotație**.

Să examinăm figura F, punctul O și unghiul α. Fiecărui punct X al figurii F asociem în corespondență punctul X_1, care este imaginea punctului X la rotația în jurul centrului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul α (dacă punctul O aparține figurii F, atunci ei i se opune ea înseși). Ca rezultat a astfel de transformare a figurii F obține figura F_1 (fig. 19.13). Astfel de transformare a figurii F se numește **rotație în jurul centrului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul** α. Punctul O se numește **centru de rotație**.



a *b*

Fig. 19.13

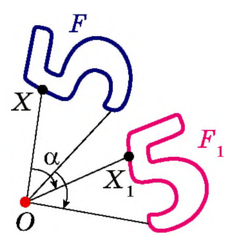


Fig. 19.14

Analogic se determină transformările de rotație a figurii F după acele ceasornicului cu unghiul α (fig. 19.14).

Atragem atenție, că simetria centrală este rotație în jurul centrului de simetrie cu unghiul de 180°.

Teorema 19.2 (proprietatea rotației). ***Rotația este mișcare.***

Demonstrați aceasta teoremă sime stătător.

Consecință. ***Dacă figura F_1 este imaginea figurii F la rotație, atunci $F = F_1$.***

Problema 3. Se dă dreapta *a* și punctul O în afara ei. Construiți imaginea dreptei *a* la rotația în jurul punctului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul de 45°.

Rezolvare. De oarece rotație este mişcare, atunci imaginea dreptei a va fi o dreaptă. Pentru construirea dreptei este suficient de găsit două puncte oarecare ale ei. Alegem pe dreapta a două puncte arbitrare A și B (fig. 19.15). Construim punctele A_1 și B_1 – imaginile lor la rotația în jurul punctului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul 45°. Atunci dreapta A_1B_1 este imaginea dreptei a. ◀

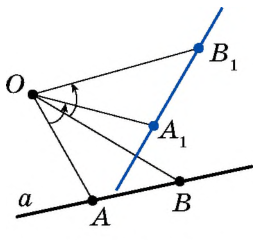


Fig. 19.15

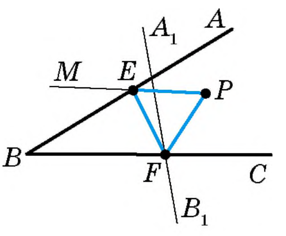


Fig. 19.16

Problema 4. Punctul P aparține unghiului ABC, dar nu aparține laturilor lui. Construiți triunghiul echilateral, unul din vârfurile căruia este punctul P, iar altele două aparțin laturilor BA și BC ale triunghiului ABC.

Rezolvare. Fie dreapta A_1B_1 este imaginea dreptei AB la rotația în jurul centrului P împotriva acelor ceasornicului cu unghiul 60° (fig. 19.16). Însemnăm cu litera F punctul de intersecție al dreptelor A_1B_1 și BC.

Fie punctul E – preimaginea punctului F pentru rotația examinată. Punctul E aparține laturii BA al unghiului ABC.

Aceste raționamente ne induc, cum să construim triunghiul căutat.

Construim dreapta A_1B_1 ca imagine a dreptei AB la rotația în jurul centrului P împotriva acelor ceasornicului cu unghiul 60°. Fie F este punctul de intersecție a dreptelor A_1B_1 și BC.

Construim unghiul MPF, care este egal cu 60°. Fie dreptele MP și AB se intersectează în punctul E. Acest punct și este preimaginea punctului F.

Avem: $PF = PE$ și $\angle FPE = 60°$. Deci, triunghiul EPF este echilateral. ◀

?

1. Care puncte se numesc simetrice față de punctul O? Cum se numește punctul O?
2. Care figuri se numesc simetrice față de punctul O?
3. Formulați proprietățile simetriei centrale.
4. Ce proprietate au figurile, simetrice în raport cu un punct?
5. Despre care figură se spune, că ea are centru de simetrie?

6. Dați exemple de figuri, care au centru de simetrie.
7. Descrieți transformările de rotație în jurul punctului.
8. Formulați proprietățile rotației.
9. Ce proprietate au figurile, dacă una din ele este imaginea alteia la rotație?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

19.1.° Desenați triunghiul ABC și însemnați punctul O, care nu aparține lui. Construiți triunghiul, simetric celui dat față de punctul O.

19.2.° Desenați triunghiul ABC. Construiți triunghiul, simetric celui dat față de mijlocul laturii AB.

19.3.° Trasați o circumferință și notați pe ea un punct. Construiți circumferința simetrică celei date față de punctul notat.

19.4.° Construiți imaginea segmentului AB la rotația în jurul punctului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul de 45° (fig. 19.17).

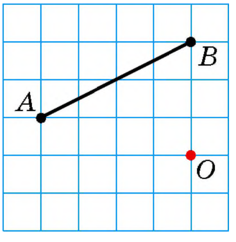


Fig. 19.17

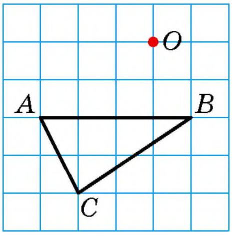


Fig. 19.18

19.5.° Construiți imaginea triunghiului ABC la rotația în jurul centrului O după acele ceasornicului cu unghiul de 90° (fig. 19.18).

19.6.• Construiți paralelogramul ABCD după vârfurile lui A și B și punctul O intersecția diagonalelor lui (fig. 19.19).

19.7.• Se dau două drepte paralele a și b (fig. 19.20). Aflați punctul, față de care dreapta a va fi simetrică dreptei b.

19.8.• În figura 19.21 sunt reprezentate două segmente egale AB și BC, totodată $\angle ABC = 60°$. Găsiți un astfel de punct O, ca segmentul AB să fie imaginea segmentului BC la rotația în jurul punctului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul de 120°.

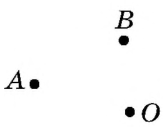


Fig. 19.19

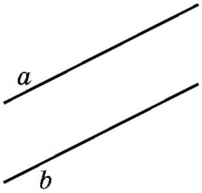


Fig. 19.20

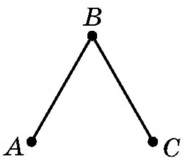


Fig. 19.21

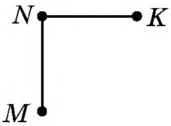


Fig. 19.22

19.9.• În figura 19.22 sunt prezentate două perpendiculare egale MN și NK. Găsiți un astfel de punct O, ca segmentul NK să fie imaginea segmentului MN la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu unghiul de 90°.

19.10.* Construiți o figură, care nu are axe de simetrie și imaginea căreia este înseși această figură la rotația în jurul unui punct oarecare:
1) cu unghiul de 90°; 2) cu unghiul de 120°.

EXERCIȚII

19.11.° Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul O (fig. 19.23). Punctul M – este mijlocul laturii BC. Indicați imaginile punctelor A, D și M, laturii CD, diagonalei BD la simetria față de punctul punctele O.

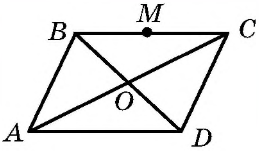


Fig. 19.23

19.12.° Demonstrați, că punctul intersecției diagonalelor paralelogramului este centrul lui de simetrie.

19.13.° Demonstrați că circumferința are centru de simetrie.

19.14.° Punctele A_1 și B_1 sunt imaginile corespunzător ale punctelor A și B la simetria față de punctul, care nu aparține dreptei AB. Demonstrați, că patrulaterul ABA_1B_1 este paralelogram.

19.15.° Aflați coordonatele punctelor, simetrice punctelor $A\,(3; -1)$ și $B\,(0; -2)$ față de:
1) originea de coordonate; 2) punctul $M\,(2; -3)$.

19.16.° Demonstrați, că imaginea dreptei, care trece prin centrul de simetrie, este aceiași dreaptă.

19.17.° Punctele $A\,(x; -2)$ și $B\,(1; y)$ sunt simetrice față de:
1) originea de coordonate; 2) punctul $M\,(-1; 3)$.
Găsiți x și y.

19.18.° În figura 19.24 sunt reprezentate figuri, care sunt alcătuite din semicercuri egale. Care din aceste figuri la o anumită rotație în jurul punctului O cu unghiul α, unde $0° < \alpha \leqslant 180°$, coincide cu imaginea sa?

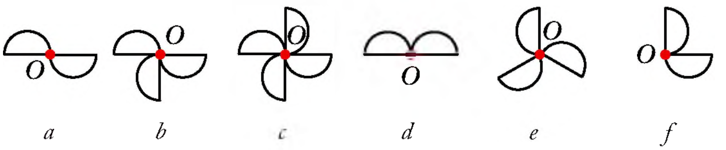


Fig. 19.24

19.19.° Medianele triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul O (fig. 19.25). Indicați imaginile punctelor C, C_1 și O, laturii BC, medianei BB_1, segmentului OC_1, triunghiului $A_1B_1C_1$ la rotația în jurul punctului O împotriva acelor ceasornicului cu unghiul de 120°.

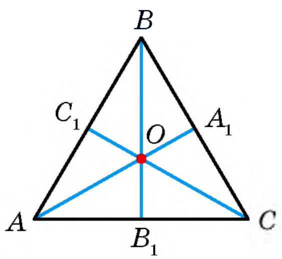


Fig. 19.25

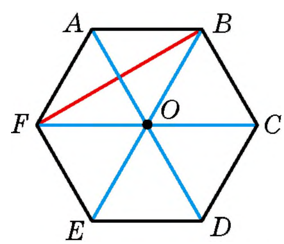


Fig. 19.26

19.20.° Punctul O este centrul hexagonului regulat $ABCDEF$ (fig. 19.26). Indicați imaginile laturii AF, diagonalei BF, diagonalei AD, hexagonului $ABCDEF$ la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu unghiul de:

1) 60°; 2) 120°.

19.21.° Diagonalele pătratului $ABCD$ se intersectează în punctul O (fig. 19.27). Indicați imaginile punctelor A, O și C, laturii AD, diagonalei BD la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu unghiul de 90°.

19.22.• Demonstrați, că triunghiul nu are centru de simetrie.

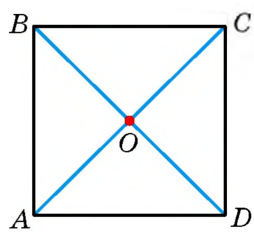


Fig. 19.27

19.23.• Demonstrați, că semidreapta nu are centru de simetrie.

19.24.• Demonstrați, că atunci când patrulaterul are centru de simetrie, atunci el este paralelogram.

19.25.• Circumferințele cu centrele O_1 și O_2 sunt simetrice față de punctul O (fig. 19.28). Dreapta, care trece prin centrul de simetrie, intersectează prima circumferință în punctele A_1 și B_1, iar a doua – în punctele A_2 și B_2. Demonstrați, că $A_1B_1 = A_2B_2$.

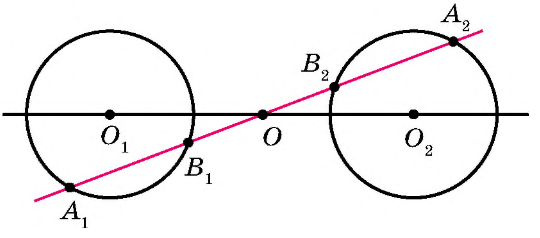


Fig. 19.28

19.26.• Vârful A al triunghiului echilateral ABC este centrul de rotație cu unghiul 120°. Găsiți segmentul BC_1, unde punctul C_1 este imaginea punctului C pentru rotația dată, dacă $AB = 1$ cm. Câte soluții are problema?

19.27.• Vârful A al pătratului $ABCD$ este centrul de rotație împotriva acelor ceasornicului cu unghiul 90°. Găsiți segmentul CC_1, unde punctul C_1 – este imaginea punctului C pentru rotația dată, dacă $AB = 1$ cm.

19.28.•• Vârfurile unui paralelogram se află pe laturile altuia: câte un vârf pe fiecare latură. Demonstrați, că punctele de intersecție a diagonalelor acestor paralelograme coincid.

19.29.•• Punctele A și C aparțin unghiului ascuțit, dar nu se află pe laturile lui. Construiți paralelogramul $ABCD$ astfel, ca punctele B și D să se afle pe laturile unghiului.

19.30.•• Construiți segmentul, mijlocul căruia este punctul dat, iar capetele aparțin dreptelor date neparalele.

19.31.•• Punctul M aparține unghiului ABC și nu aparține laturilor lui. Construiți triunghiul isoscel, vârful unghiului drept al căruia este punctul M, iar altele două aparțin laturilor BA și BC corespunzător.

19.32.* Pe latura BC a triunghiului echilateral ABC s-a notat punctul D. În afara triunghiului ABC s-a notat punctul E astfel, că triunghiul DEC este echilateral (fig. 19.29). Demonstrați, că punctul punctul C și mijlocurile M și K a segmentelor BE și AD corespunzător sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

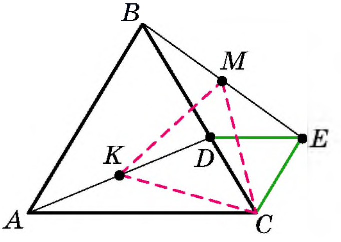


Fig. 19.29

19.33.* Construiți un triunghi echilateral astfel, ca vârfurile lui să aparțină la trei drepte paralele date.

19.34.* Construiți un romb, punctul de intersecție a diagonalelor căruia este punctul dat, iar vârfurile aparțin la trei drepte date în perechi neparalele.

19.35.* Pe latura CD a pătratului $ABCD$ este notat punctul E. Bisectoarea unghiului BAE intersectează latura BC în punctul F. Demonstrați, că $AE = BF + ED$.

19.36.* În triunghiul echilateral ABC este ales punctul P astfel, că $\angle APB = 150°$. Demonstrați, că există triunghiul dreptunghic, laturile căruia sunt egale cu segmentele PA, PB și PC.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

19.37. Aflați laturile triunghiului ABC, dacă $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, iar înălțimea, coborâtă din vârful C, este egală cu 4 cm.

19.38. Pe axa absciselor găsiți punctul, egal depărtat de la punctele $A(-2; 4)$ și $B(6; 8)$.

19.39. În triunghiul isoscel este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență la latura laterală o împarte în raportul 25 : 12, socotind de la vârful triunghiului. Găsiți raza circumferinței înscrise, dacă aria triunghiului este egală cu 1680 cm^2.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, FANTAZAȚI

19.40. Notați pe un plan 6 puncte astfel, ca oricare tei din ele să fie vârfurile unu triunghi isoscel.

20. Asemănarea figurilor[1]

În figura 201.1 sunt reprezentate punctele O, X și X_1 astfel, că $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Se spune, că punctul X_1 este imaginea punctului X la **omotetia cu centrul *O*** și **coeficientul** 2.

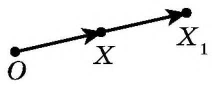


Fig. 20.1

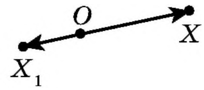


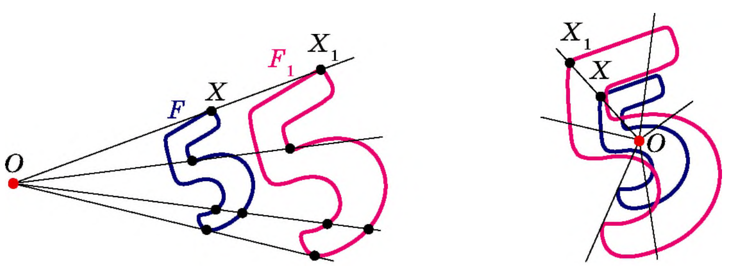
Fig. 20.2

În figura 20.2 sunt prezentate astfel de puncte O, X și X_1 astfel, că $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Se spune, că punctul X_1 – este imaginea punctului X la omotetia cu centrul O și coeficientul $-\frac{1}{2}$.

În general, dacă punctele O, X și X_1 sunt astfel, că $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, unde $k \neq 0$, atunci se spune, că punctul X_1 – este imaginea punctului X la **omotetia cu centrul *O* și coeficientul *k***.

Punctul O este numit **centru de omotetie**, numărul k – **coeficientul omotetiei**, $k \neq 0$.

Să examină figura F și punctul O. Fiecărui punct X al figurii F aplicăm în corespondență punctul X_1, care este imaginea punctului X la omotetia cu centrul O și coeficientul k (dacă punctul O aparține figurii F, atunci atunci ei i se opune însești singură ea). În rezultatul acestei transformări a figurii F obținem figura F_1 (fig. 20.3). Astfel de transformare a figurii F se numește **omotetie cu centrul *O* și coeficientul *k***. De asemenea se spune că figura F_1 este **omotetică** figurii F cu centrul O și coeficientul k.



a *b*

Fig. 20.3

[1] Materialul punctului, care se referă la omotetie, nu este obligat pentru studiere.

De exemplu, în figura 20.4 triunghiul $A_1B_1C_1$ este omotetic triunghiului ABC cu centrul O și coeficientul care este egal cu –3. De-asemenea se poate spune, ca triunghiul ABC este omotetic triunghiului $A_1B_1C_1$ cu același centru, dar coeficientul de omotetie care este egal cu $-\frac{1}{3}$.

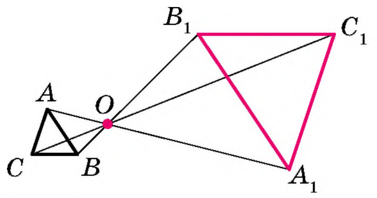


Fig. 20.4

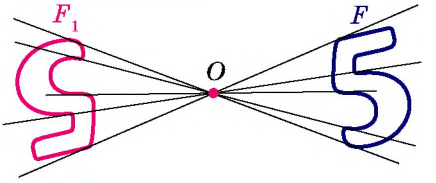


Fig. 20.5

Menționam, că pentr $k = -1$ omotetia cu centrul O este simetrie centrală cu centrul O (fig. 20.5). Dacă $k = 1$, atunci omotetia este transformare identică.

Evident că pentru $k \neq 1$ și $k \neq -1$ omotetia nu este mișcare.

Teorema 20.1. ***La omotetia figurii F cu coeficientul k toate distanțele între punctele ei se modifică de $|k|$ ori, adică dacă A și B sunt puncte arbitrare ale figurii F, iar punctel A_1 și B_1 – imaginile lor corespunzătoare la omotetia cu coeficientul k, atunci $A_1B_1 = |k|AB$.***

Demonstrație. Fie punctul O – centrul omotetiei. Atunci $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Avem:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB},$$

adică $A_1B_1 = |k|AB$. ◀

Consecință. ***Dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ este omotetic triunghiului ABC cu coeficientul k, atunci $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$.***

Pentru demonstrarea acestei afirmații este suficient de se folosit de teorema 20.1 și criteriul trei de asemănare a triunghiurilor.

Omotetia are un șir de alte proprietăți.

La omotetie:

- *imaginea dreptei este dreaptă;*
- *imaginea segmentului este segment;*
- *imaginea unghiului este unghi, care este egal cu cel dat;*
- *imaginea triunghiului este triunghi, asemenea celui dat;*
- *imaginea circumferinței este circumferință;*

- *aria poligonului se modifică de k^2 ori, unde k este coeficientul omotetiei.*

Aceste proprietăți voi puteți să le demonstrați la cercul de matematică.

Proprietățile menționate ale omotetiei indică la faptul, că această transformare poate modifica dimensiunile figurii, însă nu modifică forma, adică la omotetie imaginea și preimaginea sunt figuri asemenea. Menționăm, că în cursul de geometrie pentru clasa a 8-a, când mergea vorba despre asemănarea figurilor, noi dădeam definiția doar a triunghiurilor asemenea. Acum o să definim noțiunea de asemănare pentru figuri arbitrare..

În figura 20.6 figura F_1 este omotetică figurii F, iar figura F_2 simetrică figurii F_1 față de dreapta l.

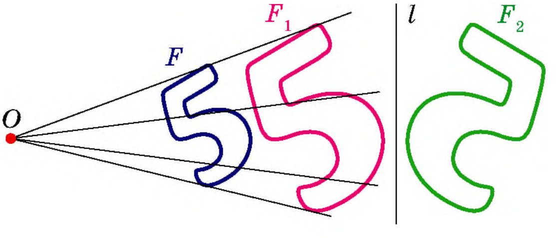


Fig. 20.6

Se spune că figura F_2 este obținută din figura F în rezultatul **compoziției** a două transformări: omotetiei și simetriei axiale.

Deoarece $F_1 = F_2$, atunci figurile F și F_2 au forme similare, dar diferite dimensiuni, adică ele sunt asemenea. Se spune, că figura F_2 este obținută din figura F în rezultatul **transformărilor de asemănare**.

În figura 20.7 figura F_1 este omotetică figurii F, iar figura F_2 – imaginea figurii F_1 pentru o mișcare oarecare. Aici de-asemenea se poate afirma că figurile F și F_2 sunt asemenea.

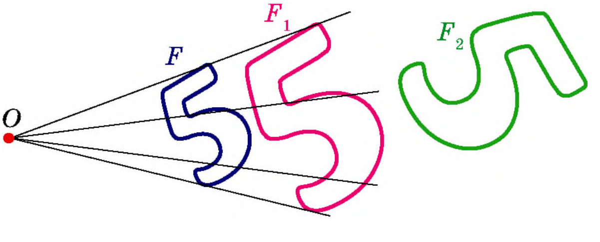


Fig. 20.7

Din cele spuse decurge, că este rațional de acceptat astfel de definiție.

Definiție. Două figuri se numesc asemenea, dacă una din ele se poate obține din alta în rezultatul compoziției a doua transformări: omotetiei și mișcării.

Această definiție este ilustrată de schema, prezentată în figura 20.8.

Asemănarea = Omotetia + Mișcarea

Fig. 20.8

Înscrierea $F \backsim F_1$ înseamnă, că figurile F și F_1 sunt asemenea. Se mai spune, că figura F_1 – este imaginea figurii F la **transformarea de asemănare**.

Din definiția prezentată reiese, că *la transformarea de asemănare a figurii F distanțele între punctele ei se modifică de unul și același număr de ori.*

De oarece transformarea identică este mișcare, atunci din schema, prezentată în figura fig. 20.8, decurge, că omotetia este un caz aparte a transformării de simetrie.

Fie că punctele A și B sunt puncte arbitrare ale figurii F, iar punctele A_1 și B_1 sunt imaginile lor la transformarea de asemănare. Punctele A_1 și B_1 aparțin figurii F_1, care este asemenea figurii F. Numărul $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ este numit **coeficient de asemănare**. Se mai spune, că figura F_1 este asemenea figurii F cu coeficientul de asemănare k, iar figura F este asemenea figuri F_1 cu coeficientul $\frac{1}{k}$.

Menționăm, că transformarea de asemănare cu coeficientul $k = 1$ este mișcare. De aici decurge, că mișcarea este un caz particular a transformării de asemănare.

Cu transformările de asemănarea noi ne ciocnim des în viața de toate zilele (fig. 20.9). De exemplu, în urma modificării scării hărții obținem o hartă, asemenea celei date. Fotografia este transformarea negativului în imagine asemenea pe hârtia fotografică. Trecând în caiet desenul, făcut de profesor pe tablă, voi de-asemenea executați transformări de asemănare.

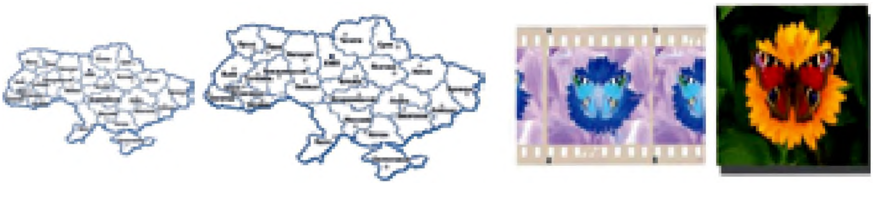


Fig. 20.9

Teorema 20.2. ***Raportul ariilor poligoanelor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare.***

Demonstrarea acestei teoreme este în afara limitelor cercetate de cursul de geometrie din acest manual.. Noi o s-o demonstrăm pentru un caz particular, examinând triunghiuri asemenea.

Demonstrație. Fie triunghiul $A_1B_1C_1$ este imaginea triunghiului ABC la transformarea de asemănare cu coeficientul k (fig. 20.10). Latura A_1C_1 este imaginea laturii AC. Atunci $A_1C_1 = k \cdot AC$. Coborâm înălțimea BD. Fie punctul D_1 – imaginea punctului D. Deoarece la transformarea de asemănare se păstrează unghiurile, atunci segmentul B_1D_1 este înălțimea triunghiului $A_1B_1C_1$. Atunci $B_1D_1 = k \cdot BD$. Avem:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2. \blacktriangleleft$$

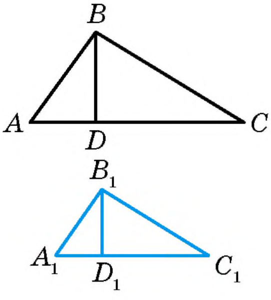


Fig. 20.10

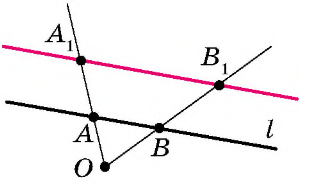


Fig. 20.11

Problema 1. Demonstrați, că imaginea dreptei l la omotetia cu centrul O, care nu aparține dreptei l, este dreapta, paralelă celei date.

Rezolvare. Din proprietățile omotetiei reiese, că imaginea dreptei l va fi o dreaptă. Pentru construirea dreptei este de-ajuns de găsit oricare două puncte ale ei. Alegem pe dreapta l două puncte arbitrare A și B (fig. 20.11). Fie punctele A_1 și B_1 – sunt imaginile lor la omotetia cu centrul O și coeficientul k (figura 20.11 corespunde cazului când $k > 1$). Atunci dreapta A_1B_1 – este imaginea dreptei AB.

În timpul demonstrării teoremei 20.1 noi am arătat, că $\overline{A_1B_1} = k\overline{AB}$. Deci, $AB \parallel A_1B_1$. $\blacktriangleleft$

Problema 2. În triunghiul ascuțitunghic ABC înscrieți un pătrat astfel, ca două unghiuri ale lui să se afle corespunzător, pe laturile AB și BC, iar altele două – pe latura AC.

Rezolvare. Din punctul arbitrar M al laturii AB coborâm perpendiculara MQ la latura AC (fig. 20.12). Construim pătratul $MQPN$ astfel, ca punctul P să se afle pe semidreapta QC, Fie semidreapta AN intersectează latura BC în punctul N_1.

Să examinăm omotetia cu centru A și coeficientul $k = \dfrac{AN_1}{AN}$. Atunci punctul N_1 este imaginea punctului N pentru această omotetie. Imaginea segmentului MN este segmentul M_1N_1, unde punctul M_1 aparține semidreaptei AB, totodată $M_1N_1 \parallel MN$. Analogic segmentul N_1P_1 este astfel, că punctul P_1 aparține semidreaptei AC și $N_1P_1 \parallel NP$, este imaginea segmentului NP. Deci, segmentele M_1N_1 și N_1P_1 sunt laturile adiacente ale pătratului căutat. Pentru terminarea construcției a rămas de coborât perpendiculara M_1Q_1 pe latura AC. ◀

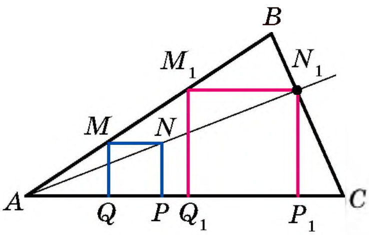


Fig. 20.12

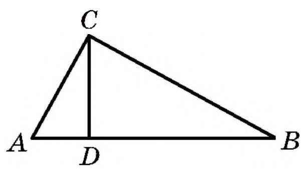


Fig. 20.13

Problema 3. Segmentul CD este înălțimea triunghiului dreptunghic ABC ($\angle C = 90°$). Aflați raza r a circumferinței înscrise în triunghiul ABC, dacă razele circumferințelor înscrise în triunghiurile ACD și BCD, sunt egale corespunzător cu r_1 și r_2.

Rezolvare. Deoarece unghiul A este comun pentru triunghiurile dreptunghice ACD și ABC, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea (fig. 20.13). Fie coeficientul de asemănare este egal cu k_1. Evident, că $k_1 = \dfrac{r_1}{r}$. Analogic $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ cu coeficientul de asemănare $k_2 = \dfrac{r_2}{r}$.

Însemnând ariile triunghiurilor ACD, BCD și ABC corespunzător S_1, S_2 și S. Avem:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

De aici $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Obținem, că $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, adică $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Răspuns: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◀

1. În care caz se spune, că punctul X_1 este imaginea punctului X la omotetia cu centrul O și coeficientul k?
2. Descrieţi transformarea figurii F, care se numeşte omotetie cu centrul O şi coeficientul k.
3. Cum se schimbă distanţele între puncte la omotetia cu coeficientul k?
4. Formulaţi proprietăţile omotetii.
5. Care figuri se numesc asemenea?
6. Cu ce este egal raportul ariilor poligoanelor asemenea?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

20.1.° Construiți imaginea segmentului AB (fig. 20.14) la omotetia cu centrul O și coeficientul:

1) $k = 2$; 2) $k = -\dfrac{1}{2}$.

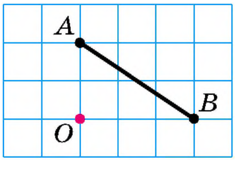


Fig. 20.14

20.2.° Desenați segmentul AB. Construiți imaginea acestui segment la omotetia cu coeficientul k și centrul:
1) în punctul A, $k = 3$;
2) în punctul B, $k = -2$;
3) în mijlocul segmentului AB, $k = 2$.

20.3.° Desenați o circumferință, raza căreia este egală cu 2 cm, și notați pe ea punctul A. construiți imaginea acestei circumferințe la omotetia cu coeficientul k și centrul:

1) centrul, $k = -\dfrac{1}{2}$, $k = 2$;

2) în punctul A, $k = 2$, $k = -\dfrac{1}{2}$.

20.4.° Desenați triunghiul ABC. Construiți imaginea acestui triunghi la omotetia cu coeficientul k și centrul:

1) în punctul B, $k = 3$;
2) în punctul C, $k = -\frac{1}{2}$;
3) în punctul A, $k = \frac{1}{2}$;
4) în mijlocul laturii AB, $k = \frac{1}{2}$;
5) în mijlocul laturii AC, $k = -\frac{1}{3}$.

20.5.° Desenați triunghiul ABC. Găsiți punctul de intersecție al medianelor. Construiți imaginea acestui triunghi la omotetia cu centrul în punctul de intersecție al medianelor lui și coeficientul:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

20.6.° Desenați paralelogramul $ABCD$. Punctele de intersecție a diagonalelor lui însemnați-le cu litera O. Construiți imaginea acestui paralelogram la omotetia cu centrul O și coeficientul: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

20.7.° Desenați pătratul $ABCD$. Construiți imaginea acestui pătrat al omotetia cu coeficientul k și centrul:

1) în punctul A, $k = \frac{1}{3}$; 2) în punctul B, $k = -2$; 3) în punctul C, $k = 2$.

20.8.° Orientându-se după pătrățele, desenați un pentagon $ABCDE$ (fig. 20.15). Construiți pentagonul $A_1B_1C_1D_1E_1$, asemenea celui dat cu coeficientul de asemănare $\frac{1}{2}$.

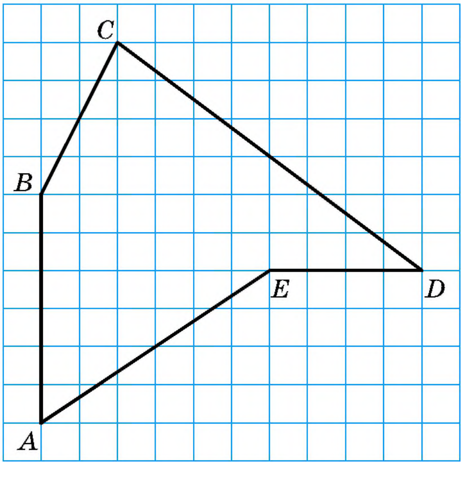


Fig. 20.15

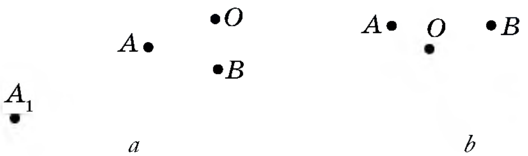


Fig. 20.16 **Fig. 20.17**

20.9.• În figura 20.16 punctul A_1 – este imaginea punctului A la omotetia cu centrul O. Construiți imaginea punctului B pentru această omotetie.

20.10.• În figura 20.17 punctul A_1 este imaginea punctului A la omotetia cu coeficientul: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Construiți centrul de omotetie.

20.11.• În figura 20.18 este prezentat dreptunghiul $ABCD$ și punctele A_1 și D_1, care sunt imaginile punctelor A și D la transformarea de asemănare. Construiți imaginea dreptunghiului $ABCD$ pentru această transformare. Câte soluții are problema?

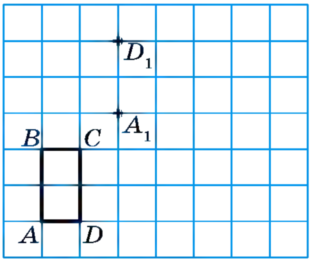


Fig. 20.18

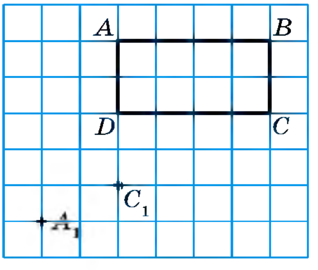


Fig. 20.19

20.12.• În figura 20.19 este prezentat dreptunghiul $ABCD$ și punctele A_1 și C_1, care sunt imaginile punctelor A și C la transformarea de asemănare. Construiți imaginea dreptunghiului $ABCD$ pentru această transformare. Câte soluții are problema?

20.13.• Construiți imaginea triunghiului ABC la transformarea de asemănare care este compoziția a două transformări: omotetia cu centrul O și coeficientul $k = 2$ și simetria axială față de latura l (fig. 20.20). Indicați coeficientul de asemănare.

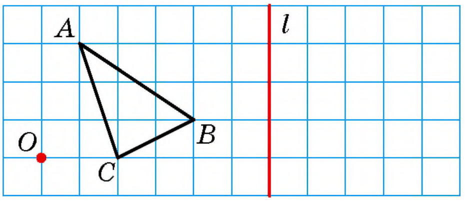


Fig. 20.20

20.14.• Desenați o circumferință, raza căreia este egală cu 2 cm. Notați punctul *O* la distanța de 4 cm de la centrul ei. Construiți imaginea acestei circumferințe la transformarea de asemănare, care este compoziția a două transformări: omotetia cu centrul *O* și coeficientul $k = \frac{1}{2}$ și rotația cu centrul O după acele ceasornicului cu unghiul de 45°. Indicați coeficientul de asemănare.

20.15.• În figura 20.21 sunt reprezentate două drepte paralele *a* și *b*. Construiți centrul de omotetie, pentru care dreapta *b* este imaginea dreptei *a* cu coeficientul: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Câte soluții are problema?

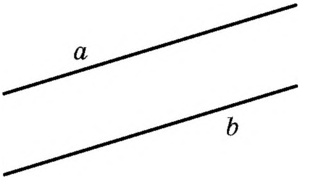


Fig. 20.21

20.16.• Desenați trapezul *ABCD*, baza *BC* a căreia este de două ori mai mică decât baza *AD*. Construiți centrul de omotetie, pentru care segmentul *AD* este imaginea segmentului *BC* cu coeficientul: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

EXERCIȚII

20.17.° În paralelogramul *ABCD* punctul D_1 – este mijlocul laturii *AD*. Pentru omotetia cu centrul *A* punctul D_1 este imaginea punctului *D*. Găsiți coeficientul de omotetie. Indicați, care puncte sunt imaginile punctelor *B* și *C* pentru această omotetie.

20.18.° Care din figurile, reprezentate în figura 20.22, coincid cu imaginile sale la omotetia cu centrul *O* și coeficientul $k > 0$ și $k \neq 1$?

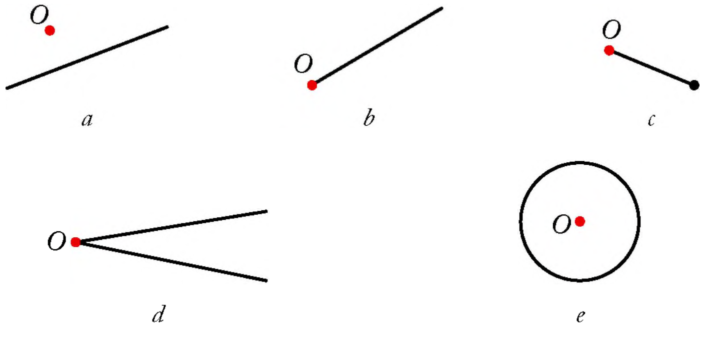


Fig. 20.22

20.19.° Care din figurile, reprezentate în figura 20.23 coincid cu imaginile sale la omotetia cu centrul O și coeficientul $k < 0$?

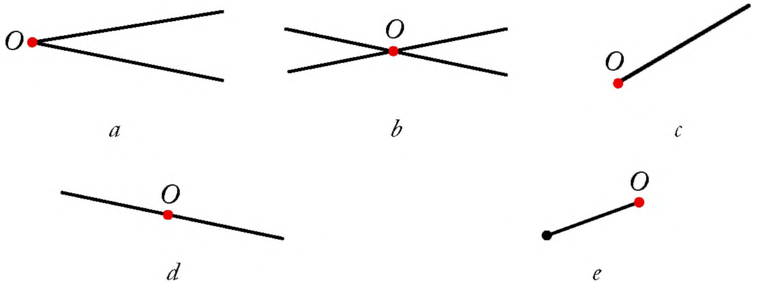


Fig. 20.23

20.20.° Medianele triunghiului ABC se intersectează în punctul M (fig. 20.24). Găsiți coeficientul omotetiei cu centrul:

1) în punctul B, la care punctul B_1 este imaginea punctului M;
2) în punctul M, la care punctul A_1 este imaginea punctului A;
3) în punctul C, la care punctul M este imaginea punctului C_1.

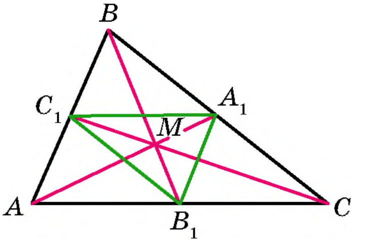


Fig. 20.24

20.21.° Medianele triunghiului ABC se intersectează în punctul M (fig. 20.24). Indicați coeficientul și centrul de omotetie, pentru care triunghiul $A_1B_1C_1$ este imaginea triunghiului ABC.

20.22.° În triunghiul ABC medianele AA_1, BB_1 și CC_1 se intersectează în punctul M. Punctele K, F și N – sunt mijloacele segmentelor AM, BM și CM corespunzător. Indicați coeficientul și centrul de omotetie, pentru care triunghiul ABC este imaginea triunghiului KFN.

20.23.° Găsiți imaginile punctelor $A\ (-2; 1)$, $B\ (3; 0)$ și $D\ (0; -6)$ pentru care omotetia cu centrul $O\ (0; 0)$ și coeficientul:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

20.24.° Punctul $A_1\ (-1; 2)$ este imaginea punctului $A\ (-3; 6)$ pentru omotetia cu centrul în originea coordonatelor. Aflați coeficientul omotetiei.

20.25.° Ariile a două triunghiuri asemenea sunt egale cu 28 cm^2 și 63 cm^2. Una din laturi ale primului triunghi este egală cu 8 cm. Aflați latura triunghiului al doilea, care corespunde laturii date al primului triunghi.

20.26.° Laturile corespunzătoare ale două triunghiuri asemenea sunt egale cu 30 cm și 24 cm. Aria triunghiului cu latura de 30 cm este egală cu 45 cm^2. Aflați aria celui dea-l doilea triunghi.

20.27.° Aria triunghiului este egală cu S. Cu ce este egală aria triunghiului, pe care o taie de la cel dat linia medie a lui?

20.28.° Aria triunghiului este egală cu S. Cu ce este egală aria triunghiului, vârfurile căruia sunt mijlocurile liniilor medii ale triunghiului dat.

20.29.• Segmentul MN – este linia medie a triunghiului ABC (fig. 20.25). Indicați coeficientul și centrul omotetiei, pentru care:
1) segmentul AC segmentul MN;
2) segmentul MN segmentul AC.

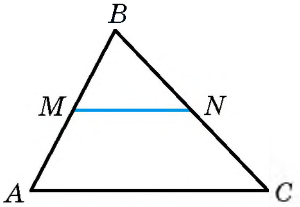


Fig. 20.25

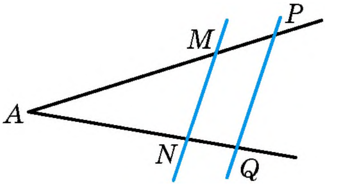


Fig. 20.26

20.30.• Dreptele paralele intersectează laturile unghiului A în punctele M, N, P și Q (fig. 20.26). Se cunoaște, că $AM : MP = 3 : 1$. Indicați coeficientul și centrul omotetiei, pentru care:
1) segmentul PQ este imaginea segmentului MN;
2) segmentul MN este imaginea segmentului PQ.

20.31.• Dreptele paralele BC și AD sunt astfel, că $AD = 3BC$. Câte puncte există, care sunt centre de omotetie, pentru care imaginea segmentului BC este segmentul AD? Pentru fiecare astfel de punct determinați coeficientul de omotetie.

20.32.• Circumferințele cu centrele O_1 și O_2 cu razele R și r corespunzător sunt tangente exterior în punctul O (fig. 20.27). Demonstrați, că circumferința cu centrul O_1 este imaginea circumferinței cu centrul O_2 pentru omotetia cu centrul O și coeficientul $-\frac{R}{r}$.

20.33.• Circumferințele cu centrele O_1 și O_2 cu razele R și r corespunzător sunt tangente interior în punctul O (fig. 20.28). Demonstrați, că circumferința cu centrul O_1 este imaginea circumferinței cu centrul O_2 pentru omotetia cu centrul O și coeficientul $\frac{R}{r}$.

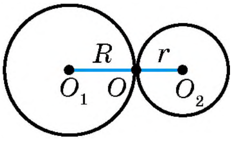


Fig. 20.27

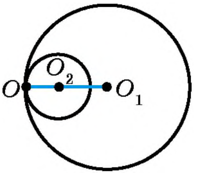


Fig. 20.28

20.34.• Circumferința cu centrul O este tangentă la dreapta a. Demonstrați, că imaginea acestei circumferințe la omotetia cu centrul A, unde A este un punct arbitrar al dreptei a (fig. 20.29), este tangentă la această dreaptă.

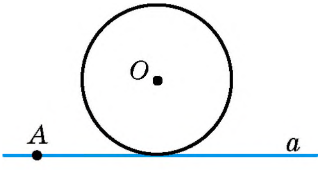


Fig. 20.29

20.35.• Punctul A (2; –3) – este imaginea punctului B (8; 6) la omotetia cu centrul M (4; 0). Aflați coeficientul omotetiei.

20.36.• Punctul A (–7; 10) – este imaginea punctului B (–1; –2) la omotetia cu coeficientul –2. Aflați coeficientul omotetiei.

20.37.• Punctul A_1 (x; 4) – este imaginea punctului A (–6; y) la omotetia cu centrul în originea coordonatelor și coeficientul:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

Aflați x și y.

20.38.• Punctul A_1 (4; y) – este imaginea punctului A (x; –4) la omotetia cu centrul B (1; –1) și coeficientul $k = -3$. Aflați x și y.

20.39.• Linia medie a triunghiului taie din el un trapez, aria căruia este egală cu 21 cm^2. Aflați aria triunghiului dat.

20.40.• Dreapta, paralelă laturii AC a triunghiului ABC, intersectează latura lui AB în punctul M, iar latura BC – în punctul K. Aflați aria triunghiului ABC, dacă $BM = 4$ cm, $AC = 8$ cm, $AM = MK$, iar aria triunghiului MBK este egală cu 5 cm^2.

20.41.• Prelungirea laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Aflați aria trapezului, dacă $BC : AD = 3 : 5$, iar aria triunghiului AED este egală cu 175 cm^2.

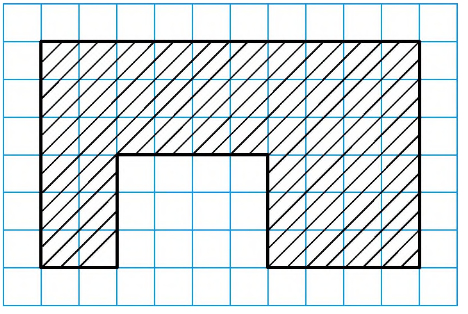


Fig. 20.30

20.42.• În figura 20.30 este reprezentat planul școlii. Calculați, ce arie ocupă școala, dacă planul este desenat cu scara 1 : 2000. Lungimea laturii pătrățelei este egală cu 0,5 cm.

20.43.•• Găsiți imaginea dreptei $y = 2x + 1$ la omotetia cu centrul în originea coordonatelor și coeficientul:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

20.44.•• Găsiți imaginea circumferinței $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ la omotetia cu centrul în originea coordonatelor și coeficientul:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

20.45.•• Două circumferințe au tangență interioară. Prin punctul de tangență s-au dus două linii, care intersectează circumferințele în punctele A_1, A_2, B_1, B_2 (fig. 20.31). Demonstrați, că $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

20.46.•• Două circumferințe au tangență exterioară. Prin punctul de tangență s-au dus două linii, care intersectează circumferințele în punctele A_1, A_2, B_1, B_2 (fig. 20.32). Demonstrați, că $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

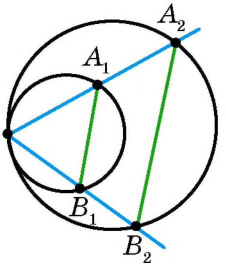


Fig. 20.31

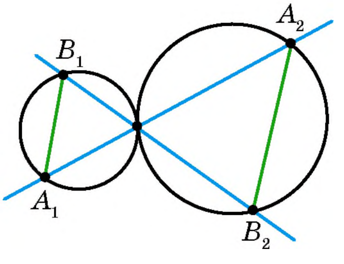


Fig. 20.32

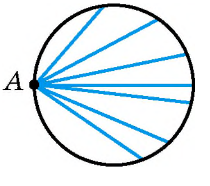


Fig. 20.33

20.47.•• Punctul A aparține circumferinței (fig. 20.33). Aflați locul geometric al punctelor, care sunt mijloacele coardelor circumferinței date, unul din capetele cărora este punctul A.

20.48.•• Două circumferințe au tangență interioară, totodată circumferința mai mică trece prin centrul celei mai mari. Demonstrați, că circumferința mai mică împarte în jumătate orice coardă a celei mai mari circumferințe, care tece prin punctul de tangență.

20.49.•• Se dă triunghiul ABC și punctul arbitrar M. Demonstrați, că punctele simetrice punctului M față de mijlocul laturilor triunghiului ABC, sunt vârfurile unui triunghi, egal celui dat.

20.50.•• Construiți un triunghi după două unghiuri ale lui și raza circumferinței circumscrise lui.

20.51.•• Construiți un triunghi după două unghiuri ale lui și raza circumferinței înscrise în el.

20.52.•• Segmentul AC – este cea mai mare latură a triunghiului ABC. Înscrieți în triunghiul ABC un dreptunghi, laturile căruia se raportă ca 2 : 1, astfel, ca două vârfuri ale laturii mai mari a dreptunghiului să se afle pa latura AC a triunghiului, iar altele două – pe laturile AB și BC.

20.53.* Segmentul AB – este coarda circumferinței date, punctul C este punct arbitrar al acestei circumferințe. Găsiți locul geometric al punctelor, care sunt punctele de intersecție al medianelor triunghiului ABC.

20.54.* Se dau două puncte A și B și dreapta l. Găsiți locul geometric al punctelor, care sunt punctele intersecției medianelor triunghiului ABC, unde C – punct arbitrar al dreptei l.

20.55.* Punctul M aparține unghiului ABC, dar nu aparține laturilor lui, Construiți circumferința, care este tangentă la laturile unghiului și trece prin punctul M.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

20.56. Aflați aria rombului și raza circumferinței înscrisă în romb, dacă diagonalele lui sunt egale cu 12 cm și 16 cm.

20.57. Aflați perimetrul triunghiului, creat la intersecția dreptei $3x + 4y = 24$ cu axele de coordonate.

20.58. Două circumferințe sunt tangente exterior în punctul A, punctele B și C sunt punctele de tangență la aceste circumferințe a tangentei lor comune. Demonstrați, că unghiul BAC este drept.

APLICAREA TRANSFORMĂRII FIGURILOR LA REZOLVAREA PROBLEMELOR

Transformarea figurilor este o metodă efectivă de rezolvare a diferitor probleme geometrice. Să ilustră aceasta pe exemple.

Problema 1. Pe laturile AB, BC și CA a triunghiului ascuțitunghic ABC construiți astfel de puncte M, N și P corespunzător, ca perimetrul triunghiului MNP să fie cel mai mic.

Rezolvare. Fie P – punct arbitrar al laturii AC a triunghiului ABC, punctele P_1 și P_2 – imaginile ei la simetria față de dreptele AB și BC imaginile ei la simetria față de dreptele (fig. 20.34). Dreapta P_1P_2 intersectează laturile AB și BC corespunzător în punctele M și N. Din rezolvarea problemei 2 punctul 18 decurge, că perimetrele tuturor triunghiurilor, pentru care punctul P este fixat, iar punctele M și N aparțin laturilor AB și BC, perimetrul triunghiului MNP este cel mai mic. Acest perimetru este egal cu lungimea segmentului P_1P_2.

Menționăm, că segmentul EF este linia medie a triunghiului PP_1P_2. Atunci $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Deoarece $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, atunci punctele P, E, B și F se află pe o circumferință cu diametrul BP. De aici $EF = BP \sin B$. Deci, lungimea segmentului EF va fi cea mai mică pentru cea mai mică lungime a segmentului BP, adică atunci, când BP este înălțimea triunghiului ABC.

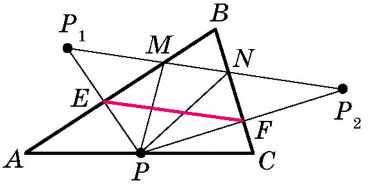


Fig. 20.34

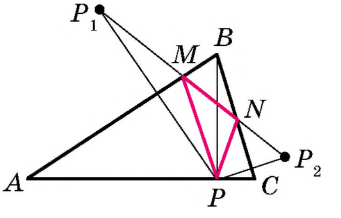


Fig. 20.35

În figura 20.35 segmentul BP – înălțimea triunghiului ABC. Algoritmul construirii punctelor M și N este înțeles din imagine.

Din construcție reiese, că perimetrul oricărui alt triunghi, vârfurile căruia se află pe laturile triunghiului ABC, este mai mare ca perimetrul triunghiului MNP. De aceea triunghiul căutat este singurul – acesta este triunghiul construit MNP.

Se poate arăta (faceți aceasta singuri), că punctele M și N sunt bazele înălțimilor, coborâte din vârfurile corespunzătoare C și A a triunghiului ABC.

Deci, vârfurile triunghiului căutat sunt bazele înălțimilor triunghiului dat ABC. Astfel de triunghi se numește **ortocentric**. ◀

Problema 2. Punctul O este centrul poligonului regulat cu n-laturi $A_1A_2...A_n$ (fig. 20.36). Demonstrați, că $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Rezolvare. Fie $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Să examinăm rotația cu centrul O cu unghiul $\frac{360^{\circ}}{n}$, de exemplu împotriva acelor ceasornicului. La o astfel de transformare imaginea poligonului cu n-laturi va fi același poligon cu n-laturi. Deci, suma căutată nu se va schimba. Iar aceasta se poate numai atunci, când $\vec{a}=\vec{0}$. ◀

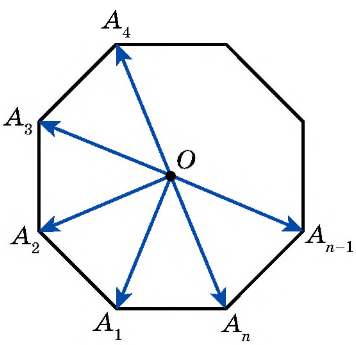


Fig. 20.36

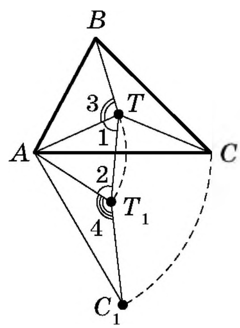


Fig. 20.37

Problema 3. În interiorul triunghiului ABC, toate unghiurile căruia sunt mai mici de 120°, găsiți un astfel de punct T, ca suma $TA + TB + TC$ să fie cea mai mică.

Rezolvare. Fie T – punct arbitrar al triunghiului datABC (fig. 20.37). Să cercetăm rotația cu centrul A la un unghi de 60° după acele ceasornicului. Fie punctele T_1 și C_1 – imaginile punctelor T și C corespunzător (fig. 20.37). Deoarece rotația este mișcare, atunci $T_1C_1 = TC$. Evident, că triunghiul ATT_1 este echilateral. Atunci $AT = TT_1$.

Avem: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

E clar, că suma $TT_1 + TB + T_1C_1$ este cea mai mică, dacă punctele B, T, T_1 și C_1 se află pe o dreaptă. Deoarece $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, atunci această condiție se va îndeplini atunci, când $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Deoarece unghiul AT_1C_1 este imaginea unghiului ATC la rotația dată, atunci trebuie să se îndeplinească egalitatea $\angle ATC = 120°$.

Deci, punctele B, T, T_1 și C_1 vor aparține unei drepte atunci și numai atunci, când $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. De aici $\angle BTC = 120°$.

În acest mod, suma $TA + TB + TC$ va fi cea mai mică, dacă $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

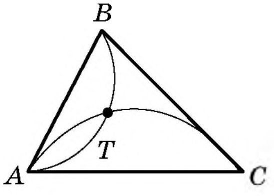


Fig. 20.38

De găsit punctul T se poate, de exemplu, construind LGP, din care segmentele AB și AC se văd sub unghiul de 120° (fig. 20.38).

Este clar, că atunci când unul din unghiurile triunghiului ABC nu-i mai mic de 120°, atunci punctul intersecției arcurilor construite nu va fi amplasat în interiorul triunghiului. Se poate arăta, că în triunghiul cu unghiul nu mai mic de 120°, punctul T, suma distanțelor de la care până la vârfurile triunghiului este cea mai mică, coincide cu vârful unghiului obtuz. ◀

Problema 4. Segmentele AA_1, BB_1 și CC_1 – înălțimile triunghiului ascuțitunghic ABC. Demonstrați, că raza circumferinței circumscrise triunghiului ABC este de două ori mai mare decât raza circumferinței circumscrise triunghiului $A_1B_1C_1$.

Rezolvare. Fie dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 intersectează circumferința circumscrisă triunghiului ABC corespunzător în punctele M, N și P (fig. 20.39). Vom demonstra, că $HA_1 = A_1M$, unde punctul H – ortocentrul triunghiului ABC.

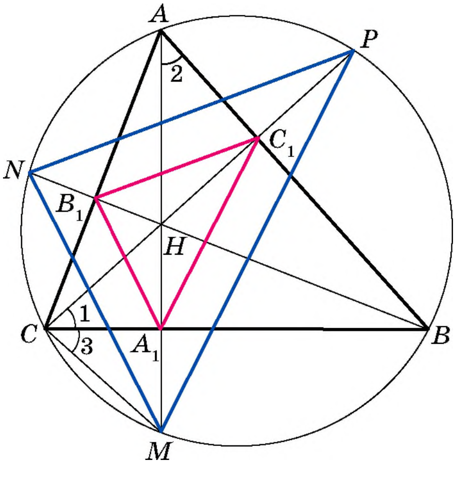


Fig. 20.39

Avem: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Unghiurile 2 și 3 sunt egale ca înscrise, ce sunt întinse de arcul MB. Deci, $\angle 1 = \angle 3$.

Atunci în triunghiul HCM segmentul CA_1 este bisectoare și înălțime, și deci, și mediană. De aici $HA_1 = A_1M$.

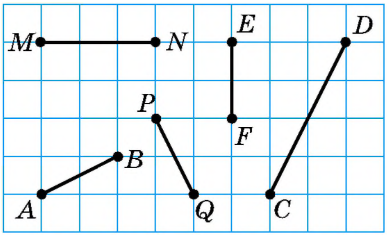
Analogic putem demonstra, că $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Acum este clar, că triunghiul MNP este triunghiul omotetic al triunghiului $A_1B_1C_1$ cu centrul H și coeficientul 2. Atunci raza circumferinței circumscrise triunghiului MNP este de două ori mai mare decât raza circumferinței circumscrise triunghiului $A_1B_1C_1$. A rămas să menționăm că triunghiurile MNP și ABC sunt înscrise în una și aceiași circumferință. ◀

ÎNSĂRCINARĂ NR. 5 "CONTROLEAZĂ-TE" ÎN FORMĂ TEST

1. Care din segmentele, prezentate în figură, pot fi imaginea segmentului AB la mișcare?

A) MN; B) PQ; C) EF; D) DC.

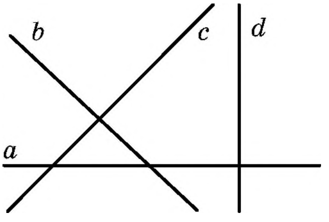


2. Indicați ecuația imaginii dreptei $y = 2x$ la deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$ (0; 1).

A) $y = 2x + 1$; C) $y = x + 1$;
B) $y = 2x - 1$; D) $y = x - 1$.

3. Care din segmentele, prezentate în figură, pot fi imaginea segmentului a la deplasarea paralelă?

A) b; B) c; C) d; D) a.



4. Care din figurile indicate are numai o axă de simetrie?

A) Pătratul; C) parabola;
B) circumferința; D) segmentul.

5. Pentru care valori ale lui x și y punctele A (–1; y) și B (x; 6) sunt simetrice în raport cu axa absciselor?

A) $x = -1, y = 6$; C) $x = -1, y = -6$;
B) $x = 1, y = -6$; D) $x = 1, y = 6$.

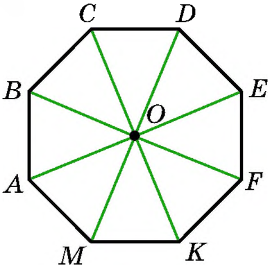
6. Care din figurile indicate are centru de simetrie?

A) Triunghiul; C) trapezul;
B) segmentul; D) unghiul.

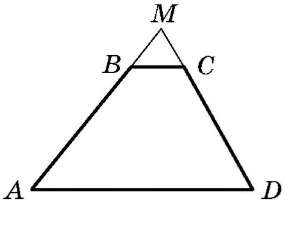
7. Care din figurile indicate are centru de simetrie și axă de simetrie?
A) Triunghiul echilateral;
B) paralelogramul;
C) trapezul isoscel;
D) dreapta.

8. Pentru care valori ale lui x și y punctele $A(x; 7)$ și $B(-4; y)$ sunt simetrice față de originea de coordonate?
A) $x = 4, y = -7$;
B) $x = 4, y = 7$;
C) $x = -4, y = 7$;
D) $x = -4, y = -7$.

9. Punctul O este centrul octogonului regulat $ABCDEFKM$ (vezi figura). Indicați imaginea laturii EF la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu unghiul de 135° la mișcare.
A) AB; B) BC; C) AM; D) CD.



10. Continuarea laturilor laterale AB și CD al trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M (vezi figura). Indicați coeficientul de omotetie cu centrul în punctul M, pentru care segmentul BC este imaginea segmentului AD, dacă $AB : BM = 7 : 2$.
A) $\frac{2}{7}$; B) $\frac{7}{2}$; C) $\frac{2}{9}$; D) $\frac{9}{2}$.



11. Punctul $M(6; -3)$ este imaginea punctului $N(2; 1)$ la omotetia cu coeficientul $-\frac{1}{3}$. Indicați coordonatele centrului omotetiei.

A) $(5; -2)$; C) $(-5; 2)$;
B) $(8; -1)$; D) $(-8; 1)$.

12. Dreapta, paralelă laturii AB a triunghiului ABC, intersectează latura lui AC în punctul E, iar latura BC, – în punctul F. Aflați aria triunghiului CEF, dacă $AE : EC = 3 : 2$, iar aria triunghiului ABC este egală cu 75 cm^2.

A) 36 cm^2; C) 30 cm^2;
B) 50 cm^2; D) 12 cm^2.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 5

Mișcarea (deplasarea)

Transformarea figurii F, care păstrează distanța între puncte, se numește mișcare (deplasare) a figurii F.

Figuri egale

Două figuri sunt egale, dacă există mișcarea, în urma căreia o figură este imaginea altei figuri.

Deplasarea paralelă

Dacă punctele X și X_1 sunt astfel, că $\overline{XX_1} = \vec{a}$, atunci se spune, că punctul X_1 este imaginea punctului X la deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$.

Proprietățile deplasării paralele

Deplasarea (translația) paralelă este mișcare.
Dacă figura F_1 este imaginea figurii F la translația paralelă, atunci $F_1 = F$.

Simetrie axială

Punctele A și A_1 se numesc simetrice față de (în raport cu) dreapta l, dacă dreapta l este mediatoarea segmentului AA_1. Dacă punctul A aparține dreptei l, atunci el este considerat simetric singur lui față de dreapta l.

Proprietățile simetriei axiale

Simetria axială este mișcare.
Dacă figurile F și F_1 sunt simetrice față de o dreaptă, atunci $F = F_1$.

Figura, care are axă de simetrie

Figura se numește simetrică în raport cu dreapta l, dacă pentru fiecare punct al figurii date punctul, simetric față de dreapta l, de asemenea aparține acestei figuri. Axa l se numește axa de simetrie a figurii.

Simerie centrală

Punctele A și A_1 se numesc simetrice în raport cu (față de) punctul O, dacă punctul O care este mijlocul segmentului AA_1. Punctul O este considerat simetric singur lui.

Proprietățile simetriei centrale

Simetria centrală este mișcare.
Dacă figurile F și F_1 sunt simetrice în raport cu un punct, atunci $F = F_1$.

Figura, care are centru de simetrie

Figura se numește simetrică față de punctul O, dacă pentru fiecare punct al figurii date punctul, simetric lui față de punctul O, de-semeni aparține acestei figuri. Punctul O se numește centru de simetrie al figurii.

Proprietățile rotației

Rotația este mișcare.
Dacă figura F_1 – este imaginea figurii F la rotație, atunci $F_1 = F$.

Omotetia

Dacă punctele O, X și X_1 sunt astfel, că $\overline{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, unde $k \neq 0$, atunci se spune, că punctul X_1 este imaginea punctului X la omotetia cu centrul O și coeficientul k.

Proprietățile omotetiei

La omotetia figurii F cu coeficientul k toate distanțele între punctele ei se modifică de $|\ k\ |$ ori, adică dacă A și B – sunt puncte arbitrare ale figurii F, iar punctele A_1 și B_1 – imaginile lor corespunzătoare la omotetia cu coeficientul k, atunci $A_1B_1 = |\ k\ |\ AB$.

Asemănarea

Două figuri se numesc asemenea, dacă una din ele se poate obține din alta în rezultatul compoziției a doua transformări: omotetiei și mișcării.

Ariile poligoanelor asemenea

Raportul ariilor poligoanelor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare.

21. Exerciţii pentru repetarea cursului de geometrie clasa a 9-a

1. Rezolvarea triunghiurilor

21.1. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 4 **cm** și **10 cm**, iar sinusul unghiului dintre ele este egal cu $\frac{4}{5}$. Găsiți a treia latură a triunghiului.

21.2. În paralelogramul ***ABCD*** se cunoaște, că ***AB*= 2 cm, *AD* = 4 cm,** $\angle$***BAD* = 60°**. Aflați cosinusul unghiului dintre laturile ***AC*** și ***BD***.

21.3. Determinați, este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic, triunghiul cu laturile: 1) **4 cm, 4 cm, 5 cm**; 2) **5 cm, 6 cm, 9 cm;** 3) 5 **cm, 12 cm, 13 cm.**

21.4. Una din laturile triunghiului este egală cu **21 cm**, iar altele două laturi se raportă ca **3 : 8.** Aflați laturile necunoscute ale triunghiului, dacă unghiul dintre ele este egal cu **60°**.

21.5. Una din laturile triunghiului este egală cu **3 cm**, iar a doua latură – $\sqrt{7}$ cm., totodată unghiul opus celei de-a doua laturi, este egal cu **60°**. Aflați latura necunoscută a triunghiului.

21.6. Una din laturile paralelogramului este cu **4 cm** mai mare ca alta, iar diagonalele lui sunt egale cu **12 cm** și **14 cm**. Aflați perimetrul paralelogramului.

21.7. În trapezul ***ABCD*** este cunoscut, că $BC \parallel AD$, $AD = 8$ cm, $CD = 4\sqrt{3}$ cm. Circumferința, care tece prin punctele ***A, B*** și ***C***, intersectează dreapta ***AD*** în punctul ***K***. $\angle$***AKB* = 60°**. Aflați segmentul ***BK***.

21.8. Bazele unui trapez sunt egale cu **3 cm** și **7 cm**, iar laturile laterale – **6 cm** și **5 cm**. Aflați cosinusurile unghiurilor trapezului.

21.9. Circumferința, înscrisă în triunghiul ***ABC*,** este tangentă la latura ***AB*** în punctul D, $BD = 1$ cm, $AD = 5$ cm, $\angle ABC = 120°$. Aflați segmentul ***CD***.

21.10. Laturile triunghiului sunt egale cu **11 cm**, **12 cm**, și **13 cm**. Aflați mediana triunghiului, dusă la cea mai mare latura a lui.

21.11. Aflați bisectoarea triunghiului, care împarte latura lui în segmentele cu lungimile de **3 cm** și **4 cm** și creează cu această latură un unghi, ce este egal cu **60°**.

21.12. Segmentul ***BD*** este bisectoarea triunghiului ***ABC***, ABC, $BD = a$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$. . Aflați segmentul ***AD***.

21.13. Găsiți raportul laturilor triunghiului isoscel, unul din unghiurile căruia este egal cu **120°**.

21.14. În triunghiul ABC se cunoaște, că $AC = 6\sqrt{3}$ cm, $\angle ABC = 60°$. Aflați raza circumferinței, care trece prin centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC și punctele A și C.

21.15. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu **5 cm** și **8 cm**, iar unghiul între ele – **60°**. Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiului dat.

21.16. Găsiți bisectoarea triunghiului ABC, dusă din vârful A, dacă $\angle BAC = a$, $AC = b$, $AB = c$..

21.17. Bisectoarea unghiului BAD al paralelogramului $ABCD$ intersectează latura BC în punctul M. Aflați aria triunghiului ABM, dacă $AB = 4$ cm, $\angle BAD = 60°$. .

21.18. Aflați cea mai mare înălțime, razele circumferințelor înscrise și circumscrise triunghiului cu laturile **4 cm**, **13 cm** și **15 cm**.

21.19. Razele a două circumferințe sunt egale cu **17 cm** și **39 cm** iar distanța între centrele lor – **44 cm.** Aflați lungimea coardei comune ale acestor circumferințe.

21.20. Calculați aria paralelogramului, o latura a căruia este egală cu **15 cm**, iar diagonalele – **11 cm**, și **25 cm**.

21.21. Bazele trapezului sunt egale cu **16 cm** și **44 cm**, iar laturile laterale – **17 cm** și **25 cm.** Aflați aria trapezului.

21.22. Bazele trapezului sunt egale cu **5 cm** și **12 cm**, iar diagonalele – **9 cm** și **10 cm**. Aflați aria trapezului.

2. Poligoane regulate

21.23. Aflați aria poligonului regulat cu n laturi, dacă raza circumferinței înscrise în el este egală cu 6 cm, iar n este egal: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

21.24. În circumferință este înscris un pătrat cu latura de 4 cm. Aflați aria triunghiului regulat, înscris în aceiași circumferință.

21.26. Mijlocurile laturilor dodecagonului regulat le-au unit peste una astfel, că figura obținută este un hexagon regulat. Aflați latura dodecagonului dat, dacă latura hexagonului creat este egală cu a.

21.27. Lungimea arcului circumferinței este egală cu **6π cm**. Iar măsura în grade – **24°**. Aflați raza circumferinței.

21.28. Pe cateta *AC* a triunghiului dreptunghic *ABC* ($\angle C$ = **90°**) ca pe diametru s-a construit o circumferință. Aflați lungimea arcului acestei circumferințe, care se află în afara triunghiului și se retează de ipotenuza *AB*, dacă $\angle A$ = 42°, *AC* = **8 cm**.

21.29. Latura pătratului este egală cu $2\sqrt{2}$ cm. Aflați lungimea arcului circumferinței circumscrise pătratului dat, capetele căreia sunt două unghiuri megieșe ale lui.

21.30. Distanța dintre centrele a două circumferințe cu raza *R* este egală cu *R*. Aflați aria figurii, care este parte comună a acestor circumferințe, și lungimea liniei, ce mărginește această figură.

21.31. Aria sectorului de cerc este egală cu **2,4π cm.** Aflați măsura în grade al arcului acestui sector, dacă raza cercului este egală **cu 4 cm.**

21.32. Diametrul roții vagonului de tren din metrou este egală cu **78 cm**. În 2.5 minute roata face 1000 de rotații. Aflați viteza trenului metropolitanului în kilometri pe oră. Răspunsul rotunjiți-l până la zecimi.

21.33. Găsiți lungimea circumferinței, înscrise în segmentul, lungimea arcului căruia este egală cu ***m***, iar măsura în grade este egală cu **120°.**

21.34. La circumferința, raza căreia este egală cu *R*, s-au dus două tangente unghiul dintre care este egal cu **60°**. Aflați aria figurii, mărginită de tangente și arcul mai mic, capetele căreia sunt punctele de tangență.

3. Coordonatele carteziene pe plan

21.35. Vârfurile triunghiului sunt punctele *A* (–4; 1), *B* (–2; 4) și *C* (0; 1). Demonstrați, că triunghiul *ABC* este isoscel, și aflați aria lui.

21.36. Găsiți coordonatele punctului de intersecția a mediatoarei segmentului *AB* și axa absciselor, dacă*A* (5; –3), *B* (4; 6).

21.37. Găsiți coordonatele punctului de intersecția a mediatoarei segmentului *CD* și axa ordonatelor, dacă *C* (2; 1), *D* (4; –3).

21.38. Demonstrați că patrulaterul *ABCD* cu vârfurile în punctele *A* (–12; 6), *B* (0; 11), *C* (5; –1) și *D* (–7; –6) este pătrat.

21.39. Punctul *M* (5; –2) este unul din capetele diametrului circumferinței, punctul *N* (2; 0) – centrul circumferinței. Găsiți coordonatele celui de al doilea capăt al diametrului.

21.40. Determinaţi, dacă se află punctele A (–4; –3), B (26; 7) şi C (2; –1pe o dreaptă. Ȋn cazul răspunsului afirmativ indicaţi, care din puncte se află între altele două.

21.41. Demonstraţi, că triunghiul, vârfurile căruia sunt punctele $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = = 52$, dacă C (–8; 7), D (4; –1).este dreptunghic, şi alcătuiţi ecuaţia circumferinţei, circumscrise lui.

21.42. Determinaţi, este oare segmentul ***CD*** diametrul circumferinţei $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = = 52$, dacă C (–8; 7), D (4; –1).

21.43. Circumferinţa, centrul căreia aparţine axei ordonatelor, tece prin punctele A (1; 2) şi B (3; 6). Aparţine oare acestei circumferințe punctul C (–3; 4)?

21.44. Circumferinţa cu centrul în punctul M (–5; 3) este tangentă la axa ordonatelor. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie al circumferinţei cu axa absciselor.

21.45. Aflaţi lungimea liniei, date de ecuaţia

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

21.46. **Alcătuiţi** ecuaţia dreptei, care trece prin punctul P (–3; 5) şi coeficientul unghiular al căreia este egal cu **6**.

21.47. **Alcătuiţi** ecuaţia dreptei, care trece prin punctul S (–1; 4) şi creează un unghi de 135° cu direcţia pozitiva a axei absciselor.

21.48. **Alcătuiţi** ecuaţia dreptei, care trece prin punctul A (–3; 1) şi este paralelă dreptei $5x + 3y = 6$.

21.49. Găsiţi ecuaţia locului geometric al punctelor centrelor circumferinţelor, care trec prin punctele A (–3; –2) şi B (2; 5).

4. Vectorii pe plan

21.50. Două vârfuri ale dreptunghiului ***ABCD*** sunt punctele A (3; 2) şi B (3; –4).. Modulul vectorului $\overrightarrow{BD}$. este egal cu **10**. Aflaţi coordonatele punctelor ***C*** şi ***D***.

21.51. Diagonalele paralelogramului ***ABCD*** se intersectează în punctul ***O*** (fig. 21.1). Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{AD}$ prin vectorii $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

21.52. Patrulaterul $\boldsymbol{ABCD}$ este paralelogram. Aflați

1) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$.

21.53. Aflați modulul vectorului $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, unde $\vec{a}\ (1; -2)$, $\vec{b}\ (-1; 3)$.

21.54. Punctele $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{F}$ sunt mijlocurile laturilor $\boldsymbol{AB}$ și $\boldsymbol{BC}$ ale paralelogramului $\boldsymbol{ABCD}$ corespunzător (fig. 21.2). Exprimați vectorul $\overrightarrow{EF}$ prin vectorii $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

21.55. Pe laturile BC și CD ale paralelogramului $ABCD$ sunt notate punctele M și K corespunzător, totodată $BM=\frac{1}{4}BC$, $CK=\frac{2}{3}CD$ (fig. 21.3). Exprimați vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AK}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

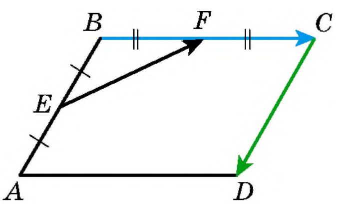


Fig. 21.2

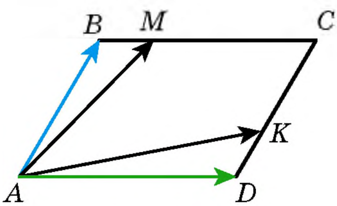


Fig. 21.3

21.56. Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC sunt notate astfel de puncte D și E corespunzător, că $D : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Exprimați vectorii $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ și $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{CD}$ prin vectorii $\overrightarrow{BE}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

21.57. Sunt oare vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{KP}$, coliniari, dacă $M\,(4; -1)$, $N\,(-6; 5)$, $K\,(7; -2)$, $P\,(2; 1)$?

21.58. Aflați valoarea $\boldsymbol{k}$, pentru care vectorii $\vec{a}\ (k; -2)$ și $\vec{b}\ (6; 3)$ sunt coliniari.

21.59. Se dau vectorii $\vec{a}\ (3; -2)$ și $\vec{b}\ (x; 4)$. Pentru care valoare $\boldsymbol{x}$ se execută egalitatea $\vec{a} \varnothing \vec{b} = 1$? ?

21.60. Aflați cosinusurile unghiurilor triunghiului $\boldsymbol{ABC}$, dacă $A\ (-3; -4)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(3; 5)$. Determinați tipul triunghiului.

21.61. Se dau vectorii $\vec{a}\ (2; -1)$ și $\vec{b}\ (1; -2)$. Aflați valorile $\boldsymbol{m}$, pentru care vectorii $\vec{a} + m\vec{b}$ și $\vec{b}$ sunt perpendiculari.

21.62. Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ și $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, dacă $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ și $\vec{m} \perp \vec{n}$..

21.63. Se dau vectorii $\vec{a}$ **(2; −4)** și $\vec{b}$ **(−1; 1).** . Aflați:

1) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|2\vec{a}+\vec{b}|$.

21.64. Alcătuiți ecuația dreptei, care este tangentă la circumferința cu centrul M (0; –4). în punctul A (5; –3).

5. Transformări geometrice

21.65. La deplasarea paralelă imaginea punctului A (3; –2) este punctul B (5; –3). Care punct este imagine punctului C (–3; 4) la această deplasare paralelă?

21.66. Construiți imaginile punctelor A (1; –3), B (0; –5) și C (2; 1 la deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$ **(−2; 1).** Notați coordonatele punctelor obținute.

21.67. Se dau punctele C (7; –4) și D (–1; 8). . La translația paralelă imaginea mijlocului segmentului CD. este punctul P (–1; –3). Aflați coordonatele punctelor, care sunt imaginile punctelor C și D.

21.68. În figura 21.4. 21.4 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Demonstrați, că punctele B și D sunt simetrice față de dreapta AC .

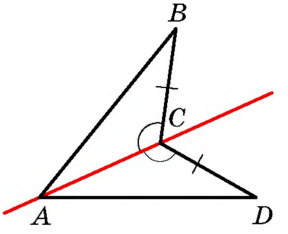


Fig. 21.4

21.69. Aflați coordonatele punctelor simetrice punctului K (4; –2 față de axele de coordonate și originea de coordonate.

21.70. Aflați ***x*** și ***y***, dacă punctele B (3; y) sunt simetrice față de axa absciselor.

21.71. Se dă semidreapta OA și punctul ***B***, care îi aparține. Construiți semidreapta simetrică celei date în raport cu punctul ***B***.

21.72. Sunt simetrice oare punctele OA față de punctul K (1; 4)?

21.73. Scrieți ecuația circumferinței, care este simetrică circumferinței $(x + 4)^2 + + (y - 5)^2 = 11$ față de:

1) originea de coordonate; 2) punctul M (–3; 3).

21.74. Sunt date punctele K și O. Construiți punctul K_1, care este imaginea punctului K la rotația în jurul punctului O: : 1) cu unghiul 130° împotriva acelor ceasornicului; 2) cu unghiul de 40° după acele ceasornicului.

21.75. Se dă segmentul AB și punctul O, care îi aparține. Construiți segmentul A_1B_1, care este imaginea segmentului ***AB*** la rotația cu unghiul de 50° în jurul punctului ***O*** după acele ceasornicului.

21.76. La ce unghi trebuie de rotit dreptunghiul, diferit de pătrat, în jurul centrului lui de simetrie, pentru că imaginea lui să fie același dreptunghi.

21.77. Construiți triunghiul omotetic triunghiului obtuzunghic dat, dacă centrul de omotetie este centrul circumferinței circumscrise triunghiului, coeficientul de omotetie $\boldsymbol{k} = -2$.

21.78. Imaginea punctului A (8; –2)la omotetia cu centrul în originea de coordonate este punctul B (4; –1). Aflați coeficientul de omotetie.

21.79. Laturile a două triunghiuri regulate sunt egale cu **8 cm** și **28 cm**. Cu ce este egal raportul ariilor lor?

21.80. Poligonul F_1 este asemenea poligonului F_2 cu coeficientul de asemănare $\boldsymbol{k}$. Cu literele P_1, P_2, S_1, S_2 sunt notate corespunzător perimetrele și ariile lor. Completați celule libere ale tabelului.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

21.81. Dreapta, paralelă laturii triunghiului cu lungimea de 6 cm, îl împarte în două figuri care se raportă ca 1 : 3. Aflați segmentul acestei drepte, ce se conține între laturile triunghiului.

21.82. Pe latura BC a pătratului $ABCD$ s-a notat punctul M astfel, că $BM : MC = 1 : 2$.. Segmentele AM și BD se intersectează în punctul P. Aflați aria triunghiului BPM, dacă aria triunghiului APD este egală cu 27 cm2.

21.83. Continuarea laturile laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M. . Aflați aria trapezului, dacă $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$,, iar aria triunghiului AMD. este egală cu 32 cm^2.

21.84. În triunghiul $\boldsymbol{ABC}$ se cunoaște, că $\boldsymbol{AB = BC = 13}$ **cm**, $\boldsymbol{AC = 10}$ **cm**. La circumferința, înscrisă în acest triunghi, s-a dus tangenta, care este paralelă la baza $\boldsymbol{AC}$ și intersectează laturile $\boldsymbol{AB}$ și $\boldsymbol{BC}$ în punctele $\boldsymbol{M}$ și $\boldsymbol{K}$ corespunzător. Calculați aria triunghiului $\boldsymbol{MBK}$.

21.85. **L**a prelungirea medianelor AA_1, BB_1 și CC_1triunghiului $\boldsymbol{ABC}$ sa-u notat corespunzător punctele A_2, B_2 și C_2 astfel, că $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (fig. 21.5). Aflați aria triunghiului $A_2B_2C_2$,, dacă aria triunghiului $\boldsymbol{ABC}$ este egală cu 1 cm^2.

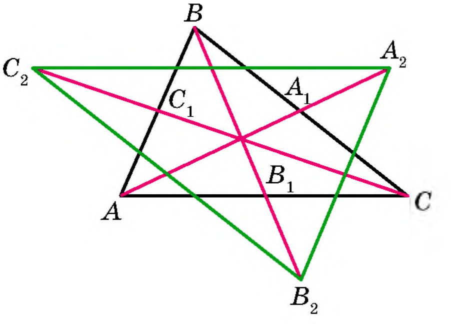


Fig. 21.5

Prietenim cu calculatorul

Voi continuați să desăvârșiți deprinderile folosirii calculatorului pe care le-ți obținut în clasele a 7-a și a 8-a, să însușiți instrumente si softuri noi. Vă amintim, că în afara însărcinărilor, prezentate în acest capitol, voi puteți folosi diverse programe, create pentru studierea cursului școlar de geometrie. Vă puteți adresa la rețeaua globală Internet pentru căutarea a astfel de programe și altei informații suplimentare destinate cursului de geometrie.

În manual sunt prezentate informații scurte despre savanți vestiți, lucrările cărora sunt legate de temele, ce se studiază. Cu ajutorul rețelei globale Internet puteți obține mai multă informație despre biografiile și descoperirile lor.

Dacă planificați se alegeți o profesie, care necesită utilizarea permanentă a cunoștințelor din matematică, atunci puteți începe să însușiți pachetele matematice (de exemplu, *Mathcad*, *MATLAB* și altele), care posedă un puternic instrumentar pentru calcule matematice și construcții geometrice etc. Pentru viitorul inginer sunt necesare cunoașterea graficii inginerești și priceperea în construirea desenelor tehnice complicate (de obținut aceste cunoștințe se poate, de exemplu, folosind pachetul *AutoCAD*). Voi puteți însuși aceste softuri, executând însărcinările din cursul de geometrie.

În acest capitol sunt prezentate însărcinări, pe care le puteți executa cu ajutorul calculatorului în măsura studierii temelor corespunzătoare. Prioritar acestea sunt însărcinări pentru construirea figurilor geometrice, pe care le veți executa cu ajutorul editoarelor grafice, și a calculelor, pe care le puteți îndeplini cu ajutorul calculatorului de buzunar și a pachetelor matematice.

În afara acestor însărcinări puteți executa însărcinările din rubrica "Însărcinări practice" nu numai în caiet, dar și cu ajutorul editorului grafic.

O mare parte a cursului de geometrie pentru clasa a 9-a este destinată coordonatelor carteziene pe plan, ecuațiilor unor figuri. În dependență de posibilitățile limbajului de programare, pe care îl studiați la lecțiile de informatică sau individual, vă recomandăm să scrieți programe pentru reprezentarea pe ecranul calculatorului a punctelor cu coordonatele date; dreptelor și circumferințelor cu ecuațiile date etc. Aceste însărcinări se pot executa la lecțiile de informatică sau în timpul lucrului extrașcolar pentru studierea individuală a programării. Mai jos sunt prezentate cele mai simple însărcinări; luându-le ca idee, voi puteți sine stătător să gândiți însărcinări noi și să creați programe pentru îndeplinirea lor.

Sinusul, cosinusul și tangenta unghiului de la 0° până la 180°

1. A se învăța a calcula funcțiile trigonometrice ale unghiului, și totodată a găsi mărimea unghiului după valoarea funcțiilor trigonometrice ale lui cu ajutorul calculatorului de buzunar.

Teorema cosinusurilor

2. Ilustrați consecința din teorema cosinusurilor cu ajutorul editorului grafic în modul următor.

Alegeți un set de numere pozitive, care satisfac condiția $a^2 < b^2 + c^2$, unde ***a*** –este cel mai mare din numerele alese. Construiți o totalitate de segmente cu lungimile date ***a, b*** și ***c***. Alcătuiți din aceste segmente un triunghiuri. Se va dovedi el sa fie ascuțitunghic? Executați aceleași acțiuni pentru condiția $a^2 > b^2 + c^2$ și $a^2 = b^2 + c^2$. Numerele ***a, b*** și ***c*** trebuie sa satisfacă condiția $a < b + c$.

Teorema sinusurilor

3. Reprezentați un triunghi arbitrar, măsurați cu mijloacele editorului grafic laturile și unghiurile lui. Controlați dacă se îndeplinește teorema sinusurilor. Petreceți calculele de-asemeni cu ajutorul calculatorului.

Rezolvarea triunghiurilor. Formulele pentru aflarea ariilor triunghiului

4. Însărcinările punctelor 4, 5 care necesită aflarea valorilor funcțiilor trigonometrice și executarea unui volum mare de calcule, executați-le cu ajutorul calculatorului.

Poligoanele regulate și proprietățile lor

5. Gândiți-vă cum să construiți poligoanele regulate. Examinați două modalități: 1) folosiți teorema 6,2 și formula pentru calculele mărimilor unghiului de la centru a poligonului înscris; 2) folosiți informația despre mărimea unghiului poligonului regulat și lungimea laturii lui.
6. Construiți câteva poligoane regulate cu numărul dat de laturi.

Lungimea circumferinței. Ari cercului

7. Calculați de câteva ori lungimea circumferinței și aria cercului, folosind aproximarea numărului π cu diferită exactitate.

Sunt oare în calculatorul de buzunar sau pachetul matematic, pe care îl folosiți mijloace pentru folosirea valorii standard a numărului π? Cu ce exactitate se dă numărul π de către aceste mijloace?

Distanța dintre două puncte cu coordonatele date.
Coordonatele mijlocului segmentului

8. Majoritatea editoarelor grafice afișează câmpul pentru desenare în aspectul planului de coordonate. Cercetați, în ce mod se stabilesc coordonatele punctelor pe acest plan. Gândiți-vă, cum puteți folosi acest instrument pentru executarea construcțiilor.

Ecuația figurii

9. Dacă studiați pachetele matematice, puteți cu mijloacele lor să construiți câteva figuri arbitrare cu ecuațiile date.
10. Studiind programarea la lecțiile de informatică, voi puteți crea mijloacele sale pentru reprezentarea pe ecranul calculatorului a figurilor cu ecuațiile date.
11. Găsiți în rețeaua globală Internet informații despre dispozitivele pentru automatizarea lucrărilor de desenare liniară (așa numitele plotter-e, engl. *plotter*). Cu ce se aseamănă și prin ce se deosebesc principiile de construire a imaginilor pe ecranul calculatorului și hârtia plotter-ului Faceți cunoștință cu noțiunea de "grafica broaștei țestoase".

Scrieți programul, care pentru valorile date a, b face concluzii care figură este graficul ecuației$y = kx + b$, afișează mesaj despre aceasta și reprezintă acest grafic pe ecranul calculatorului.

Coeficientul unghiular al dreptei

12. Ce mijloace ale editorului grafic se poate utiliza, pentru a construi o dreaptă cu coeficientul unghiular dat?
13. Scrieți un program, care după valoarea mărimii $\boldsymbol{k}$ și $\boldsymbol{b}$ construiește imaginea dreptei $y = kx + b$ pe ecranul calculatorului.

Noțiunea de vector

14. Reprezentați cu ajutorul editorului grafic câțiva vectori care ilustrează conținutul punctului 12 al manualului. Care instrument folosiți pentru construirea vectorilor coliniari? Vectorilor coorientați? Vectorilor opus orientați? Determinați modulele vectorilor construiți. Cum de îndeplinit aceasta cel mai simplu?

Coordonatele vectorului

15. Reprezentați pe ecranul calculatorului sistemul cartezian de coordonate, alegeți un vector unitar comod. Stabiliți coordonatele vectorului și

unui punct oarecare. Depuneți de la acest punct vectorul cu coordonatele date.

Adunarea și scăderea vectorilor

16. Desenați câțiva vectori arbitrari. Cu ajutorul cărui instrument al editorului grafic este cel mai simplu de găsit suma și diferența vectorilor?

Înmulțirea vectorului cu un număr

17. Desenați un vector arbitrar și stabiliți câteva numere arbitrare (naturale, întregi, fracționare). Construiți vectorii, care sunt produsul vectorului reprezentat și a acestor numere.

Produsul scalar al vectorilor

18. Construiți pe planul de coordonate doi vectori arbitrari. Stabiliți mărimea unghiului între ei cu ajutorul consecinței din teorema 16.2. Controlați rezultatul, determinând unghiul între acești vectori cu ajutorul mijloacelor editorului grafic.

Transformări geometrice

19. Determinați, ce mijloace ale editorului grafic oferă posibilitatea executării deplasării figurii. Ce tipuri de deplasări se pot realiza cu ajutorul lor?

20. Găsiți mijloacele editorului grafic, cu ajutorul cărora se poate construi: 1) o figură, simetrică figurii date față de dreapta dată; 2) o figură, simetrică figurii date față de un punct; 2) o figură omotetică figurii date.

21. Găsiți mijloacele editorului, cu ajutorul cărora se poate construi figura, asemănătoare figurii arbitrare date. Care mijloace trebuie de folosit, ca figurile acestea să fie asemenea cu coeficientul dat?

Răspunsuri și indicații la exerciții

§ 1. Rezolvarea triunghiurilor

1. Sinusul, cosinusul și tangenta unghiului de la 0° până la 180°

1.11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ sau $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **1.12.** 1) $\frac{12}{13}$ sau $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **1.15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-1{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **1.16.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **1.21.** $-\frac{1}{2}$. **1.22.** 120°. **1.23.** 10 cm, 30°, 120°. **1.26.** $5\sqrt{6}$ cm.

2. Teorema cosinusurilor

2.3. 120°. **2.4.** 45°. **2.10.** $2\sqrt{7}$ cm. **2.11.** $\sqrt{10}$ cm. **2.12.** $\sqrt{21}$ cm sau $\sqrt{29}$ cm. **2.13.** 13 cm. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ cm.

2.16. $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 cm, 24 cm. **2.19.** 2 cm, $4\sqrt{3}$ cm. **2.20.** 3 cm, 5 cm. **2.21.** 10 cm, 6 cm, 14 cm. **2.22.** 6 cm sau 10 cm. **2.23.** 75 cm. **2.24.** 13 cm. **2.25.** $\sqrt{79}$ cm. **2.29.** 14 cm. **2.30.** 34 cm. **2.31.** 7 cm, 9 cm. **2.32.** 20 cm, 30 cm. **2.33.** 8 cm. *Indicație*. Duceți prin vârful ***B*** o dreaptă, paralelă laturii ***CD***, și cercetați triunghiul, care se formează după acesta.

2.34. $\frac{13}{20}$. **2.35.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ cm. **2.36.** Nu. **2.38.** 10 cm. **2.39.** 6 cm. **2.40.** 11 cm. **2.41.** 6 cm. **2.42.** 22 cm. **2.47.** 4 cm, 6 cm.

3. Teorema sinusurilor

3.14. $2\sqrt{6}$ cm. **3.15.** 6 cm. **3.16.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.17.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

3.18. $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.19.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.21.** 9 cm. **3.22.** $\frac{25}{3}$ cm.

3.23. 60° sau 120°. **3.24.** 4,5 ore. **3.25.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$.

3.26. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.28.** $\frac{85}{8}$ cm. *Indicație*. Raza căutată se poate afla ca raza circumferinței, circumscrise triunghiului, laturile căruia sunt una din baze, latura laterală și diagonala trapezului.

3.29. $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Indicație*. Demonstrați, că $CE = DE$. **3.30.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Indicație*. Pe prelungirea medianei ***AM*** pentru punctul ***M*** notați una astfel de punct ***K***, ca $AM = MK$, și și aplicați teorema sinusurilor la triunghiul ***ACK*** sau triunghiul ***ABK***. **3.31.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **3.32.** *Indicație*. Exprimați unghiurile ***AHB, BHC*** și ***AHC*** prin unghiurile triunghiului ***ABC***. **3.33.** Mai repede se poate de ajuns prin satul ***C***. *Indicație*. Acceptați distanța dintre oricare doua sate ca fiind egală cu ***a*** și exprimați prin ***a*** distanțele între celelalte sate. **3.34.** Autobusul. **3.37.** 12 cm.

4. Rezolvarea triunghiurilor

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Indicație*. Duceți printr-un vârf al bazei mai mici o dreaptă, paralelă laturii laterale a trapezului și examinați triunghiului, care se formează după aceasta. **4.13.** 9 cm. **4.14.** 30 cm, 48 cm.

5. Formule pentru aflarea ariei triunghiului

5.4. 1) 60° sau 120°; 2) 90°. **5.5.** 30° sau 150°. **5.9.** 12 cm. **5.10.** 24 cm. **5.11.** 24 cm^2. **5.12.** $\frac{7}{3}$ cm. **5.13.** 1) $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{25}{8}$ cm; 2) 8 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.14.** 2 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.25.** 3 : 5. **5.26.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **5.27.** $2R^2 \times \sin a \sin b \sin(a+b)$. **5.28.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **5.29.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **5.30.** $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **5.31.** 51 cm^2, 75 cm^2, 84 cm^2. **5.32.** $\frac{24}{7}$ cm. *Indicație*. Folosiți-vă de faptul, că $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **5.33.** 360 cm^2. *Indicație*. Duceți prin unul din capetele laturii mai mici ale trapezului o dreaptă, paralelă laturii laterale ale trapezului, și găsiți înălțimea triunghiului, pe care această dreaptă o retează din trapez. **5.34.** $12\sqrt{5}$ cm^2. *Indicație*. *Indicație*. Fie ***ABCD*** – trapezul dat, $BC \parallel AD$.. Duceți prin vârful ***C*** o dreaptă, care este paralelă dreptei ***BD*** și intersectează dreapta ***AD*** în punctul ***E***. Demonstrați, că triunghiul ***ACE*** și trapezul dat sunt egali după mărime.

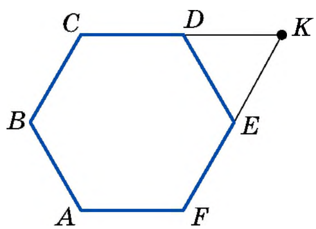
1 : 2. *Indicație*. $\frac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK \varnothing AM\sin A}{\frac{1}{2}AC \varnothing AB\sin A} = \cos^2 A$. **5.36.** 19,5 cm.

5.37. 13 cm, 14 cm, 15 cm. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 cm, 21 cm. **5.41.** 9,6 cm.

§ 2. Poligoane regulate

6. Poligoane regulate și proprietățile lor

6.20. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **6.21.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **6.22.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **6.26.** ≈ 17,4 cm. **6.27.** ≈ 19,8 cm. **6.28.** 5 сторін. **6.29.** 18 сторін. **6.32.** 1) $\frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$; 2) $\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **6.33.** 1) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **6.34.** 1 : 2. **6.35.** $\sqrt{3}:2$. **6.38.** 4,4 cm. **6.39.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.40.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\frac{3a^2\sqrt[3]{3}}{2}$. **6.41.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm. **6.42.** 8 cm. **6.43.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **6.44.** $\frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **6.45.** $\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$.
6.46. Triunghiuri sau pătrate, sau hexagoane. *Indicație*. În jurul unui punct se pot așeza atâtea plăcuțe, de câte ori unghiul la vârful plăcuței, care este egal cu $\frac{180°(n-2)}{n}$, , este mai mic decât 360°, adică $360°:\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{2n}{n-2}$ plăcuțe. Valoarea expresiei $\frac{2n}{n-2}$ trebuie să fie număr natural. Deoarece $\frac{2n}{n-2}=\frac{2n-4+4}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$, , atunci valoarea expresiei $\frac{4}{n-2}$ trebuie să fie număr natural. **6.47.** *Indicație*. Fie ***ABCDEF*** – hexagon regulat (vezi figura). ***K*** – punctul de intersecție al dreptelor ***CD*** și ***EF***. Atunci ***AK*** este segmentul căutat. **6.49**. 18 cm. **6.50**. 96 cm². **6.51**. 9 cm.



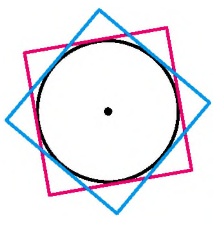
Pentru problema 6.47

7. Lungimea circumferinței. Aria cercului

7.25. 22,5°. **7.30.** $\sqrt{6}$ cm. **7.32.** 1) $\frac{25\left(\pi-2\sqrt{2}\right)}{8}$ cm²; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ cm²; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ cm². **7.33.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ cm²; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ cm². **7.38.** 2p cm, $\frac{10\neq}{3}$ cm, $\frac{20\neq}{3}$ cm. **7.39.** $\frac{25\neq}{18}$ cm, $\frac{35\neq}{18}$ cm, $\frac{20\neq}{3}$ cm. **7.40.** $\frac{8\neq}{3}$ cm. **7.41.** 6p cm. **7.42.** 1 : 1. *Indicație*. Demonstrați, că în ambele cazuri suma, lungimilor semicircumferințelor este egală cu $\frac{1}{2}\neq AB$. **7.44.** 50 cm.

7.46. $\dfrac{a^2(\pi-2)}{8}$. **7.47.** $\approx$ 17,3 %. **7.48.** $\dfrac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$. **7.49.** $\dfrac{\neq R^2}{9}$.
7.50. $a^2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$. **7.51.** $\dfrac{2\neq a}{3}$. *Indicație*. Examinați triunghiul AND și demonstrați, că el este echilateral.

7.52 .*Indicație*. Suma ariilor tuturor secerilor vopsite și nevopsite este egală cu suma ariilor a două cercuri, diametrele cărora sunt laturile alăturate ale dreptunghiului, iar suma secerilor ne vopsite și a dreptunghiului este gală cu aria cercului, diametrul căruia este diagonala dreptunghiului. Arătați, că aceste sume sunt egale. **7.53.** *Indicație.* Partea comună a pătratelor conține cercul, raza căruia este egală cu $\dfrac{1}{2}$ cm (vezi figura). **7.55.** $\dfrac{130}{17}$ cm, $\dfrac{312}{17}$ cm. *Indicație.* Prin mijlocul laturii mai mici a bazei duceți drepte paralele la laturile laterale ale trapezului.



Pentru problema 7.53

§ 3. Coordonatele carteziene pe plan

8. Distanța între două puncte cu coordonatele date. Coordonatele mijlocului segmentului.

8.13. 1) Da, punctul B se află între punctele A și C.; 2) nu. **8.15.** $x = 7$ sau *sau* –1. **8.16.** (3; 0). **8.17.** (0; 0,5). **8.18.** (3; –0,5). **8.19.** (–2; 2). **8.20.** (3; –2). **8.24.** A (–5; 3), C (7; 5). **8.25.** $2\sqrt{73}$. **8.26.** $\left(3\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right)$ sau $\left(-3\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}\right)$.

8.27. $\left(-2;\ 4\sqrt{3}\right)$ sau $\left(-2;\ -4\sqrt{3}\right)$. **8.28.** (3; 3) sau (–6; 6).*Indicație.* Cercetați două cazuri: B (a; a) sau B (a; $-a$). **8.29.** (5,5; 0), (3; 0), (–1; 0). *Indicație.* Examinați tei cazuri: $AC = BC$, $AC = AB$ și $BC = AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Indicație.* Examinați tei cazuri:$AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **8.31.** $\sqrt{33}$ cm. **8.32.** 56°, 124°. **8.33.** 8 cm și 16 cm.

9. Ecuația figurii. Ecuația circumferinței

9.16. Două circumferințe: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ și $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **9.17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **9.19.** 1)da, punctul (–1; 5) – este centrul circumferinței, $R = 7$; 2) nu; 3) nu; 4) da, punctul (2; 7) – este centrul circumferinței, $R = \sqrt{2}$. **9.20.** 1) Punctul (0; –8) – este centrul circumferinței,, $R = 2$; 2) точка (4; –2) – este centrul circumferinței,, $R = \sqrt{5}$. **9.21.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **9.22.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ sau $(x - 3)^2 + + (y - 8)^2 = 25$. **9.23.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ sau $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **9.24.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ sau $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Indicație*. Diametrul circumferinței căutate este egal cu distanța dintre axa absciselor și dreapta $y = -4$, iar centrul circumferinței aparține bisectoarei celor de-al treilea sau al patrulea unghi al cadranului de coordonate **9.25.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ sau $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = = 1$. **9.26.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **9.27.** $180\sqrt{3}$ cm^2. **9.28.** 70 cm. **9.29.** 600 cm^2.

10. Ecuația dreptei

10.7. 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.8.** 1) $y = = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **10.9.** 1) (–8; –31); 2) (–1; 2). **10.10.** 1) (2; –7); 2) (4; –1). **10.11.** $y = -0{,}5x - 4$. **10.12.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.14.** 12. **10.15.** 28. **10.16.** 6.

10.17. (2; 5), (5; 2). **10.18.** (5; 0). **10.20.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Indicație*. Distanța căutată este egală cu înălțimea triunghiului,mărginit de axele coordonatelor și dreapta dată. **10.21.** $4\sqrt{2}$. **10.22.** $3\sqrt{10}$. **10.23.** $x - 3y == 2$. **10.24.** $7x + 5y = -8$. **10.25.** (3; 3) sau (15; 15). **10.26.** (–2; 2) sau (–10; 10). **10.27.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **10.28.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **10.29.** $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{58}$ cm. **10.30.** 104 cm. **10.31.** 12,5 cm.

11. Coeficientul unghiular al dreptei

11.5. 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.6.** $y = -0{,}5x - 4$. **11.7.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.8.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = = 9$. **11.9.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.10.** 1) $y = = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.11.** *a*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *б*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.12.** 1) Da; 2) da; 3) nu; 4) nu. **11.14.** $y = 4x + 9$. **11.15.** $y = 3x - 12$. **11.16.** $y = x + 4$. **11.18.** 30 cm,

§ 4. Vectorii

12. Noțiune de vector

12.26. Dreptunghi sau trapez isoscel.. **12.34.** 60°, 120°. **12.35.** 4 cm, 12 cm. **12.36.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Indicație*. Duceți în vârful B o dreaptă, paralelă dreptei *MK*.

13. Coordonatele vectorilor

13.16. $\overrightarrow{AF}(-2;\ 2)$, $\overrightarrow{FD}(2;\ 4)$. **13.17.** $\overrightarrow{DE}(-4;\ 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4;\ -6)$. **13.18.** $\vec{a}\ (-6;\ -8)$ sau $\vec{a}\ (8;\ 6)$. **13.19.** $\vec{c}\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$ sau $\vec{c}\left(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right)$. **13.20.** $C\ (7;\ 17)$, $D\ (2;\ 17)$ sau $C\ (7;\ –7)$, $D\ (2;\ –7)$. **13.21.** $B\ (16;\ 2)$, $C\ (16;\ –6)$ sau $B\ (–14;\ 2)$, $C\ (–14;\ –6)$. **13.23.** 20 cm, 7 cm, 21 cm. **13.24.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. Adunarea și scăderea vectorilor

14.45. 1) Da; 2) da; 3) nu. **14.46**. *Indicație*. Arătați, că fiecare din vectorii $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ sunt egali cu vectorul nul. **14.48.** *Indicație*. Este suficient de arătat, că $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XC}$. . **14.49**. Circumferința cu raza ***AB*** și centrul în punctul ***A***. **14.50**. Mediatoarea segmentului ***AB***. **14.51.** 0,2 m/s, $\sqrt{1,0}$ m/s. **14.52.** 60°. **14.53**. *Indicație***.** Fie segmentul ------ este mediana triunghiului *ABC*.

În continuarea segmentului *AA* după punctul A_1 depuneți segmentul A_1D. egal cu MA_1. **14.54**. *Indicație*. Avem $\overline{A_2A_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_1}+$ $+\overline{C_1C_2}+\overline{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2A_2}=\vec{0}$,, de aici $\overline{A_2A_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_1}+$ $+\overline{C_1C_2}+\overline{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2A_2}=\vec{0}$, 4 cm, 6 cm. **14. 56**. 2,5 cm.

15. Înmulțirea vectorului cu un număr

15.31. –4; 4. **15.32.** –1,5. **15.34.** $\vec{m}\ (-15;\ 36)$. **15.35.** $\vec{a}\ (-3;\ 4)$. **15.38.** $x = 2$, $y = –3$. **15.39.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **15.43.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **15.45.** *Indicație*. Pe de o parte $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1B_1}+\overline{B_1B_2}+\overline{B_2M_2}$. De pe altă parte $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2M_2}$. Adunați aceste egalități. **15.51.** *Indicație*. Fir segmenAA_1, BB_1 şi CC_1 – medianele triunghiului ABC. Folosiţi-vă de faptul, că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. **15.52.** *Indicație*. Folosiţi-vă de problema 15.45 şi problema cheie 1 din punctu. 15. **15.53.** *Indicație*. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{BN}$ prin vectori $\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BC}$. **15.54.** 18 cm. **15.55.** 60°; $24\sqrt{3}$ cm². **15.56.** $R\sqrt{3}$.

16. Produsul scalar al vectorilor

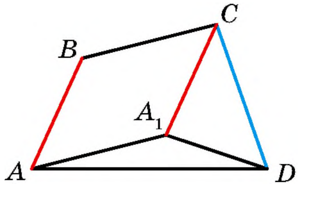
16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **16.20.** –3 şi 3. **16.21.** –1. **16.23.** $\vec{b}\,(-12; 16)$. **16.24.** –1 şi 1. **16.26.** 4. **16.27.** –0,5. **16.28.** $\sqrt{7}$. **16.29.** $2\sqrt{7}$. **16.32.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **16.33.** 30°, 60°, 90°. **16.36.** 0°. **16.37.** 120°. **16.38.** *Indicație*. Fie $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Atunci $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Aflaţi produsul scalarк $\overrightarrow{CM} \varnothing \overrightarrow{AK}$. **16.39.** 45°. *Indicație*. Fie $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$ prin vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$. **16.40.** 30°. *Indicație*. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. De aici $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \cos\angle ABD$. **16.41.** *Indicație*. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF}$. Rămâne de arătat, că $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. **16.43.** 100 cm. **16.44.** 6p cm.

§ 5. Transformări geometrice

17. Mişcarea (deplasarea) figurii. Translaţia paralelă

17.13. Pentru $AB \parallel a$. **17.23.** O mulțime. **17.29.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **17.30.** $y = x^2 - 4x + 1$. **17.31.** *Indicație.* Fie $ABCD$ – trapezul căutat ($BC \parallel AD$). Construiți imaginea diagonalei BD la translația paralelă cu vectorul $\overrightarrow{BC}$. . **17.33**. *Indicație.* Construiți imaginea dreptei la translația paralelă cu vectorul $\overrightarrow{AB}$ (sau $\overrightarrow{BA}$). . Examinați punctele de intersecție al imaginii cu circumferința dată. Menționam, că atunci când imaginea construită și circumferința dată nu au puncte comune, problema nu are soluții. **17.35**. *Indicație.* Fie $ABCD$ – patrulaterul căutat cu laturile date AB și CD (vezi figura). Cercetăm translația paralelă a laturii AB cu vectorul $\overrightarrow{BC}$. .Triunghiul A_1CD se poate construi după două laturi CD și $CA_1 = BA$ și unghiul A_1CD,, care este egal cu$\angle BCD$ – (180° – $\angle ABC$) Triunghiul AA_1D se poate construi după latura A_1D- și două unghiuri alăturateAA_1D și ADA_1.. **17.36**. *Indicație.* Fie punctul A_1– imaginea punctului A la translația paralelă cu vectorul $\overrightarrow{MN}$.

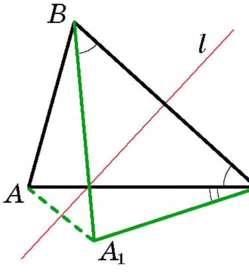
. Uniți punctele -A_1 și B **17.37**. 36 cm. **17.38**. 40. **17.39**. 490 cm^2.



Pentru probleme 17.35

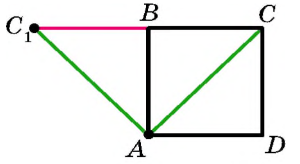
1. Simetria centrală. Rotația

19.22. *Indicație*. Să acceptăm, că triunghiul ***ABC*** are centru de simetrie. Atunci, de exemplu, imaginea vârfului ***A*** este punctul ***B***. Deci, centrul de simetrie este mijlocul laturii ***AB***. Însă în acest caz imaginea vârfului ***C*** nu aparține triunghiului ***ABC***. **19.24.** *Indicație*. La simetria centrală imaginea laturii patrulaterului dat este latura aceluiași patrulater. Mai departe folosiți-vă de problema cheie 1 p. 19. **19.25**. *Indicație*. La simetria centrală față de punctul ***O*** imaginea punctelor și aparțin circumferinței cu centrul ***O***.



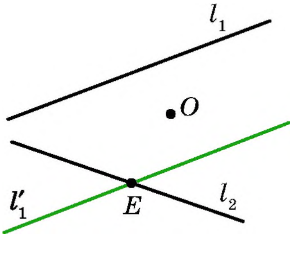
La problema 18.33

18.30. *Indicație*. Fie punctul este imaginea punctului ***A*** la simetria în raport cu dreapta ***a***. Atunci punctul de intersecție al dreptelor ***a*** și va fi cel căutat. Menționam, că atunci când punctele ***A*** și ***B*** sunt simetrice față de dreapta ***a***, atunci problema are o mulțime de soluții. Dacă punctele **A** și **B** sunt egal depărtate, dar ne simetrice față de dreapta ***a***, atunci problema nu are soluții. **18.32.** *Indicație*. Fie punctul este imagine punctului ***A*** la simetria în raport cu dreapta ***a***. Atunci punctul de intersecție a dreptelor ***a*** și va fi cel căutat. **18.33.** *Indicație*. Fie triunghiul – imaginea triunghiului ***ABC*** la simetria față de segmentul ***BC*** (vezi figura). Triunghiul se poate construi după două laturi ***AC*** și ***AB***) și unghiul, care este egal cu diferența unghiurilor ***B*** și ***C***. **18.34.** *Indicație*. Fie punctul este simetric punctului ***A*** simetric în raport cu dreapta ***AB***. Construiți circumferința cu centrul în punctul , care este tangentă la dreapta ***AB***. Duceți prin punctul ***D*** o tangentă la circumferința construită: această tangentă intersectează dreapta ***AB*** în punctul căutat. **18.35**. *Indicație*. Fie dreapta ***l*** este mediatoarea diagonalei ***AC***. Punctul este simetric punctului ***B*** față de dreapta ***l***. Folosiți-vă de faptul, că patrulaterele ***ABCD*** și unt egale ca mărimi. **18.36**. Punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ***ABC***. **18.37.** ***CD***; 7 cm, 10 cm. **18.39.** $y = 0{,}5\,x - 0{,}5$..



La problema 19.27

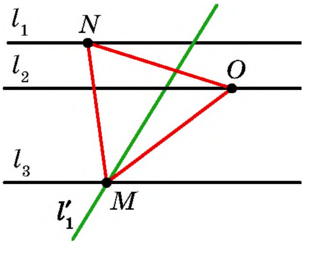
19.28. *Indicație*. Cercetați simetria centrală cu centrul în punctul de intersecție a diagonalelor ale unuia din paralelograme. **19.29.** *Indicație*. Aflați mijlocul segmentului ***AC***, iar mai departe folosiți-vă de problema 2 p. 19. **19.30.** *Indicație*. Fie ***O*** – punctul dat, și – dreptele date. Să construim imaginea dreptei la simetria față de punctul ***O***. Vom obține dreapta - (vezi figura), care intersectează dreapta în punctul ***E***. Să găsim preimaginea punctului *E* pentru simetria examinată. Evident, că el trebuie să aparțină dreptei Deci, punctul, simetric punctului ***E*** față de punctul ***O***, de asemenea aparține dreptei.



La problema 19.30

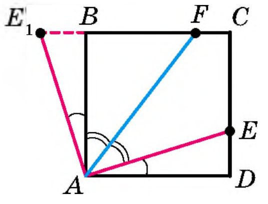
19.31. *Indicație*. Folosiți-vă de idea rezolvării problemei 4 p.19. **19.32.** *Indicație*. Să examinăm rotația cu centrul în punctul ***C*** împotriva acelor ceasornicului cu un unghi de 60°. Pentru o astfel de rotație imaginile punctelor ***E*** și ***B*** vor fi corespunzător punctele ***D*** și ***A*** Deci, segmentul ***AD*** și mijlocul lui ***K*** vor fi corespunzător imaginile segmentului ***BE*** și a mijlocului lui ***M***.

19.33. *Indicație*. Fie și dreptele paralel date, ***O*** – punct arbitrar al dreptei (vezi figura). Dreapta – imaginea dreptei la rotația în jurul punctului ***O*** împotriva acelor ceasornicului cu unghiul de 60° – intersectează dreapta în punctul ***M***. Să aflăm preimaginea punctului ***M*** pentru rotația dată. Evident, că el aparține dreptei . De aceea este suficient de depus de la semidreapta ***OM*** unghiul, ce este egal cu 60°.



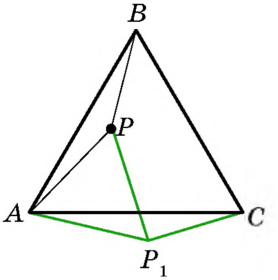
La problema 19.33

19.34. *Indicație*. Fie ***O*** – punctul dat, și – dreptele date. Construiți segmentul , mijlocul căruia este punctul ***O***, iar capetele să aparțină dreptelor Acest segment este una din diagonalele rombului. Aflați punctul de intersecție a dreptei cu mediatoarea segmentului ***AC***. **19.35.** *Indicație*. Să cercetăm rotația cu centrul în punctul ***A*** împotriva acelor ceasornicului cu un unghi de 90°. Pentru această rotație imaginea segmentului ***AD*** va fi segmentul ***AB*** (vezi figura). Fie punctul – imaginea punctului Atunci triunghiul este imaginea triunghiului ***ADE***. De aici. . Deci, triunghiul este isoscel.



La problema 19.35

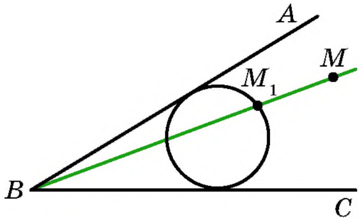
19.36. *Indicație*. Să examinăm rotația cu centrul în punctul A după acele ceasornicului cu un unghi de 60° (vezi figura). Pentru această rotație imaginea triunghiului este triunghiul (punctul – imaginea punctului $\boldsymbol{P}$). Triunghiul este echilateral. Deci, AB = 90°. A rămas de menționam, că - **19.39** cm.



La problema 19.36

20.28.CA. 20.29. 2) $\boldsymbol{k}$ = 2, punctul $\boldsymbol{B}$ sau $\boldsymbol{k}$ = –2, punctul de intersecție al diagonalelor trapezului *AMNC*. **20.34**. *Indicație*. Fie circumferința dată este tangentă la dreapta $\boldsymbol{a}$ în punctul M. Punctul – imaginea punctului $\boldsymbol{M}$ la omotetia cu centrul A. Deoarece imaginea dreptei $\boldsymbol{a}$ este aceiași dreaptă, atunci punctul M1 aparține dreptei $\boldsymbol{a}$. Arătați, că imaginea circumferinței date și dreapta $\boldsymbol{a}$ au numai un punct comun **20.35**.. *Indicație*. După definiția omotetiei. Aflați coordonatele vectorilor. **20.36**. (–3; 2). **20.37**. 1) $\boldsymbol{x}$ = –3, **y** = 8; 2) $\boldsymbol{x}$ = 12, **y = –2**. **20.38**. $\boldsymbol{x}$ = 0, **y** = 0. **20.39**. 28 cm2. **20.41**. 112 cm2. **20.43**. *Indicație*. Folosiți-vă de faptul, că coeficientul unghiular al dreptei căutate este egal cu 2. **20.44**. ABC. **20.45**. *Indicație*. Dreapta este imaginea dreptei la omotetia cu centrul în punctul de tangență și coeficientul, care este egal cu raportul razei mai mari la cea mai mică. **20.47**. Circumferința, care este imaginea circumferinței date la omotetia cu centrul *A* și coeficientul $\frac{1}{2}$, cu excepția punctele *A*. **20.49.** *Indicație*. **20.20.** 1) 1,5; ; 3) **D. 20.24.** . **20.25.** 12 cm. **20.26.** 28,8 cm2. 20.29. 2) ***k*** = 2, punctul ***B*** sau ***k*** = –2, punctul de intersecție al diagonalelor trapezului *AMNC*. **20.34**. *Indicație*. Fie circumferința dată este tangentă la dreapta ***a*** în punctul ***M***. Punctul – imaginea punctului ***M*** la omotetia cu centrul *A*. Deoarece imaginea dreptei ***a*** este aceiași dreaptă, atunci punctul ***M***1 aparține dreptei ***a***. Arătați, că imaginea circumferinței date și dreapta ***a*** au numai un punct comun **20.35** *Indicație*. După definiția omotetiei . Aflați coordonatele vectorilor și . **20.36**. (–3; 2). **20.37**. 1) ***x*** = –3, **y** = 8; 2) ***x*** = 12, **y** = **–2**. **20.38**. ***x*** = 0, **y** = 0. **20.39**. 28 cm2. **20.41**. 112 cm2. **20.43**. *Indicație*. Folosiți-vă de faptul, că coeficientul unghiular al dreptei căutate este egal cu 2. **20.44**. **20.45**. *Indicație*. Dreapta este imaginea dreptei la omotetia cu centrul în punctul de tangență și coeficientul, care este egal cu raportul razei mai mari la cea mai mică. **20.47**. Circumferința, care

punctului *A*. **20.49**. *Indicație***.** Triunghiul cu vârfurile în punctele obținute este imaginea triunghiului cu vârfurile în mijlocurile laturilor triunghiului dat la omotetia cu centrul ***M*** și coeficientul 2. **20.50**. *Indicație***.** Construiți un triunghi arbitrar, două unghiuri ale căruia sunt egale cu două unghiuri date Triunghiul căutat este imaginea triunghiului la omotetia cu centrul într-un punct arbitrar cu coeficientul care este egal cu raportul razei date la raza circumferinței construite. **20.52**. *Indicație***.** Vezi rezolvarea problemei 2 p.20. **20.53**. *Indicație***.** Examinați omotetia cu centrul în mijlocul segmentului ***AB*** și coeficientul . **20.54.** Dreapta, care este imaginea dreptei ***l*** la omotetia cu centrul în mijlocul segmentului ***AB*** și coeficientul , cu excepția punctului de intersecția al dreptelor ***AB*** și ***l*** (dacă astfel de punct există). **20.55.** *Indicație.* Construiți o circumferință arbitrară, care este tangentă la laturile unghiului (vezi figura). Fie – unul din punctele de intersecție a dreptei ***BM*** cu circumferința construită. Cercetați omotetia cu centrul în punctul ***B*** și coeficientul, ce este egal cu raportul. Problema are două soluții. **20.56**. 96 cm2, 4,8 cm. **20.57**. 24.Problema are doua rezolvari. **20.56.** 96 cm^2, 4,8 cm. **20.57.** 24.



La problema 20.55

21. Exerciții pentru repetare din cursul de geometrie din clasa a 9-a

21.1. $2\sqrt{17}$ cm sau $2\sqrt{41}$ cm. **21.2.** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **21.4.** 9 cm, 24 cm. **21.5.** 1 cm sau 2 cm. **21.6.** 36 cm. **21.7.** 4 cm. *Indicație*. Deoarece trapezul $ABCK$ atunci $AB = CK$. atunci $\angle KAC = \angle AKB, AC = BK$. **21.8.** $\dfrac{9}{16}$; $-\dfrac{9}{16}$; $-\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{8}$. **21.9.** $\sqrt{111}$ cm. **21.10.** 9,5 cm. **21.11.** 12 cm. **21.12.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **21.13.** $1:1:\sqrt{3}$. **21.14.** 6 cm. **21.15.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. **21.16.** $\dfrac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Pentru problema 20.55

21. Exerciții pentru repetarea cursului de geometrie clasa a 9-a

21.1. 12 cm . **21.2**. 10 cm. **21.4**. 9 cm, 24 cm.

21.5. 1 cm sau 2 cm. **21.6**. 36 cm. **21.7**. 4 cm. *Indicație***.** De oarece trapezul ***ABCK*** este înscris, atunci . Totodată ABCD/E **21.8. 21.9**. x cm. **21.10**. 9.5 cm. **21.11**. 12 cm. **21.13**. $\sqrt{3}$. **21.14**. 6**21.15**. 3 cm. **21.16**. I *Indicație***.** Folosiți-vă de formula pentru calcularea ariei triunghiului după două laturi și unghiul dintre ele. . *Indicație***.** Triunghiul este imaginea triunghiului ***ABC*** la omotetia cu coeficientul și centrul în punctul de intersecție al medianelor triunghiului ***ABC***. circumferinței, circumscrise triunghiului, laturile căruia sunt una din baze, latura laterală și diagonala trapezului.

3.29. . *Indicație***.** Demonstrați, că ***CE* = *DE*. 3.30**. *Indicație*. Pe prelungirea medianei ***AM*** pentru punctul ***M*** notați una astfel de punct ***K*** , ca și aplicați teorema sinusurilor la triunghiul ***ACK*** sau triunghiul ***ABK***. **3.31.** . **3.32.** *Indicație*. Exprimați unghiurile ***AHB, BHC*** și ***AHC*** prin unghiurile triunghiului ***ABC***. **3.33.** Mai repede se poate de ajuns prin satul

C. *Indicație*. Acceptați distanța dintre oricare doua sate ca fiind egală cu ***a*** și exprimați prin ***a*** distanțele între celelalte sate. **3.34.** Autobusul. **3.37.** 12 cm.

Rezolvarea triunghiurilor

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Indicație*. Duceți printr-un vârf al bazei mai mici o dreaptă, paralelă laturii laterale a trapezului și examinați triunghiului, care se formează după aceasta. **4.13.** 9 cm. **4.14.** 30 cm, 48 cm.

Formule pentru aflarea ariei triunghiului

*Indicație***.** Folosiți-vă de faptul, că**. 5.33.** 360 cm2. *Indicație*. Duceți prin unul din capetele laturii mai mici ale trapezului o dreaptă, paralelă laturii laterale ale trapezului, și găsiți înălțimea triunghiului, pe care această dreaptă o retează din trapez. **5.34.**. *Indicație***.** Fie ***ABCD*** – trapezul dat**.** Duceți prin vârful ***C*** o dreaptă, care este paralelă dreptei ***BD*** și intersectează dreapta ***AD*** în punctul ***E***. Demonstrați, că triunghiul ***ACE*** și trapezul dat sunt egali după mărime. **5.35.** 1 : 2. *Indicație*. **5.36.** 9,5 cm. **5.37.** 13 cm, 14 cm, 15 cm. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 cm, 21 cm. **6.46.** Triunghiuri sau pătrate, sau hexagoane. *Indicație*. În jurul unui punct se pot așeza atâtea plăcuțe, de câte ori unghiul la vârful plăcuței, care este egal cu este mai mic decât 360°, adică plăcuțe. Valoarea expresiei trebuie să fie număr natural. Deoarece , atunci valoarea expresiei trebuie să fie număr natural. **6.47.** *Indicație*. Fie ***ABCDEF*** – hexagon regulat (vezi figura). ***K*** – punctul de intersecție al dreptelor ***CD*** și ***EF***. Atunci ***AK*** este segmentul căutat. **6.49.** 18 cm. **6.50**. 96 cm2. **6.51**. 9 cm.

Lungimea circumferinței. Aria cercului

. **7.51.** *Indicație*. Examinați triunghiul ***AND*** și demonstrați, că el este echilateral. **7.52**. *Indicație*. Suma ariilor tuturor secerilor vopsite și nevopsite este egală cu suma ariilor a două cercuri, diametrele cărora sunt laturile alăturate ale dreptunghiului, iar suma secerilor ne vopsite și a dreptunghiului este gală cu aria cercului, diametrul căruia este diagonala dreptunghiului. Arătați, că aceste sume sunt egale. **7.53.** *Indicație.* Partea comună a pătratelor conține cercul, raza căruia este egală cm (vezi figura). **7.56.** *Indicație*. Prin mijlocul laturii mai mici a bazei duceți drepte paralele la laturile laterale ale trapezului.

Răspunsuri la însărcinările ”Controlează-te” în formă test

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	D	C	A	B	A	D	A	C	B	B	D	B
2	C	B	B	A	A	D	D	C	D	C	B	A
3	B	B	A	C	B	D	C	D	B	C	B	A
4	C	D	A	C	A	A	B	D	C	A	D	C
5	B	A	D	C	C	B	D	A	C	C	A	D

Indice alfabetic

CUPRIS

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням молдовською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Молдовською мовою

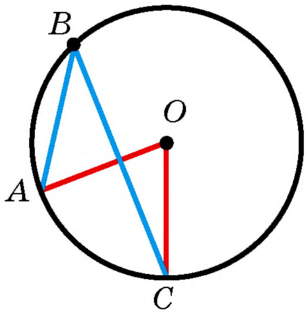
Редактор *О.О. Кройтор*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *О.Г. Кирчу*

Формат 60x90/16.
Ум. друк. арк. 15,0. Обл.-вид. арк. 13,88.
Тираж 321 пр. Зам. № 58П

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване
видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб`єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua,
e-mail: office@svit.gov.ua, svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб`єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

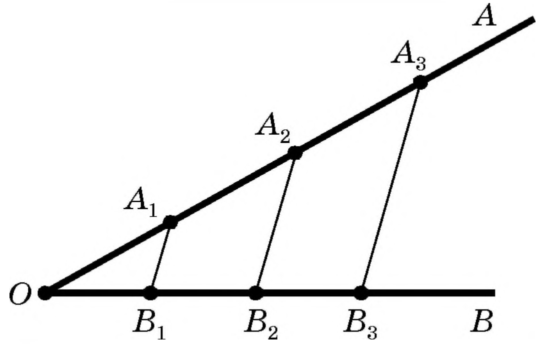
UNGHIURI LA CENTRU ȘI ÎNSCRISE



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

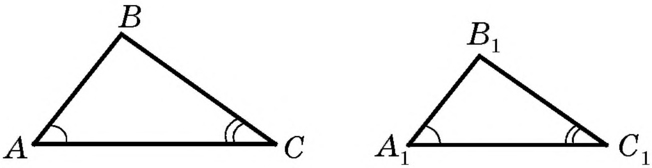
$$\angle AOC = \cup AC$$

TEOREMA LUI FALES



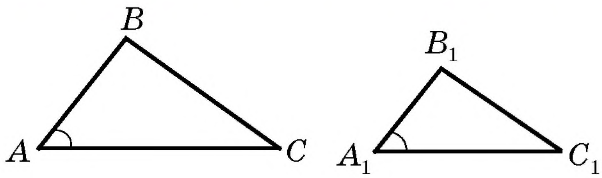
Dacă $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ **și** $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$,
atunci $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

PRIMUL CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



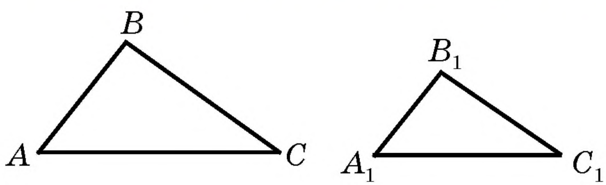
Dacă $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

AL DOILEA CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



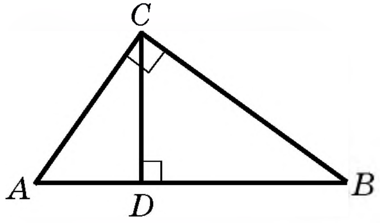
Dacă $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ și $\angle A = \angle A_1$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

AL TREILEA CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



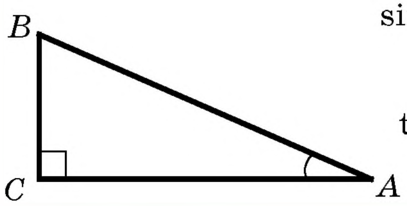
Dacă $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

RELAȚIILE METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \text{(теорема Піфагора)}$$
$$CD^2 = AD \cdot DB$$
$$AC^2 = AB \cdot AD$$
$$BC^2 = AB \cdot DB$$

SINUSUL, COSINUSUL, TANGENTA ȘI COTANGENTA UNGHIULUI ASCUȚIT AL TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$$

	$\alpha = 30$	$\alpha = 45$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ALFABETUL LATIN

Litere de tipar		Denumirea literelor
A	a	a
B	b	be
C	c	ce
D	d	de
E	e	e
F	f	ef
G	g	ghe
H	h	haş
I	i	i
J	j	je
K	k	ca
L	l	le
M	m	me
N	n	ne
O	o	o
P	p	pe
Q	q	chiu
R	r	re
S	s	se
T	t	te
U	u	u
V	v	ve
W	w	dublu-ve
X	x	ix
Y	y	igrec
Z	z	zet

ALFABETUL GREC

Litere de tipar		Denumirea literelor
Α	α	alpha
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ, ϑ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
E	ξ	ksi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega