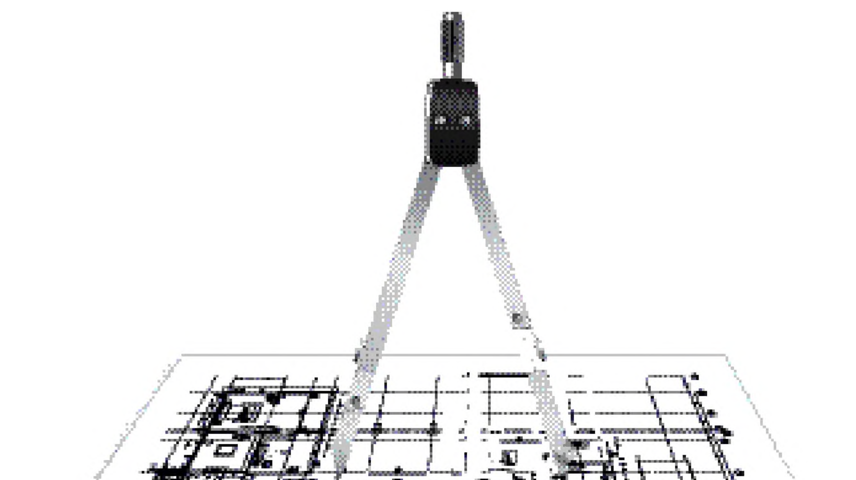
Geometrie

Manual pentru clasa a 9-a instituțiilor de învăţământ general cu limba română de predare

Recomandat de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei



Львів
Видавництво «Світ»
2017

УДК 514(075.3)
Б 36

Перекладено за виданням:
Бевз Г.П. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім “Освіта”, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Романчук Н. О., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова Миколаївської області;

Ткаченко Л. Л., вчитель-методист, вчитель Комунального закладу «Загальноосвітня школа I-III ступенів №5» Бобринецької міської ради Кіровоградської області;

Герасимович О. М., методист Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка.

Науковий рецензент
Нелін Є. П., професор кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди

Бевз Г.П.
Б 36 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. румунською мовою / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова ; пер. І.М. Грінчешин. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.

ISBN 978-966-914-071-5

УДК 514(075.3)

ISBN 978-966-914-071-5 (рум.)
ISBN 978-617-656-751-6 (укр.)

Stimaţi elevi şi eleve ai clasei a 9-a!

În acest an veţi continua să studiaţi geometria – parte interesantă şi importantă a matematicii. Cunoştinţele geometrice, ideile şi metodele ei o să vă fie necesare pentru studiile de mai departe în clasele superioare, pentru studierea cu succes a matematicii și a altor discipline de studii, pentru cercetarea lumii înconjurătoare, pentru o viaţă deplină în societatea contemporană.

Valoarea geometriei pentru persoană a fost elucidată de matematicieni renumiţi:

- *Geometria este cunoașterea a tot ce există (Platon).*
- *Printre acei cu aceleași minţi-condiţiile celelalte fiind aceleași – are avantaj acela care știe geometria (B. Pascal).*

Cu ajutorul acestui manual veţi finaliza studierea geometriei în şcoala de bază.

Pentru a-şi imagina cursul integral de geometrie al şcolii de bază şi a înţelege ce loc ocupă în el materialul clasei a 9-a, cercetaţi enumerarea temelor din lista, menţionată mai jos. Cu culoare este evidenţiat materialul pe care voi îl veţi studia în anul curent.

GEOMETRIE (clasele 7-9)

Figurile geometrice elementare și proprietățile lor. Amplasarea reciprocă a dreptelor pe plan. Triunghiuri. Criteriile de egalitate ale triunghiurilor. Asemănarea triunghiurilor. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. Circumferinţa și cercul. Patrulatere. Poligoane. Ariile poligoanelor.
Metoda coordonatelor și vectorii în plan. Rezolvarea triunghiurilor. Poligoane regulate. Lungimea circumferinţei. Aria cercului. Transformări geometrice.

În imensa livadă Geometria fiecare îşi poate face un buchet după gustul său: demonstraţiile stricte şi aplicaţiile practice, citate ale matematicienilor iluştri şi probleme originale, noţiuni ale matematicii contemporane şi ştiri din istorie.

Geometria le trebuie la toţi: inginerilor şi arhitectorilor, constructorilor şi desenatorilor, tâmplarilor, lăcătuşilor, strungarilor, croitorilor, pictorilor şi la mulţi alţi specialişti. Aplică în munca lor cunoştinţele geometrice lucrătorii la construcţii, navigatorii, militarii, oamenii de artă, astronomii şi chiar cofetarii. Orice ştiinţă veţi alege pentru studiere în viitor, în ce ramură a activităţii umane nu veţi munci, ca să obţineţi rezultate performante sunt necesare cunoştinţe temeinice din geometrie. Vă invităm în lumea Geometriei. Această lume este miraculoasă: darnică, desăvârşită, strâns legată cu lumile Muncii, Intelectului, Artei.

Sperăm că manualul nostru va deveni pentru voi un ajutor bun în însușirea cunoştinţelor geometrice, în formarea unor deprinderi noi, acumularea experienţei noi, în dezvoltarea armonioasă a personalităţii voastre.

Vă dorim succese în învăţătură!

Autorii

Cum de lucrat cu manualul

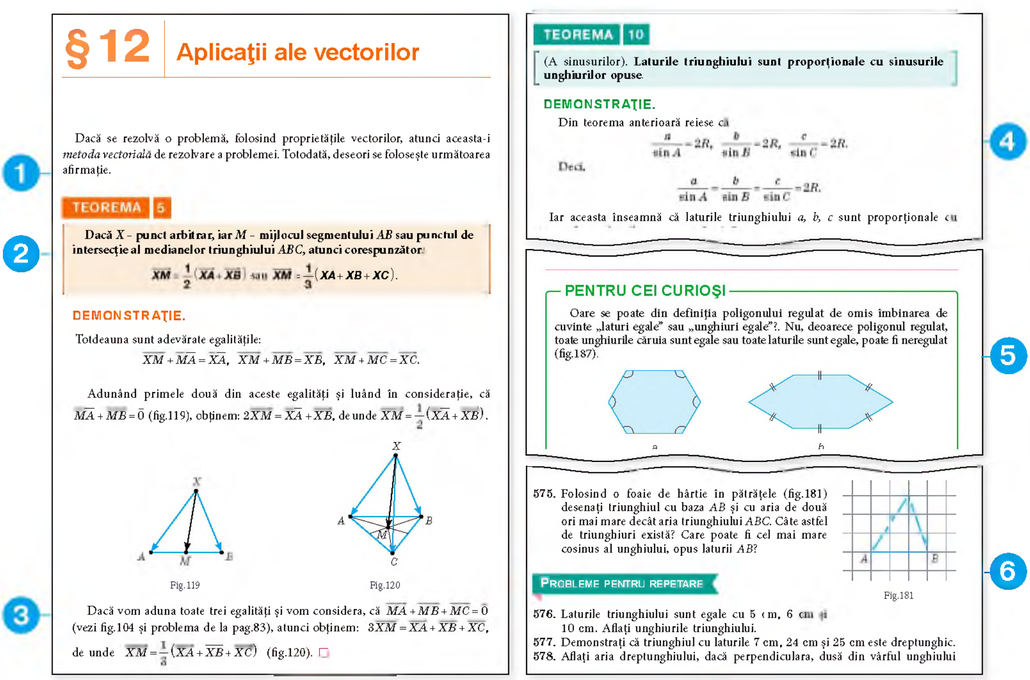
Dragi elevi și eleve ai clasei a 9-a! Stimați colegi!

Voi ţineţi în mâini un manual nou de geometrie. Autorii speră că această carte va deveni pentru voi un ajutor și povățuitor de nădejde. Propunem o navigaţie originală prin paginile lui.

Un motiv ponderabil și stimul frumos pentru studierea materialului este informaţia despre creatorii geometriei și exemple de utilizare practică a materialului de învățătură. Afirmaţiile matematicienilor iluștri pot deveni pentru voi călăuză nu numai în învățătură, ci și în viaţă.

La începutul fiecărui capitol se dă o scrută privire asupra conţinutului lui în limbile română și engleză, de asemenea, exemple de obiecte materiale, ale căror modele sunt figurile geometrice!

1 Învăţând materialul teoretic, atrageţi atenţia la cuvintele tipărite cu caractere **grase** – acestea sunt termeni noi geometrici. Voi trebuie să înţelegeţi ce ei înseamnă, și să le memorizaţi.


§ 12 Aplicaţii ale vectorilor

1 Dacă se rezolvă o problemă, folosind proprietăţile vectorilor, atunci aceasta-i *metoda vectorială* de rezolvare a problemei. Totodată, deseori se folosește următoarea afirmaţie.

TEOREMA 5

2 **Dacă X – punct arbitrar, iar M – mijlocul segmentului AB sau punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC, atunci corespunzător**

$$\overline{XM}=\frac{1}{2}(\overline{XA}+\overline{XB}) \text{ sau } \overline{XM}=\frac{1}{3}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}).$$

DEMONSTRAŢIE.

Totdeauna sunt adevărate egalităţile:

$$\overline{XM}+\overline{MA}=\overline{XA},\quad \overline{XM}+\overline{MB}=\overline{XB},\quad \overline{XM}+\overline{MC}=\overline{XC}.$$

Adunând primele două din aceste egalităţi și luând în consideraţie, că $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{0}$ (fig.119), obţinem: $2\overline{XM}=\overline{XA}+\overline{XB}$, de unde $\overline{XM}=\frac{1}{2}(\overline{XA}+\overline{XB})$.

Fig.119 Fig.120

3 Dacă vom aduna toate trei egalităţi și vom considera, că $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$ (vezi fig.104 și problema de la pag.83), atunci obţinem: $3\overline{XM}=\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}$, de unde $\overline{XM}=\frac{1}{3}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC})$ (fig.120).

TEOREMA 10

(A sinusurilor). **Laturile triunghiului sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse.**

4 DEMONSTRAŢIE.

Din teorema anterioară reiese că

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad \frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Deci,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Iar aceasta înseamnă că laturile triunghiului a, b, c sunt proporţionale cu

PENTRU CEI CURIOȘI

5 Oare se poate din definiţia poligonului regulat de omis îmbinarea de cuvinte „laturi egale" sau „unghiuri egale"?. Nu, deoarece poligonul regulat, toate unghiurile căruia sunt egale sau toate laturile sunt egale, poate fi neregulat (fig.187).

575. Folosind o foaie de hârtie în pătrăţele (fig.181) desenaţi triunghiul cu baza AB și cu aria de două ori mai mare decât aria triunghiului ABC. Câte astfel de triunghiuri există? Care poate fi cel mai mare cosinus al unghiului, opus laturii AB?

6 PROBLEME PENTRU REPETARE

Fig.181

576. Laturile triunghiului sunt egale cu 5 cm, 6 cm și 10 cm. Aflaţi unghiurile triunghiului.
577. Demonstraţi că triunghiul cu laturile 7 cm, 24 cm și 25 cm este dreptunghic.
578. Aflaţi aria dreptunghiului, dacă perpendiculara, dusă din vârful unghiului

2

Textul cu caractere grase, cuprins în paranteze pătrate — acestea-s teoremele, ale căror demonstraţie se dă mai jos.

3 4

Sfârșitul demonstrării teoremei se notează cu un **pătrăţel roșu**. **"Cu culoare verde"** se notează demonstraţiile care nu sunt obligatorii pentru studiere.

5

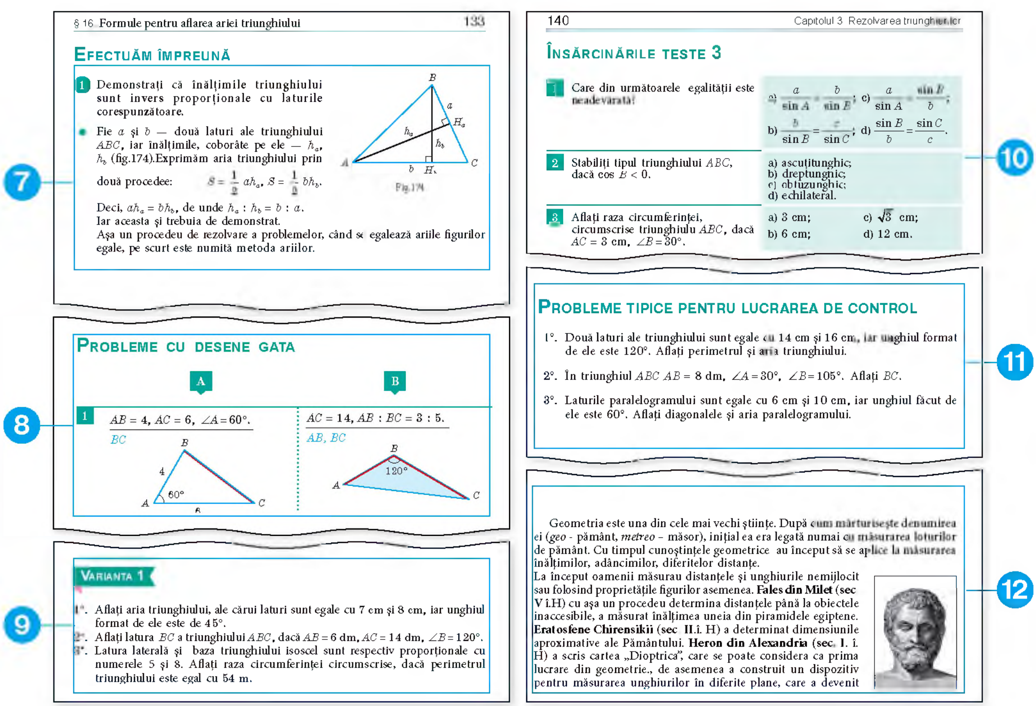
În fiecare paragraf este rubrica **«Pentru cei curioși»**. Ea conţine material suplimentar, adresat elevilor cointeresaţi.

Manualul conţine exerciţii cu diferite niveluri de dificultate. Sunt probleme pentru rezolvarea orală şi repetare, probleme de nivelurile **A** şi **B** şi de dificultate sporită. 6

Au să-i intereseze pe elevi și profesori **probleme deschise și însărcinările practice**. 7

În rubrica **„Efectuăm împreună"** sunt expuse modele de rezolvare a unor tipuri importante de probleme. Este util de-a face cunoştinţă cu ele înainte de-a îndeplini însărcinările pentru acasă, ale căror numere sunt evidenţiate cu culoare albastră. 8

La sfârșitul fiecărui capitol este rubrica **„Probleme cu desene gata"**, 9 **„Lucrări independente"** ce conțin exerciții cu diferite niveluri. 10 **Însărcinările teste și Probleme tipice pentru lucrări de control** 11 de trei niveluri de dificultate.


§ 16 Formule pentru aflarea ariei triunghiului 133

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstrați că înălțimile triunghiului sunt invers proporționale cu laturile corespunzătoare.

Fie a și b — două laturi ale triunghiului ABC, iar înălțimile, coborâte pe ele — h_a, h_b (fig.174). Exprimăm aria triunghiului prin două procedee: $S = \frac{1}{2} ah_a$, $S = \frac{1}{2} bh_b$.

Deci, $ah_a = bh_b$, de unde $h_a : h_b = b : a$.
Iar aceasta și trebuia de demonstrat.
Așa un procedeu de rezolvare a problemelor, când se egalează ariile figurilor egale, pe scurt este numită metoda ariilor.

Fig.174

PROBLEME CU DESENE GATA

A | B

1 $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60°$. BC | $AC = 14$, $AB : BC = 3 : 5$. AB, BC

VARIANTA 1

1°. Aflați aria triunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 7 cm și 8 cm, iar unghiul format de ele este de 45°.
2°. Aflați latura BC a triunghiului ABC, dacă $AB = 6$ dm, $AC = 14$ dm, $\angle B = 120°$.
3°. Latura laterală și baza triunghiului isoscel sunt respectiv proporționale cu numerele 5 și 8. Aflați raza circumferinței circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 54 m.

140 Capitolul 3 Rezolvarea triunghiurilor

ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 3

1 Care din următoarele egalități este neadevărată?
a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; b) $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}$; d) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

2 Stabiliți tipul triunghiului ABC, dacă $\cos B < 0$.
a) ascuțitunghic; b) dreptunghic; c) obtuzunghic; d) echilateral.

3 Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiului ABC, dacă $AC = 3$ cm, $\angle B = 30°$.
a) 3 cm; b) 6 cm; c) $\sqrt{3}$ cm; d) 12 cm.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 14 cm și 16 cm, iar unghiul format de ele este 120°. Aflați perimetrul și aria triunghiului.
2°. În triunghiul ABC $AB = 8$ dm, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Aflați BC.
3°. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6 cm și 10 cm, iar unghiul făcut de ele este 60°. Aflați diagonalele și aria paralelogramului.

Geometria este una din cele mai vechi științe. După cum mărturisește denumirea ei (*geo* - pământ, *metreo* – măsor), inițial ea era legată numai cu măsurarea loturilor de pământ. Cu timpul cunoștințele geometrice au început să se aplice la măsurarea înălțimilor, adâncimilor, diferitelor distanțe.
La început oamenii măsurau distanțele și unghiurile nemijlocit sau folosind proprietățile figurilor asemenea. **Fales din Milet** (sec V î.H) cu așa un procedeu determina distanțele până la obiectele inaccesibile, a măsurat înălțimea uneia din piramidele egiptene. **Eratosfene Chirensikii** (sec II.î. H) a determinat dimensiunile aproximative ale Pământului. **Heron din Alexandria** (sec. I. î. H) a scris cartea „Dioptrica", care se poate considera ca prima lucrare din geometrie., de asemenea a construit un dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în diferite plane, care a devenit

În anexe sunt expuse „Proiecte de învățământ" pentru fiecare capitol, „Probleme de dificultate sporită", „Probleme pentru repetare", „Teste antrenament", **„Știri istorice"** 12 și altele.

Vă dorim succese în studierea geometriei!

Gândesc, deci exist.
Pentru a desăvârşi intelectul trebuie mai mult de cugetat, decât de a memoriza.
Folosiţi corect cuvintele şi veţi elibera lumea de jumătate din neînţelegeri.

RENE DESCARTES

(1596–1650)

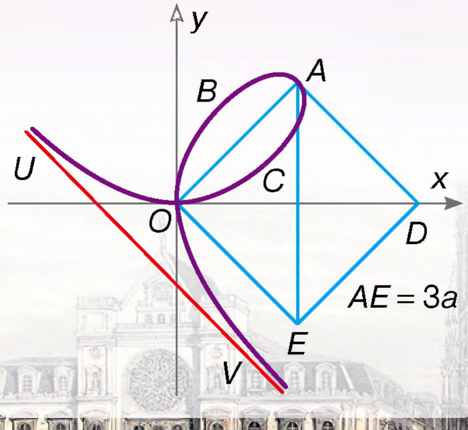
Ilustrul filozof, matematician, fizician, fiziolog francez.

„Geometria” lui a avut o mare influență asupra dezvoltării matematicii – pe parcursul aproape a 150 de ani algebra şi geometria analitică s-au dezvoltat în direcțiile, indicate de Descartes.

- A creat metoda coordonatelor
- A introdus noțiunea de mărime variabilă independentă şi funcție
- A implimentat simbolica matematică comodă

Foaia lui Descartes

$x^3 + y^3 = 3axy$



Capitolul 1 | Section 1

Metoda coordonatelor în plan | Coordinates on the Plane Method

Metoda coordonatelor în geometrie a devenit într-atât de utilă și comodă că a pus începutul creării a unei părţi mari aparte a matematicii – a geometriei analitice. Ea este studiată în toate instituţiile tehnice superioare și medii și în facultăţile matematice ale universităţilor. Cu ajutorul geometriei analitice s-a reușit instalarea unui pod ce leagă algebra și geometria.

În acest capitol o să faceţi cunoștinţă cu coordonatele carteziene și cu metoda coordonatelor, care permit rezolvarea problemelor algebrice cu ajutorul geometriei, iar cele geometrice – cu ajutorul algebrei. Veţi putea compune ecuaţiile a diferite linii și cerceta proprietăţile lor.

De ce trebuie de învăţat coordonatele și metoda coordonatelor?

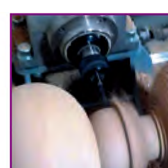
Comoditatea metodei coordonatelor și simplitatea alogoritmilor, cu ajutorul cărora sunt descrise punctele curbelor de către ecuaţiile algebrice, au servit ca pricină a răspândirii rapide şi a folosirii lor în multiple ramuri ale ştiinţei şi a activităţii vitale umane. Coordonatele geografice se utilizează în geografie, cartogratie, geodezie, construcţii, în arta militară. Cu ajutorul receptorilor de navigaţie sunt determinate coordonatele aflării automobilelor, navelor, avionului în timpul mişcării.

Aparatele de zbor nepilotate sau quadkopter sunt utilizate la construcţii de dimensiuni mari, în agricultură, la supravegherea pădurilor şi a lacurilor de acumulare.

Nici un domeniu al ştiinţei contemporane nu se lipseşte de prezentarea grafică a informaţiei. Sistema invizibilă de coordonate se conţine pe ecranul calculatorului.

Semnalele de ieşire ale şoarecelui pot fi considerate ca două mărimi independente şi pot fi transformate în coordonatele poziţiei în planul bidimensional. În regimul grafic valorile lui **x** (numărătoarea coloniţilor) se numără de la marginea stângă a ecranului spre dreapta, iar valorile lui **y** (numărătoarea rândurilor) – de la marginea de sus a ecranului în jos.

Efectiv sunt folosite în industrie maşinile – unelte şi mesele de coordonate, maşinile unelte cu dirijare programată.



Coordonatele sunt folosite în mute jocuri (lupta maritimă, dame, şah).

Sisteme de coordonate speciale sunt folosite în examinările medicale, de exemplu, în tomografia computerizată.

Coordonatele sunt folosite în algebră, fizică, chimie, biologie şi alte ştiinţe şi discipline şcolare.

Dar unde încă sunt folosite coordonatele? Aduceţi exemplele dumneavoastră.

Învăţând materialul capitolului veţi afla despre legăturile dintre algebră, geometrie şi trigonometrie, veţi lărgi cunoştinţele sale din trigonometrie, veţi putea aplica materialul învăţat la rezolvarea unor probleme practice interesante.

§ 1 Sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor de la 0° până la 180°

În fizică și mecanică funcţiile trigonometrice sunt folosite la cercetarea proceselor periodice și a mișcărilor de rotaţie. Deoarece roata (fig.1) sau arborele turbinei (fig.2) se poate întoarce cu orice unghi mare în o direcţie sau în direcţia opusă, de aceea sunt considerate funcţiile trigonometrice ale unghiului α, unde α, poate fi egal, de exemplu, cu 500^0, 700^0, -600^0 și poate fi un număr pozitiv sau negativ foarte mare. Cu astfel de funcţii trigonometrice veţi face cunoștinţă în clasa a 10-a.

Fig. 1

Fig. 2

În geometrie pentru a rezolva triunghiurile este suficient de considerat funcţiile trigonometrice ale unghiurilor de la 0^0 până la 180^0.

Voi deja știţi ce este sinusul, cosinusul, tangenta unghiului ascuţit al triunghiului dreptunghic. Dacă în triunghiul dreptunghic ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (fig. 3), atunci

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

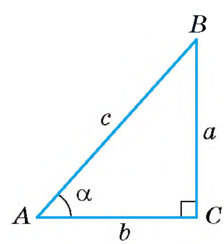


Fig. 3

Aplicând aceste formule se pot rezolva triunghiurile dreptunghice.

Pentru a rezolva nu numai triunghiurile dreptunghice, ci și triunghiurile arbitrare, trebuie de folosit funcţii trigonometrice nu numai ale unghiurilor ascuțite, ci și a celor obtuze.

Să explicăm ce înseamnă expresiile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$, unde, α — este un astfel de unghi, că $0 \le \alpha \le 180°$.

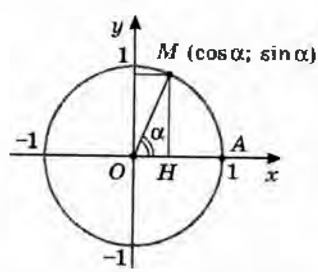


Fig.4

Să desenăm pe planul de coordonate o circumferință de raza $r = 1$ și cu centrul în originea de coordonate (fig.4). Aceasta-i **circumferința unitară**. Notăm punctul de intersecție al semiaxei pozitivei OX cu circumferința unitate cu litera A și ne înțelegem că vom depune unghiurile de la semidreapta OA împotriva mișcării acului de ceasornic. Unghiurile și măsurile lor le vom nota cu litere grecești α (alfa), β (beta), γ (gama) ș.a.

Dacă M — punct al circumferinței unitate astfel că $\angle AOM = \alpha$, atunci abscisa punctului M este numită **cosinusul unghiului** α, iar ordonata - **sinusul unghiului** α. În figura 4 $OH = \cos\alpha$, $MH = \sin\alpha$.

De exemplu, dacă $\alpha = 30°$ (fig 5), atunci ordonata punctului M este egală cu $\frac{1}{2}$, deoarece cateta opusă unghiului de 30°, este egală cu jumătatea ipotenuzei. De aceea, dacă $OM = 1$, atunci $MH = \frac{1}{2}$. Așadar, $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Conform teoremei Pitagora

$$OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Deci, } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

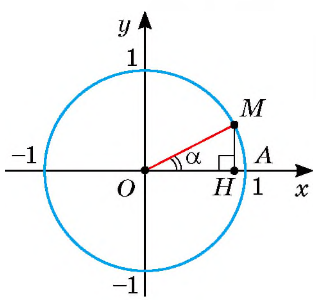


Fig. 5

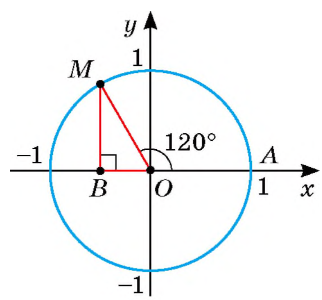


Fig. 6

Dacă $\alpha = 120°$ (fig 6), adică $\angle AOM = 120°$, atunci $\angle MOB = 60°$, iar $\angle OMB = 30°$. Pe baza proprietății catetei, opuse unghiului de 30°, OB = 0,5, OM = 0,5. Deoarece punctul M este situat în al doilea cadran, rezultă că abscisa lui este număr negativ. În cazul dat ea este egală cu −0,5, de aceea $\cos 120° = -0{,}5$.

În conformitate cu teorema Pitagora

$$MB = \sqrt{MO^2 - BO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ordonata punctului M este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$, de aceea $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tangentă a unghiului α se numește raportul sinusului acestui unghi către al lui cosinus: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

E clar că $\operatorname{tg}\alpha$ are sens numai pentru acele valori ale lui α, pentru care $\cos\alpha \neq 0$, deoarece la zero nu se poate împărți. Întrucât pentru unghiurile de la 0° până la 180° $\cos\alpha = 0$, dacă $\alpha = 90°$, atunci în cazul dat $\operatorname{tg}\alpha$ este definită pentru toate unghiurile $\alpha \neq 90°$.

Să cercetăm cum se calculează tangentele unghiurilor de la 0° până la 180°.

De exemplu, $\mathrm{tg}\,30^\circ = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\mathrm{tg}\,120^\circ = \dfrac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Variația lui sin α în dependență de variația lui α*

Valorile exacte ale lui sin α, cos α și tg α pentru unele unghiuri α sunt date în tabelul 1.

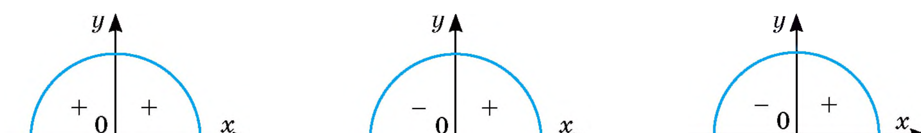
Tabelul 1

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Funcțiile sin α, cos α și tg α sunt numite **funcții trigonometrice** de argumentul α. Definițiile funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic, formulate în clasa a 8-a, nu contrazic pe definițiile noi.

Atenție!

1. Sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ascuțite obțin numai valori pozitive, iar cosinusurile și tangentele unghiurilor obtuze - valori negative (fig. 7).



Semnele sinusurilor *a* Semnele cosinusurilor *b* Semnele tangentelor *c*

Fig. 7

2. Dacă vom mări unghiul α de la **0°** până la **90°**, atunci sinusul lui se va mări de la **0** până la **1**, iar cosinusul se va mișcora de la **1** până **0**. Dacă vom continua să mărim unghiul α de la **90°** până la **180°**, atunci sinusul lui se va micșora de la **1** până la **0**, iar cosinusul — de la **0** până la **−1**.

3. Dacă vom mări unghiul α de la 0° până la 90°, atunci tangenta lui se va mări de la 0 până la infinit; tg 90° nu există. Dacă vom mări unghiul α de la 90° până 180°, atunci tg α se va mări de la minus infinit până la 0.

* Pentru a folosi codul QR este necesar de-a stabili asigurarea unui program special pe Smartfon planșetă. De exemplu, pentru dispozitivele cu sistemul operațional Android trebuie demarat utilizatorul Gooble Play market și de încărcat programul Powerful QR Code Scaner A+ .. sau oricare altul analogic. Încărcarea programelor pentru citire QR - codurilor pentru alte sisteme operaționale o să ajute respectivele utilizatele Windows Mobile -Windows Stare, și OY -App Stope.

PENTRU CEI CURIOȘI

Problemele, pe care noi le atribuim trigonometriei, au început să le rezolve încă grecii antici. Ei calculau lungimile coardelor unei circumferințe pe baza corelațiilor cunoscute dintre elementele poligoanelor regulate și raza circumferinței, circumscrise acestor poligoane.

Renumitul savant atunci grec Claudiu Ptolomeu (100-178) în lucrarea ”Almaghest” a compus tabelul lungimilor coardelor pentru fiecare peste jumătate de grad de la 0° până la 180°, care, din punctul de vedere actual, este tabelul valorilor sinusurilor pentru unghiurile de la 0° până la 90° peste fiecare un sfert de grad. Raza circumferinței la Ptolomeu era egală cu 60 de unități, ceea ce îngreuna radical calculele.

Savantul enciclopedist din Horezm Abu-Reihan Ali-Birumi (973-1048) a propus de folosit circumferința unitate pentru introducerea noțiunilor de sinus și cosinus. În lucrarea ”Canon Masuda” el scria astfel: ”Noi considerăm că este mai bine pentru numărul diametrului astfel, ca el să fie compus din două părți, adică unități, ca jumătatea din diametru, care se numește cel mai mare sinus, iar uneori - sinus deplin, să fie unitate. Atunci în acțiunile noastre va lipsi necesitatea de-a aminti înmulțirea cu el și împărțirea la el, și de asemenea transformarea lui în minute sau micșorarea cu un ordin, ceea ce era necesar, dacă el ar fi avut șasezeci de părți”.

ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește circumferință unitate?
2. Ce se numește sinusul unghiului? Cu ce este egal $\sin 30°$; $\sin 90°$?
3. Ce se numește cosinusul unghiului? Cu ce este egal $\cos 45°$; $\cos 60°$?
4. Cum variază sinusul unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la 0° până la 90°; b) de la 90° până la 180°?
5. Cum se va schimba cosinusul unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la 0° până la 90°; b) de la 90° până 180°?
6. Ce se numește tangentă a unghiului? Cu ce este egală $\operatorname{tg} 30°$; $\operatorname{tg} 90°$?
7. Cum va varia tangenta unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la 0° până la 90°; b) de la 90° până la 180°?
8. Ce semne au funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit? Dar a celui obtuz?
9. Formulați definițiile sinusului, cosinusului și a tangentei a unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic.

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Folosind circumferința unitate găsiți $\sin 135°$ și $\cos 135°$.

- În figura 8 este reprezentată circumferința unitate (circumferința de raza $r = 1$ cu centrul în originea de coordonate). Dacă în această figură $\angle POB = 135°$ și $\angle ONB = 90°$, atunci $\angle NOB = 45°$ și $\angle NBO = 45°$. Atunci $\triangle ONB$ — triunghi isoscel și NO = NB. Pe baza teoremei Pitagora:

$OB^2 = NO^2 + NB^2$, sau $1 = 2NO^2$, de unde

$NO^2 = \frac{1}{2}$, iar $NO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Deoarece NO = NB, rezultă că punctul B are coordonatele $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Deci, $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

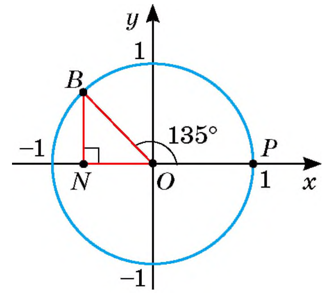


Fig.8

2 Construiți unghiul, al cărui cosinus este egal cu −0,25.

● Construim în sistemul de coordonate circumferința unitate (fig.9). Împărțim raza OK în patru părți egale. Atunci $OH = \frac{1}{4}OK = 0,25$. Ducem $HM \perp OK$. Punctul M aparține circumferinței unitate și este situat în cadranul doi, de aceea abscisa lui este egală cu −0,25. Așadar, $\cos \angle AOM = -0,25$ și $\angle AOM$ — acela ce trebuia construit.

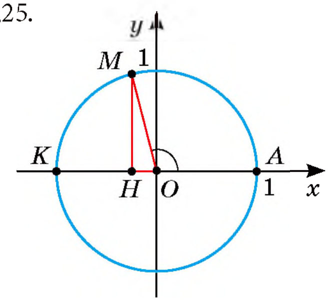


Fig. 9

3 Demonstrați că sin 150° = cos 60°.

● Fie că $\angle MOA = 150°$, iar $\angle TOA = 60°$ (fig.10). Atunci $\angle MOH = 30°$, iar $\angle HMO = 60°$. După ipotenuză și unghiul ascuțit $\triangle MOH = \triangle OTP$, de aceea PO = MH.
Deoarece PO = cos 60°, iar MH = sin 150°, rezultă că sin 150° = cos 60°. Ceea ce trebuia de demonstrat.

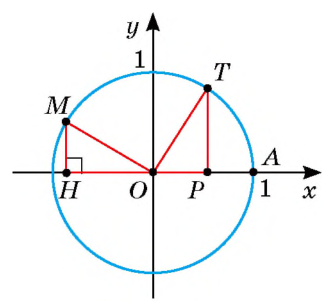


Fig. 10

Dacă problema are un număr insuficient de date, atunci ea se numește **deschisă**. Voi completați , conform părerii voastre, condiția ei și o rezolvați. Este de dorit de-a considera cât mai multe variante posibile ale problemei și ale rezolvării ei.

4 ***Problemă deschisă*** Determinați tipul triunghiului ABC, dacă $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar sin B = **...** .

● Completăm condiția cu câteva procedee diverse, de exemplu: 1) sin B = 0, 2) sin B = 1, 3) $\sin B = \frac{1}{2}$, 4) sin B = a, unde $0 < a < \frac{1}{2}$. Clarificăm tipul triunghiului pentru fiecare din aceste cazuri.

1) Dacă sin B = 0, atunci $\angle B = 0°$ sau $\angle B = 180°$. Nu există triunghi cu așa unghiuri.
2) Dacă sin B = 1, atunci $\angle B = 90°$. Avem: $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$. Deci, $\triangle ABC$ — dreptunghic, dar nu este isoscel.
3) Dacă $\sin B = \frac{1}{2}$, atunci $\angle B = 30°$ sau $\angle B = 150°$. Să examinăm fiecare din aceste cazuri. În primul caz avem $\angle A = 30°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 120°$. Deci, $\triangle ABC$ — obtuzunghic și isoscel. În al doilea caz avem $\angle A = 30°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 0°$. Un astfel de triunghi nu există.
4) Dacă sin B = a, unde $0 < a < \frac{1}{2}$, atunci $0 < \angle B < 30°$ sau $150° < \angle B < 180°$. În primul caz avem $\angle A + \angle B < 60°$, și de aceea $\angle C > 120°$. Așadar, $\triangle ABC$ — obtuzunghic, însă nu este isoscel. În al doilea caz: $\angle A + \angle B > 180°$. Triunghi cu așa unghiuri nu există.

Alte cazuri cercetați-le de sine stătător.

PROBLEME ȘI ÎNSĂRCINĂRI

EFECTUAȚI ORAL

1. Oare poate abscisa sau ordonata punctului, situat pe circumferința unitate, să fie egală cu 2?
2. Poate oare sinusul sau cosinusul unui unghi să fie egal cu 2? Dar cu −2?
3. Oare poate sinusul unghiului, mai mic de 180°, să fie număr negativ? Dar cosinusul?
4. Tangenta cărui unghi este egală cu 1? Dar a cărui cu -1?
5. Găsiți $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$, dacă: a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; b) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.
6. Aflați $\sin\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\cos\alpha = 0,5$.
7. Care numere trebuie să fie în pătrățelele goale ale tabelului?

α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\operatorname{tg}\alpha$			

A

8. Sunt date trei puncte: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$. Găsiți sinusul și cosinusul unghiului AOB.
9. Aflați sinusul și cosinusul unghiului AOK, dacă $A(1;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $K(0;\ 1)$.

10. Aflați, folosindu-vă de circumferința unitate: sin 60°, cos 60°, sin 150°, cos 150°.
11. Demonstrați, că sin 45° = cos 45°.
12. Construiți unghiul, cosinusul căruia este egal cu: a) $\frac{3}{4}$; б) −0,5.
13. Construiți unghiul, al cărui sinus este egal cu 0,75.Câte soluții are problema?
14. Ce este mai mare: a) sin 10° sau cos 10°; b) cos 45° sau sin 45°?
15. Care din unghiurile α sau β este mai mare, dacă:

a) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$;

b) $\sin\alpha=0,75$, $\sin\beta=0,93$ (unghiurile α și β — ascuțite);

c) $\sin\alpha=0,75$, $\sin\beta=\frac{1}{2}$ (unghiurile α și β — obtuze).

16. Folosindu-se de figura 11 găsiți sinusul, cosinusul și tangenta unghiului B al triunghiului ABC.

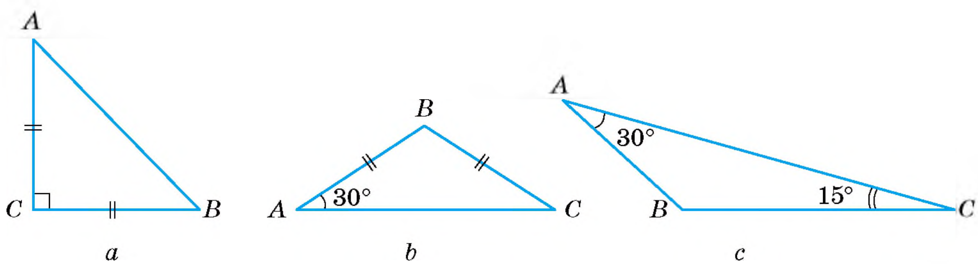


Fig. 11

17. Determinați semnul produsului:
a) cos 30° * sin 15° * cos 125° * tg 35°;
b) sin 137° * cos 150° * tg 22° * cos 35°;
c) tg 143° * sin 165° * tg 87° * cos 126°;
d) cos 32° * sin 132° * cos 135° * tg 92°.

18. Scrieți în trei colonițe următoarele unghiuri: I – unghiurile ascuțite; II – unghiurile obtuze; III – tipul unghiului este imposibil de stabilit: $\sin A=0,6$; $\cos B=-0,8$; $\sin C=\frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} D=-2$; $\cos E=\frac{1}{4}$; $\cos L=\frac{11}{12}$; $\operatorname{tg} R=\frac{12}{11}$; $\sin O=\frac{7}{15}$; $\cos Q=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

19. Înlocuiți * cu semnele > sau <:

a) cos 5° * cos 7°;
b) sin 82° * sin 79°;
c) tg 29° * tg 32°;
d) cos 113° * cos 115°;
e) sin 178° * sin 108°;
f) tg 97° * tg 107°.

20. Calculați valorile expresiilor:
a) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \cos 135°$;
b) $\sin 30° \cdot \cos 150° - \sin^2 135° \cdot \operatorname{tg} 120°$.

21. Calculaţi valorile expresiilor:

a) $\sin 30° \cdot \cos 60° - \cos^2 120° + \sin 135° \cdot \cos 90°$;

b) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg}^2 135° + \cos 150°$.

22. Găsiţi unghiurile $\triangle ABC$, dacă $\sin A = 0{,}5$, iar $\cos B = -0{,}5$.

23. Aflaţi unghiurile $\triangle ABC$, dacă $\operatorname{tg} A = -1$, iar $\sin C = \frac{1}{2}$.

24. Aflaţi unghiurile rombului $ABCD$, dacă $\cos D = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

25. Stabiliţi corespondenţa dintre valorile expresiilor (1–4) şi valorile egale lor ale expresiilor (A–E).

1	$\sin 90°$	**A**	$\cos 60°$
2	$\cos 30°$	**B**	$\sin 120°$
3	$\sin 150°$	**C**	$\cos 90°$
4	$\cos 45°$	**D**	$\cos 0°$
		E	$\sin 135°$

26. Aflaţi, folosindu-se de calculator: a) $\sin 3°$, $\sin 4{,}8°$, $\sin 56{,}7°$; b) $\cos 64{,}25°$, $\cos 25°$, $\cos 45{,}8°$; c) $\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{tg} 23{,}5°$, $\operatorname{tg} 81{,}1°$; d) $\sin 25°1'$, $\cos 3°7'$, $\operatorname{tg} 56°36'$.

27. Folosindu-se de calculator sau tabele, aflaţi unghiul, dacă se ştie:

a) cosinusul lui este egal cu: $0{,}325$; $0{,}78$; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) tangenta lui este egală cu: $0{,}726$; $2{,}605$; $\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

28. Aflaţi unghiul ascuţit, al cărui sinus este egal cu:

a) $0{,}26$; b) $\frac{3}{7}$; c) $0{,}685$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B

29. Folosind figura 12 aflaţi sinusurile, cosinusurile, tangentele unghiurilor A, B, C şi D ale patrulaterului $ABCD$, dacă $BC \parallel AD$.

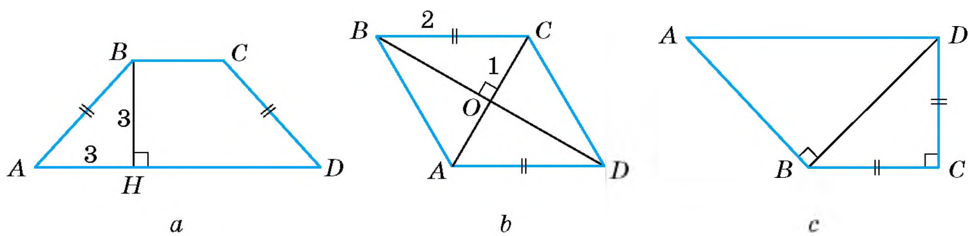


Fig.12

30. Cosinusul unuia din unghiurile triunghiului isoscel este egal cu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aflaţi unghiurile triunghiului.

31. Sinusul unuia din unghiurile triunghiului isoscel este egal cu **0,5**.Aflaţi unghiurile triunghiului. Câte soluţii are problema?

32. Aflaţi sinsurile, cosinusurile și tangentele trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 10 cm și 16 cm, iar latura laterală are 6 cm.

33. Găsiţi sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ale unui romb, al cărui perimetru este egal cu 16 cm, iar aria cu 8 cm^2.

34. Aflaţi laturile laterale ale trapezului dreptughic, dacă cosinusul al unuia din unghiurile lui este egal cu $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar diferenţa bazelor este egală cu a.

35. ***Problemă deschsă.*** De stabilit tipul triunghiului ABC, dacă cos B **...** .

36. Construiţi unghiul al cărui cosinus este egal cu $-\frac{3}{4}$. Aflaţi sinusul și tangenta acestui unghi.

37. Construiţi unghiul sinusul căruia este de două ori mai mare decât cosinusul lui.

38. Construiţi unghiul al cărui cosinus este de trei ori mai mare decât sinusul.

39. Sinusul unghiului este de 5 ori mai mic decât cosinusul lui. Aflaţi tangenta acestui unghi.

40. Laturile triunghiului sunt egale cu 13 cm, 14 cm şi 15 cm. Găsiţi sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor celui mai mic şi celui mai mare ale triunghiului.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

41. Desenaţi pe hârtie milimetrică o semicircumferinţă de raza 100 mm și împărţiţi-o cu ajutorul raportului în 18 părţi egale. Folosindu-se de acest desen:

a) arătaţi că în cazul majorării unghiului de la 0° până la 90° sinusul lui se va mări de la 0 până la 1, iar o dată cu mărirea unghiului de la 90° până la 180 ° sinusul lui se va micșora de la 1 până la 0;

b) arătaţi că în cazul măririi unghiului de la 0° până la 90° cosinusul lui se va micșora de la 1 până la 0, iar concomitent cu mărirea unghiului de la 90° până la 180° cosinusul lui se va micșora de la 0 până la -1;

c) alcătuiţi tabelul valorilor aproximative ale sinusului și cosinusului pentru unghiurile 0°, 10°, 20°, 30°, ..., 180°.

PROBLEME PENTRU REPETARE

42. Aflaţi catetele triunghiului dreptunghic, dacă ele sunt proporţionale cu numerele 2 și 3, iar ipotenuza este egală cu $4\sqrt{13}$ cm.

43. Aria triughiului echilateral este egală cu $16\sqrt{3}$ cm. Aflaţi perimetrul lui.

44. Unul din unghurile triunghiului isoscel este egal cu 120°. Găsiţi perimetrul triunghiului, dacă înălţimea, coborâtă pe bază, este egală cu h.

45. Într-o circumferinţă sunt duse două diametre AB şi CD reciproc perpendiculare. Aflaţi raza circumferinţei, dacă AC=m.

§ 2 Identităţi trigonometrice

Să examinăm cele mai importante formule care leagă sinusul, cosinusul și tangenta aceluiași unghi α. Fie α – unghi ascuţit. Pe circumferinţa unitate notăm punctul M astfel ca $\angle MOA = \alpha$ **(fig.13).** Atunci $MH = \sin\alpha$, $OH = \cos\alpha$, $OM = 1$. Conform teoremei Pitagora $MH^2 + OH^2 = OM^2$, sau

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (*)$$

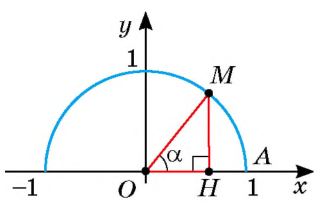


Fig.13

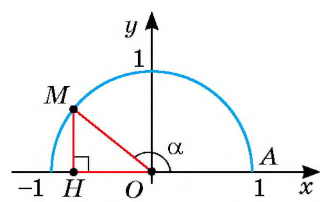


Fig.14

Dacă unghiul α este obtuz (fig.14), atunci din triunghiul dreptunghic *OMH* ($OM = 1$, $MH = \sin\alpha$, $OH = -\cos\alpha$) conform teoremei Pitagora avem: $MH^2 + HO^2 = OM^2$, sau $\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2 = 1$, de unde $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Egalitatea **(*)** este justă și în acest caz.

Dacă $\alpha = 0°$, atunci $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; dacă $\alpha = 90°$, atunci $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$; dacă $\alpha = 180°$, atunci $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$.

În fiecare din aceste cazuri egalitatea **(*)** este justă.

Așadar, pentru fiecare α, dacă $0° \le \alpha \le 180°$,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Aceasta-i **identitatea trigonometrică fundamentală.** Ea leagă sinusul și cosinusul aceluiași unghi și oferă posibilitatea de-a exprima una din aceste funcţii trigonometrice prin cealaltă:

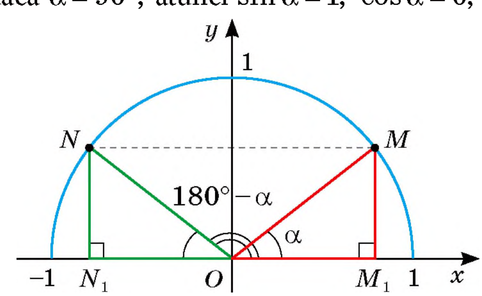


Fig.15

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

În cealaltă formulă înaintea radicalului se pune semnul „– ”, dacă unghiul α este obtuz. Unghiuri, mai mari decât cel desfășurat, noi nu le examinăm.

Să atragem atenția la punctele N și M ale cirmuferinței unitate, care corespund unghiurilor $180° - \alpha$ și α (fig.15). Ordonatele lor NN_1 și MM_1 sunt egale, iar abscisele ON_1 și OM_1 se deosebesc numai cu semnele.

Așadar, totdeauna

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Cu aceste formule se poate exprima sinusul și cosinusul unghiului obtuz $180° - \alpha$ prin sinusul și cosinusul unghiului ascuțit α. De exemplu:

$$\sin 147° = \sin(180° - 33°) = \sin 33°,$$

$$\cos 105° = \cos(180° - 75°) = -\cos 75°.$$

Să demonstrăm următoarele formule:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$

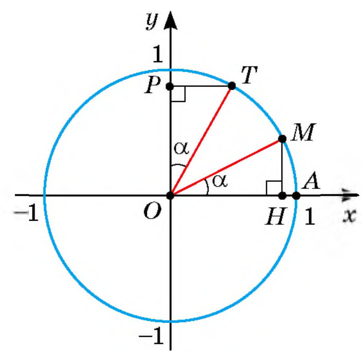


Fig.16

Admitem că $\angle MOA = \alpha$, $\angle TOA = 90° - \alpha$ (fig.16). Atunci $\angle POT = \alpha$. După ipotenuză și unghiul ascuțit $\triangle MOH = \triangle TOP$. De aici $PT = MH$, $OP = OH$.

Deoarece $PT = \cos(90° - \alpha)$, $MH = \sin\alpha$, rezultă $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Deoarece $OP = \sin(90° - \alpha)$, $OH = \cos\alpha$, avem $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Cele două formule demonstrate permit exprimarea sinusului și cosinusului a oricărui unghi ascuțit mai mare decât 45°, prin cosinusul și sinusul unghiului mai mic de 45°. Așadar, valorile sinusurilor ale unghiurilor de la 0° până la 45° sunt în același timp valorile cosinusurilor de la 90° până la 45° (vezi tabelul de pe forzaț).

Exemplu.

$\sin 10° = \cos 80° \approx 0{,}174;$

$\cos 50° = \sin 40° \approx 0{,}643.$

PENTRU CEI CURIOȘI

Deoarece, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ și $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, avem

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Deoarece $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ și $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, avem

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Toate aceste egalități sunt juste cu condiția că numitorii sunt diferiți de zero, adică dacă există tangentele și cotangentele. Atunci au loc egalitățile:

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Întrebări şi însărcinări pentru autocontrol

1. Formulați identitatea trigonometrică fundamentală.
2. Care trebuie să fie părțile din dreapta ale identităților: a) $\sin(90°-\alpha)=...$; b) $\cos(90°-\alpha)=...$; c) $\sin(180°-\alpha)=$ ...; d) $\cos(180°-\alpha)=...$?
3. Cum se schimbă valorile $\sin(90°-\alpha)$, dacă vom mări valorile lui α de la 0° până la 90°?
4. Cum variază valorile lui $\cos(180°-\alpha)$, dacă valorile lui α de le mărit de la 0° până la 90°?

Efectuăm împreună

1 Se știe că $\cos\alpha=0,6$, aflați $\sin\alpha$ și $\mathrm{tg}\,\alpha$.

● Se cunoaște că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Deoarece sinusul fiecărui unghi α, dacă $0°\le\alpha\le180°$, este număr pozitiv, atunci $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Dacă $\cos\alpha=0,6$, atunci $\sin\alpha=\sqrt{1-0,6^2}=\sqrt{0,64}=0,8$,

dar $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{0,8}{0,6}=1\dfrac{1}{3}$.

Deci, $\sin\alpha=0,8$, $\mathrm{tg}\,\alpha=1\dfrac{1}{3}$.

2 Demonstrați că atunci , când $\alpha\ne0°$, avem $\sin\alpha:\cos(90°-\alpha)=1$.

● $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$. De accea $\sin\alpha:\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha:\sin\alpha=1$.

3 Calculați valoarea expresiei $\sin 77°\cdot\cos 13° - \sin 167°\cdot\cos 77°$.

● $\sin 77°\cdot\cos 13°-\sin 167°\cdot\cos 77°=\sin(90°-13°)\cdot\cos 13°+\sin(180°-13°)\times$
$\times\cos(90°-13°)=\cos 13°\cdot\cos 13°+\sin 13°\cdot\sin 13°=\cos^2 13°+\sin^2 13°=1$.

Probleme şi exerciţii

Efectuaţi oral

46. Aflați $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$, dacă $\mathrm{tg}\,\alpha=1$.
47. Aflați $\sin\alpha$, dacă $\cos\alpha=-0,5$.
48. Știind că $\cos\alpha=0,7$, găsiți:
a) $\sin(90°-\alpha)$; b) $\cos(180°-\alpha)$; c) $\cos(90°-\alpha)$.
49. Simplificați: a) $\sin(180°-35°)$; b) $\cos(180°-43°)$; c) $\mathrm{tg}\,(180°-20°)$; d) $\sin(90°-23°)$; e) $\cos(90°-27°)$; f) $\mathrm{tg}\,(90°-14°)$.

50. Terminați transformările: a) $\sin 140° = \sin(180° - 40°) = ...$;
b) $\cos 126° = \cos(180° - 54°) = ...$; c) $\sin 85° = \sin(90° - 5°) = ...$;
d) $\cos 62° = \cos(90° - 28°) = ...$.

51. Care din afirmații este falsă? De ce?
a) $\sin 136° = \sin(180° - 44°) = \sin 44°$;
b) $\cos 147° = \cos(180° - 33°) = \cos 33°$;
c) $\sin 75° = \sin(90° - 15°) = -\cos 15°$;
d) $\cos 153° = \cos(180° - 27°) = -\sin 27°$.

A

52. Aflați sinusul și tangenta unghiului α, dacă:
a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; b) $\cos\alpha = 0,2$; c) $\cos\alpha = -0,5$.

53. Aflați cosinusul și tangenta unghiului ascuțit α, dacă:
a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin\alpha = 0,72$.

54. Aflați cosinusul și tangenta unghiului obtuz α, dacă:
a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; c) $\sin\alpha = 0,28$.

55. Care numere trebuie să fie în pătrățelele goale ale tabelului?

$\sin\alpha$	0	0,5	0,6	0,8	1
$\sin(90° - \alpha)$					
$\cos(90° - \alpha)$					
$\sin(180° - \alpha)$					
$\cos(180° - \alpha)$					

56. Exprimați prin funcții trigonometrice de unghi ascuțit:
a) $\sin 117°$; b) $\cos 142°$; c) $\operatorname{tg} 118°$; d) $\sin 136°$.

57. Exprimați prin funcții trigonometrice de unghi mai mic decât 45° :
a) $\cos 130°$; b) $\sin 145°$; c) $\operatorname{tg} 87°$; d) $\cos 95°$.

58. Din egalitățile expuse scrieți-le numai pe cele juste:
a) $\sin 130° = \sin 50°$; d) $\operatorname{tg} 117° = \operatorname{tg} 27°$; g) $\cos 126° = -\cos 54°$;
b) $\sin 129° = -\cos 39°$; e) $\cos 87° = \sin 3°$; h) $\cos 149° = -\sin 31°$;
c) $\operatorname{tg} 118° = -\operatorname{tg} 62°$; f) $\cos 113° = \cos 67°$; i) $\operatorname{tg} 29° = -\operatorname{tg} 151°$.

59. Cosinusul unghiului ascuțit al unui paralelogram este egal cu 0,25. Cu ce este egal cosinusul unghiului obtuz al lui? Dar sinusul?

60. Cosinusul unghiului obtuz al rombului este egal cu −0,7. Cu ce este egal cosinusul unghiului ascuțit al lui? Dar sinusul?

61. Cu ajutorul tabelului de pe forzaț aflați:
a) sin 12°, sin 40°, sin 145°, sin 162°, sin 155°;
b) cos 12°, cos 50°, cos 159°, cos 183°, cos 100°;
c) tg 12°, tg 18°, tg 142°, tg 148°, tg 170°.

62. Stabiliți corespondența dintre valorile sinusului a unghiului α (1-4) și valorile corespunzătoare ale cosinusului acestui unghi (A-E).

1 0,5 (unghiul α - ascuțit)	**A** $-0,8$
2 0,6 (unghiul α - obtuz)	**B** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
3 $\frac{4}{5}$ (unghiul α - ascuțit)	**C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4 $\frac{1}{3}$ (unghiul α - obtuz)	**D** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
	E 0,6

63. Stabiliți corespondența dintre valorile expresiilor (1-4) și valorile expresiilor (A-E).

1 sin 10°	**A** sin 44°
2 cos 46°	**B** sin 57°
3 sin 123°	**C** cos 134°
4 cos 45°	**D** cos 80°
	E sin 45°

B

64. Calculați:
a) $\sin 29^\circ \cdot \cos 61^\circ - \cos 29^\circ \cdot \cos 151^\circ$;
b) $1 - \sin 37^\circ \cdot \sin 143^\circ - \cos^2 37^\circ$;
c) $\operatorname{tg} 43^\circ \cdot \cos 137^\circ \cdot \cos 47^\circ - \cos 43^\circ \cdot \sin 47^\circ$.

65. Înlocuiți * cu unul din semnele $>$, $<$ sau $=$:
a) sin 12° * cos 80°; c) tg 36° * tg 112°; e) sin 115° * cos 27°;
b) cos 54° * sin 36°; d) cos 36° * sin 31°; f) cos 139° * sin 140°.

66. Aflați măsurile unghiurilor obtuze α, β și γ, dacă se știe:
a) $\sin\alpha = 0,156$; $\sin\beta = 0,309$; $\sin\gamma = 0,719$;
b) $\cos\alpha = -0,921$; $\cos\beta = -0,998$; $\cos\gamma = -0,777$;
c) $\operatorname{tg}\alpha = -0,111$; $\operatorname{tg}\beta = -1,306$; $\operatorname{tg}\gamma = -2,050$.

67. Demonstrați că: a)sin 135° = sin 45° = cos 45°;
b) cos 140° = $-$cos 40° = $-$sin 50°.

68. Demonstrați identitățile:
a) $\sin^2\alpha - \cos(180^\circ - \alpha)\cdot\sin(90^\circ - \alpha) - 1 = 0$;
b) $1 + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\cdot\sin(90^\circ - \alpha)\cdot\sin\alpha = \cos^2(180^\circ - \alpha)$.

69. Demonstrați, că: **a)** $1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; **b)** $1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

70. Aplicând formulele din nr. 69, aflați:

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ și $\mathrm{ctg}\,\alpha$, dacă $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{3}{4}$;

b) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ și $\mathrm{tg}\,\alpha$, dacă $\mathrm{ctg}\,\alpha=2$.

71. Simplificați expresiile:

a) $\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)+\mathrm{tg}^2(180^\circ-\alpha)$;

b) $\left(1-\cos^2(90^\circ-\alpha)\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)$;

c) $\dfrac{\mathrm{tg}^2(180^\circ-\alpha)}{\sin^2\alpha}-1$;   d) $\dfrac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha}-\dfrac{\sin^2(180^\circ-\alpha)}{\sin^2(90^\circ-\alpha)}$.

72. Cosinusul unghiului ascuțit al unui trapez dreptunghic este egal cu $\dfrac{5}{7}$. Aflați sinusurile și cosinusurile ale unghiurilor trapezului.

73. Cosinusul unghiului ascuțit al paralelogramului este egal cu a. Aflați sinusul unghiului obtuz al lui.

74. Sinusul unghiului obtuz al rombului este egal cu a. Aflați cosinusurile ale unghiurilor lui. Pentru care valori ale lui a problema are soluții?

75. Demonstrați: a) sinusurile ale oricăror două unghiuri ale paralelogramului sau ale trapezului isoscel sunt egale; b) suma cosinusurilor a tuturor unghiurilor paralelogramului sau a trapezului este egală cu zero.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

76. Desenați un paralelogram arbitrar *ABCD*. Măsurați cu ajutorul raportului unghiurile lui și aflați a lor sinusuri, cosinusuri și tangente. Datele obținute introduceți-le în tabel. Ce concluzie se poate face?

	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\angle A$				
$\angle B$				
$\angle C$				
$\angle D$				

PROBLEME PENTRU REPETARE

77. Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă tangenta unuia din ei este egală cu - 1.

78. Un sportiv aleargă în direcția de sud 4 km, apoi cotește spre nord și mai aleargă 3 km. Aflați: a) la ce distanță de la punctul inițial a ajuns sportivul; b) cu ce unghi s-a mutat sportivul în raport cu mișcarea în direcția de sud?

79. Latura rombului este egală cu a, iar unghiul ascuțit este α. Aflați diagonalele rombului.

80. Aflați semnul produsului: a) $\sin 146^\circ\cdot\cos 108^\circ\cdot\cos 67^\circ\cdot\mathrm{tg}\,145^\circ$;
b) $\mathrm{tg}\,78^\circ\cdot\sin 92^\circ\cdot\sin 167^\circ\cdot\mathrm{tg}\,178^\circ\cdot\cos 83^\circ$.

§ 3 Coordonatele carteziene

Amintim unele noțiuni deja cunoscute pentru voi. Dreapta pe care este aleasă direcția, originea și segmentul unitate se numește **dreaptă de coordonate**. Fiecărui punct al dreptei de coordonate îi corespunde un singur număr real.

Două drepte reciproc perpendiculare care se intersectează în originea lor comună și au segmente unitate egale se numește **sistem de coordonate rectangular**. Originea comună - punctul, în care se intersectează axele de coordonate, se numește **originea de coordonate.** Axa orizontală - axa *OX* este numită **axa absciselor**, iar axa verticală - axa *OY* - **axa ordonatelor**.

Planul, în care este definit sistemul de coordonate, se numește **plan de coordonate.**

Axele de coordonate împart planul de coordonate în patru cadrane, în fiecare din ele se păstrează semnele ambelor coordonate (fig.17).

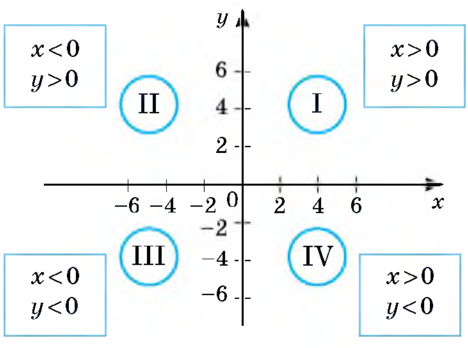


Fig.17

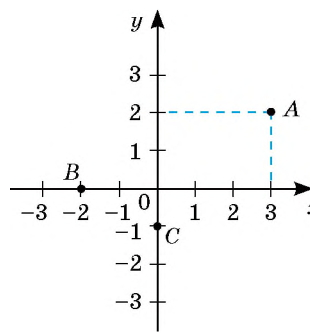


Fig.18

Poziția punctului pe planul de coordonate se dă cu două numere – cu coordonatele lui. De exemplu, punctul *A* are abscisa 3 și ordonata 2 (fig.18). Se scrie așa: A (3;2). Punctul *O* – originea de coordonate are coordonatele 0 și 0. Punctele situate pe axa *OX*, au ordonatele egale cu zero (y=0); punctele, care sunt situate pe axa *OY* au abscisele ce sunt egale cu zero (x=0). În figura 18 acestea sunt punctele $B(-2;\ 0)$ și $C(0;\ -1)$.

Scrierea *X (m; n)* înseamnă: punctul *X* are coordonatele *m* (abscisa) și *n* (ordonata).

Fiecărui punct al planului de coordonate îi corespunde o singură pereche de numere reale, iar fiecărei perechi de numere reale – un singur punct al planului de coordonate. Datorită corespondenței reciproc univoce dintre perechile de numere reale și punctele planului de coordonate dependența dintre punctele planului de coordonate poate fi exprimată prin corelații algebrice dintre coordonatele lor.

Aceasta permite rezolvarea problemelor geometrice cu *metoda coordonatelor*. Însă pentru aceasta trebuie de știut proprietățile coordonatelor.

TEOREMA 1

Fiecare coordonată a mijlocului segmentului este egală cu semisuma coordonatelor respective ale extremităților lui.
Adică, dacă punctele $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ —extremitățile segmentului AB, iar $C(x; y)$ —mijlocul lui, atunci: :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ adică } C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

DEMONSTRAŢIE.

Fie că punctele A și B sunt amplasate așa cum se reprezintă în figura 19. Ducem prin ele drepte paralele cu axele de coordonate. Totodată se vor forma trapezele ABB_yA_y și ABB_xA_x, în care

$AA_y = x_1$, $BB_y = x_2$, $AA_x = y_1$, $BB_x = y_2$.

Deoarece C – mijlocul segmentului AB, rezultă că CC_y și CC_x — sunt linii medii ale acestor trapeze. Conform teoremei despre linia medie a trapezului avem:

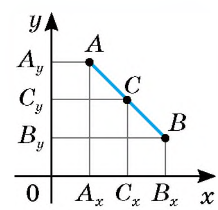


Fig.19

$$CC_y = \frac{AA_y + BB_y}{2};\ CC_x = \frac{AA_x + BB_x}{2}, \quad \text{sau} \quad CC_y = \frac{x_1 + x_2}{2},\ CC_x = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Obținem:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Noi am examinat cazul când segmentul AB nu este paralel cu nici una din axele de coordonate și nu le intersectează. După cercetarea altor cazuri posibile (executați aceasta de sine stătător)ajungem la concluzia generală: dacă $C(x; y)$ este mijlocul segmentului cu extremitățile $A(x_1; y_1)$ și B $(x_2; y_2)$, atunci

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \ \square$$

Exemplu. Mijlocul segmentului cu extremitățile $A(-3; 5)$ și $B(3; 7)$ este pucntul $C(0; 6)$, deoarece

$$\frac{-3+3}{2} = 0 \text{ și } \frac{5+7}{2} = 6.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Rezolvând problema cu **metoda coordonatelor** figurile examinate sunt amplasate în planul de coordonate. Atribuind unor puncte aparte ale figurilor coordonate, iar liniilor-ecuaţii, sunt calculate coordonatele altor puncte, sunt deduse ecuaţiile altor linii. Confruntând coordonatele iniţiale şi altele coordonate ale punctelor cu ecuaţiile, este găsit răspunsul.

Problemă. Demonstraţi că mijlocurile segmentelor, care unesc mijlocurile laturilor opuse ale unui patrulater, coincid.

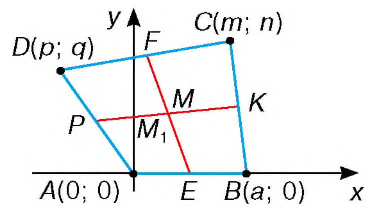


Fig.20

Rezolvare. Admitem, că $ABCD$ — patrulater arbitrar, E, K, F, P — mijlocurile laturilor lui, M şi M_1 — mijlocurile segmentelor EF şi KP (fig.20). Să demonstrăm că punctele M şi M_1 coincid.

Introducem sistemul de coordonate în aşa mod, ca originea lui să fie punctul A, iar latura AB să fie situată pe axa x. Notăm coordonatele vârfurilor ale patrulaterului dat: $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(m;\ n)$, $D(p;\ q)$. Exprimăm prin ele coordonatele mijlocurilor ale segmentelor AB, CD, BC, AD, KP, EF: $E\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, $F\left(\frac{m+p}{2};\ \frac{n+q}{2}\right)$,

$K\left(\frac{a+m}{2};\ \frac{n}{2}\right)$, $P\left(\frac{p}{2};\ \frac{q}{2}\right)$, $M\left(\frac{a+m+p}{4};\ \frac{n+q}{4}\right)$, $M_1\left(\frac{a+m+p}{4};\ \frac{n+q}{4}\right)$.

Coordonatele corespunzătoare ale punctelor M şi M_1 sunt egale. Deci, aceste puncte coincid.

Pentru a rezolva probleme mai complicate se utilizează teorema generală.

Teorema 2

Dacă punctul $C(x_C;\ y_C)$ împarte segmentul AB în raportul $AC:CB=\lambda$, atunci

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda} \text{ şi } y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Demonstraţi-o independent.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSCĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numeşte sistem de coordonate?
2. Ce se numeşte plan de coordonate?
3. Ce se numeşte origine a sistemului de coordonate?
4. Cum sunt numite axele de coordonate?
5. Ce sunt numite coordonate ale punctului?
6. Formulaţi şi demonstraţi teorema despre coordonatele mijlocului segmentului.

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Punctul C – mijlocul segmentului AB. Aflaţi coordonatele punctului B, dacă $A(2; -7)$, $C(4; 1)$.

- Deoarece C — mijlocul segmentului AB, rezultă că:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ şi } y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Atunci $4 = \frac{2 + x_B}{2}$; $2 + x_B = 8$; $x_B = 6$. Analogic $1 = \frac{-7 + y_B}{2}$; $-7 + y_B = 2$; $y_B = 9$.
Deci, $B(6; 9)$.

2 Demonstraţi că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, dacă $A(1; 2)$, $B(6; -2)$, $C(-3; -4)$, $D(-8; 0)$ (fig.21).

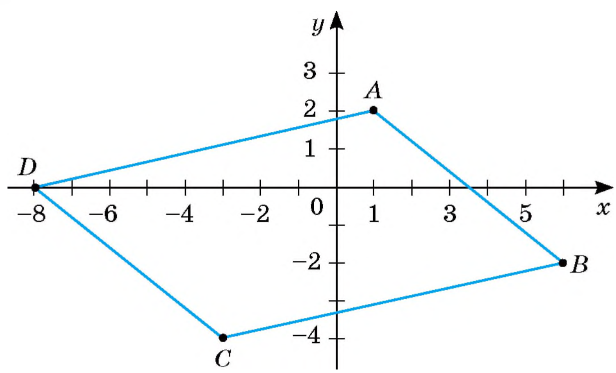


Fig.21

- Patrulaterul, în care diagonalele se intersectează şi sunt împărţite în jumătăţi de către punctul lor de intersecţie, este paralelogram. Să demonstrăm că pentru patrulateral dat acest criteriu se realizează. Admitem că M este mijlocul diagonalei AC, atunci:

$$x_M = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_M = \frac{2-4}{2} = -1. \text{ Deci, } M(-1; -1).$$

Dacă K – mijlocul diagonalei BD, atunci

$$x_K = \frac{6-8}{2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+0}{2} = -1. \text{ Deci, } K(-1; -1).$$

Punctele M şi K au aceleaşi coordonate. Aceasta înseamnă că punctele M şi K coincid, adică diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul cu coordonatele $(-1; -1)$ şi sunt împărţite în acest punct în jumătăţi. Deci, $ABCD$ - paralelogram.

Probleme şi exerciţii

Efectuaţi oral

81. Declinaţi îmbinările de cuvinte: *ordonata punctului, axele de coordonate, axa absciselor.*

82. Care din punctele $A(0;\ 2)$, $B(-3;\ 0)$, $C(2;\ 7)$, $D(0;\ 4)$, $E(2;\ 0)$, $F(-7;\ 0)$, $O(0;\ 0)$ sunt situate pe: a) axa OX; b) axa OY; c) pe axele OX şi OY în acelaşi timp?

83. Sunt date punctele: $A(2;\ -3)$, $B(4;\ 6)$, $C(-5;\ 7)$, $D(-1;\ -3)$. Care din segmentele AB, BC, CD, AD, AC, BD intersectează: a) axa OX; b) axa OY; c) fiecare din axe? Care din aceste segmente sunt paralele cu axa OX?

84. Sunt date punctele: $O(0;\ 0)$, $A\ (4;\ 6)$, $B\ (-2;\ 8)$, $M(m;\ n)$. Aflaţi coordonatele mijlocului segmentelor: a) OA; b) OB; c) OM; d) AB.

85. Oare este punctul $K(-3;\ 7)$ mijlocul segmentului AB, dacă $A(-9;\ 4)$, $B(3;\ 10)$; punctul $P\ (-6;\ 5)$ —mijlocul segmentului AK? Găsiţi coordonetele mijlocului al segmentului BK.

A

86. Notaţi în planul de coordonate punctele $A\ (4;\ 1)$, $B\ (-2;\ -3)$, $C\ (0;\ 3)$, $D\ (-1;\ 2)$, $E(4;\ 0)$.

87. Construiţi în planul de coordonate segmentul, ale cărui extremităţi sunt punctele $A(3;\ -1)$ şi $B(-2;\ 4)$. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale segmentului AB cu axele de coordonate.

88. Folosind figura 22 aflaţi coordonatele vârfurilor ale dreptunghiului $ABCD$, ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate.

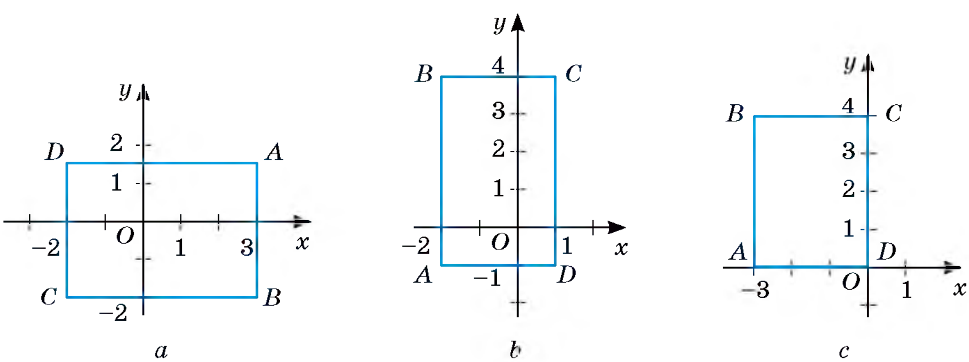


Fig. 22

89. Construiţi dreptunghiul ale cărui trei vârfuri sunt situate în punctele $(2;\ 5)$, $(-1;\ 5)$, $(-1;\ -3)$. Aflaţi coordonatele celui de-al patrulea vârf.

90. Latura pătratului are lungimea de 5 unități. Unul din vârfurile lui este situat în originea de coordonate, iar celelalte două - pe axele de coordonate și au coordonate nenegative. Aflați coordonatele ale tuturor vârfurilor pătratului.

91. Punctul de intersecție al diagonalelor rombului coincide cu originea de coordonate, iar diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate. Aflați coordonatele vârfurilor ale rombului, dacă lungimile diagonalelor constituie 6 unități și 10 unități. Câte soluții are problema?

92. Găsiți coordonatele mijlocului al segmentului AB, dacă $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.

93. Copiați tabelul în caiet. În pătrățelele goale indicați coordonatele mijlocurilor ale segmentelor corespunzătoare.
Model: mijlocul segmentului XB – punctul cu coordonatele (1; 4).

	$A(0;\ 4)$	$B(2;\ 6)$	$C(-2;\ 5)$
$X(0;\ 2)$		(1; 4)	
$Y(-4;\ 6)$			
$Z(-6;\ 12)$			

94. BM — meridiana $\triangle ABC$. Aflați coordonatele punctului M, dacă $A(-1;\ 15)$, $C(7;\ -9)$.

95. M — mijlocul segmentului AB. Aflați coordonatele punctului B, dacă $A(1;\ 4)$, $M(2;\ -3)$.

96. $O(4;\ -1)$ — punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Găsiţi coordonatele punctelor a) C, dacă $A(-2;\ 3)$; b) B, dacă $D\ (6;\ -4)$.

97. Segmentele AB și CD se intersectează în punctul M, care este mijlocul fiecăruia din ei. Aflați coordonatele punctelor M și D, dacă $A\ (-2;\ 5)$, $B(4;\ 1)$, $C(-1;\ -3)$.

98. Sunt date punctele $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 7)$, $C(4;\ 3)$. Găsiţi coordonatele extremităţilor ale liniilor medii a $\triangle ABC$.

B

99. MN — linia medie a $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$ (fig.23). Aflați coordonatele punctelor A și B, dacă $C(2;\ 6)$, $M(-4;\ 2)$, $N(4;\ 0)$.

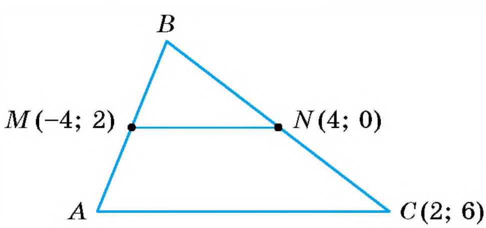


Fig.23

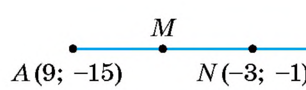


Fig.24

100. Punctele K, P, T împart segmentul AB în 4 părți egale. Aflați coordonatele punctelor K, P, T, dacă $A\ (2;\ 3)$ și $B\ (6;-4)$.

101. Segmentul AB este împărțit în patru părți egale: $AM = MN = NK = KB$ (fig.24). Aflați coordonatele punctelor M, K, B, dacă $A(9; -15)$, $N(-3; -1)$.

102. Sunt date punctele $A(-3; 4)$, $B(a; 2)$, $C(5; b)$. Pentru care valori ale lui a și b: a) A — mijlocul lui BC; b) B — mijlocul lui AC; c) C —mijlocul lui AB?

103. Punctele $M(1; 2)$, $N(0; 4)$, $P(3; 5)$ sunt mijlocurile laturilor ale $\triangle ABC$. Aflați coordonatele punctelor A, B, C.

104. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile $A(0; 3)$, $B(3; 4)$, $C(5; 2)$ și $D(2; 1)$ este paralelogram.

105. Sunt date punctele $A(3; 7)$, $B(-1; 3)$, $C(-7; 4)$, $D(-3; 8)$. Demonstrați că: a) $ABCD$ — paralelogram; b) patrulater ale cărui vârfuri sunt mijlocurile laturilor ale patrulaterului $ABCD$, - paralelogram.

106. Sunt date trei vârfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$: $A(3; 5)$, $B(5; 1)$, $C(-1; 3)$.Aflați coordonatele punctului D.

107. Sunt date trei vârfuri ale paralelogramului $P(1; 3)$, $H(3; 4)$, $E(4; 2)$. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vârf. Câte soluții are problema?

108. Segmentul AB este împărțit în trei părți egale de către punctele M și N. Aflați coordonatele punctelor M și N, dacă $A(7; -2)$, $B(4; 4)$.

109. Aflați coordonatele punctului de intersecție al medianelor $\triangle ABC$, dacă $A(-1; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; -3)$.

110. Punctul de intersecție al medianelor $\triangle ABC$ este M. Aflați coordonatele punctului C, dacă $A(0; 8)$, $B(1; -4)$, $M(-2; 2)$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

111. În geografie pentru determinarea locului real al unui punct se aplică un sistem de coordonate original. Coordonatele geografice se dau în grade și minute. În tabel sunt aduse coordonatele geografice ale unor orașe din Ucraina. Găsiți pe hartă punctul ale cărui coordonate coincid cu coordonatele mijlocului a segmentului, care unește orașele. a) Luțk și Harkov; b) Lvov și Odesa. Oare aparțin aceste puncte teritoriului Ucrainei? Care localități se află în apropierea punctelor găsite?

Orașul	Latitudinea	Longitudinea
Kiev	$50°27'$	$30°30'$
Luțk	$50°45'$	$25°15'$
Harkov	$50°00'$	$36°13'$
Lvov	$49°51'$	$24°02'$
Odesa	$46°28'$	$30°44'$

Probleme pentru repetare

112. Calculaţii:

a) $\dfrac{\sin 35^\circ}{\sin 145^\circ} + \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$; b) $\dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} + \dfrac{\cos 12^\circ}{\sin 78^\circ}$.

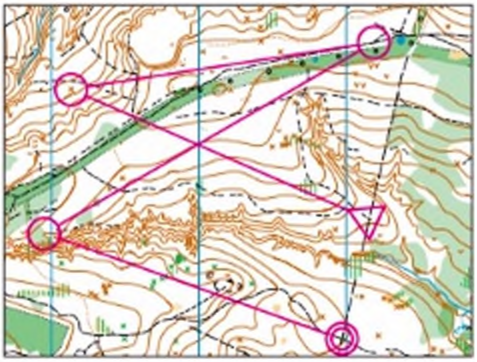
113. Unghiul la centru este egal cu 30°. Aflaţi măsura unghiului înscris corespunzător.

114. Aflaţi aria triunghiului dreptunghic, diferenţa catetelor ale căruia este egală cu 2 cm, iar ipotenuza cu 10 cm.

115. Aflaţi aria triunghiului dreptunghic cu unghiul ascuţit α, dacă raza circumferinţei, circumscrise lui, este egală cu R.

116. Diagonala trapezului isoscel este bisectoarea unghiului ascuţit. Aflaţi aria trapezului, dacă perimetrul lui este egal cu 52 cm, iar bazele sunt proporţionale cu numerele 5 şi 11.

Geometria din jurul nostru



Orientarea pe teren

§ 4 Distanţa dintre puncte

Dacă sunt cunoscute coordonatele a două puncte din planul de coordonate atunci poate fi determinată distanța dintre aceste puncte.

TEOREMA 3

Pătratul distanței dintre două puncte este egal cu suma pătratelor diferenților coordonatelor corespunzătoare ale lor.
Adică dacă sunt cunoscute coordonatele punctelor $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, atunci

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

DEMONSTRAŢIE.

Să cercetăm mai întâi cazul când $x_1 \neq x_2$ și $y_1 \neq y_2$ (fig.25). Ducem perpendicularele AA_x, BB_x pe axa x și AA_y, BB_y pe axa y. În triunghiul dreptunghic obținut ABD (D — punctul de intersecție al dreptelor BB_y și AA_x) AB — ipotenuză, iar catete sunt $AD = |y_2 - y_1|$ și $BD = |x_2 - x_1|$. Conform teoremei a lui Pitagora:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (*)$$

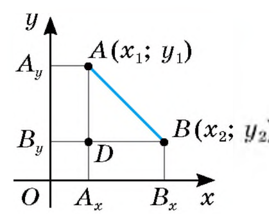


Fig. 25

Dacă $y_1 = y_2$ și $x_1 \neq x_2$, atunci $AB = |x_2 - x_1|$. Același rezultat în acest caz îl obținem din formula (*). Dacă, $x_1 = x_2$ și $y_1 \neq y_2$, atunci $AB = |y_2 - y_1|$. Tot așa un rezultat îl obținem din formula (*). În sfârșit, dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$, adică dacă punctele A și B coincid, formula (*) dă rezultatul trebuincios: $AB=0$.

Așadar, cum n-ar fi repartizate în planul de coordonate punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$, totdeauna

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \ \square$$

Această egalitate poate fi scrisă și astfel:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplu. Să aflăm distanța dintre punctele $A(6; -1)$ și $B(2; -4)$.

$$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Încă o dată atrageți atenția la figura 25. A_xB_x —asta-i proiecția segmentului AB pe axa x, A_yB_y — proiecția segmentului AB pe axa y. Din raționamentele anterioare reiese că,

$$AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2.$$

Pătratul lungimii segmentului este egal cu suma pătratelor proiecțiilor lui pe două drepte reciproc perpendiculare.

Această afirmație este generalizarea teoremei a lui Pitagora. Doar catetele fiecărui triunghi dreptunghic sunt proiecțiile ipotenuzei lui pe două drepte reciproc perpendiculare cărora le aparțin catetele lui (fig.26). Însă afirmația formulată este adevărată nu numai pentru dreptele cărora le aparțin catetele triunghiului, dar și pentru orice drepte reciproc perpendiculare și pentru un segment arbitrar AB, în particular și pentru astfel de segmente, ca cele din figura 27.

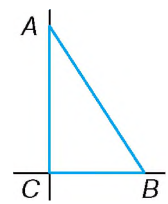


Fig.26

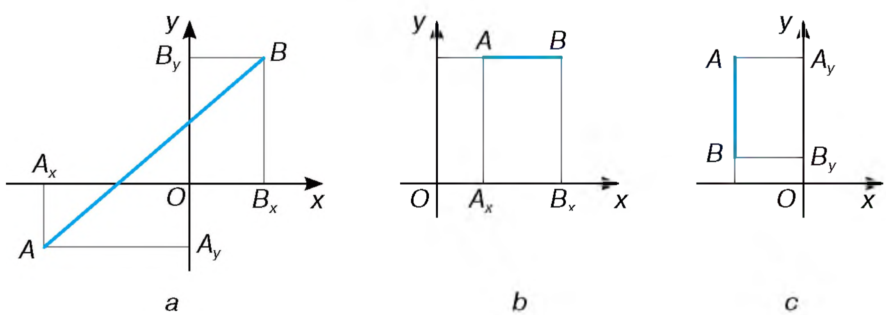


Fig.27

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați teorema despre pătratul distanței dintre două puncte.
2. Demonstrați teorema despre pătratul distanței dintre două puncte.
3.Cum de aflat lungimea segmentului, dacă sunt cunoscute coordonatele extremităților lui?
4.Cum de aflat distanța de la originea sistemului de coordonate până la punctul $A(x;\ y)$?

Efectuăm împreună

1 Demonstrați că $\triangle ABC$ este isoscel, și aflați lungimea medianei, duse la bază, dacă $A(-5;\ 3)$, $B(2;\ 7)$, $C(3;\ -1)$.

● Să aflăm lungimile laturilor triunghiului:

$$AB=\sqrt{(2+5)^2+(7-3)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65};$$

$$AC=\sqrt{(3+5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5};$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}.$$

Deci, $AB = BC$. Aceasta înseamnă că $\triangle ABC$ este isoscel cu baza AC. Pentru a afla lungimea medianei, duse la bază, aflăm coordonatele punctului M – a mijlocului segmentului AC:

$$x=\frac{-5+3}{2}=-1;\quad y=\frac{3-1}{2}=1.$$

Deci, $M(-1;\ 1)$. Atunci $BM=\sqrt{(-1-2)^2+(1-7)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Așadar, $\triangle ABC$ — isoscel și mediana lui $BM=3\sqrt{5}$.

2 Oare este adevărat că fiecare din punctele $A(m;\ n)$, $B(-m;\ n)$, $C(-m;\ -n)$, $K(n;\ m)$, $P(-n;\ m)$, $T(-n;\ -m)$ este situat la aceeași distanță de la originea de coordonate?

● Deoarece originea de coordonate este punctul $O(0;\ 0)$, avem:

$$OA=\sqrt{(m-0)^2+(n-0)^2}=\sqrt{m^2+n^2};$$

$$OB=\sqrt{(-m-0)^2+(n-0)^2}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Analogic aflăm că fiecare din distanțele OC, OK, OP, OT de asemenea este egală cu $\sqrt{m^2+n^2}$. Așadar, punctele A, B, C, K, P, T se găsesc la aceeași distanță de la originea de coordonate.

Probleme și exerciții

Efectuați oral

117. Aflați distanța de la originea de coordonate până la punctele: $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(-4;\ 3)$, $D(1;\ 1)$, $E(3;\ 1)$.

118. Aflați distanța de la punctul $M(4;\ -3)$ până la: a) axa OX; b) axa OY; c) originea de coordonate.

119. Aflați distanța dintre punctele: a) $A(4;\ 0)$ și $B(7;\ 0)$; b) $M(0;\ 3)$ și $N(0;\ 5)$; c) $P(3;\ 0)$ și $K(0;\ 4)$.

120. Aflați x, dacă: a) punctul $M(x;\ 4)$ este egal depătrat de la axele de coordonate; b) punctul $P(-2;\ x)$ este depărtat de axa OX cu 5 unități; c) punctul $K(x;\ -5)$ se află la distanța de 3 unități de la OY.

A

121. Aflaţi lungimea segmentului AB, dacă $A(-4;\ 4)$ şi $B(2;\ -4)$.

122. Aflaţi distanţa dintre punctele:
a) $K(0;\ 5)$ şi $P(-2;\ 6)$;
b) $A(-2;\ 6)$ şi $B(3;\ -2)$;
c) $X\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}\right)$ şi $Y\left(\frac{1}{3};\ \frac{3}{4}\right)$;
d) $O(0;\ 0)$ şi $B(5;\ 5)$.

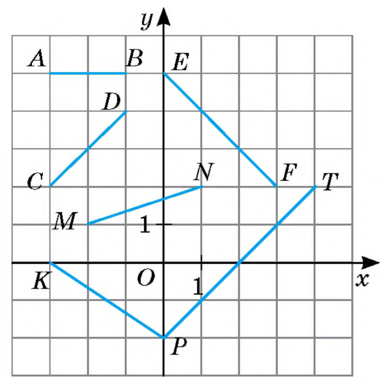


Fig.28

123. Aflaţi distanţele de la originea de coordonate până la punctele $A(2;\ 3)$, $B(-2;\ 6)$, $C(-3;\ 4)$, $D(-12;\ 5)$.

124. Aflaţi lungimile segmentelor, reprezentate în figura 28, dacă AB=2.

125. Folosind datele din tabel aflaţi lungimile segmentelor XA, XB ş.a.m.d. Deplasaţi tabelul în caiet şi completaţi-l.

	$A(2;\ 4)$	$B(-1;\ 3)$	$C(1;\ -5)$	$D(6;\ 7)$
$X(-2;\ 4)$				
$Y(0;\ 3)$				

126. Aflaţi perimetrul $\triangle ABC$, dacă $A(-2;\ 5)$, $B(7;\ 8)$, $C(2;\ -7)$.

127. Se dă $\triangle ABC$ cu vârfurile $A(-2;\ 5)$, $B(6;\ 3)$, $C(4;\ -3)$. Aflaţi lungimile liniilor medii ale triunghiului.

128. Aflaţi lungimea liniei medii a trapezului $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, dacă $A(-3;\ -1)$, $B(3;\ 7)$, $C(7;\ 3)$, $D(4;\ -1)$.

129. Aflaţi lungimile diagonalelor ale patrulaterului $ABCD$, dacă $A(4;\ -3)$, $B(7;\ 10)$, $C(-8;\ 2)$, $D(-1;\ -5)$.

130. Aflaţi lungimile medianelor ale $\triangle ABC$, dacă: a) $A(-4;\ -2)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ 2)$; b) $A(-5;\ 1)$, $B(-3;\ 5)$, $C(-1;\ -1)$.

131. O maşină-unealtă este astfel programată că ea perforează în fiecare piesă 7 găuri fine. Centrul piesei este situat în originea de coordonate, iar găurile sunt perforate în punctele cu coordonatele (1;2), (2; −3), (3; 0), (0; 0), (−1; 2), (−2; −3), (−3; 0). Aflaţi cea mai mare distantă dintre găurile piesei.

132. Demonstraţi că triunghiul cu vârfurile: a) $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ -2)$, $C(6;\ 2)$ — dreptunghic; b) $M(-5;\ 2)$, $N(3;\ 6)$, $K(4;\ -6)$ este isoscel.

133. Demonstraţi că triunghiul cu vârfurile $A(2;\ 3)$, $B(-2;\ 1)$, $C(0;\ -3)$ este dreptunghic isoscel.

B

134. Un drum de munte trece printr-un tunel, a cărui lungime este egală cu $\sqrt{10}$ km (fig. 29). Punctul cel mai de sus al tunelului are coordonatele $A(2; 4)$. Aflaţi ordonata celui de mai jos punct al tunelului, dacă abscisa lui este egală cu 5 (coordonatele punctelor sunt date în kilometri). Cu ce este egal unghiul de înclinare al tunelului?

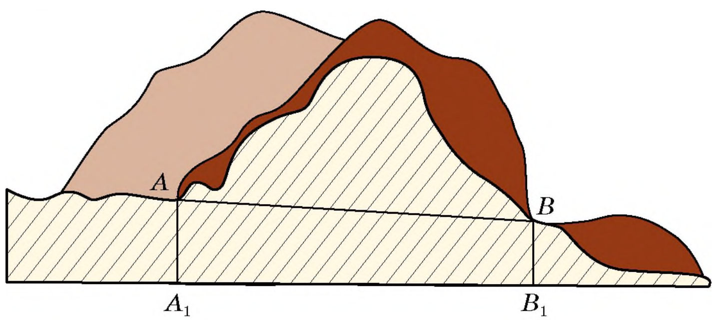


Fig.29

135. Aflaţi x, dacă: a) $AB = 2$, $A(2; 1)$, $B(x; -1)$; b) $AB = 10$, $A(2x; 7)$, $B(x; 1)$; c) $AB = 5$, $A(-1; x)$, $B(2x; -3)$.

136. Aflaţi coordonatele punctului, egal depărtat de la punctele $A(-5; 1)$ și $B(3; -1)$, dacă el este situat pe: a) axa absciselor; b) axa ordonatelor; c) dreapta $y=x$.

137. Găsiţi pe dreapta $y = 2x$ punctul, egal depărtat de la punctele $M(5; 2)$ și $N(-1; 4)$.

138. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-4; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(11; -3)$, $D(8; -7)$ este paralelogram. Aflaţi perimetrul lui.

139. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-5; -2)$, $B(-3; 2)$, $C(3; -1)$, $D(1; -5)$ este dreptunghi. Aflaţi perimetrul, aria lui și raza circumferinţei circumscrise lui.

140. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-5; -2)$, $B(-4; 5)$, $C(3; 6)$, $D(2; -1)$ este romb. Aflaţi perimetrul și lungimile diagonalelor lui.

141. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-2; 0)$, $B(-4; 6)$, $C(2; 8)$, $D(4; 2)$ este pătrat. Aflaţi a lui perimetru și arie, de asemenea, razele circumferinţelor înscrise și cirmuscrisele lui.

142. Fără a face construcţia clarificaţi dacă punctele A, B, C sunt situate pe o dreaptă, știind că $A(-6; -5)$, $B(2; 1)$, $C(6; 4)$.

143. Demonstraţi că punctele $M(-2; -1)$, $N(2; 7)$, $K(-1; 1)$ sunt situate pe o dreaptă. Aflaţi raportul lungimilor ale segmentelor MK și KN.

144. Oare sunt asemenea triunghiurile ABC și KBP, dacă:
a) $A(-5; -3)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$, $K(-4; -1)$, $P(2; 2)$;
b) $A(3; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-5; -3)$, $K(2; 2)$, $P(-2; 4)$?

145. Găsiţi raza circumferinţei, circumscrise $\triangle ABC$, dacă $A(-2; 4)$, $B(-6; 4)$, $C(-4; 2)$.

146. Aflaţi aria triunghiului ABC, dacă vârfurile lui sunt determinate de coordonatele $A(-5; 5)$, $B(2; 9)$, $C(1, 1)$.

147. AL — bisectoarea triunghiului ABC. Aflaţi lungimile segmentelor BL și CL, dacă $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(5; -5)$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

148. Notaţi în planul de coordonate punctele $A(3; 2)$ și $C(7; 4)$. Construiţi pătratul $ABCD$. Aflaţi perimetrul și aria pătratului, de asemenea, distanţele de la centrul lui și a punctelor B, C până la originea de coordonate.

PROBLEME PENTRU REPETARE

149. Un pătrat este amplasat în sistemul de coordonate astfel, că diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate. Aflaţi coordonatele vârfurilor pătratului, dacă diagonala lui este egală cu 4.

150. Aflaţi coordonatele mijlocurilor ale laturilor triunghiului ABC, dacă $A(-4; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 5)$.

151. Aflaţi coordonatele vârfurile A al paralelogramului $ABCD$,dacă $B(11; -3)$, $C(8; 7)$, $D(-4; -2)$.

152. În figura 30 este reprezentată circumferinţa și elementele ei. Stabiliţi corespondenţa dintre elemntele circumferinţei *(1-4)* și însemnările lor în figură *(A - E)*.

1	Coardă	**A**	CE
2	Tangentă	**B**	OM
3	Diametru	**C**	CO
4	Rază	**D**	HC
		E	AB

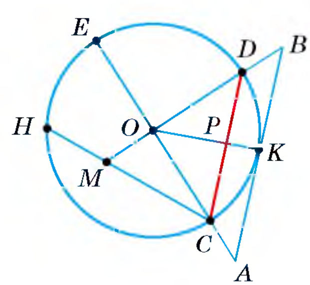


Fig. 30

§ 5 Ecuaţia circumferinţei

Ecuaţie a figurii în planul de coordonate este numită ecuaţia cu două variabile, care este satisfăcută de coordonatele fiecărui punct al figurii date, și numai de coordonatele punctelor ale figurii date.

Să examinăm ecuaţiile a două figuri care cel mai frecvent sunt întâlnite în geometrie: a circumferinţei și a dreptei (vezi § 6).

Fie că este dată circumferinţa de rază r cu centrul în punctul $A(a;\ b)$ (fig.31).Dacă $M(x;\ y)$ este un punct arbitrar al acestei circumferinţe, atunci $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Însă $AM = r$, de aceea $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. (*)

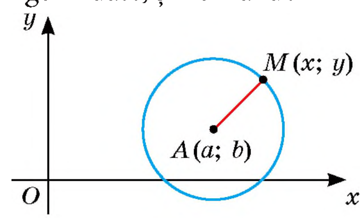


Fig. 31

Din ecuaţia (*) rezultă că coordonatele x și y ale fiecărui punct M (x;y) al circumferinţei date satisfac ecuaţia (*). Invers, orice punct M $(x;\ y)$, ale cărui coordonate satisfac ecuaţia (*), este situat pe circumferinţa dată, fiindcă distanţa lui de la punctul A este egală cu r. Așadar, ecuaţia (*) este ecuaţia circumferinţei de rază r și cu centrul $A(a;\ b)$. Dacă centrul circumferinţei este originea de coordonate, adică a=0 și b=0, atunci ecuaţia a unei astfel de circumferinţă de rază r va avea înfăţișarea:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Știind ecuaţia circumferinţei se poate rezolva și așa probleme geometrice, referitoare la circumferinţă, care cu alte metode sunt foarte greu de rezolvat.

Problemă. Se dă segmentul AB cu lungimea $2a$ și circumferinţa de rază r cu centrul în mijlocul lui AB. Demonstraţi că suma pătratelor distanţelor de la orice punct al circumferinţei până la punctele A și B este constantă. Aflaţi această sumă.

Rezolvare. Repartizăm segmentul dat și circumferinţa în planul de coordonate așa cum se reprezintă în figura 32. Extremităţile segmentului au următoarele coordonate: $A(a;\ 0)$, $B(-a;\ 0)$.

Dacă $M(x;\ y)$ este un punct arbitrar al circumferinţei, atunci $x^2 + y^2 = r^2$, $MA^2 = (x - a)^2 + y^2$, $MB^2 = (x + a)^2 + y^2$.

Atunci $MA^2 + MB^2 = (x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 =$
$= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + y^2 = 2(x^2 + y^2 + a^2) =$
$= 2(r^2 + a^2)$.

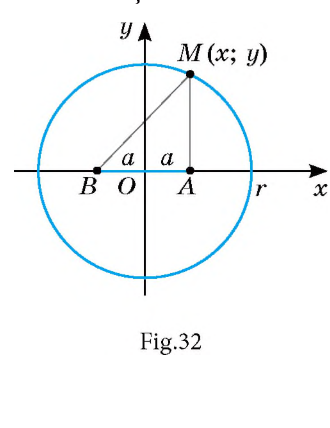


Fig.32

Pentru a și r daţi expresia $2(r^2 + a^2)$ are valoare constantă.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulaţi definiţia ecuaţiei a unei figuri.
2. Formulaţi definiţia circumferinţei.
3. Ce ecuaţie are circumferinţa cu centrul în punctul A (a; b) de raza r?
4. Deduceţi ecuaţia circumferinţei.
5. Care este ecuaţia circumferinţei de raza r cu centrul în originea sistemului de coordonate?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Scrieţi ecuaţia circumferinţei de raza 3, care este tangentă la ambele axe de coordonate.

- Se vede în figura 33 că astfel de circumferinţe sunt patru. Deoarece OAO_1B — este pătrat cu latura 3, rezultă că $O_1(3; 3)$. De aceea circumferinţa cu centrul în punctul O_1 are înfăţişarea: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$.
Analogic putem deduce ecuaţiile şi a altor circumferinţe. Deoarece $O_2(3; -3)$, $O_3(-3; -3)$, $O_4(-3; 3)$, avem că ecuaţiile circumferinţelor corespunzătoare sunt: $(x-3)^2+(y+3)^2=9$, $(x+3)^2+(y+3)^2=9$, $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

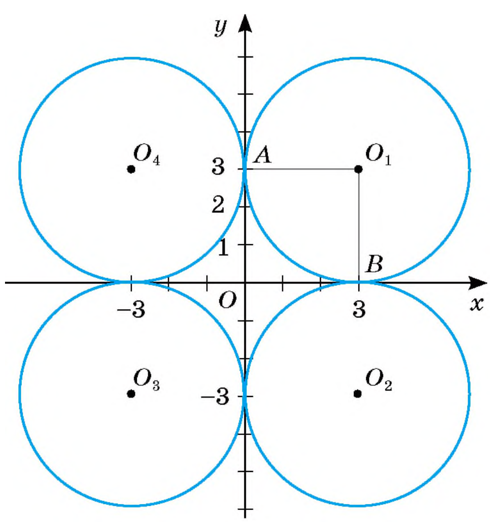


Fig.33

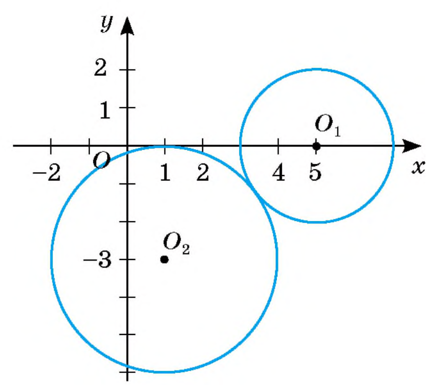


Fig.34

2 Pentru care valori ale parametrului a ($a \neq 0$) au contact exterior (tangenţă exterioară) cirumferinţele ale căror ecuaţii sunt $x^2+y^2-10x+21=0$ şi $x^2+y^2-2x+6y=a^2-10$?

- Să aflăm coordonatele centrelor şi razele circumferinţelor date (fig.34). Transformăm prima ecuaţie:

$$(x^2-10x+25)-25+y^2+21=0;\ (x-5)^2+y^2=4.$$

Deci prima ecuaţie – aceasta-i ecuaţia circumferinţei cu centrul $O_1(5;\ 0)$ de raza $R_1 = 2$.
Analogic pentru a doua ecuaţie obţinem: $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = a^2 - 10$; $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = a^2$.
Așadar, a doua ecuaţie este ecuaţia circumferinţei cu centrul $O_2(1;\ -3)$ de raza $|a|$.
Două circumferinţe au tangenţă exterioară, dacă distanţa dintre centrele lor este egală cu suma razelor lor. Deoarece $O_1O_2 = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$, reiese că circumferinţele sunt tangente dacă $2 + |a| = 5$, de unde $|a| = 3$, adică $a = \pm 3$. Așadar circumferinţele date sunt tangente exterior pentru $a = \pm 3$.

Probleme și exerciţii

Efectuaţi oral

153. Indicaţi coordonatele centrului și raza circumferinţei, dată de ecuaţia:
a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$; b) $x^2 + (y + 1)^2 = 16$;
c) $x^2 + y^2 = 1$; d) $(x + 5)^2 + y^2 = 7$.

154. Care din ecuaţii sunt ecuaţii ale circumferinţei:
a) $x^2 + y^2 = 25$;
b) $5x^2 + 5(y - 1) = 9$;
c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
d) $3x^2 + y^2 = 27$;
e) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -4$;
f) $4(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 16$?

155. Căreia din circumferinţele, reprezentate în figura 35, corespunde ecuaţia circumferinţei:
a) $x^2 + y^2 = 1$;
b) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$;
c) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
d) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$?

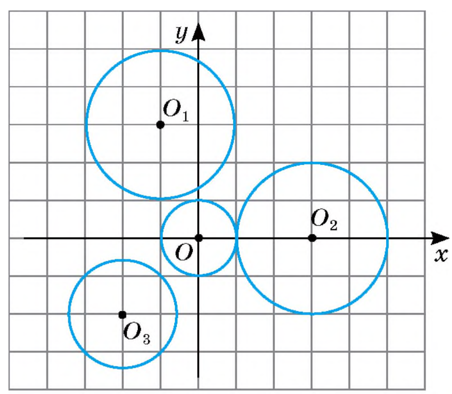


Fig.35

A

156. De stabilit corespondenţa dintre locul aflării al centrelor circumferinţelor (1-4) și ecuaţiile corespunzătoare ale acestor circumferinţe (A-E).

1	Este situat în originea de coordonate.	**A**	$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
2	Este situat pe axa absciselor OX	**B**	$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$
3	Este situat pe axa ordonatelor OY	**C**	$x^2 + (y + 5)^2 = 25$
4	Este egal depărtat de la axele de coordonate și nu este situat în originea de coordonate	**D**	$x^2 + y^2 = 5$
		E	$(x + 3)^2 + y^2 = 9$

157. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(x;\ y)$ de raza R, dacă: a) $A(-1;\ 2)$, $R = 5$; b) $A(0;\ 0)$, $R = 3$; c) $A(3;\ -1)$, $R = \sqrt{2}$; d) $A(-3;\ -3)$, $R = 6$.

158. Scrieţi ecuaţiile circumferinţelor, reprezentate în figura 36.

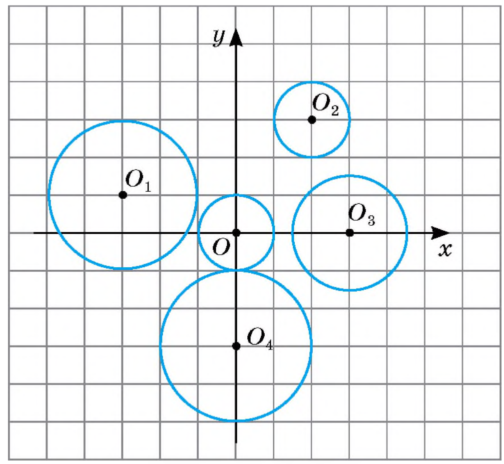


Fig.36

159. Construiţi în sistemul de coordonate trei circumferinţei de raze diferite şi cu centre diferite. Scrieţi ecuaţiile acestor circumferinţe.

160. Compuneţi ecuaţia circumferinţei de diametrul AB, dacă:
a) $A(1;\ 3)$, $B(-5;\ -3)$;
b) $A(-2;\ 4)$, $B\ (6;\ -2)$;
c) $A(5;\ -1)$, $B\ (-3;\ 5)$;
d) $A(0;\ -3)$, $B\ (1;\ 4)$.

161. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(-1;\ 4)$, care: a) este tangentă la axa absciselor OX; b) are contact cu axa OY.

162. Scrieţi ecuaţia circumferinţei de raza 5: a) cu centrul pe axa ordonatelor şi care este tangentă la axa absciselor; b) cu centrul pe axa absciselor, care este tangentă la axa ordonatelor.

163. Scrieţi ecuaţia circumferinţei de raza 4 cu centrul în punctul $A(-2;\ 3)$. Oare aparţin acestei circumferinţe punctele $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ 7)$, $D(1;\ -1)$, $E(2;\ 3)$, $F(-6;\ 3)$, $K(17;\ 2)$, $P(-4;\ 3)$, $T\left(-4;\ 3+2\sqrt{3}\right)$, $M\left(-2-2\sqrt{3};\ 1\right)$?

164. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $M(-1;\ 4)$, şi care trece prin punctul $P(3;\ 1)$.

165. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în originea de coordonate şi care trece prin punctul $K(-3;\ -4)$.

166. Scrieţi ecuaţia circumferinţei care este tangentă la axele de coordonate şi trece prin punctul $M(2;\ 0)$.

167. Sunt date punctele $A(1;\ -2)$ şi $B(5;\ 4)$. Alcătuiţi ecuaţia circumferinţei: a) cu centrul în punctul A şi care trece prin punctul B; b) cu centrul în punctul B şi care trece prin punctul A.

168. Scrieţi ecuaţia circumferinţei circumscrise triunghiului dreptunghic ABC,dacă $A(3;\ 1)$, $B(3;\ 7)$, $C(-5;\ 1)$. Faceţi desenul.

169. Scrieţi ecuaţia circumferinţei circumscrise pătratului $ABCD$ şi înscrise în el, dacă $A(-5;\ 2)$, $B(-1;\ 6)$, $C(3;\ 2)$, $D(-1;\ -2)$. Faceţi desenul.

B

170. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul pe axa absciselor şi care este tangentă la dreptele $x = -2$ şi $x = 4$. Faceţi desenul.

171. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul pe axa ordonatelor şi care are contact cu dreptele $y = -3$ şi $y = 5$. Faceţi desenul.

172. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul pe axa absciselor şi care trece prin punctul $M(4; 2)$, fiind tangentă la circumferinţa $x^2 + y^2 = 9$.

173. ***Problemă deschisă***

Alcătuiţi şi rezolvaţi o problemă după fig. 37.

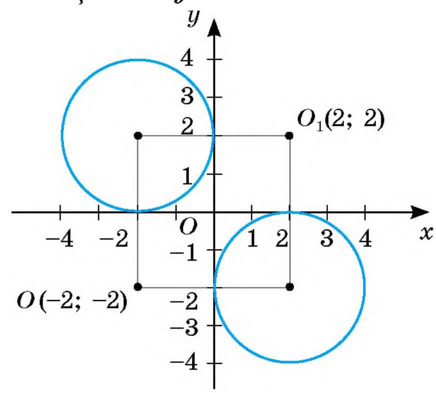


Fig.37

174. Se dă ecuaţia circumferinţei $x^2 + y^2 = 25$. Demonstraţi că AB este coardă a circumferinţei, şi aflaţi distanţa de la centrul circumferinţei până la această coardă, dacă:
a) $A(-4; 3)$, $B(-4; -3)$;
b) $A(4; 3)$, $B(5; 0)$;
c) $A(3; 4)$, $B(4; -3)$.

175. Găsiţi centrul şi raza circumferinţei, dată de ecuaţia:
a) $x^2 + y^2 + 2x = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 4y = 5$;
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$;
d) $x^2 + y^2 - 10x + 2y = -6$.

176. Aflaţi distanţa dintre centrele circumferinţelor ale căror ecuaţii sunt:
a) $x^2 + y^2 + 6x = 1$ şi $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 6$;
b) $x^2 + y^2 + 4x - 10y = -4$ şi $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 7$.

177. Cum sunt repartizate circumferinţele (sunt tangente, se intersectează, nu au puncte comune), date de ecuaţiile:
a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ şi $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$;
b) $x^2 + y^2 + 6x = 0$ şi $x^2 + y^2 - 8y = -12$;
c) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ şi $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$;
d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y = -12$ şi $x^2 + y^2 - 10x - 2y = -24$?

178. Scrieţi ecuaţia circumferinţei, circumscrise triunghiului ABC, dacă:
a) $A(3; 0)$, $B(0; 0)$, $C(0; -4)$;
b) $A(-2; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(-6; -2)$;
c) $A(-3; -1)$, $B(0; 3)$, $C(3; -1)$.

179. AH — înălţimea triunghiului echilateral ABC, $A(1; -2)$, $H(4; 7)$. Scrieţi ecuaţia circumferinţei: a) circumscrise triunghiului ABC; b) înscrise în triunghiul ABC.

180. Scrieţi ecuaţia circumferinţei care trece prin punctele:
a) $(4; -1)$, $(2; 7)$, $(-1; 2)$; b) $(5; 1)$, $(-1; -3)$, $(0; 2)$; c) $(-6; -5)$, $(-2; 1)$, $(-1; -4)$.

181. Se dă circumferinţa $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Aflaţi locul geometric al centrelor circumferinţelor de raza *1*, care au cu circumferinţa: a) contact exterior; b) contact interior.

182. În dependenţă de valorile parametrului a de examinat amplasarea reciprocă a circumferinţelor: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ şi $x^2 + y^2 + 4x = a^2 - 4$.

183. Pentru care valori ale parametrului a circumferinţele $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$ şi $x^2 + y^2 - 6x - a^2 - 4a + 5 = 0$ au: a) tangenţă exterioară; b) tangenţă interioară?

Însărcinare practică

184. a) Reprezentaţi dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt situate în punctele $(0; -2)$, $(0; 2)$, $(6; 2)$, $(6; -2)$, luând drept segment unitate două pătrăţele. Construiţi în acest dreptunghi graficele ecuaţiilor date mai jos, şi voi veţi vedea un fragment al reţelei de îngrădire.

$(x - a)^2 + y^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$.

$(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$;

$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$.

б) În figura 38 este reprezentat un desen decorativ, format de intersecţia circumferinţelor unitate. Scrieţi totalitatea ecuaţiilor cu ajutorul cărora se poate obţine aşa un ornament.

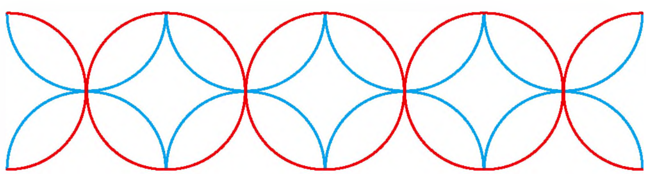


Fig.38

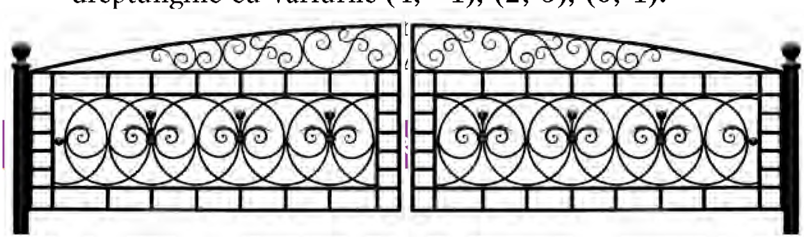
Probleme pentru repetare

185. Aflaţi perimetrul şi aria trapezului $ABCD$, dacă $A(-5; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(1; 6)$, $D(4; 2)$.

186. Aflaţi coordonatele vârfurilor pătratului cu perimetrul 16, dacă unul din vârfurile lui este $(-1; 2)$, iar laturile sunt paralele cu axele de coordonate. Câte soluţii are problema?

187. Aflaţi sinusul, cosinusul şi tangenta unghiurilor ascuţite ale triunghiului dreptunghic cu vârfurile $(4; -1)$, $(2; 5)$, $(6; 1)$.

3; −2), (−2; 5),



Figuri geometrice în produsele forjate

§ 6 Ecuaţia dreptei

Din cursul de algebră al clasei a 7-a voi deja ştiţi că graficul fiecărei ecuaţii de gradul întâi cu două variabile este o dreaptă. Să arătăm că este adevărată şi afirmaţia inversă: **fiecărei drepte a planului de coordonate îi corespunde ecuaţia liniară cu două variabile**.

Admitem că în planul de coordonate este dată dreaptă l (fig.39). Notăm două puncte $A(m_1;\ n_1)$ şi $B(m_2;\ n_2)$ care sunt astfel, că dreapta l va fi mediatoarea segmentului AB. Pe baza proprietăţii mediatoarei fiecare punct $M(x;\ y)$ al dreptei l este egal depărtat de la punctele A şi B, adică $MA = MB$. Atunci $(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2$, de unde

$$x^2 - 2xm_1 + m_1^2 + y^2 - 2yn_1 + n_1^2 - x^2 + 2xm_2 - m_2^2 - y^2 + 2yn_2 - n_2^2 = 0;$$

$$2xm_2 - 2xm_1 + 2yn_2 - 2yn_1 + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0;$$

$$x(2m_2 - 2m_1) + y(2n_2 - 2n_1) + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0.$$

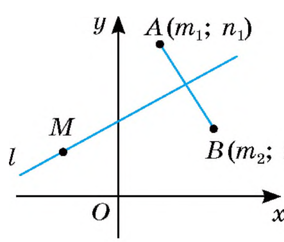


Fig.39

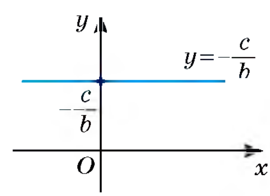


Fig.40

Notând $2m_2 - 2m_1 = a$, $2n_2 - 2n_1 = b$, $m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = c$, obţinem ecuaţia $ax + by + c = 0$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Sunt demne de atenţie cazuri particulare.

1. Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, ecuaţia dreptei va avea aspectul $by + c = 0$, de unde $y = -\dfrac{c}{b}$. Aceasta este ecuaţia dreptei , paralele cu axa OX (fig.40).

2. Dacă $b = 0$, $a \neq 0$, atunci ecuaţia dreptei va avea forma $ax + c = 0$, de unde $x = -\dfrac{c}{a}$. Aceasta este ecuaţia dreptei , paralele cu axa OY (fig. 41).

3. Dacă $c = 0$, $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, atunci ecuaţia dreptei va avea aspectul $y = -\dfrac{a}{b}x$.

Aceasta-i ecuaţia dreptei care trece prin originea de coordonate (fig.42).

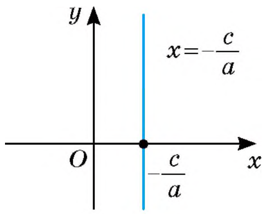


Fig.41

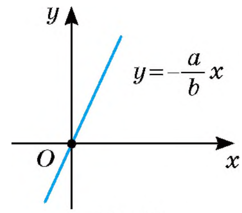


Fig.42

Ecuaţia $ax + by + c = 0$ se **numeşte ecuaţia generală a dreptei**.

Să scriem această ecuaţie în altă formă. Dacă $b \neq 0$, atunci împărţim părţile stângă și dreaptă ale ecuaţiei la b și obţinem $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$ sau $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Notând $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, obţinem ecuaţia $y = kx + p$. Amintiţi-vă funcţia liniarei și graficul ei.

Să clarificăm sensul geometric al coeficientului k. Să luăm pe dreapta l două puncte arbitrare $A(x_1;\ y_1)$ și $B(x_2;\ y_2)$ (fig.43). Avem $y_1 = kx_1+p$ și $y_2=kx_2+ p$. Scăzând din a doua ecuaţie prima, obţinem $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, de unde pentru $x_1 \neq x_2$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Din figura 43 se vede că $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, unde α — unghiul, pe care îl face dreapta cu direcţia pozitivă a axei absciselor OX.

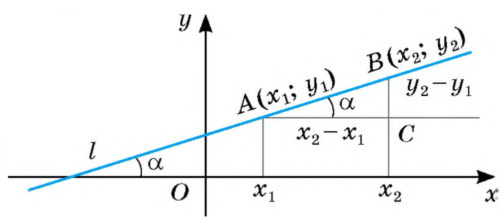


Fig.43

Cazul, când $90° \leq \alpha < 180°$, examinaţi-l de sine stătător.

Așadar, în ecuaţia dreptei $y = kx + p$ coeficientul $k = \operatorname{tg}\alpha$, unde α — unghiul, pe care îl face dreapta cu direcţia pozitivă a axe OX. De aceea numărul k se numește **coeficient unghiular**, iar ecuaţia dreptei, scrisă în forma $y = kx + p$, — **ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular**.

Se poate demonstra următoarea afirmaţie.

Dacă dreptele l_1 și l_2 sunt date cu ecuaţiile $y = k_1x + p_1$ și $y = k_2x + p_2$, atunci:

1) $l_1 \parallel l_2$ atunci și numai atunci, când $k_1 = k_2$ și $p_1 \neq p_2$;

2) $l_1 \perp l_2$ atunci și numai atunci, când $k_1 \cdot k_2 = -1$.

De exemplu, dreptele $y = 2x + 3$ și $y = 2x$ sunt paralele, deoarece $k_1 = k_2 = 2$, iar dreptele $y = 2x + 3$ și $y = -\frac{1}{2}x$ sunt perpendiculare, deoarece $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

PENTRU CEI CURIOŞI

Afară de ecuaţia generală a dreptei şi a ecuaţiei cu coeficient unghiular există şi alte tipuri de ecuaţii ale dreptelor. Să examinăm unele din ele.

Să scriem ecuaţia dreptei care trece prin două puncte $A(x_1; y_1)$ şi $B(x_2; y_2)$ (fig.44). Luăm pe dreapta l un punct arbitrar $M(x; y)$. Triunghiurile dreptunghice AKB şi APM sunt asemenea, deoarece unghiurile lor ascuţite de la vârful A sunt egale. Atunci $AP : AK = MP : BK$ sau $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Am obţinut ecuaţia dreptei, care trece prin punctele A şi B.

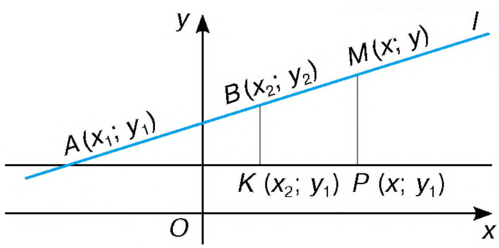


Fig.44

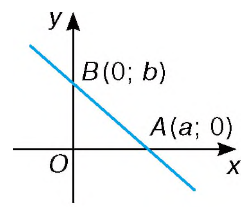


Fig.45

Şi invers, dacă coordonatele x şi y ale unui punct oarecare $M(x; y)$ satisfac această ecuaţie, atunci $AP{:}AK = MP{:}BK$,din ceea ce urmează asemănarea triunghiurilor APM şi AKB. Atunci $\angle PAM = \angle KAB$, iar aceasta înseamnă, că punctul M este situat pe dreapta l.

Aşadar, ecuaţia $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ — aceasta-i *ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date.*

Dacă dreapta l intersectează axele de coordonate în punctele $A(a; 0)$ şi $B(0; b)$ (fig.45), atunci, aplicând ecuaţia anterioară, obţinem: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$. Atunci $-\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}$ sau $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Aceasta este *ecuaţia dreptei prin segmentele de pe axe*, deoarece numerele a şi b arată ce segmente taie dreapta l pe axele de coordonate.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce figură este graficul ecuaţiei de gradul întâi cu două variabile? Dar graficul funcţiei liniare?
2. Care este ecuaţia generală a dreptei?
3. Care este ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular?
4. Care este sensul geometric al coeficientului unghiular?
5. Formulaţi condiţia de paralelism a două drepte.
6. Formulaţi condiţia de perpendicularitate a două drepte.

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Scrieţi ecuaţia dreptei, care trece prin punctele $A(2;\ 1)$ și $B(4;\ -3)$.

- *Primul procedeu.*
Să ne folosim de ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular $y = kx + p$. Deoarece dreapta trece prin punctele A și B, coordonatele punctelor date satisfac ecuaţia, adică $1 = 2k + p$ și $-3 = 4k + p$.
Am obţinut sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2k + p = 1; \\ 4k + p = -3. \end{cases}$$

Să scădem prima ecuaţie din a doua, obţinem: $2k = -4$, de unde, $k = -2$. Atunci din prima ecuaţie: $p = 1 - 2k = 5$. Așadar, ecuaţia dreptei va avea aspectul: $y = -2x + 5$.

Al doilea procedeu.

Deoarece, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, atunci în cazul dat $k = \dfrac{-3-1}{4-2} = \dfrac{-4}{2} = -2$. Atunci ecuaţia va avea forma: $y = -2x + p$.Înlocuim în această ecuaţie coordonatele puctului $A(2;\ 1)$. Obţinem: $1 = -4 + p$, de unde $p = 5$. Atunci ecuaţia dreptei va avea aspectul $y = -2x + 5$.

Al treilea procedeu.
Să folosim ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

În cazul nostru $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-1}{-3-1}$, adică $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-4}$ sau $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2}$, de unde

$-2(x - 2) = y - 1$. Simplificând ecuaţia, obţinem: $y = -2x + 5$.

2 Scrieţi ecuaţia dreptei , care trece prin punctul $M\left(3;\ 5\sqrt{3}\right)$ și face unghiul de $60°$ cu direcţia pozitivă a axei absciselor. OX.

- Scriem ecuaţia dreptei date în forma : $y = kx + p$. Deoarece $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, reiesă că ecuaţia dreptei poate fi scrisă sub aspectul $y = \sqrt{3}x + p$. Înlocuind în această ecuaţie coordonatele punctului M, obţinem: $5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + p$, de unde $p = 2\sqrt{3}$. Deci, ecuaţia dreptei căutate este $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

189. Oare trece prin originea de coordonate dreapta, a cărei ecuaţie este a) $x + y = 0$; b) $2x + y = 3$; c) $x - y = 0$; d) $y = -3x$; e) $y = 4x + 2$?

190. Care este ecuaţia dreptei, dusă paralel la axa ordonatelor prin punctul: a) $M(5; -3)$; b) $N(-2; 8)$; c) $P(0; 3)$; d) $K(4; 0)$?

191. Care este ecuaţia dreptei care este paralelă cu axa OX şi trece prin punctul: a) $E(2; -7)$; b) $F(-1; 5)$; c) $L(0; -2)$; d) $K(3; 0)$?

192. Aflaţi distanţa de la originea de coordonate până la dreapta, dată cu ecuaţia: a) $y - 2 = 0$; b) $x + 5 = 0$; c) $y = 2x$; d) $x + 3y = 0$.

193. Indicaţi ecuaţiile dreptelor, care sunt tangente la circumferinţa $x^2 + y^2 = 16$ şi paralele cu: a) axa absciselor OX; б) axa OY.

194. Căreia din dreptele, reprezentate în fig.46, îi corespunde ecuaţia:
a) $x = 2$; b) $y = x + 3$; c) $y = -3$;
d) $y = x$; e) $y = -x - 2$?

195. Numiţi coeficienţii unghiulari ai dreptelor, date cu ecuaţiile:
$y = 3x$; $y = 2x + 5$; $y = 8 - 4x$;
$x - y = 0$; $5x + y = 2$; $2x - 6y = 3$.

196. Cu ce este egal coeficientul unghiular al dreptei, care taie pe axele de coordonate segmente egale?

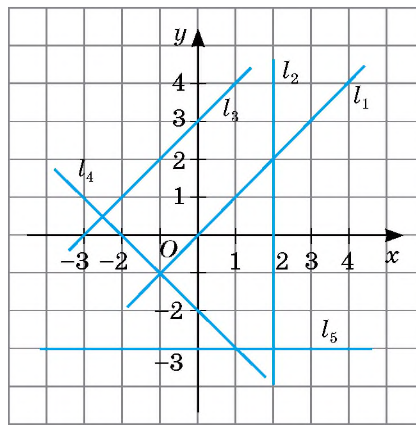


Fig.46

A

197. Construiţi dreptele şi găsiţi coordonatele punctelor de intersecţie ale lor cu axele de coordonate: a) $y = 2x + 3$; b) $x + y = 5$; c) $2x + 5y = 10$.

198. Construiţi dreptele care trec prin punctul $M(2; -4)$ şi sunt paralele cu axele de coordonate. Scrieţi ecuaţiile lor.

199. Oare trece dreapta dată de ecuaţia $6x - 5y - 10 = 0$, prin punctele $A(-5; -8)$, $B(1; -0{,}8)$, $C(4; 4)$, $D(0; -2)$, $E(-3; -2)$?

200. Fără a face construcţia aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie a dreptei $2x + 3y = 6$ cu axele de coordonate.

201. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptelor $4x + 5y + 10 = 0$ şi $x + 4y - 3 = 0$.

202. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin originea de coordonate şi punctul: a) $(3; 2)$; b) $(-5; 5)$; c) $(-1; 3)$; d) $(-4; -2)$.

203. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele: a) $A(1; 3)$ şi $B(5; -1)$; b) $C(-1; 2)$ şi $D(0; 3)$; c) $M(0; 4)$ şi $N(5; 0)$; d) $E(3; -5)$ şi $F(4; 1)$.

204. Folosind datele tabelului, scrieţi ecuaţiile dreptelor AB, AC ş.a.m.d.

	$B(1;\ 3)$	$C(-2;\ 5)$	$D(2;\ -2)$	$E(-3;\ -4)$
$A(0;\ 0)$				
$M(-1;\ 4)$				

205. Ce unghi face dreapta cu direcţia pozitivă a axei OX: a) $x + y - 2 = 0$; b) $x - y = 4$; c) $x-\sqrt{3}y=3$; d) $3x+\sqrt{3}y-1=0$?

206. Scrieţi ecuaţia dreptei, care trece prin punctul $A(2;\ -4)$ şi are coeficientul unghiular k, dacă: a) $k = 2$; b) $k = 1$; c) $k = -3$; d) $k = -0{,}5$.

207. Scrieţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $M(3;-2)$ şi-s paralele cu dreapta: a) $y = 2x + 5$; b) $y = -x + 2$; c) $x + 2y - 2 = 0$; d) $2x + 3y - 4 = 0$.

208. Se ştie că graficul funcţiei $y = ax + 2$ trece prin punctul $A(-2;\ 6)$. Aflaţi valoarea parametrului a. Construiţi această dreaptă.

209. Pentru care valoare a lui b dreapta $y = -3x + b$ trece prin punctul $M(-1;\ 4)$?

B

210. Scrieţi ecuaţiile dreptelor, reprezentate în fig.47.

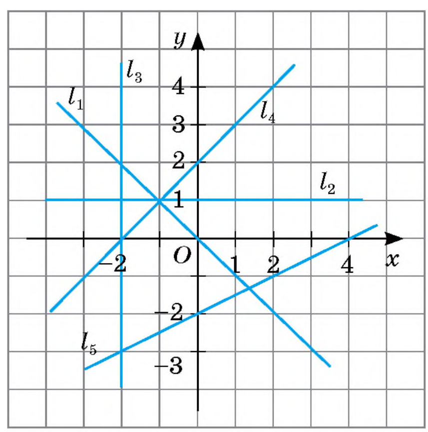


Fig.47

211. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1;\ 4)$ şi face cu direcţia pozitivă a axei absciselor unghiul: a) $30°$; b) $60°$; c) $45°$; d) $120°$; e) $135°$.

212. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1;\ 4)$ şi mărgineşte împreună cu axele de coordonate un triunghi isoscel. Aflaţi aria acestui triunghi.

213. Demonstraţi că segmentul cu extremităţile în punctele $M(-3;\ 2)$ şi $N(6;\ -4)$ trece prin originea de coordonate.

214. Alcătuiţi ecuaţiile dreptelor AB, AC şi BC, dacă $A(-3;\ 3)$, $B(3;\ 5)$, $C(7;\ -5)$.

215. Punctele $A(-2;\ 0)$ şi $C(4;\ 0)$ —sunt vârfurile triunghiului echilateral $\triangle ABC$.Scrieţi ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin laturile şi înălţimeile triunghiului dat.

216. Compuneţi ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin medianele şi înălţimile $\triangle MNK$, dacă $M(-4;\ 2)$, $N(2;\ 6)$, $K(8;\ -4)$.

217. Deduceţi ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin laturile pătratului cu perimetrul $20\sqrt{2}$, dacă diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate.

218. Compuneţi ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin laturile rombului cu unghiul ascuţit $60°$, dacă diagonala mai mare a lui este egală cu 10 şi aparţine axei ordonatelor OY, iar cea mai mică – axei OX.

219. Sunt date ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin laturile triunghiului: $2x - y + 4 = 0$, $y + x - 7 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$. Aflaţi coordonatele vârfurilor lui.

220. Oare pot laturile paralelogramului aparţinea dreptelor $x - y + 3 = 0$; $x + 6y - 25 = 0$; $x - y - 4 = 0$; $x + 6y - 3 = 0$? Dacă da, atunci aflaţi coordonatele vârfurilor lui.

221. Stabiliţi corespondenţa dintre dreptele (1-4) şi lungimile coardelor (A-E), pe care aceste drepte le taie în circumferinţa $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

1	$y = x - 3$	**A**	$4\sqrt{5}$
2	$y = 3$	**B**	8
3	$y = -2x$	**C**	$7\sqrt{2}$
4	$x = 6$	**D**	6
		E	$2\sqrt{17}$

222. Stabiliţi repartizarea reciprocă a circumferinţei şi a dreptei, date de ecuaţiile:
a) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + y - 15 = 0$;
b) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8$; $2x + y = 6$;
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 14 = 0$; $x - y + 2 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$; $x - y + 3 = 0$.

223. În figura 48 sunt reprezentate trei antene M, N, P, coordonatele lor şi domeniile de deservire. În matematică divizarea unei cantităţi finite de puncte ale planului, la care fiecare domeniu al divizării (celulă) formează o mulţime de puncte, cele mai apropiate de unul din elementele mulţimii, este numită diagrama Voronâi. Muchiile celulelor în diagrama Voronâi se construiesc ca mediatoarele segmentelor MN, NP şi MP. Scrieţi ecuaţiile muchiilor ale diagramei Voronâi şi coordonatele punctului O – a vârfului diagramei Voronâi pentru domeniile de divizare ale antenelor M, N, P.

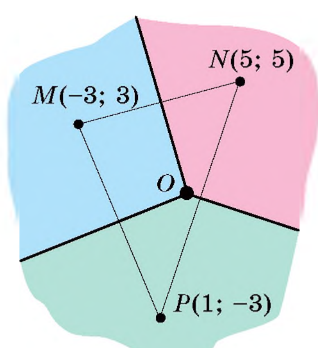


Fig.48

Voronâi Gheorghii Feodorovici
(1868-1908)

224. Cu ce sunt egali coeficienţii a şi b ai dreptei $ax + by = 2$, dacă ea trece prin punctele $M(-2; -2)$, $N(8; 3)$?

225. Pentru care valori ale parametrului a dreapta $y = x + 5$ şi circumferinţă $x^2 + y^2 = a^2$ sunt tangente?

Însărcinare practică

226. În figura 49 în sistemul rectangular de coordonate este reprezentată tabla de șah, care conține 64 de câmpuri:
a) Care este cea mai mare cantitate de câmpuri care pot fi intersectate de o singură dreaptă? Câte există astfel de drepte? Scrieți ecuația unei astfel de dreaptă.
b) Scrieți ecuațiile dreptelor care dau câteva mutări posibile ale reginei, reprezentată în figură. Coordonatele reginei (2,5; 3,5).

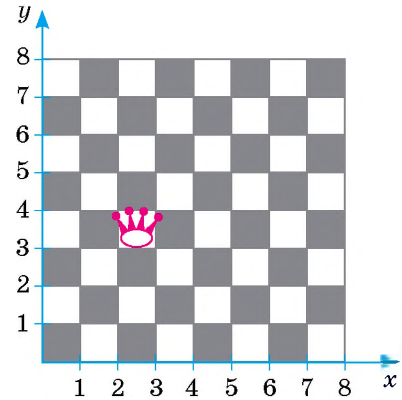


Fig.49

Probleme pentru repetare

227. Construiți circumferința $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.
228. Oare sunt concentrice circumferințele $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 4$ și $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$?
229. Stabiliți tipul $\triangle ABC$, dacă $A(-2; 3)$, $B(4; 6)$, $C(8; -2)$.
230. Aflați perimetrul și aria triunghiului, două laturi ale căruia sunt egale cu 5 cm și 12 cm, iar unghiul dintre ele este de 90°.

Geometria din jurul nostru

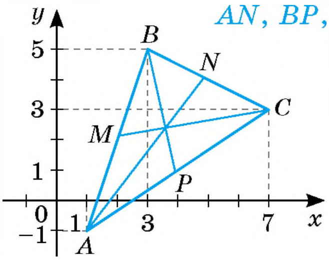
Paralelism în interiorul unei clădiri

PROBLEME CU DESENE GATA

A

1 AN, BP, CM — mediane

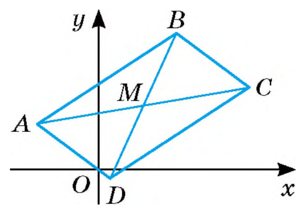
AN, BP, CM



B

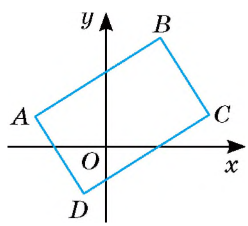
$ABCD$ — паралелограм, $A(-4;\ 3)$, $D(1;\ -1)$, $M(5;\ 4)$.

Coordonatele punctelor B și C



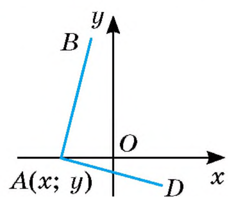
2 $A(-4;\ 3)$, $B(4;\ 7)$, $C(7;\ 1)$, $D(-1;\ -3)$.

De demonstrat: $ABCD$ — dreptunghi



$B(-1;\ 6)$, $D(3;\ -2)$, $AB = AD$.

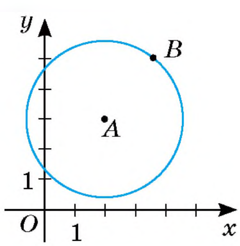
$A(x;\ y)$



Scrieți ecuațiile dreptelor și circumfeințelor

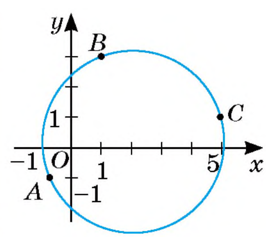
A

3 $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.



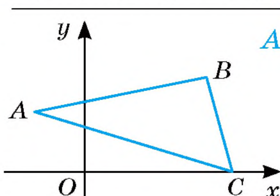
B

$A(-1;\ -1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ 1)$.

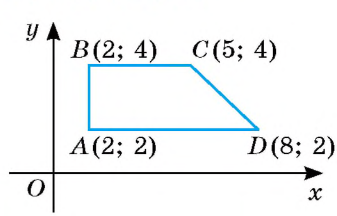


4 $A(-2;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 0)$.

AB, BC, AC



AB, BC, CD, AD



Lucrarea independentă 1

Varianta 1

1°*. Comparaţi cu zero valoarea expresiei $\sin 130° \cdot \cos 50° \cdot \operatorname{tg} 80° \cdot \cos 150°$.

2°. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(-2;\ 3)$, care trece prin punctul $B(1;\ -1)$.

3•. Scrieţi ecuaţia medianei AM $\triangle ABC$ şi aflaţi lungimea ei, dacă $A(-3;\ 2)$, $B(4;\ 1)$, $C(5;\ -4)$.

Varianta 2

1°. Comparaţi cu zero valoarea expresiei $\cos 125° \cdot \sin 135° \cdot \cos 20° \cdot \operatorname{tg} 130°$.

2°. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(4;\ 3)$, care este tangentă la axa absciselor OX.

3•. Scrieţi ecuaţia liniei medii MN $\triangle ABC$ $(MN \parallel AC)$ şi aflaţi lungimea ei, dacă $A(-1;\ -3)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ 1)$.

Varianta 3

1°. Comparaţi cu zero, valoarea expresiei $\operatorname{tg} 123° \cdot \sin 132° \cdot \cos 15° \cdot \sin 15°$.

2°. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(1;\ -3)$, care trece prin originea de coordonate.

3•. Scrieţi ecuaţia medianei AM a triunghiului ABC şi aflaţi lungimea ei, dacă $A(3;\ 5)$, $B(-4;\ 2)$, $C(2;\ -4)$.

Varianta 4

1°. Comparaţi cu zero valoarea expresiei $\cos 20° \cdot \sin 135° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 23°$.

2°. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $A(4;\ 3)$, care este tangentă la axa ordonatelor OY.

3•. Scrieţi ecuaţia liniei medii MN a trapezului $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ şi aflaţi lungimea ei, dacă $A(3;\ -3)$, $B(-1;\ 1)$, $C(3;\ 3)$, $D(5;\ 1)$.

ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 1

1	Aflaţi lugimea segmentului AB, dacă $A(1;\ 2)$, $B(1;\ 6)$.	a) $2\sqrt{17}$; c) $2\sqrt{5}$; b) 4; d) 16.
2	Sunt date punctele $A(-1;\ 3)$ şi $B\ (5;\ 6)$.Aflaţi coordonatele punctului M, care împarte segmentul AB în jumătăţi.	a) $M(4;\ 9)$; c) $M(3;\ 1{,}5)$; b) $M(6;\ 3)$; d) $M(2;\ 4{,}5)$.
3	Care dreaptă este paralelă cu dreapta $y = 3x + 5$?	a) $y = 5$; c) $y - 3x = 2$; b) $3x + y = 4$; d) $x + 3y = 6$.
4	Care semn trebuie pus în loc de *: sin 128° * cos 128°?	a) >; c) =; b) <; d) nu putem stabili.
5	Care dreaptă face unghiul 135° cu direcţia pozitivă a axei absciselor OX?	a) $y - x = 3$; c) $x + y = 5$; b) $y = 2 - 0{,}5x$; d) $\sqrt{3}x - y = 7$.
6	Raza cărei circumferinţe este egală cu 4?	a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; c) $(x + 2)^2 + y^2 = 2$; d) $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$.
7	AB — diametrul circumferinţei. Care din ecuaţii este ecuaţia acestei circumferinţei, dacă $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ -3)$?	a) $x^2 + y^2 = 10$; b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$; c) $x^2 + y^2 = \sqrt{10}$; d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{10}$.
8	Indicaţi egalitatea neadevărată.	a) $\sin^2 140° + \cos^2 140° = 1$; b) $\sin 23° = -\sin 157°$; c) $\cos 57° = \sin 33°$; d) $\cos 123° = -\cos 57°$.
9	Care din ecuaţii este ecuaţia diametrului circumferinţei $x^2 + y^2 = 25$, dus prin punctul $A(3;\ 4)$?	a) $3x + 4y = 25$; c) $y = \frac{4}{3}x$; b) $y = \frac{3}{4}x$; d) $3x + 4y = 5$.
10	Care din drepte nu este tangentă la circumferinţa $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?	a) $x = 3$; c) $x = -3$; b) $y = 3$; d) $y = -1$.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Aflaţi lungimea segmentului KP şi coordonatele mijlocului lui, dacă $K(1; -3)$, $P(7; 5)$.

2°. Aflaţi unghiurile trapezului dreptunghic dacă cosinusul a unuia din ei este egal cu $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3°. În figura 50 este reprezentată circumferinţa cu centrul A şi diametrul ei BC.
Scrieţi coordonatele punctelor A, B şi C.
Alcătuiţi ecuaţia: a) circumferinţei, reprezentată în figură; b) a dreptei BC.

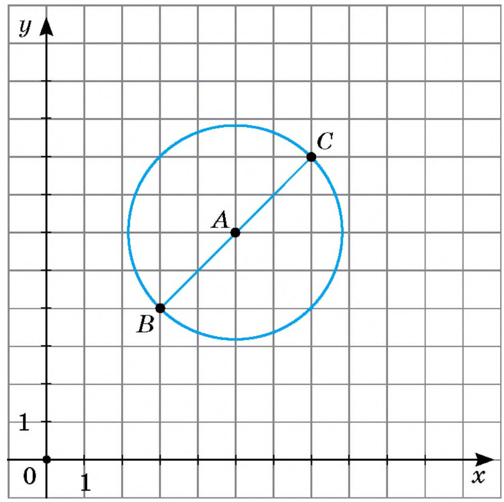


Fig.50

4°. M—mijlocul segmentului AB. Aflaţi coordonatele punctului A, dacă $M(1; 4)$, $B(3; -5)$.

5•. Demonstraţi că triunghiul cu vârfurile în punctele $A(-3; -1)$, $B(-1; 5)$, $C(5; 3)$ este isoscel.

6•. Aflaţi coordonatele punctului M, care aparţine axei absciselor şi este egal depăratat de punctele $A(5; 4)$ şi $B(-2; -3)$.

7•. Sunt date trei vârfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$: $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(3; 0)$.Aflaţi coordonatele vârfului D.

8•. Aflaţi lungimea coardei, obţinute în urma intersecţiei circumferinţei $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ cu dreapta $y = x - 4$.

9••. Determinaţi tipul patrulaterului cu vârfurile în punctele $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, $D(1; -2)$. Aflaţi perimetrul, aria lui şi scrieţi ecuaţia circumferinţei circumscrise lui.

10••. Pentru care valori ale parametrului a circumferinţele $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ şi $x^2 + y^2 - 6x + 2y = a^2 - 10$ au: a) contact exterior, b) contact interior?

> ***Măreaţa faptă a lui Descartes – crearea geometriei analitice – construirea podului între algebră şi geometrie.***
> ***S.G.Vavilov***

Principalul în capitolul 1

Sinusul și cosinusul unghiului α — ordonata și abscisa punctului al circumferinței unitate, care corespunde unghiului dat (fig.51). Tangenta unghiului – raportul sinusului al acestui unghi către cosinusul lui.

$$\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

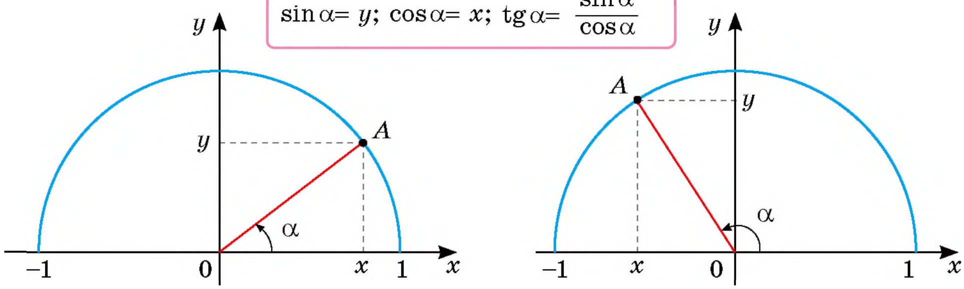


Fig.51

Sinusul, cosinusul și tangenta unghiului, luate împreună, se numesc **funcţiile trigonometrice ale acestui unghi**.

Pentru fiecare unghi α sunt adevărate identităţile:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha;\quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \ \text{ și } \ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Pentru orice puncte $A\,(x_1;\, y_1)$ și $B\,(x_2;\, y_2)$ se pot calcula coordonatele mijlocului al segmentului AB și lungimea segmentului AB.

Fiecare coordonată a mijlocului segmentului este egală cu semisuma coordonatelor corespunzătoare ale extremităţilor lui (fig.52). Adică, dacă extremităţile segmentului sunt $A(x_1;\, y_1)$ și $B(x_2;\, y_2)$, atunci mijlocul segmentului dat este punctul M cu coordonatele

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ \text{ și } \ \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Distanţa dintre punctele $A(x_1;\, y_1)$ și $B(x_2;\, y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

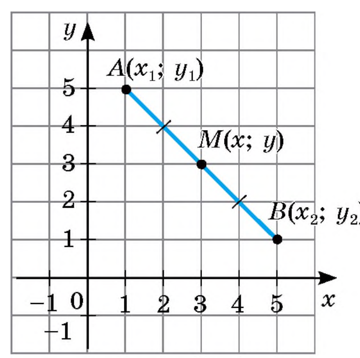


Fig. 52

Ecuaţie a figurii în planul de coordonate se numește ecuaţia cu două variabile care este satisfăcută de coordonatele fiecărui punct al figurii date și numai de coordonatele punctelor ei.

Ecuaţia circumferinţei de rază r (fig.53) cu centrul în punctul $A(a;\, b)$ are forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Dacă centrul circumferinţei de rază r este situat în originea sistemului de coordonate, atunci ecuaţia ei este $x^2 + y^2 = r^2$ (fig.54).

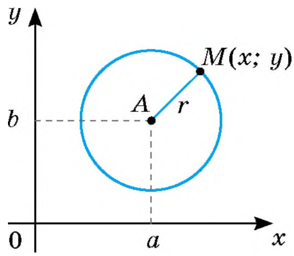


Fig.53

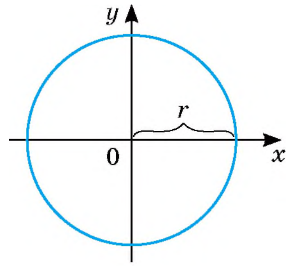


Fig.54

Fiecărei drepte din planul de coordonate îi corespunde o ecuaţie liniară cu două variabile $ax + by + c = 0$. Aşa o ecuaţie este numită **ecuaţie generală a dreptei.** Dacă $c = 0$, iar coeficienţii a şi b sunt diferiţi de zero, atunci acestei ecuaţii îi corespunde dreapta $y=-\frac{a}{b}x$, care trece prin originea de coordonate (fig.55).

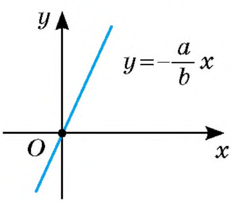


Fig.55

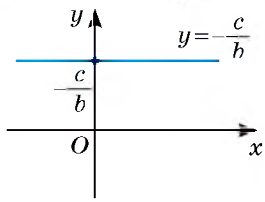


Fig.56

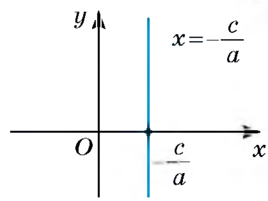


Fig.57

Dacă coeficientul $a = 0$, iar $b \neq 0$, atunci ecuaţiei îi corespunde dreapta $y=-\frac{c}{b}$, care este paralelă cu axa absciselor (fig.56).

Dacă $b = 0$ şi $a \neq 0$, atunci acestei ecuaţii îi corespunde dreapta $x=-\frac{c}{a}$, care este paralelă cu axa ordonatelor (fig.57).

Dacă $a = 0$, $b = 0$ şi $c = 0$, atunci ecuaţia $ax + by + c = 0$ este satisfăcută de orice punct al planului de coordonate.

Dacă însă $a = 0$, $b = 0$ şi $c \neq 0$, atunci această ecuaţie nu este satisfăcută de coordonatele nici a unui punct.

Egalitatea $y = kx + b$ — **ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular.**

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha \ (x_1 \neq x_2)$, unde α — unghiul, făcut de dreaptă cu direcţia pozitivă a axei absciselor.

Dacă dreptele l_1 i l_2 sunt date cu ecuaţiile $y = k_1x + b_1$ şi $y = k_2x + b_2$, atunci:
1) $l_1 \parallel l_2$ atunci şi numai atunci, când $k_1 = k_2$ şi $p_1 \neq p_2$;
2) $l_1 \perp l_2$ atunci şi numai atunci, când $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ — aceasta-i **ecuaţia dreptei** care trece prin două puncte $A(x_1; y_1)$ şi $B(x_2; y_2)$.

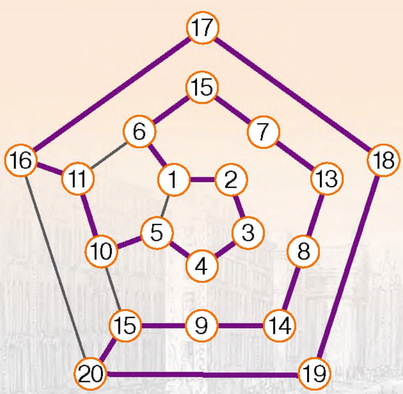
Există deosebire, însă nici o opoziţie, între teorie și practică. Teoria depinde de practică, iar practica trebuie să preceadă teoriei.
Pe pământ nu este nimic mai uimitor decât omul și nimic mai de seamă decât mintea oamenească.

UILIAM ROYEN HAMILTON

(1805–1865)

- Ilustru matematician, fizician și astronom irlandez.
- Unul din cei mai remarcabili matematicieni mondiali ai secolului XIX.
- Lucrările lui se evidenţiază prin adâncimea gândului și originalitatea metodelor cu pecetea de genialitate proprie lor.

  În multiplele sale invenţii el a fost predecesorul contemporanilor săi. Descoperirile lui fundamentale în matematică se referă la numerele complexe, cuaternioni, calcul vectorial și analiza vectorială, teoria ecuaţiilor diferenţiale ș.a.



Una din soluţiile șaradei Hamilton „În jurul lumii”

Capitolul 2 | Section 2

Vectori în plan | Vectors In The Plane

Vectorul – una din noţiunile fundamentale ale matematicii. Istoria apariţiei şi a dezvoltării lui este complicată şi interesantă. Cel puţin trei izvoare au creat baza şi au dat puteri calcului vectorial. Acestea-s cel geometric (calculul segmentelor), mecanic (examinarea mărimilor vectoriale) şi cel algebric (teoria cuaternionilor). Cea mai generală teorie vectorială a fost construită la începutul secolului XX pe bază axiomatică.

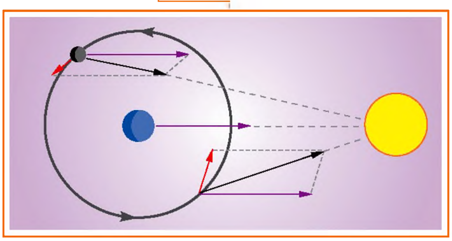
Metoda vectorială de rezolvare a problemelor este o metodă importantă şi puternică a geometriei elementare.

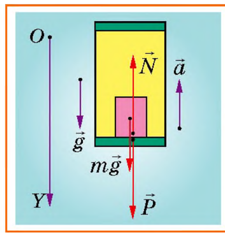
Afirmaţiile demonstrate cu ajutorul ei sunt adevărate nu numai pentru figurile din plan, dar şi chiar pentru spaţiile tri şi n – dimensionale.

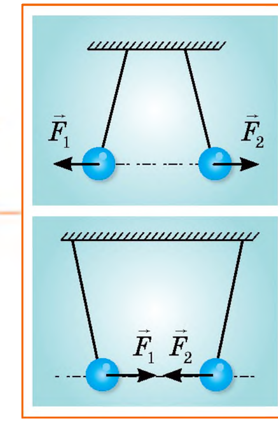
În acest capitol veţi face cunoştinţă cu noţiunea de vector şi interpretările diferite ale lui, o să vă învăţaţi a efectua operaţii cu vectori şi să folosiţi proprietăţile vectorilor la rezolvarea problemelor.

Necesitatea studierii vectorilor

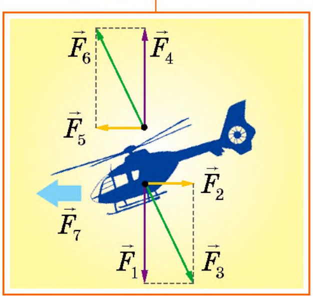
Cu ajutorul metodei vectoriale este comod de caracterizat obiectele geometrice şi alte figuri, şi corelaţiile dintre ele. Anume de aceea vectorii se folosesc efectiv în matematică, fizică, chimie, astronomie şi în alte ştiinţe ale naturii.

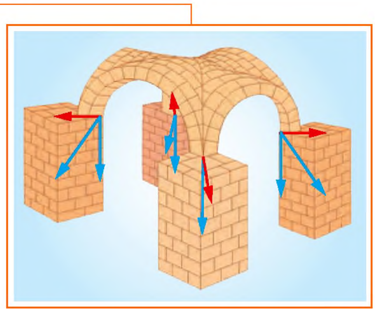


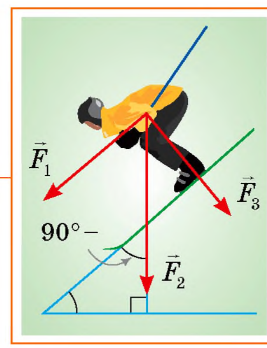




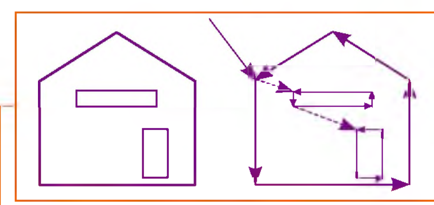
Sunt utilizaţi vectorii şi proprietăţile lor de asemenea în multe domenii ale activităţii umane (în sport, transport, în construcţie ş.a.)

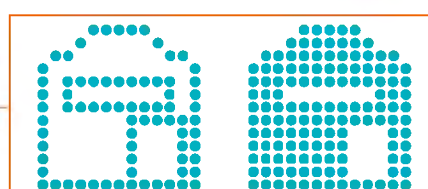






În edituri, agenţiile de publicitate şi oficiile design zilnic sunt create şi afişate pe ecrane şi în tipar multiple şi diverse imagini. Astfel de lucrări se efectuează cu mijloacele tehnologiilor computerizate pe baza unor programe speciale, şi anume - a grafiei computerizate. Unul din felurile grafiei computerizate este grafia vectorială, în care pentru descrierea imaginei sunt folosiţi vectorii (spre deosebire de grafica de rastru care descrie imaginea ca un masiv de puncte).





Unde mai sunt folosiţi vectorii? Aduceţi exemple.

§ 7 Vectorii

Multiple mărimi fizice aşa ca forţa, viteza, acceleraţia se caracterizează nu numai cu valorile numerice, ci şi cu direcţia. De exemplu, pentru a caracteriza mişcarea unui corp nu este suficient de-a spune că el se mişcă cu viteza de 10 minute pe secundă, trebuie de indicat şi direcţia mişcării lui. Pe drumuri direcţiile obligatorii a mişcării sunt determinate de semnele rutiere (fig.58).

Fig.58

Mărimile, care se caracterizează nu numai cu valorile numerice, dar şi cu direcţiile, se numesc **vectoriale**, iar valorile mărimilor vectoriale – **vectori**.

Segment orientat – acesta-i segmentul, pe care este indicată direcţia. Una din extremităţile lui se consideră *origine*, iar a doua – *extremitate, capăt*. Pe desen direcţia se reprezintă cu o *săgeată*. Dacă A şi B — originea şi extremitatea segmentului orientat, atunci el este notat astfel: $\overrightarrow{AB}$ (fig.59). Uneori segmentele orientate se notează şi cu litere minuscule: $\vec{a}$, $\vec{x}$ ş.a.

Distanţa dintre origine şi extremitate – lungimea segmentului orientat. Ea este de asemenea numită modulul sau **lungimea vectorului** $\overrightarrow{AB}$, şi se notează $|\overrightarrow{AB}|$ sau $|\vec{a}|$. A reprezenta vectorii cu segmente orientate este comod, deoarece astfel de reprezentări sunt intuitive. În figura 60 patru segmente orientate reprezintă cele mai importante forţe care acţionează asupta avionului ce se află în zbor: $\vec{a}$ — forţa de tracţiune, $\vec{b}$ — forţa de ridicare, $\vec{c}$ — forţa de rezistenţă a aerului, $\vec{d}$ — forţa de greutate.

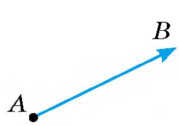


Fig.59

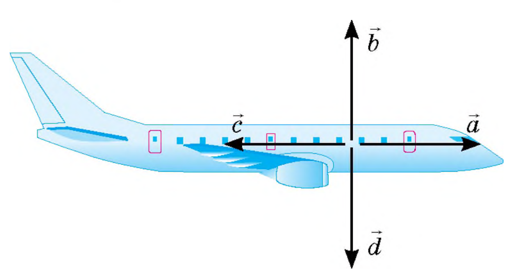


Fig.60

Observaţie. Vectorul şi segmentul orientat, care reprezintă acest vector – nu este una şi aceeaşi. Dar pentru simplificarea expunerii în cele ce urmează în loc de îmbinarea de cuvinte „vectorul, reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$»şi „segmentul orientat care reprezintă vectorul $\overrightarrow{AB}$» vom scrie pe scurt: „vectorul $\overrightarrow{AB}$».

Doi vectori se numesc **coliniari**, dacă ei sunt amplasaţi pe aceeaşi dreaptă sau drepte paralele.

Vectorii coliniari pot fi coorientaţi, adică **orientaţi în acelaşi sens** (fig.61), sau **orientaţi în sens opus** (fig.62). Vectorii coorientaţi se notează cu semnul $\uparrow\uparrow$, iar orientaţi în sens opus – cu semnul $\uparrow\downarrow$. De exemplu, în figura 63: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, iar $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

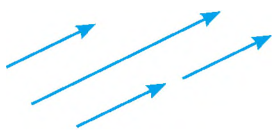


Fig.61

Fig.62

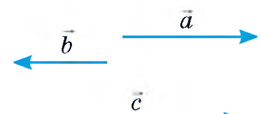


Fig.63

Vectorii orientaţi în sens opus cu moduli egali se numesc **vectori opuşi** (fig.64).

Doi vectori se numesc **egali**, dacă ei sunt coorientaţi şi au moduli egali (fig.65). Se scrie: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

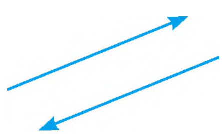


Fig.64

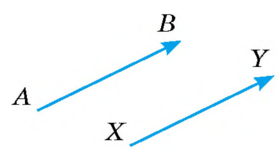


Fig.65

Dacă modulul vectorului este egal cu *1*, el este numit **vector unitar.**

Segmentele orientate reprezintă numai vectori nenuli. Afară de ei există şi **vectorul nul**, care nu are nici lungime, nici direcţie. El se notează cu simbolul $\vec{0}$ sau $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ş.a. Ne putem imagina vectorul nul ca vectorul extremitatea căruia coincide cu originea. Vectorul nul se consideră coliniar cu orice vector. Modulul vectorului nul se consideră egal cu zero.

De la orice punct se poate depune un vector, care este egal cu vectorul dat, şi numai unul. A depune vectorul $\overrightarrow{AB}$ de la punctul X — aceasta înseamnă de desenat un astfel de segment orientat $\overrightarrow{XY}$, ca $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Fie că se dă vectorul $\overrightarrow{AB}$ şi punctul X. Să arătăm cum de la punctul X de depus vectorul $\overrightarrow{XY}$, care este egal cu vectorul $\overrightarrow{AB}$.

1. Dacă punctul X aparţine dreptei a, care conţine vectorul $\overrightarrow{AB}$ (fig.66, *a*), atunci de la punctul X trebuie de depus segmentul XY, a cărui lungime este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$. Direcţia vectorului $\overrightarrow{XY}$ coincide cu direcţia vectorului AB (fig.66, *b*)

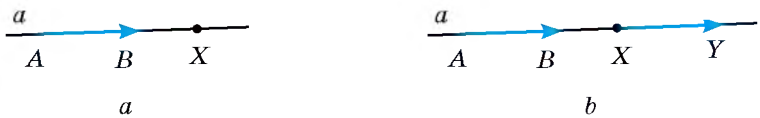


Fig.66

2. Dacă punctul X nu este situat pe dreapta a, căreia îi aparţine vectorul $\overrightarrow{AB}$ (fig.67, *a*), atunci prin punctul X trebuie de dus dreapta b, paralelă cu dreapta a şi de depus de la punctul X segmentul XY, lungimea căruia este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$. Direcţia vectorului $\overrightarrow{XY}$ coincide cu direcţia vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig.67, *b*).

3. Dacă $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, atunci vectorul căutat va fi vectorul $\overrightarrow{XX}$.

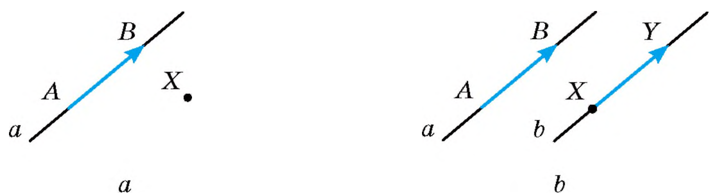


Fig.67

PENTRU CEI CURIOŞI

Cu unul şi acelaşi cuvânt „vector” deseori sunt numite diferite noţiuni, deoarece vectorii sunt liberi, legaţi, alunecători. Vectorul liber se determină numai de lungime şi direcţie, iar cel legat - de lungime, direcţie şi de punctul de aplicare. Două segmente egale ca lungime şi la fel orientate înseamnă unul şi acelaşi vector liber (fig.68).

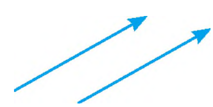


Fig.68

Doi vectori legaţi, notaţi cu segmente egale ca lungime şi la fel orientate, nu totdeauna sunt egali (fig.69). Forţa $\vec{F}$ nu poate fi înlocuită cu forţa $\vec{F_1}$, deoarece una din ele roteşte scriptele în o direcţie, iar a doua – în direcţia opusă.

Fizicienii frecvent folosesc vectorii legaţi şi le reprezintă cu săgeţi rectilinii, deoarece aşa reprezentări sunt intuitive. În matematică se examinează numai vectori liberi şi sunt definiţi ei nu numai cu săgeţi, ci şi cu perechi de puncte, perechi de numere ş.a.

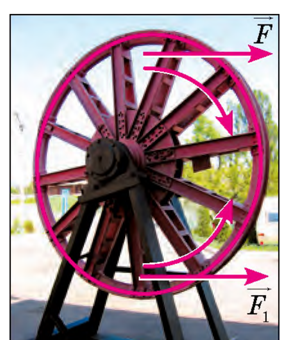


Fig.69

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care mărimi sunt numite vectoriale?
2. Aduceţi exemple de mărimi vectoriale.
3. Cum sunt reprezentaţi şi notaţi vectorii?
4. Care vectori se numesc coliniari?
5. Care vectori se numesc egali? Dar opuşi?
6. Ce se numeşte modulul vectorului?
7. Care vector se numeşte unitar? Dar nul?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstraţi că dacă mijlocurile segmentelor AC şi BD coincid, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

● Admitem că M — este mijlocul comun al segmentelor AC şi BD. Dacă segmentele date nu sunt situate pe aceeaşi dreaptă, atunci patrulaterul $ABCD$ — paralelogram (fig.70). Laturile opuse ale paralelogramului sunt paralele şi egale. De aceea $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Dacă segmentele date aparţin aceleaşi drepte, atunci ele pot fi repartizate aşa, cum se reprezintă în figura 71.

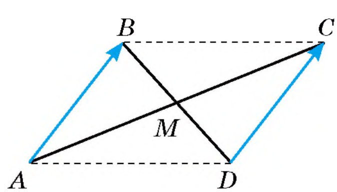


Fig.70

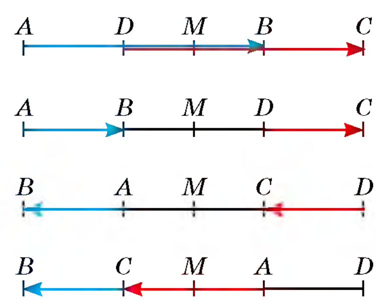


Fig.71

În fiecare din aceste cazuri segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$ au lungimi egale şi aceleaşi direcţii. Aşadar, totdeauna $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2 $ABCD$ — pătrat (fig.72). Oare sunt egali vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$? Dar vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{AO}$ (M şi N — mijlocurile laturilor AB şi BC)?

● Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ nu sunt egali. Măcar că ei au aceleaşi lingimi, însă direcţiile lor sunt diferite.
MN — linia medie $\triangle ABC$, de aceea $MN \parallel AC$, iar aceasta înseamnă, că $MN \parallel AO$ şi $MN = 0{,}5\ AC = AO$. Deci, vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{AO}$ sunt coorientaţi şi au lungimi egale, de aceea $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AO}$.

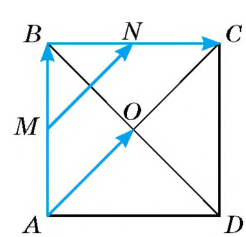


Fig.72

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

231. Care din vectorii reprezentaţi în figura 73 sunt: a) coliniari; b) coorientaţi; c) orientaţi în sens opus?

232. Punctu O —mijlocul segmentului AB. Oare sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{OB}$? Dar vectorii $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{BO}$? Oare sunt egali acești vectori?

233. Triunghiul ABC — echilateral. Oare sunt egali vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AC}$?

234. $ABCD$ — pătrat. Oare sunt egali vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BD}$?

235. Care din vectorii reprezentaţi în figura 74 sunt: coliniari; b) coorientaţi; c)orientaţi în sens opus? Determinaţi lungimile acestor vectori, luând drept unitate lungimea laturii pătrăţelului. Oare sunt printre ei vectori egali? Dar opuși?

236. În figura 75 sunt reprezentate două triunghiuri echilaterale egale AFB și BDC, în care punctele A, B și C aparţin aceleași drepte. Se știe că $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{q}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{r}$. Care din afirmaţiile, aduse mai jos, este adevărată?

a) $\overrightarrow{BD}=\vec{q}$; d) $\overrightarrow{BC}=\vec{p}$;
b) $\overrightarrow{FB}=\vec{q}$; e) $\overrightarrow{BF}=\vec{r}$;
c) $\vec{q}=\vec{r}$; f) $\overrightarrow{FD}=\vec{p}$.

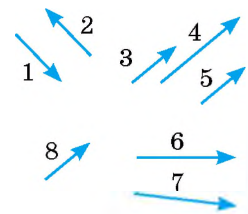


Fig.73

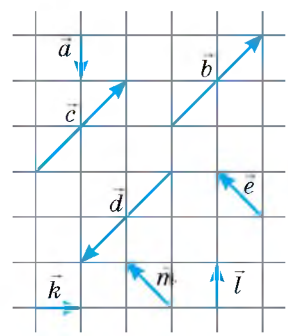


Fig.74

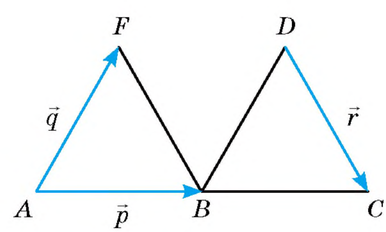


Fig.75

A

237. Desenaţi două segmente orientate, amplasate: a) pe aceeași dreaptă; b) pe drepte paralele, c) pe drepte perpendiculare.

238. Desenaţi segmentele orientate AB și AC cu lungimile de 2 cm și 3 cm corespunzător, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt: a) necoliniari; b) coorientaţi; c)orientaţi în sens opus.

239. Desenaţi doi vectori, care au lungimi egale și sunt : a) necoliniari; b) coorientaţi; c) orientaţi în sens opus. În care caz vectorii sunt egali? Dar opuși?

240. *ABCD* — dreptunghi. Oare sunt vectori egali printre vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$? Care din vectorii daţi au lungimi egale?

241. Sunt date punctele $A(2;\ 5)$ şi $B(-2;\ 2)$. Construiţi vectorul $\overrightarrow{AB}$. Aflaţi lungimile vecrilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$. Oare sunt egali aceşti vectori?

242. Desenaţi vectorul nenul $\vec{a}$ şi punctele *M*, *N*, *P*. Depuneţi de la aceste puncte vectori egali cu vectorul $\vec{a}$.

243. *ABCD* — romb. Depuneţi vectorul, egal cu $\overrightarrow{AB}$, de la: a) punctul *C*; b) mijlocul laturii *BC*; c) mijlocul diagonalei *AC*.

244. *ABCD* — paraleogram. Demonstraţi egalitatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$.

245. Demonstraţia că *ABCD* este paralelogram, dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

246. Folosind figura 76, stabiliţi corespondenţa dintre vectorii, daţi de condiţiile (1-4) şi vectorii (A-E).

1	Vectorul egal cu $\overrightarrow{MN}$	**A**	$\overrightarrow{KP}$
2	Vectorul opus $\overrightarrow{NP}$	**B**	$\overrightarrow{AM}$
3	Vectorul coorintat cu $\overrightarrow{AP}$	**C**	$\overrightarrow{MP}$
4	Vectorul coliniar cu $\overrightarrow{AN}$	**D**	$\overrightarrow{KM}$
		E	$\overrightarrow{NK}$

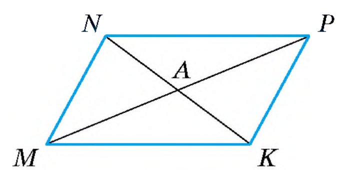


Fig.76

B

247. Triunghiul *ABC* este isoscel, *AB* = *BC* (fig.77). *M,N,K* – mijlocurile laturilor lui. Scrieţi toţi vectorii reprezentaţi în figură. Care din aceşti vectori sunt: a) coliniari; b) egali; c) opuşi?

248. Sunt date punctele $A(2;\ 3)$ şi $B(-1;\ 6)$. Construiţi vectorul $\overrightarrow{AB}$. Depuneţi din originea de coordonate vectorul, egal cu vectorul: a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BA}$. Depuneţi tot aceşti vectori din punctul $P(-3;\ 2)$.

249. Sunt date punctele $M(2;\ 2)$ şi $N(6;\ 5)$. Construiţi un vector arbitrar $\vec{a}$, care: a) este egal cu vectorul $\overrightarrow{MN}$; b) egal cu vectorul $\overrightarrow{NM}$; c) este coorientat cu vechiul $\overrightarrow{NM}$ şi $|\vec{a}| = 2|\overrightarrow{MN}|$; d) nu este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{MN}$ şi $|\vec{a}| = 0,5|\overrightarrow{MN}|$.

250. Construiţi dreptunghiul *ABCD*, a cărui arie este egală cu 30 cm², iar perimetrul cu 22 cm. De reprezentat şi de scris patru perechi de vectori egali, notând punctul de intersecţie al diagonalelor cu *O*. Care sunt lungimile lor?

251. *O* — punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului *EHPK*, *EH* = 6 cm, *HP* = 8 cm. Aflaţi lungimile vectorilor $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH}$ şi $\overrightarrow{PO}$. Oare sunt printre ei vectori egali?

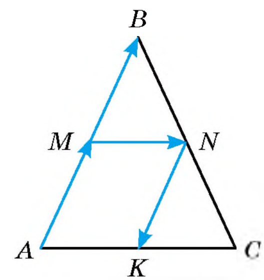


Fig.77

252. Determinaţi tipul patrulaterului $ABCD$,dacă $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ şi $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$.

253. Stabiliţi tipul patrulaterului $ABCD$ şi reprezentaţi-l, dacă:

а) vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari, iar $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ — nu;

б) vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt opuşi;

в) vectorii $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coorientaţi şi $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

254. Alegând scara desenaţi vectorii care ilustrează zborul avionului mai întâi cu 300 km la sud de la oraşul A până la B, iar apoi cu 500 km la răsărit de la oraşul B până la C. Desenaţi vectorul $\overrightarrow{AC}$ şi aflaţi lungimea lui cu două procedee. Comparaţi valorile obţinute. Cum se poate interpreta vectorul $\overrightarrow{AC}$ şi lungimea lui?

PROBLEME PENTRU REPETARE

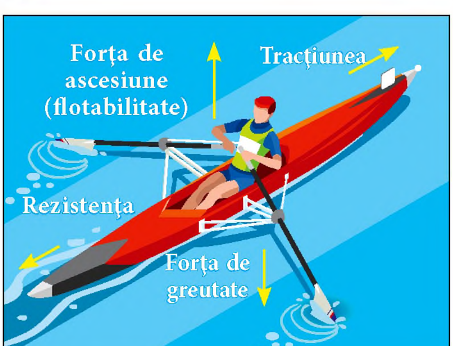
255. Scrieţi ecuaţia circumferinţei de raza 3 cm cu centrul în punctul $A(-1; 3)$.

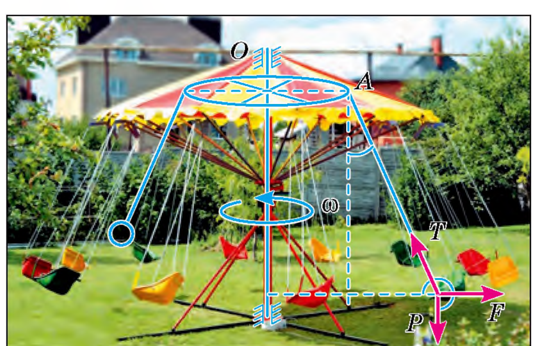
256. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului ABC, dat cu coordonatele vârfurilor lui $A(-2; 5)$, $B(5; 6)$, $C(1; 2)$.

257. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 14cm şi 48 cm. Aflaţi lungimea celei mai scurte mediane.

258. laturile paralelogramului sunt egale cu 8cm şi 12 см, iar aria lui 48 cm^2. Aflaţi distanţa de la punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului până la laturile lui.

GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU





Vectorii în sport şi odihnă

§ 8 Coordonatele vectorului

Vectorii pot fi definiţi cu procedee diferite. Să vedem cum se poate face aceasta cu ajutorul coordonatelor. **Coordonate ale vectorului** $\overrightarrow{AB}$ cu originea $A(x_1; y_1)$ și extremitatea $B(x_2; y_2)$ se numesc numerele $x = x_2 - x_1$ și $y = y_2 - y_1$. Se scrie așa un vector, indicând coordonatele lui: $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, sau $\vec{a} = (x; y)$, sau $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. De exemplu, dacă sunt date punctele $A(1; 3)$ și $B(7; -2)$, atunci $\overrightarrow{AB} = (6; -5)$. Numerele 6 și 5 sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig.78). Vectorul $\overrightarrow{OC}$, a cărui origine este punctul O (0; 0), iar extremitatea — $C(6; -5)$, are tot aceleași coordonate. Dacă O — originea de coordonate, iar numerele x și y - coordonatele punctului A, atunci tot aceste numere sunt de asemenea coordonatele vectorului OA (fig.79).

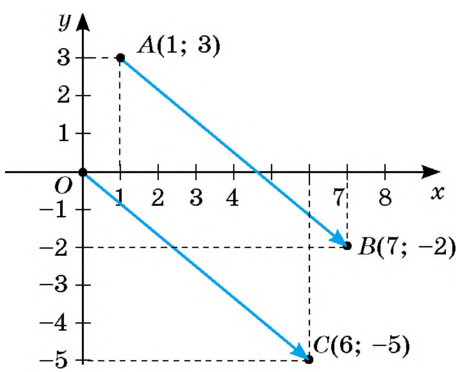


Fig.78

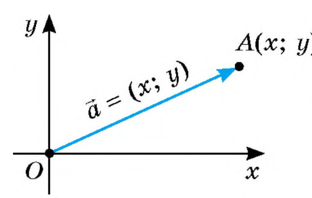


Fig.79

Coordonatele vectorului pot fi orice numere reale. Dacă ambele coordonate ale vectorului sunt zerouri, pe el îl numesc **vector nul** (se notează $\vec{0}$). Amintim că acesta este unicul vector, care nu are o anumită direcţie și căruia nu-i corespunde segment orientat.

Dacă doi vectori egali (coorientaţi și de aceleași lungimi) de le depus de la originea de coordonate, atunci extremităţile lor vor coincide. Deci, vectorii sunt **egali atunci și numai atunci, când ale lor coordonate corespunzătoare sunt egale**.

Coordonatele corespunzătoare ale vectorilor opuși sunt numere opuse.

Modulul vectorului cu coordonatele x și y este egal cu $\sqrt{x^2 + y^2}$. Aceasta rezultă din formula distanţei dintre două puncte (§ 4). Deci, dacă vectorul $\vec{a} = (x; y)$, atunci modulul lui

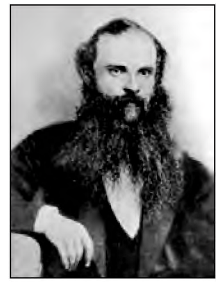
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă punctul $A(x_1; y_1)$ este originea, iar $B(x_2; y_2)$ — extremitatea vectorului, atunci modulul lu $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

PENTRU CEI CURIOŞI

Perechea ordonată de numere, perechea ordonată de puncte, care determină începutul și sfârșitul mișcării, segmentul orientat toate acestea sunt modele a noţiunii „vectori". O astfel de abordare a înţelegerii vectorului este condiţionată istoricește. Dezvoltarea calculului vectorial avea loc pe căi diferite: geometrică (calculul segmentelor orientate), fizică (cercetarea mărimilor vectoriale) și algebrică (extinderea noţiunii de număr și operaţii). Calculul segmentelor orientate era dezvoltat de K. Wessel, L. Carno.

Dintre savanţii naţionali direcţia geometrică în formarea teoriei calculului vectorial îl reprezintă profesrul Universităţii din Kiev V. Ermakov. În anul 1887 în Kiev el a tipărit lucrarea „Teoria vectorilor în plan. Utilizarea la examinarea secţiunilor conice".



Vasile Ermakov
(1845–1922)

Mărimile vectoriale referitoare la problemele mecanicii le-au cercetat D. Wallis, L. Poinsat, A de Sen-Venan. Direcţia algebrică era dezvoltată de U. Hamilton, D. Maxurell. Unul din primii savanţii autohtoni, care a construit teoria vectorială pe bază algebrică a fost profesorul Universităţii din Kiev P. Romer.

Folosind coordonatele se poate destul de leger de cercetat proprietăţile figurilor nu numai pe plan (spaţiul bidimensional), dar și în cel tridimensional, patrudimensional și în general a spaţiului n – dimensional. Vectorii spaţiului tridimensional, pe care îl veţi studia în clasele superioare, sunt determinaţi de trei coordonate $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, vectorii spaţiului patrudimensional – de patru coordonate $\vec{m}=(a;\ b;\ c;\ d)$ ș.a.m.d.

ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numesc coordonate ale vectorului?

2. Cum de găsit coordonatele vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele originii și a extremităţii lui?

3. Ce este modulul vectorului? Cum de aflat modulul vectorului, dat cu coordonate?

4. Ce coordonate are vectorul nul?

5. Formulaţi condiţia egalităţii vectorilor, daţi în forma de coordonate.

6. Ce coordonate au vectorii opuși?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-4;\ 1)$, $B(-1;\ 2)$, $C(5;\ 0)$, $D(2;\ -1)$ este paralelogram. Aflaţi perimetrul lui.

- Aflăm coordonatele vectorilor $\overline{AB}$ și $\overline{DC}$.

$\overline{AB}=(-1+4;\ 2-1)=(3;\ 1)$, $\overline{DC}=(5-2;\ 0+1)=(3;\ 1)$.

Coordonatele vectorilor sunt egale, deci, acești vectori sunt egali, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Iar din aceasta rezultă, că $AB \parallel DC$ și $AB = DC$. De aici, conform criteriului, $ABCD$ — paralelogram. Să găsim perimetrul lui. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ și $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. De aici $P = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$.

2 Se dau punctele $K(2;\ 2)$, $P(3;\ -1)$, $T(2;\ 8)$. Găsiți coordonatele a unui astfel de punct $M(x;\ y)$, că $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{KP}$.

● Admitem că $M(x;\ y)$. Aflăm coordonatele vectorilor: $\overrightarrow{TM} = (x-2;\ y-8)$, $\overrightarrow{KP} = (1;\ -3)$. Vectorii sunt egali dacă coordonatele corespunzătoare ale lor sunt egale. De aceea: $\begin{cases} 1 = x-2, \\ -3 = y-8, \end{cases}$ de unde: $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$ Așadar, $M(3;\ 5)$.

PROBLEME ȘI EXERCIȚII

EFECTUAȚI ORAL

259. Sunt date punctele $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ 5)$, $D(-2;\ -7)$, $O(0;\ 0)$. Indicați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

260. Numiți vectorii reprezentați în figura 80. Care din ei are modulul cel mai mare? Dar cel mai mic?

261. Aflați coordonatele vectorilor, reprezentați în figura 80.

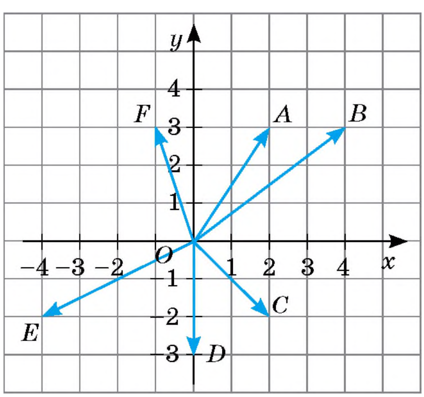


Fig.80

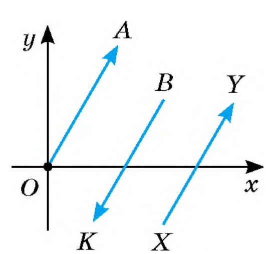


Fig.81

262. În figura 81 sunt reprezentați trei vectori coliniari de aceeași lungime. Se știe că $\overrightarrow{XY} = (2;\ 3)$. Aflați:

a) coordonatele vectorului $\overrightarrow{BK}$;

б) coordonatele punctului A.

263. Aflaţi $|\vec{a}|$, dacă:
a) $\vec{a}=(1; 1)$; b) $\vec{a}=(3; 4)$; c) $\vec{a}=(-6; 8)$; d) $\vec{a}=(2; 2)$.

264. Indicaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$, dacă:
a) $A(0; 0)$, $B(-2; 2)$;
b) $A(0; 1)$, $B(4; 1)$;
c) $A(1; 0)$, $B(0; 2)$;
d) $A(1; 1)$, $B(-2; 6)$.

A

265. Sunt date punctele $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(8; -6)$, $D(-3; -4)$, $O(0; 0)$. Construiţi vectorii: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Aflaţi coordonatele şi modulii lor.

266. Sunt date punctele $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $C(-3; -1)$, $D(2; -2)$. Aflaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$. Oare printre ei sunt vectori egali?

267. Aflaţi coordonatele vectorilor, reprezentaţi în fig. 82 şi modulii lor.

268. Depuneţi din originea de coordonate vectorii $\vec{a}=(1; 5)$, $\vec{b}=(5; 1)$, $\vec{c}=(3; -4)$, $\vec{d}=(-2; -2)$.

269. Depuneţi vectorii $\vec{m}=(2; 4)$ şi $\vec{n}=(3; -1)$ din punctele $O(0; 0)$, $A(-4; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(5; 0)$.

270. Aflaţi modulul vectorului, dacă coordonatele lui x şi y sunt corespunzător egale cu:
a) 5 şi 12;
b) −3 şi 4;
c) 1 şi 7;
d) −6 şi −8.

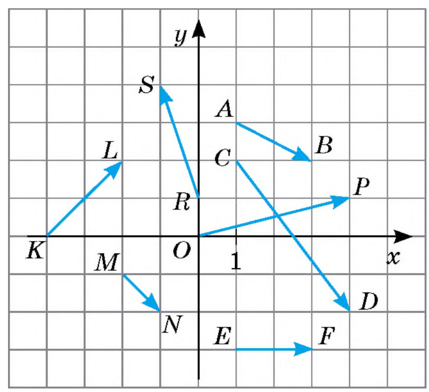


Fig.82

271. Sunt daţi vectorii $\overrightarrow{AB}=(5; 3)$, $\overrightarrow{CD}=(-4; 6)$, $\overrightarrow{MN}=(3; -2)$. Găsiţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NM}$.

272. Sunt date punctele $M(1; 3)$, $N(7; 5)$, $K(5; -1)$. Găsiţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ şi modulii lor. Stabiliţi tipul triunghiului MNK.

273. Oare va fi patrulaterul $ABCD$ paralelogram, dacă :
a) $A(1; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; -3)$, $D(-1; 1)$;
b) $A(-3; 0)$, $B(-1; 2)$, $C(2; 1)$, $D(1; -1)$?

B

274. AD —mediana triunghiului cu vârfurile $A(2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(7; 3)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AD}$.

275. Sunt date punctele $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(a_1+k; a_2+p)$, $D(b_1+k; b_2+p)$. Oare sunt egali vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$? Dar vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$?

276. $ABCD$ — romb (fig.83). Aflați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, dacă $AC = 8$, $BD = 4$.

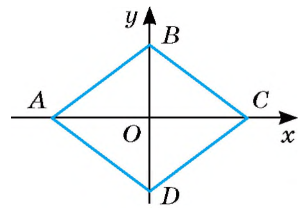


Fig.83

277. *Problemă deschisă* Sunt date punctele $A(2;\ 5)$, $B(-1;\ 1)$, $C(4;\ 1)$, $D(1;\ 5)$. Aflați coordonatele și lungimile vectorilor ... .

278. Aflați coordonatele punctului B, dacă:

a) $\overrightarrow{AB}=(1;3)$ și $A(2;\ 5)$; c) $\overrightarrow{PB}=(-11;-4)$ și $P(1;\ 5)$;

b) $\overrightarrow{BM}=(-2;7)$ și $M(-5;\ 3)$; d) $\overrightarrow{BD}=(1;-6)$ și $D(-10;\ 2)$.

279. Găsiți coordonatele celui de-al patrulea vârf al paralelogramului, reprezentat în figura 84.

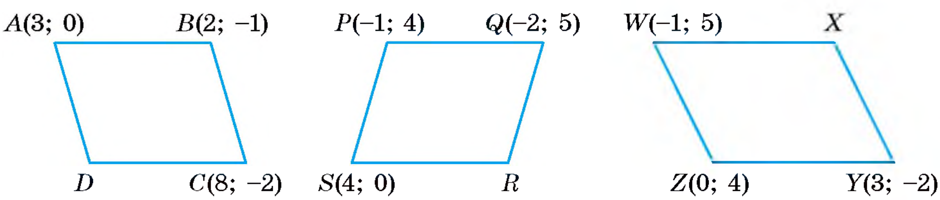


Fig.84

280. Pentru care valoare a lui x modulul vectoruluia este egal cu 10, dacă:

a) $\vec{a}=(6;x)$; b) $\vec{a}=(x-1;6)$; c) $\vec{a}=(x;x+2)$; d) $\vec{a}=(x+2;3x-4)$?

281. Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt egali, dacă:

a) $\vec{a}=(4;m^2)$, $\vec{b}=(4;m)$;

b) $\vec{a}=(m-1;16)$, $\vec{b}=(3;m^2)$;

c) $\vec{a}=(12;-4-2m)$, $\vec{b}=(12;m^2-3)$?

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

282. ***Cercetare de învățătură.***

1. Aflați coordonatele vectorilor. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, dacă:

a) $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ -1)$, $D(-5;\ -2)$;

b) $A(5;\ 0)$, $B(4;\ -3)$, $C(-2;\ -1)$, $D(-1;\ 2)$;

c) $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 5)$, $D(6;\ 0)$.

Rezultatele pentru fiecare din cazurile a) – c) scrieți-le în tabel. Ce dependență se poate vedea? Formulați ipoteza.

		$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
a)	x				
	y				

2. Îndepleniţi o însărcinare analogică pentru alte puncte:
   a) $A(4;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ -1)$, $D(5;\ -2)$;
   b) $A(0;\ 5)$, $B(-3;\ 4)$, $C(-1;\ -2)$,$D(2;\ -1)$;
   c) $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 5)$, $D(6;\ 0)$.
   Oare s-a confirmat ipoteza făcută de voi?
3. Reprezentaţi în sistemul de coordonare punctele date în însărcinările anterioare. Determinaţi tipul fiecărui patrulater. Faceţi concluzia.

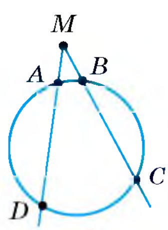
Probleme pentru repetare

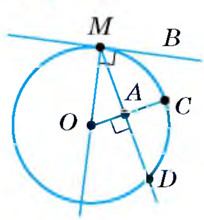
283. Se știe, că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Demonstrați: a) punctele A, B i C sunt situate pe aceeași dreaptă; b) punctul B – mijlocul segmentului AC.

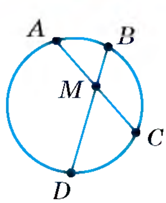
284. M, N, P — sunt mijlocurile laturilor AB, BC, AC ale triunghiului echilateral ABC. Demonstrați: a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$; b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PN}$.

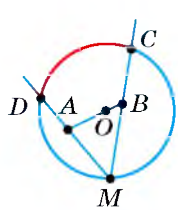
285. Aflați aria triunghiului dreptunghic, dacă diferența catetelor este egală cu 2 cm, iar cea mai mică mediană este egală cu 5 cm.

286. Stabiliți corespondența dintre figurile (1-4) și formulele (A-E), care pot fi folosite pentru a determina unghiul AMB, reprezentat în figura corespunzătoare.

1


2


3


4


A $\angle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{AB})$

B $\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DM}$

C $\angle AMB = \overset{\frown}{DC}$

D $\angle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC})$

E $\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$

§ 9 Adunarea şi scăderea vectorilor

Vectorii, ca şi numerele se pot aduna şi scădea. **Suma vectorilor** $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ şi $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ este numit vectorul $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$.

De exemplu, dacă $\vec{a}=(3;\ 2)$, $\vec{b}=(-1;\ 4)$, atunci $\vec{a}+\vec{b}=(3-1;\ 2+4)=(2;\ 6)$.

Pentru vectorii arbitrari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ se îndeplinesc *proprietăţile comutativă şi asociativă ale adunării:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

Să demonstrăm proprietatea comutativă. Dacă $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ şi $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, atunci

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2) \text{ şi } \vec{b}+\vec{a}=(x_2+x_1;\ y_2+y_1).$$

Fiind că $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ şi $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, pentru că numerele reale realizează proprietatea comutativă a adunării, rezultă că şi

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Proprietatea asociativă se poate demonstra analogic. Geometric suma a doi vectori poate fi găsită după regula triunghiului.

Care n-ar fi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$, totdeauna $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (fig. 85).

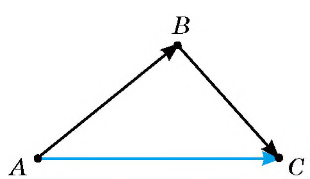


Fig.85

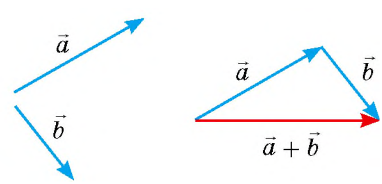


Fig.86

Într-adevăr, pentru oricare trei puncte $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, $\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2;\ y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

De aceea $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1+x_3-x_2;\ y_2-y_1+y_3-y_2)=(x_3-x_1;\ y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}$.

Pentru a aduna doi vectori conform regulii triunghiului, trebuie de repartizat aceşti vectori consecutiv, adică astfel ca originea celui de-al doilea vector să coincidă cu extremitatea primului. Suma vectorilor va fi vectorul, al cărui origine coincide cu originea primului vector, iar extremitatea – cu extremitatea celui de-al doilea vector.

De exemplu, pentru a aduna vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, reprezentaţi în figura 86, trebuie dintr-un punct arbitrar de depus vectorul $\vec{a}$, iar din extremitatea vectorului $\vec{a}$ de depus vectorul $\vec{b}$. Sumă a acestor vectori va fi vectorul $\vec{c}$, originea căruia se suprapune cu originea lui $\vec{a}$, iar extremitatea – cu extremitatea lui $\vec{b}$.

Suma vectorilor poate fi găsită și conform *regulii paralelogramului*. În acest caz vectorii trebuie amplasați astfel, ca ei să aibă aceeași origine, și pe acești vectori, ca pe laturi de construit paralelogramul.

Adunarea vectorilor

Dacă $ABCD$ — paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (fig. 87).

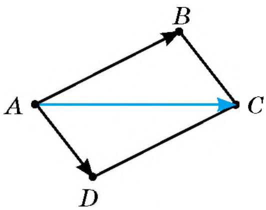


Fig.87

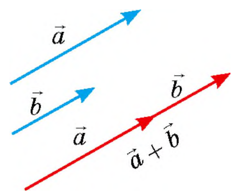


Fig.88

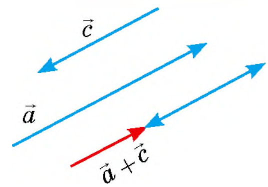


Fig.89

Doar în acest caz $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, de aceea $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Pentru a aduna doi vectori coliniari ei sunt amplasați consecutiv. Sumă a vectorilor va fi vectorul, a cărui origine coincide cu originea primului, iar extremitatea - cu extremitatea celui de-al doilea. În figura 88 se arată cum de aflat suma vectorilor, dacă ei sunt coorientați, iar în figura 89 – dacă vectorii sunt orientați în sens opus.

Din regula adunării vectorilor coliniari rezultă că suma vectorilor opuși este egală cu $\vec{0}$, adică $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Diferență a vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este numit un astfel de vector $\vec{c}$, care în sumă cu vectorul $\vec{b}$ ne dă vectorul $\vec{a}$. Dacă $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, atunci $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$.

Doar $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=(x_1-x_2+x_2;\ y_1-y_2+y_2)=(x_1;\ y_1)=\vec{a}$.

Pentru oricare vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, totdeauna $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (fig.90), deoarece pe baza regulii triunghiului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

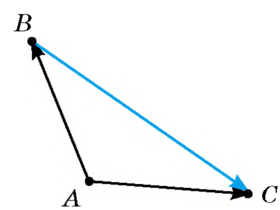


Fig.90

Pentru a afla diferența a doi vectori trebuie de repartizat vectorii astfel, ca ei să iasă din același punct. Diferență a vectorilor va fi vectorul, al cărui origine coincide cu extremitatea vectorului a doilea, iar extremitatea - cu extremitatea primului, adică vectorul care merge de la extremitatea celui de-al doilea vector spre extremitatea primului.

Se poate utiliza și altă regulă. Pentru a afla diferența vectorului $\vec{a}$ și $\vec{b}$, trebuie de adunat la vectorul $\vec{a}$ vectorul $-\vec{b}$, opus vectorului dat $\vec{b}$ (fig.91). Totdeauna sunt adevărate egalitățile:

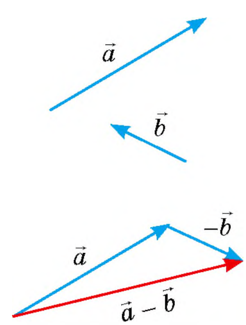


Fig.91

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA},\quad \vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Se pot aduna nu numai doi vectori, dar și trei, patru ș.a.m.d. Care nu ar fi punctele A, B, C, D, totdeauna $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Se poate demonstra așa o egalitate, folosind proprietatea asociativă a adunării vectorilor: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Cu un procedeu asemănător se poate demonstra, că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}$ ș.a.m.d. Cu alte cuvinte pentru oricare linie frântă $ABC \dots KP$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\dots+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AP}$.

Astfel de egalități sunt adevărate nu numai pentru liniile frânte ale unui plan, dar și pentru spațiu. De exemplu, dacă vectorii sunt repartizați pe muchiile paralelipipedului (fig.92), atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}$.

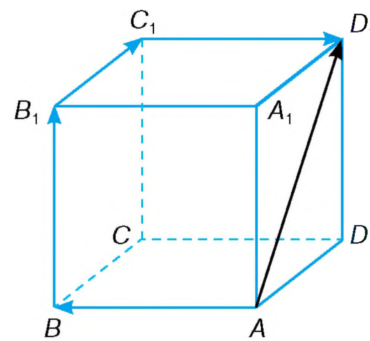


Fig.882

Pentru a afla suma a câțiva vectori se utilizează regula poligonului.

Pentru a aduna vectorii după regula poligonului trebuie de repartizat acești vectori consecutiv. Sumă a vectorilor va fi vectorul a cărui origine coincide cu originea primului, iar extremitatea - cu extremitatea ultimului vector.

De exemplu, pentru a aduna vectorii, reprezentați în figura 93, *a* trebuie de le amplasat succesiv (fig.93, *b*). Sumă a vectorilor va fi vectorul $\vec{m}$, care unește originea primului vector cu extremitate ultimului. Termenii vectoriali pot fi permutați.

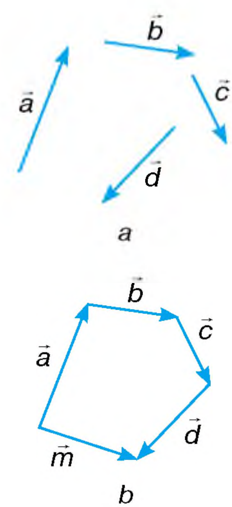


Fig.93

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește sumă a doi vectori?
2. Cum de aflat suma a doi vectori, definiți în formă de coordonate?
3. Formulați regula triunghiului pentru adunarea vectorilor.
4. Formulați regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.
5. Cum de aflat suma vectorilor coliniari?
6. Cu ce este egală suma vectorilor opuși?
7. Cum de aflat diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$?

Efectuăm împreună

1 Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul O (fig.94). Cu ce este egală suma vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$?

- Vectroii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC}$ sunt opuși, de aceea suma lor este egală cu $\vec{0}$. Sunt opuși de asemenea vectorii $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OD}$. De aceea $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

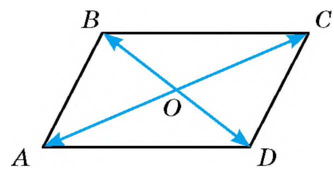


Fig.94

2 În figura 95, *a* se reprezintă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Construiți vectorul $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

- *Primul procedeu.* Construim suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Obținem vectorul $\vec{a}+\vec{b}$, din care scădem vectorul $\vec{c}$ (fig.95, b). Obținem vectorul $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
Al doilea procedeu. Desenăm la început vectorul $-\vec{c}$, opus vectorului dat $\vec{c}$. Apoi construim suma vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $-\vec{c}$ (fig.95, c). Vectorul căutat este $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})$.

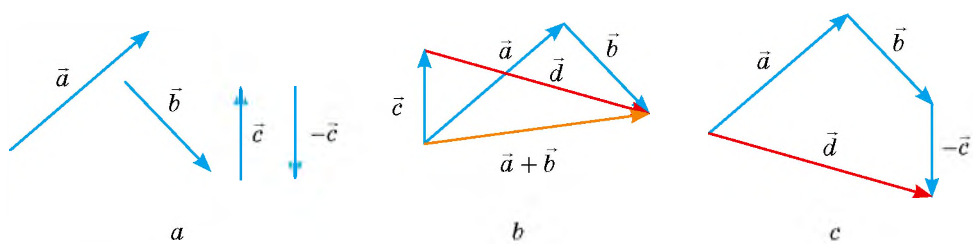


Fig.95

Probleme și exerciții

Efectuați oral

287. Aflați suma și diferența vectorilor:
a) $\vec{a}=(2;3)$ și $\vec{b}=(-1;4)$;
b) $\vec{c}=(-2;4)$ și $\vec{d}=(3;-2)$;
c) $\vec{a}=(1;0)$ și $\vec{b}=(-3;-5)$;
d) $\vec{c}=(3;-5)$ și $\vec{d}=(0;0)$.

288. Sunt dați vectorii $\vec{a}=(2;-3)$ și $\vec{b}=(-4;1)$. Aflați coordonatele vectorilor $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{b}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{a}$.

289. Aflați suma vectorilor:
a) $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XT}$; b) $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OK}$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$.

290. Găsiți diferența vectorilor:

a) $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XT}$; b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$; c) $\overrightarrow{KP}-\overrightarrow{KL}$.

291. $ABCD$ — paralelogram, în care $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (fig.96). Exprimați prin vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ vectorii $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$.

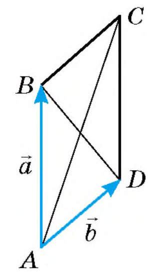


Fig.96

A

292. Aflați suma vectorilor:

a) $\vec{a}=(4;\ 2)$ și $\vec{b}=(1;\ 7)$;

b) $\vec{c}=(8;\ -1)$ și $\vec{0}=(0;\ 0)$;

c) $\vec{n}=(-6;\ 8)$ și $\vec{m}=(-2;\ -9)$;

d) $\vec{p}=\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ și $\vec{q}=(1;\ 7)$.

293. Aflați suma vectorilor:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CT}$; b) $\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{XK}$.

294. Sunt date punctele $O(0;\ 0)$, $A(a_1;\ a_2)$ și $B(b_1;\ b_2)$. Exprimați prin ale lor coordonate sumele:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$.

295. Aflați diferența vectorilor:

a) $\vec{a}=(9;\ 5)$ și $\vec{c}=(6;\ 2)$;

b) $\vec{k}=(1;\ 7)$ și $\vec{p}=(4;\ -4)$;

c) $\vec{n}=(8;\ -6)$ și $\vec{0}$;

d) $\vec{0}$ și $\vec{b}=(-2;\ 7)$.

296. Aflați diferența vectorilor:

a) $\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XK}$; b) $\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PK}$; c) $\vec{0}-\overrightarrow{AB}$.

297. $ABCD$ — paralelogram. Aflați diferența vectorilor:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$.

298. Aflați $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$, dacă:

a) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 5)$;

b) $\vec{a}=(-1;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 1)$;

c) $\vec{a}=(6;\ -2)$, $\vec{b}=(6;\ -3)$;

d) $\vec{a}=(-4;\ 2)$, $\vec{b}=(-2;\ 6)$.

299. Aflați suma vectorilor, reprezentați în figura 97:

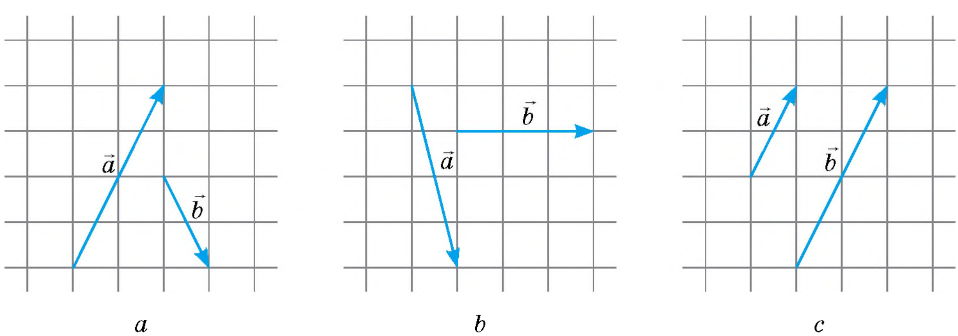


Fig.97

300. Găsiți diferența vectorilor, reprezentați în figura 98.

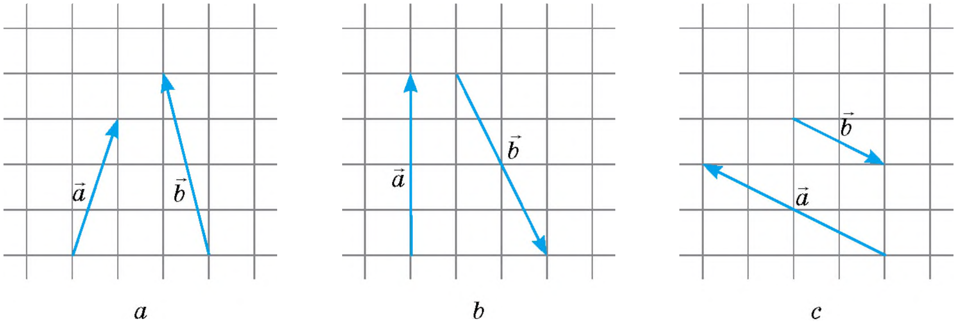


Fig.98

301. Depuneți din originea de coordonate vectorii $\overrightarrow{OA}=(3;\ 2)$ și $\overrightarrow{OB}=(-4;\ 3)$. Construiți vectorii:

a) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; c) $\vec{m}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; d) $\vec{n}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

302. Desenați doi vectori arbitrari și convingeți-vă în justețea proprietății comutative a adunării vectorilor, adunând acești vectori după regula: *a*) triunghiului; *b*) a paralelogramului.

303. Desenați trei vectori arbitrari și , adunându-i, convingeți-vă în justețea proprietății asociative a adunării vectorilor.

304. Aflați x, dacă suma vectorilor $\vec{a}=(2;\ 7)$ și $\vec{b}=(3;\ x)$ este egală cu vectorul:

a) $\vec{m}=(5;\ 10)$; б) $\vec{c}=(5;\ -4)$.

305. Aflați x și y, dacă suma vectorilor $\vec{m}=(6;\ y)$ și $\vec{n}=(x;\ 7)$ este egală cu vectorul: a) $\vec{q}=(-1;\ 8)$; b) $\vec{p}=(8;\ -1)$.

306. Demonstrați egalitatea vectorială:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PK}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

B

307. Sunt dați vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (fig.99). Construiți vectorii:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$; c) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

d) $\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}-\vec{d}$; e) $\vec{a}-\vec{c}-\vec{d}+\vec{b}$.

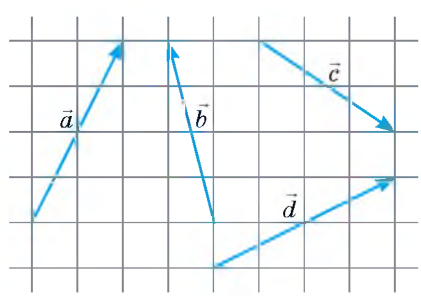


Fig.99

308. Aduceți la o formă mai simplă expresiile:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)$;

b) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}$;

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{AP}$;

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PC}$;

e) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MK}$.

309. Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Construiți vectorii:
a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$; c) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BO}$.

310. Oare este adevărat că totdeauna $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|\geq|\overrightarrow{AC}|$?

311. Sunt dați vectorii $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$, $\vec{c}=(6;-2)$, $\vec{d}=(x;y)$. Pentru care valori ale lui x și y se realizează egalitățile:
a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}$; c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}=\vec{c}-\vec{d}$;
b) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$; d) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}-\vec{d}+\vec{c}$?

312. Sunt date punctele $A(2;\ 3)$, $B(-1;\ 5)$. Aflați coordonatele a unui astfel de punct $C(x;\ y)$, că: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

313. Sunt date punctele $A(-4;\ -2)$, $B(2;\ 6)$, $C(x;\ y)$. Găsiți locul geometric al punctelor planului pentru care sunt adevărate egalitățile:
a) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|$;
b) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$;
c) $|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

314. În figura 100 se arată cum se poate afla pe cale geometrică suma a patru vectori $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. Convingeți-vă că de la permutarea termenilor suma nu se schimbă. Câte sume pot fi formate din diferite succesiuni a astfel de patru termeni?

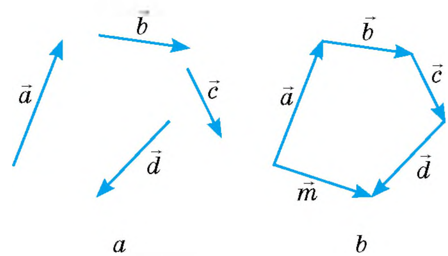


Fig.100

PROBLEME PENTRU REPETARE

315. Demonstrați că patrulateralul cu vârfurile în punctele $M(-3;\ -2)$, $N(-2;\ 1)$, $P(4;\ -1)$, $K(3;\ -4)$ este paralelogram.

316. Sunt date punctele $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ 3)$. Aflați coordonatele a unui astfel de punct $D(x;\ y)$, pentru care: a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

317. Linia medie a trapezului isoscel este egală cu l. Aflați aria trapezului, dacă diagonalele lui sunt reciproc perpendiculare.

318. Oare poate fi acoperit triunghiul dreptunghic cu catetele 8 cm și $10\sqrt{2}$ cm de cercul cu raza 7,5 cm? Dar de raza 8,5 cm?

§ 10 Înmulţirea vectorilor cu un număr

Produs al vectorului $\vec{a}=(x;\ y)$ **cu numărul** $\boldsymbol{n}$ se numește vectorul $n\vec{a}=(nx;\ ny)$.
De exemplu, dacă $\vec{a}=(4;\ 3)$, atunci $5\vec{a}=(20;\ 15)$, $-2\vec{a}=(-8;\ -6)$, $0\vec{a}=(0;\ 0)$.
Din difiniția expusă decurge, că:

1) pentru oricare vectori $\vec{a},\ \vec{b}$ și număr n: $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$;

2) pentru oricare numere $n,\ m$ **și vector** $\vec{a}$: $(n+m)\vec{a}=n\vec{a}+m\vec{a}$;

3) pentru oricare numere $n,\ m$ **și vector** $\vec{a}$: $n(m\vec{a})=(nm)\vec{a}$.

Să demonstrăm prima afirmație. Fie $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$.

Atunci $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$; $n(\vec{a}+\vec{b})=(nx_1+nx_2;\ ny_1+ny_2)$; (1)

$n\vec{a}+n\vec{b}=(nx_1;\ ny_1)+(nx_2;\ ny_2)=(nx_1+nx_2;\ ny_1+ny_2)$. (2)

Părțile drepte ale egalităților (1) și (2) sunt egale, de acea sunt de asemenea egale și părțile stângi:

$$n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}.$$

Analogic se pot demonstra și alte afirmații. Dacă numărul n este natural, atunci

$$n\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n \text{ разів}}.$$

De exemplu, $3\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$. Lungimea vectorului $3\vec{a}$ este de trei ori mai mare decât lungimea vectorului $\vec{a}$ (dacă $\vec{a}\neq 0$). Direcţiile vectorilor $3\vec{a}$ ș $-3\vec{a}$ sunt opuse (fig.101).

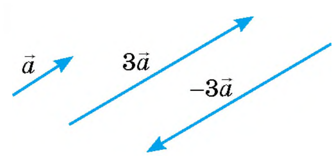


Fig.101

În general produsul $n\vec{a}$ este vectorul, a cărui lungime este egală cu $|n\vec{a}|=|n|\cdot|\vec{a}|$, iar direcția coincide cu direcția vectorului $\vec{a}$, dacă $n > 0$, și este opusă direcției lui, dacă $n < 0$.

Dacă $n = 0$ sau $\vec{a}=\vec{0}$, atunci $n\vec{a}=0$. De aceea, pentru a construi vectorul $n\vec{a}$, trebuie:

1) de depus vectorul, coliniar cu vectorul $\vec{a}$, a cărui lungime este egală cu $|n|\cdot|\vec{a}|$;

2) de ales aceeași direcție ca și a vectorului $\vec{a}$, dacă $n > 0$, și opusă ei, dacă $n < 0$.

De exemplu, în figura 102 sunt reprezentați vectorii, obținuți în urma înmulțirii vectorului $\vec{a}$ cu numerele 2; -3; $0,5$.

La înmulțirea vectorului $\vec{a}$ cu un număr obținem un vector, coliniar cu cel dat. Adică, dacă $\vec{b}=n\vec{a}$, atunci $\vec{a}$ și $\vec{b}$ – coliniari. Și invers, dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ coliniari, atunci, notând raportul lungimilor lor cu $|n|$, obținem că $\vec{b}=n\vec{a}$. De aceea este adevărată următoarea afirmație despre coliniaritatea a doi vectori nenuli.

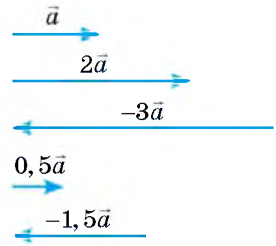


Fig.102

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari atunci și numai atunci, când există așa un număr n, că $\vec{b}=n\vec{a}$.

Dacă vectorii sunt dați cu coordonate, adică $\vec{a}=(x_1;\, y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\, y_2)$, atunci ei sunt coliniari atunci și numai atunci, când coordonatele corespunzătoare ale lor sunt proporționale: $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$.

PENTRU CEI CURIOŞI

Vectorii $\vec{e}_1=(1;\, 0)$ și $\vec{e}_2=(0;\, 1)$ se numesc **orți (versori)** sau vectori de coordonate. Oricare vector $\vec{a}=(x;\, y)$ poate fi dat în forma

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2.$$

Într-adevăr, $\vec{a}=(x;\, y)=(x;\, 0)+(0;\, y)=x(1;\, 0)+y(0;\, 1)=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

O astfel de reprezentare a vectorului $\vec{a}$ se numește dezvoltarea (descompunerea) vectorului după versori. Conținutul geometric al dezvoltării este clar din figura 103. Orice vector poate fi descompus după vectorii de coordonate, și numai într-un mod unic.

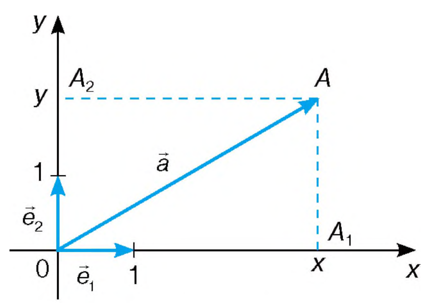


Fig.103

Deseori apare problema descompunerii a vectorului dat $\vec{c}$ după doi vectori necoliniari dați $\vec{a}$ și $\vec{b}$, adică de găsit astfel de numere m și n, ca să aibă loc egalitatea $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Fie, de exemplu, că vectorul $\vec{c}=(1;\, 4)$ trebuie descompus după vectorii $\vec{a}=(2;\, -3)$ și $\vec{b}=(-1;\, 2)$.

Să găsim astfel de numere m și n ca să se îndeplinească egalitatea $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

$$m\vec{a}=(2m;\, -3m);\quad n\vec{b}=(-n;\, 2n),$$

$$m\vec{a}+n\vec{b}=(2m-n;\, -3m+2n).$$

Numerele căutate m și n le vom găsi din sistemele de ecuații:

$$\begin{cases}2m-n=1,\\-3m+2n=4;\end{cases}\quad \begin{cases}4m-2n=2,\\-3m+2n=4;\end{cases}\quad \begin{cases}m=6,\\n=11.\end{cases}$$

Deci, $\vec{c}=6\vec{a}+11\vec{b}$.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numeşte produsul vectorului cu un număr?
2. Formulaţi proprietăţile înmulţirii vectorului cu un număr.
3. Oare se va schimba direcţia vectorului, dacă îl vom înmulţi cu:
   a) un număr pozitiv; b) un număr negativ; c) zero?
4. Formulaţi criteriul de coliniaritate a doi vectori nenuli.
5. Cum, ştiind vectorul $\vec{a}$, de construit vectorului $n\vec{a}$?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Sunt daţi vectorii $\vec{a}=(-2;\ 3)$ şi $\vec{b}=(4;\ 1)$. Aflaţi $|\vec{c}|$, dacă $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

● Să aflăm coordonatele vectorilor $3\vec{a}$ şi $2\vec{b}$: $3\vec{a}=3(-2;\ 3)=(-6;\ 9)$; $2\vec{b}=2(4;\ 1)=(8;\ 2)$. Atunci $\vec{c}=(-6;\ 9)-(8;\ 2)=(-14;\ 7)$, de unde $|\vec{c}|=\sqrt{(-14)^2+7^2}=\sqrt{196+49}=\sqrt{245}=7\sqrt{5}$.
De aici, $|\vec{c}|=7\sqrt{5}$.

2 M — punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC. Demonstraţi, că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

● Medianele AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului ABC sunt împărţite de punctul de intersecţie M în raportul 1:2. Depunem vectorul $\overrightarrow{MK}=2\cdot\overrightarrow{MA_1}$ (fig.104). Vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MK}$ au lungimi egale şi sunt orientaţi în sens opus, de aceea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}=\vec{0}$. Patrulaterul $BMCK$ — paralelogram, de aceea conform regulii paralelogramului $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MK}$. Deci, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}=\vec{0}$.

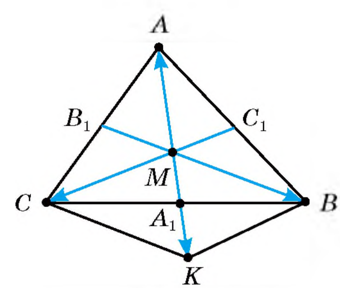


Fig.104

PROBLEME ŞU EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

319. Simplificaţi expresia: a) $\vec{c}+\vec{c}+\vec{c}+\vec{c}$; b) $3\vec{a}+5\vec{a}$; c) $2(3\vec{a}+4\vec{b})-6\vec{a}$.

320. Înmulţiţi vectorul $\vec{a}=(-3;\ 5)$: cu 2; cu 3; cu -7; cu 1,2; cu $\frac{1}{3}$.

321. Găsiţi lungimile vectorilor $2\vec{p}$ şi $-2\vec{p}$, dacă $\vec{p}=(3;\ 4)$.

322. Vectorii, reprezentaţi în figura 105 au fost obţinuţi la înmulţirea vectorului $\vec{m}$ cu un oarecare număr. Aflaţi acest număr.

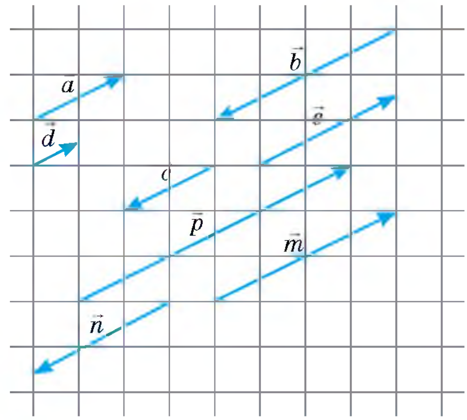


Fig.105

323. Oare sunt coliniari vectorii:

a) $\vec{a}=(4;\,6)$ şi $\vec{b}=(2;\,3)$;

b) $\vec{c}=(1;\,5)$ şi $\vec{d}=(5;\,1)$;

c) $\vec{x}=(-1;\,1)$ şi $\vec{y}=(-1;\,1)$;

d) $\vec{m}=(2;\,-5)$ şi $\vec{n}=(-1;\,2,5)$?

324. $ABCD$ — paralelogram (fig.106). Găsiţi un astfel de număr k, ca să se îndeplinească egalitatea:

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AC}$.

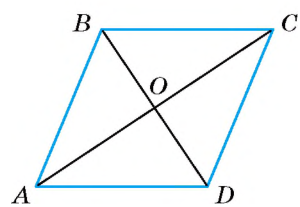


Fig.106

A

325. Sunt daţi vectorii $\vec{a}=(2;\,-3)$ şi $\vec{b}=(-6;\,1)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{c}$, dacă:

a) $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$; b) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; c) $\vec{c}=5\vec{a}+7\vec{b}$; d) $\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$.

326. Aduceţi la cea mai simplă formă:

a) $2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{a}-4\vec{b}+\vec{a}$;

b) $2(\vec{m}-3\vec{n})-3(2\vec{m}+\vec{n})$;

c) $2(\vec{a}+2\vec{b})-3(\vec{b}-4\vec{c})-(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$;

d) $1,2\vec{a}-0,3(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})-0,1\vec{c}$.

327. Pentru vectorii, reprezentaţi în figura 107, construiţi vectorii

$2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $\frac{1}{4}\vec{a}$; $2,5\vec{a}$; $-1,5\vec{a}$; $\frac{2}{3}\vec{a}$.

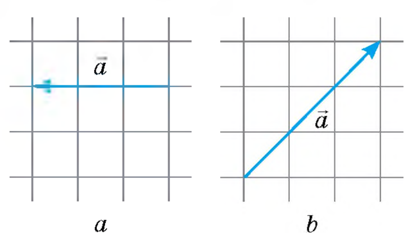


Fig.107

328. Aflaţi modulul vectorului $\vec{c}$, dacă: $\vec{a}=(-4;\,2)$, $\vec{b}=(6;\,-6)$ şi:

a) $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$;

b) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$;

c) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$;

d) $\vec{c}=1,5\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}$.

329. Aflaţi numărul k şi coordonatele vectorului $\vec{p}$, dacă: $\vec{p}=k\vec{b}$, $|\vec{p}|=10$, $\vec{b}=(3;\ 4)$.

330. Vectorul $\vec{a}=(2;\ 0)$ dă viteza cursului unui râu. Viteza proprie a luntrei este de două ori mai mare. Reprezentaţi vectorii care dau: a) viteza luntrei în direcţia curentului de apă; b) viteza luntrei împotriva curentului de apă. Aflaţi vitezele cu care luntrea se mişcă în direcţia cursului şi împotriva cursului de apă.

331. Sunt date punctele $A(-1;\ 3)$, $B(-2;\ 7)$, $C(2;\ 5)$, $D(4;\ 1)$. Oare sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$? Dar vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$?

332. Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari:

a) $\vec{a}=(2;\ m)$, $\vec{b}=(3;\ 12)$; c) $\vec{a}=(m;\ 12)$, $\vec{b}=(3;\ m)$;

b) $\vec{a}=(m;\ -4)$, $\vec{b}=(1;\ 3)$; d) $\vec{a}=(m+1;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ m-1)$?

333. Punctele M, N, P împart segmentul AB în patru părţi egale (fig.108). $\overrightarrow{AN}=\vec{a}$. Exprimaţi prin $\vec{a}$ vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MA}$.

Fig.108

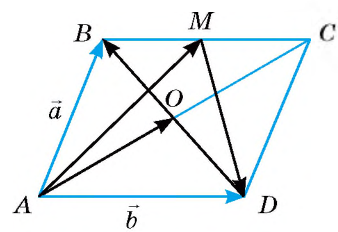


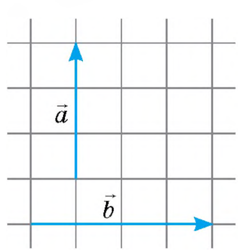
Fig.109

334. $ABCD$ — paralelogram (fig.109), M — mijlocul lui BC. Exprimaţi prin vectorii $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ şi $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ vectorii $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}$.

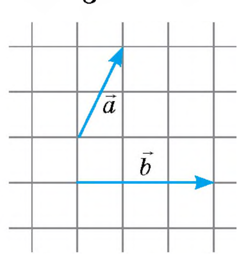
B

335. Se dă vectorul $\vec{a}=(-2;\ 7)$ şi punctul $M(1;\ -4)$. Aflaţi coordonatele punctului N, pentru care: a) $\overrightarrow{MN}=2\vec{a}$; b) $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

336. Pentru vectorii, reprezentaţi în figura 110, construiţi vectorii $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}$; $\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{n}=2(\vec{a}-\vec{b})$; $\vec{p}=\frac{1}{3}(3\vec{a}+2\vec{b})$.



a



b

Fig.110

337. Aflaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AK}$ şi $\overrightarrow{AB}$, dacă $\overrightarrow{KB}=(2;3)$.

338. $ABCD$ — dreptunghi (fig.111), $\vec{a}=\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Exprimaţi prin vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, unde M şi N —mijlocurile laturilor BC şi CD.

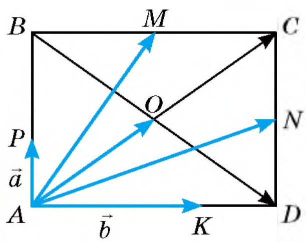


Fig.111

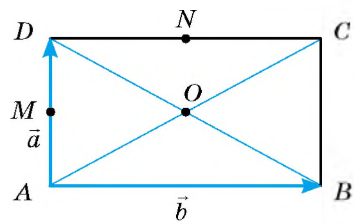


Fig.112

339. ***Problemă deschisă.*** $ABCD$ — dreptunghi (fig.112). O — punctul de intersecţie al diagonalelor lui. Punctele M şi N — mijlocurile laturilor AD şi CD. Exprimaţi vectorii ... prin vectorii $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ şi $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

340. Aflaţi coordonatele vectorului unitar, coliniar cu vectorul $\vec{a}=(-5;12)$.

341. Găsiţi coordonatele vectorului $\vec{b}$, coorientat cu vectorul $\vec{a}=(6;-8)$, dacă $|\vec{b}|=5$.

342. Stabiliţi corespondenţa dintre vectorii (1-4), reprezentaţi în fig. 113 şi vectorii coliniari lor cu coordonatele (A-E).

1 $\vec{a}$	**A** (−3; 3)
2 $\vec{b}$	**B** (−3; −4)
3 $\vec{c}$	**C** (0; 3)
4 $\vec{d}$	**D** (3; 0)
	E (−3;−3)

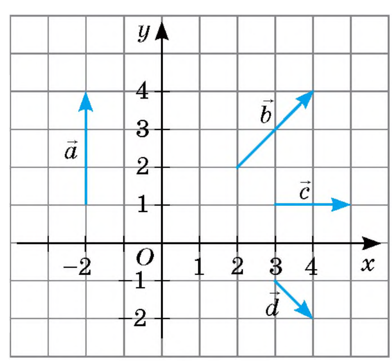


Fig.113

343. Aflaţi lungimile vectorilor: $\vec{a}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2$, $\vec{b}=5\vec{e}_1+5\vec{e}_2$, $\vec{c}=2\vec{e}_1-4\vec{e}_2$, $\vec{d}=-2\sqrt{5}\vec{e}_1-4\vec{e}_2$.

344. Sunt daţi vectori $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(5;9)$ şi $\vec{m}=(5;7)$. Găsiţi aşa numere α şi β, ca să aibă loc egalitatea $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

345. Descompuneţi vectorul $\vec{m}=(2;5)$ după vectorii:

a) $\vec{a}=(1;-3)$ şi $\vec{b}=(-2;5)$; b) $\vec{c}=(-2;3)$ şi $\vec{d}=(3;-6)$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

346. Copiaţi figura 114 în caiet şi depuneţi pe ea:

a) punctul X astfel , că: $\overline{MX} = \overline{MN} + \overline{MP}$;

б) punctul Y astfel , că: $\overline{MY} = \overline{MN} - \overline{MP}$;

в) punctul Z astfel , că: $\overrightarrow{PZ} = 2\overline{PM}$.

Determinaţi tipul patrulaterilor $MPNY$ şi $XYZM$.

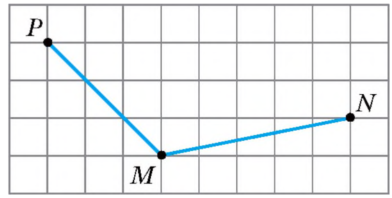


Fig.114

PROBLEME PENTRU REPETARE

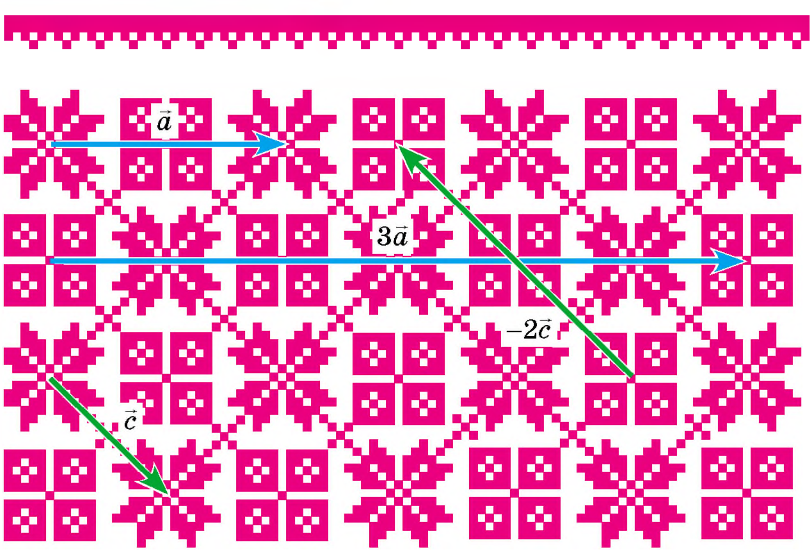
347. Oare sunt egali vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overline{MN}$, dacă $A(2;\ -5)$, $B(1;\ -3)$, $M(-7{,}5;\ 1{,}2)$, $N\left(-8\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{5}\right)$?

348. Simplificaţi expresia $\overline{MN} + \overrightarrow{NK} - \overline{MP} + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}\right) + \overrightarrow{CP}$.

349. Sunt daţi vectorii $\vec{a} = (-2;\ 4)$ şi $\vec{b} = (4;\ -4)$. Cu cât modulul diferenţei lor este mai mare decât modulul sumei acestor vectori?

350. ***Problema lui Arhimede.*** Dacă dintr-un punct, luat în afara cirmuferinţei, de dus două secante astfel, că una din ele trece prin centrul circumferinţei, iar segmentul exterior al celeilalte secante este egal cu raza circumferinţei, atunci unghiul făcut de secante va fi egal cu o treime din arcul mai mare, ce se află între laturile lui. Demonstraţi.

GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Ornamente şi vectori

§ 11 Produsul şcalar al vectorilor

Până acuma noi înmulţeam vectorii cu un număr. A ieşit la iveală că se poate înmulţi vector cu vector. Deoarece se consideră aşa o înmulţire, la care produsul a doi vectori este egal cu un număr (scalar), de aceea l-au numit produs scalar. Pentru a introduce această noţiune să explicăm mai întâi, ce se înţelege sub noţiunea de unghiul făcut de doi vectori nenuli.

Unghi făcut de doi vectori nenuli se numeşte unghiul, făcut de segmentele orientate corespunzătoare lor, care ies din acelaşi punct. Unghiul făcut de vectorii orientaţi în sens opus este egal cu 180°, iar de cei coorientaţi — 0°.

De exemplu, dacă *ABC* — triunghi echilateral (fig. 115), atunci unghiul făcut de vectorii *AB* şi *AC* este egal cu 60°, iar cel făcut de *AB* şi *BC* — 120°, deoarece unghiul făcut de vectorii *AB* şi *BC* este egal cu unghiul făcut de vectorii *BD* şi *BC*.

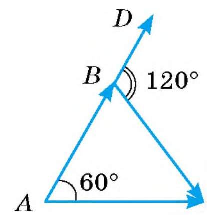


Fig.115

Produs scalar a doi vectori nenuli este numit produsul modulilor acestor vectori cu cosinusul unghiului făcut de ei.

Dacă unghiul făcut de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu φ, atunci produsul lor scalar este $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

Dacă măcar unul din vectori este nul, atunci produsul este egal cu zero.

TEOREMA 4

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}=(x_1;\, y_1)$ şi $\vec{b}=(x_2;\, y_2)$ este egal cu $x_1x_2+y_1y_2$.

Exemplu 1. Dacă $\vec{a}=(2;\,-1)$ şi $\vec{b}=(1;\,0)$, atunci $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-1)\cdot0=2$.

Această teoremă este foarte importantă. Ea este folosită la rezolvarea a multe probleme abstracte şi aplicative.

Să examinăm principalele proprietăţi ale produsului scalar.

Pentru oricare vectori $\vec{a}=(x_1;\, y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\, y_2)$ şi $\vec{c}=(x_3;\, y_3)$, totdeauna:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Justeţa acestor proprietăţi reiese din identităţile:

$$x_1x_2+y_1y_2=x_2x_1+y_2y_1;$$
$$(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3=(x_1x_3+x_2x_3)+(y_1y_3+y_2y_3)=$$
$$=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3);$$
$$(kx_1)x_2+(ky_1)y_2=k(x_1x_2+y_1y_2).$$

Proprietăţile demonstrate permit comparativ uşor de făcut transformările expresiilor vectoriale – tot conform aceloraşi reguli în virtutea cărora se execută transformările identice ale expresiilor algebrice.

Ştiind produsul scalar a doi vectori şi lungimile lor, se poate uşor calcula cosinusul unghiului dintre ei.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero, atunci $\cos\varphi = 0$ şi $\varphi = 90°$, adică vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt perpendiculari. Şi invers, dacă doi vectori nenuli sunt perpendiculari, adică $\varphi = 90°$, atunci $\cos\varphi = 0$. În acest caz produsul scalar al acestor vectori este egal cu zero.

Aşadar, avem condiţia perpendicularităţii a doi vectori.

Doi vectori nenuli sunt perpendiculari atunci şi numai atunci, când produsul lor scalar este egal cu zero.

Dacă vectorii sunt daţi cu coordonate, atunci condiţia perpendicularităţii a doi vectori se formulează astfel:

Vectorii nenuli $\vec{a}=(x_1; y_1)$ şi $\vec{b}=(x_2; y_2)$ sunt perpendiculari atunci şi numai atunci, când $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{a}$ se notează $\vec{a}^2$ şi se numeşte pătratul scalar al vectorului $\vec{a}$. În virtutea definiţiei produsului scalar $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0° = |\vec{a}|^2$. Deci, $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, adică pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui. De aici decurge, că $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Să cercetăm, exemplul.

Exemplul 2. Să aflăm $|\vec{a}+\vec{b}|$, dacă $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=30°$.

Deoarece $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$, reiesă că

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\cos 30°+\vec{b}^2}=$$

$$=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+18+27}=\sqrt{49}=7. \text{ Deci, } |\vec{a}+\vec{b}|=7.$$

Exemplu de aplicare a produsului scalar al vectorilor este cunoscut din fizică. Lucurl mecanic A, pe care îl face forţa constantă $\vec{F}$ la deplasarea $\vec{S}$ (fig.116) este egal cu produsul scalar al vectorilor daţi:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi.$$

Produsul scalar al vectorilor se foloseşte şi în algebră, în particular, pentru demonstrarea inegalităţilor, determinarea celei mai mari şi a celei mai mici valori ale funcţiei (vezi pag.96).

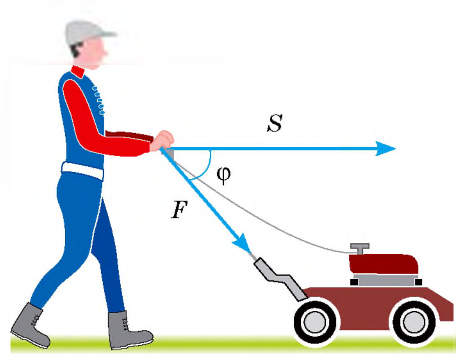


Fig.116

PENTRU CEI CURIOŞI

Unghiul format de vectorii nenuli $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se notează cu simbolul $(\widehat{\vec{a};\, \vec{b}})$. De aceea definiţia produsului scalar al astfel de vectori se scrie în formă de formulă

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a};\, \vec{b}})$.

De ce se spune „produsul scalar al vectorilor", dar nu „produsul vectorilor"? Fiindcă în matematica superioară se examinează produsele vectorial, vectorial mixt ş.a.

Produs oblic al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numeşte numărul care este egal cu produsul modulilor ai acestor vectori şi sinusul unghiului orientat dintre primul şi al doilea vectori. Produsul oblic al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se notează cu simbolul $\vec{a}\circ\vec{b}$.

Produs vectorial al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, care formează unghiul φ, între ei, se numeşte un astfel de vector $\vec{p}$, că direcţia lui este perpendiculară la direcţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, orientarea tripletului de vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ coincide cu orientarea tripletului de vectori ai bazei şi $|\vec{p}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$. De aceea, vorbind la general, pentru altfel de produse legea comutativă nu se îndeplineşte. Produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se notează cu simbolul $\vec{a}\times\vec{b}$.

Produs vectorial mixt $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ a trei vectori se numeşte produsul vector – scalar al lor: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTORONTROL

1. Formulaţi definiţia produsului scalar a doi vectori.
2. Formulaţi definiţia unghiului format de doi vectori.
3. Cu ce este egal produsul scalar al vectorilor $\vec{a}=(x_1;\, y_1)$ şi $\vec{b}=(x_2;\, y_2)$?
4. Cu ce este egal produsul scalar al vectorilor, dacă cel puţin unul din ei este nul?
5. Care este condiţia de perpendicularitate a doi vectori?
6. Cum de aflat lungimea vectorului $\vec{a}$?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Aflaţi cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{a}=(1;\,-2)$ şi $\vec{b}=(-4;\,2)$.

- Fie $(\widehat{\vec{a};\, \vec{b}})=\varphi$. Pe baza definiţiei $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. De aceea

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot(-4)+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2}}=\frac{-8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}.$$

Deci, $\cos\varphi=-\dfrac{4}{5}$.

2 Aflați $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$, dacă $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2, (\widehat{\vec{a};\vec{b}})=60°$.

● $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60°-$

$-2|\vec{b}|^2=4+5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 4=4+10-8=6.$

PROBLEME ȘI EXERCIȚII

EFECTUAȚI ORAL

351. $ABCD$ — romb cu latura l și unghiul $A = 60°$ (fig.117). Aflați:

a) unghiurile formate de vectorii: $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{CO}$;

b) produsele scalare ale vectorilor $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{DO}$.

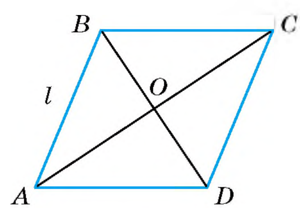


Fig.117

352. Aflați unghiul făcut de doi vectori unitari, dacă produsul lor scalar este egal cu: $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0;1;\ -0,5;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

353. Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

a) $\vec{a}=(0;1),\ \vec{b}=(-3;0)$; c) $\vec{a}=(6;0),\ \vec{b}=(-2;-5)$;

b) $\vec{a}=(1;1),\ \vec{b}=(2;3)$; d) $\vec{a}=(4;2),\ \vec{b}=(4;-2)$.

A

354. În triunghiul ABC $\angle A=50°$, $\angle C=90°$. Aflați unghiurile făcute de vectorii: a) $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$.

355. Aflați produsul scalar al vectorilor:

a) $\vec{a}=(1;2)$ și $\vec{b}=(-8;2)$; c) $\vec{p}=(-3;-7)$ și $\vec{k}=(-2;-5)$;

b) $\vec{m}=(-3;-2)$ și $\vec{n}=(2;3)$; d) $\vec{c}=\left(4\frac{1}{2};-2\frac{2}{3}\right)$ și $\vec{d}=(2;3)$.

356. Sunt dați vectorii $\vec{p}=(1;-5)$ și $\vec{q}=(3;1)$. Aflați produsul scalar al vectorilor: a) $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ și $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; b) $\vec{m}=\vec{p}+2\vec{q}$ și $\vec{n}=3\vec{p}-\vec{q}$.

357. Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă

a) $\vec{a}=(1;2),\ \vec{b}=(3;1)$; c) $\vec{a}=(-4;-8),\ \vec{b}=(-3;3)$;

b) $\vec{a}=(2;6),\ \vec{b}=(3;0)$; d) $\vec{a}=(-3;-4),\ \vec{b}=(3;-1)$.

358. Aflaţi unghiul format de vectorii:
a) $\vec{a}=(-2;\ 2)$ și $\vec{b}=(0;\ 4)$; c) $\vec{c}=(3;\ -1)$ și $\vec{d}=(2;\ 1)$;
b) $\vec{x}=(1;\ 1)$ și $\vec{y}=(0;\ -1)$; d) $\vec{p}=(0;\ 2)$ și $\vec{k}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

359. Demonstraţi, că:
a) triunghiul cu vârfurile în punctele $A(2;\ 1)$, $B(0;\ 5)$, $C(8;\ 4)$ este dreptunghic;
b) patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-3;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$, $C(5;\ 0)$, $D(3;\ -3)$ este dreptunghi.

360. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:
a) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=60°$; c) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=7$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=120°$;
b) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=45°$; d) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=4$, $(\vec{a};\ \vec{b})=150°$.

361. Triunghiul ABC — echilateral, $AB = 12$.
Aflaţi: a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

362. Pentru care valoare a lui x vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt perpendiculari, dacă:
a) $\vec{a}=(0;\ 1)$, $\vec{b}=(-3;\ x)$; c) $\vec{a}=(6;\ x)$, $\vec{b}=(-2;\ -5)$;
b) $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(x;\ 3)$; d) $\vec{a}=(x;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ -2)$?

B

363. Aflaţi cosinusurile unghiurilor ale triunghiului ABC, dacă:
a) $A(-4;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(-2;\ -2)$; b) $A(-1;\ 5)$, $B(1;\ 1)$, $C(5;\ 3)$.

364. Sunt date punctele $A(-4;\ 0)$ și $B(3;\ 3)$. Sub ce unghi se vede segmentul AB din originea de coordonate?

365. Sunt date punctele $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 2)$, $D(-3;\ 1)$. De aflat unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$.

366. Se dau trei puncte: $A(-5;\ 2)$, $B(1;\ 4)$, $C(-1;\ 1)$. Aflaţi coordonatele a unui astfel de punct D ca să se îndeplinească condiţia $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, dacă punctul D aparţine: a) axei absciselor; OX; b) axei ordonatelor OY.

367. Sunt daţi vectorii $\vec{a}=(3;\ 4)$ și $\vec{b}=(-1;\ 2)$. Aflaţi numărul l, pentru care vectorul $\vec{a}+l\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a}$.

368. Pentru care valoare a lui m produsul scalar $\vec{p}\cdot\vec{q}$ este egal cu 6, dacă:
a) $\vec{p}=(2;\ 3)$, $\vec{q}=(m;\ 4)$; b) $\vec{p}=(m;\ 1)$, $\vec{q}=(m;\ -3)$; c) $\vec{p}=(2m;\ -11)$, $\vec{q}=(m;\ m)$.

369. Demonstraţi: a) dacă lungimile vectorilor nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt egale, atunci vectorii $\vec{a}+\vec{b}$ și $\vec{a}-\vec{b}$ sunt perpendiculari; b) dacă vectorii $\vec{a}+\vec{b}$ și $\vec{a}-\vec{b}$ sunt perpendiculari, atunci lungimile vectorilor nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt egale.

370. Se dă $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=60°$. Aflaţi produsul scalar al vectorilor:
a) $2\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; c) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$;
b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; d) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$.

371. Calculaţi unghiul format de vectorii $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ şi $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, unde $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ — vectori unitari reciproc perpendiculari.

372. Calculaţi $|\vec{a} + \vec{b}|$ şi $|\vec{a} - \vec{b}|$, dacă

a) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$; c) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60°$;

b) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \perp \vec{b}$; d) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120°$.

373. Calculaţi $|\vec{a} - \vec{b}|$, dacă $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

374. Copieţi în caiet figura 118. Aflaţi unghiul făcut de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, $\vec{a}$ şi $\vec{c}$, $\vec{a}$ şi $\vec{d}$, $\vec{c}$ şi $\vec{d}$ prin două metode:

a) prin măsura nemijlocită, depunând în perechi aceşti vectori din originea de coordonate;

b) cu ajutorul formulei, determinând în prealabil coordonatele fiecărui vector.

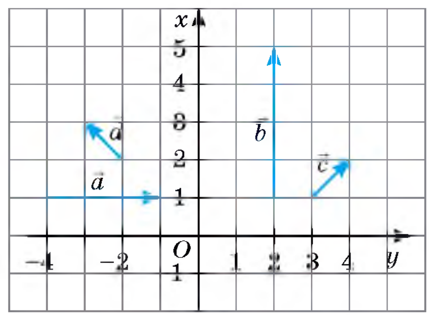


Fig.118

PROBLEME PENTRU REPETARE

375. Din punctul $A(2; -5)$ sunt depuşi vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Aflaţi coordonatele:

a) ale punctului B, dacă $\vec{a} = (1; 3)$;

b) ale punctului C, dacă $\vec{c} = (-3; 4)$;

c) ale vectorului unitar, coorientat cu vectorul $\overrightarrow{BC}$.

376. ***Problemă germană străveche.*** O scară cu lungimea de 13 picioare este sprijinită de perete astfel, că partea ei de jos este îndreptată de la perete cu 5 picioare. Cu cât va coborî ea pe perete, dacă vom deplasa baza ei încă cu 7 picioare? Cercetaţi cum se va schimba poziţia capătului de sus al scării, dacă vom muta partea ei de jos din poziţia dată cu a picioare.

377. Bisectoarea unghiului de la baza triunghiului isoscel împarte mediana, dusă la bază, în segmentele de 8 cm şi 10 cm. Calculaţi perimetrul şi aria triunghiului.

§ 12 Aplicaţii ale vectorilor

Dacă se rezolvă o problemă, folosind proprietăţile vectorilor, atunci aceasta-i *metoda vectorială* de rezolvare a problemei. Totodată, deseori se folosește următoarea afirmaţie.

TEOREMA 5

Dacă X – punct arbitrar, iar M – mijlocul segmentului AB sau punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC, atunci corespunzător:

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right) \text{ sau } \overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).$$

DEMONSTRAŢIE.

Totdeauna sunt adevărate egalităţile:

$$\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{XC}.$$

Adunând primele două din aceste egalităţi și luând în consideraţie, că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (fig.119), obţinem: $2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$, de unde $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)$.

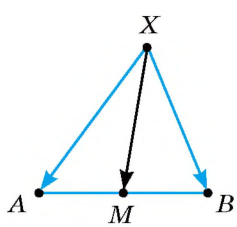


Fig.119

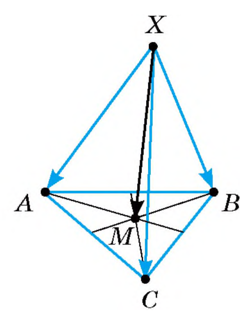


Fig.120

Dacă vom aduna toate trei egalităţi și vom considera, că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (vezi fig.104 și problema de la pag.83), atunci obţinem: $3\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$, de unde $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$ (fig.120). □

Ca exemplu să rezolvăm cu ajutorul metodei vectoriale problema care anterior a fost rezolvată cu metoda coordonatelor (vezi pag.26).

Problema 1. Demonstraţi că mijlocurile segmentelor care unesc mijlocurile laturilor opuse ale unui patrulater, coincid.

Rezolvare: Dacă M și M_1 sunt mijlocurile segmentelor EF și KP (fig.121), iar X – punct arbitrar (pe el numai îl imaginăm), atunci

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XE}+\overrightarrow{XF})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD})\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD});$$
$$\overrightarrow{XM_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XK}+\overrightarrow{XP})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XD})\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}).$$

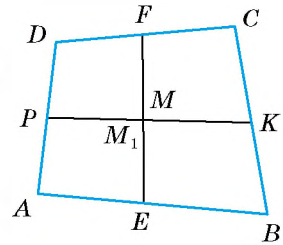


Fig.121

Părţile drepte ale acestor egalităţi sunt egale, de aceea $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XM_1}$. Iar aceasta este posibil numai atunci, când punctele M și M_1 coincid;

La multe prorpietăţi ale figurilor geometrice le corespund unele sau altele egalităţi vectoriale.

1. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ — puncteleA și B coincid;
2. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ — dreptele AB și CD sunt paralele.
3. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ — punctele A, B, C aparţin unei drepte;
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ — dreptele AB și CD sunt perpendiculare;
5. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, iar numerele m și n sunt pozitive — punctul M împarte segmentul AB în raportul $AM : MB = m : n$;
6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ —unul din unghiurile, formate de dreptele, cărora le aparţin vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, este egal cu φ.

Folosind aceste corelaţii se pot rezolva multe probleme geometrice și demonstra multe teoreme.

Vectorii frecvent sunt folosiţi în fizică. Însă în bună parte vectorii legaţi, care se definesc nu numai de lungime și direcţie, ci și de punctul de aplicare.

Problema 2. O sarcină cu greutatea $\vec{P}$ se află pe un plan înclinat. Înclinaţia faţă de orizont face unghiul α (fig.122). Ce forţă $\vec{F}$, orientată în direcţia celui mai mare urcuș al planului, trebuie aplicată pentru ca sarcina să nu se rostogolească în jos?

Rezolvare. Forţa de greutate $\vec{P}$ o descompunem după două direcţii reciproc perpendiculare: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Forţa $\overrightarrow{OA}$ este perpendiculară pe planul înclinat și nu provoacă deplasarea sarcinii. Rostogolirea ei este provocată de forţa $\overrightarrow{OB}$, al cărei modul este egal cu $P\sin\alpha$. Sarcina este reţinută de forţa $\vec{F}$ opusă ei. Deci, $\vec{F}=P\sin\alpha$.

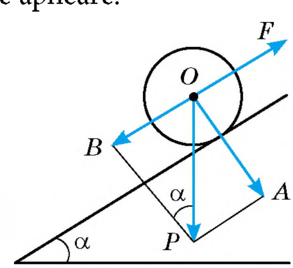


Fig.122

PENTRU CEI CURIOŞI

Prima parte a teoremei 5 poate fi generalizată (fig. 123).

TEOREMA 6

Dacă punctul *M* împarte segmentul *AB* în raportul *AM:MB*=m:n, iar *X* – un punct arbitrar al planului, atunci

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

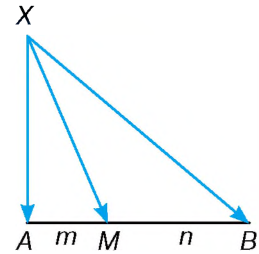


Fig.123

DEMONSTRAŢIE.

Deoarece $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB}$, reiese că $n\overrightarrow{XM}+n\overrightarrow{MA}=n\overrightarrow{XA}$, $m\overrightarrow{XM}+m\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{XB}$.

Dacă vom aduna termen cu termen aceste egalităţi vectoriale şi vom lua în consideraţie că $n\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, atunci obţinem $(m+n)\overrightarrow{XM}=n\overrightarrow{XA}+m\overrightarrow{XB}$, de unde

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Dacă $m=n$, atunci $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$. □

Vectorii pot fi folosiţi nu numai în geometrie, dar şi în rezolvarea problemelor algebrice. Mai ales este comod aceasta de făcut la demonstrarea inegalităţilor şi aflarea valorilor cea mai mare şi cea mai mică ale funcţiei sau expresiei.

De exemplu, să găsim cea mai mare valoare a funcţiei $y=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$. Domeniul ei de valori $D(y)=[0;\,2]$.

Introducem vectorii $\vec{a}=(1;\,1)$ şi $\vec{b}=(\sqrt{x};\,\sqrt{2-x})$. Atunci funcţia dată poate fi scrisă în forma $y=\vec{a}\cdot\vec{b}$, deoarece $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{2-x}$. Aşa cum $|\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x+2-x}=\sqrt{2}$, reiese că $y=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi=2\cos\varphi$.

Cea mai mare valoare a lui $\cos\varphi$ este egală cu 1. De aceea cea mai mare valoare a funcţiei $y=2$.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numeşte metoda vectorială de rezolvare a problemelor?
2. Care formule vectoriale cunoaşteţi?
3. Cum în limbajul vectorilor de scris, că: a) dreptele sunt paralele; b) dreptele sunt perpendiculare; c) punctele coincid; d) punctele sunt situate pe aceeaşi dreaptă?
4. Oare se poate folosi metoda vectorială la rezolvarea problemelor, ale căror condiţii nu conţin vectori? Aduceţi exemple.

Efectuăm împreună

1 Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(-2;\ 3)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB, dacă $A(1;\ 2)$, $B(-4;5)$ (fig.124).

● Fie $N(x;\ y)$ — punct arbitrar al dreptei căutate MN şi $MN \perp AB$. Atunci $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Deoarece $\overrightarrow{AB}=(-5;\ 3)$, $\overrightarrow{MN}=(x+2;\ y-3)$, reiese că $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $=-5(x+2)+3(y-3)$. De aceea $-5(x+$ $+2)+3(y-3)=0$, de unde $-5x+3-17$ $=0$ sau $5x-3y+19=0$. Aşadar, ecuaţia dreptei va avea aspectul: $5x-3y+19=0$.

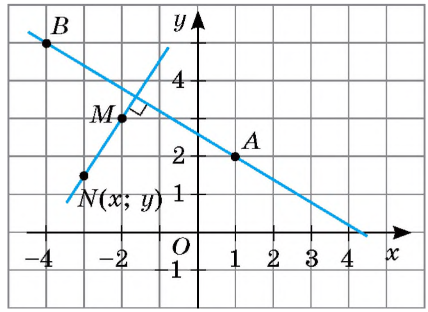


Fig.124

2 Aflaţi aria triunghiului ABC, якщо $A(1;\ 2)$, $B(4;\ 1)$, $C(3;\ 3)$.

● Aflăm $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ şi cos A: $\overrightarrow{AB}=(3;-1)$, de aceea $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC}=(2;1)$, de aceea $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$. $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3\cdot 2-1\cdot 1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Dacă $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, atunci $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Aflăm aria triunghiului:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2,5\,.$$

Probleme şi exerciţii

Efectuaţi oral

378. Ce se poate spune despre segmentele AB şi CD, dacă $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$?

379. Stabiliţi repartizarea reciprocă a punctelor A, B, C, dacă

a) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{BA}$.

380. Oare sunt situate pe aceeaşi dreaptă punctele A, B, C, dacă

a) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}$; c) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$?

381. Determinaţi tipul patrulaterului $ABCD$, dacă:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{BC}=0,3\overrightarrow{AD}$.

382. Stabiliţi tipul triunghiului ABC, dacă: $\overrightarrow{CA}=(-2;\ 3)$, $\overrightarrow{CB}=(3;\ 2)$.

A

383. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $M(-4; -2)$, $N(-6; 2)$, $P(4; 7)$, $K(6; 3)$ este dreptunghi.

384. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-1; -2)$, $B(-8; 4)$, $C(1; 6)$, $D(8; 0)$ este romb.

385. Demonstraţi că punctele $M(1; 3)$, $N(-2; 7)$, $K(-8; 15)$ sunt situate pe o dreaptă. Care din puncte se află între altele două? În ce raport împarte acest punct segmentul?

386. În ce raport axa OX împarte segmentul AB, dacă $A(1; 6)$, $B(7; -12)$?

387. AM — mediana triunghiului ABC. Aflaţi coordonatele vectorului $\overline{AM}$ şi modulul lui, dacă $A(-3; 2)$, $B(1; 1)$, $C(3; 5)$.

388. Găsiţi coordonatele punctului de intersecţie al medianelor triunghiului ABC, dacă $A(-7; 12)$, $B(-3; -2)$, $C(4; 5)$.

389. Scrieţi ecuaţiile înălţimilor ale triunghiului ABC, dacă $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(7; -3)$.

390. Scrieţi ecuaţia dreptei, care este tangentă la cirmuferinţa cu centrul $P(-4; 2)$ în punctul $A(1; 4)$.

391. Aflaţi aria triunghiului ABC, dacă $A(2; 1)$, $B(8; 7)$, $C(6; 2)$.

392. Diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare. Demonstraţi că sumele pătratelor ale laturilor opuse ale acestui patrulater sunt egale.

393. Fie K, P, T, L — mijlocurile laturilor AB, BC, CD, DA ale unui patrulater arbitrar. Demonstraţi că punctele de intersecţie ale medianelor ce aparţin triunghiurilor APT şi CKL coincid.

B

394. Demonstraţi teorema despre linia medie a trapezului.

395. Demonstraţi că medianele triunghiului se intersectează într-un punct.

396. Demonstraţi că atunci, când a, b, c sunt laturile triunghiului, iar m_c — mediana, dusă la latura c, avem $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

397. Demonstraţi că patrulaterul, la care diagonalele sunt împărţite în jumătate de punctul lor de intersecţie, este paralelogram.

398. ***Problemă deschisă.*** Demonstraţi teorema **...** , folosind metoda vectorială.

399. În triunghiul ABC $\angle C = 90°$, $A(1; -3)$, $B(-4; -8)$. Aflaţi coordonatele punctului C, dacă se ştie că ele sunt egale.

400. Scrieţi ecuaţiile tangentelor, duse din punctul $A(1; 1)$ la cirmuferinţa $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

401. Aflaţi coordonatele vectorului unitar, coliniar cu bisectoarea unghiului B a triunghiului ABC, dacă $A(2; 7)$, $B(4; 3)$, $C(8; 1)$.

402. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Demonstraţi că pentru orice punct M are loc egalitatea: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

403. Demonstrați că dreapta care trece prin mijlocurile bazelor ale unui trapez, trece și prin punctul de intersecție al diagonalelor lui.

404. $ABCD$ și $AB_1C_1D_1$ — sunt paralelograme, punctele K, P, T — sunt mijlocurile segmentelor BB_1, CC_1 și DD_1. Demonstrați că $AK = PT$ și $AT = KP$ (fig.125).

405. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC notați așa puncte A_1, B_1, C_1, că $AA_1 = k \cdot AB$, $BB_1 = k \cdot BC$, $CC_1 = k \cdot CA$. Demonstrați că punctele de intersecție ale medianelor triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ coincid.

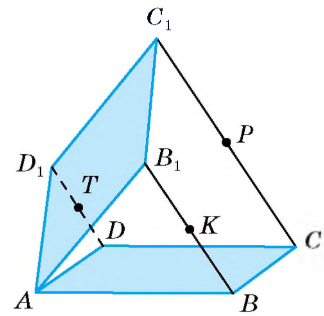


Fig.125

406. Aflați cea mai mare valoare a expresiei $3x + 4\sqrt{1 - x^2}$ și indicați x, pentru care se obține această valoare.

407. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq 2\sqrt{p+1}$, unde $p = a + b$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

408. Pentru punctele $M(-3; 2)$ și $N(5; 4)$ definiți printr-o formulă și reprezentați pe planul de coordonate mulțimea punctelor $G(x; y)$, care îndeplinesc condiția: a) $MG \cdot MN = 0$; b) $GM \cdot GN = 0$.

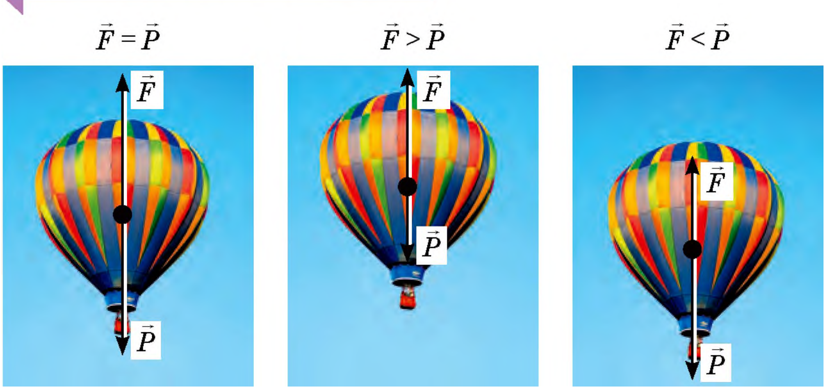
PROBLEME PENTRU REPETARE

409. Aflați produsul scalar al vectorilor $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ și $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ — sunt vectori unitari reciproc perpendiculari.

410. Găsiți modulul vectorului $\vec{a}$, dacă $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, unde $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, iar unghiul format de ei este de $60°$.

411. Diagonalele unui trapez sunt perpendiculare și una din ele este egală cu 15 cm. Aflați aria trapezului, dacă înălțimea lui este egală cu 12 cm.

GEOMETRIA ÎN JURUL NOSTRU



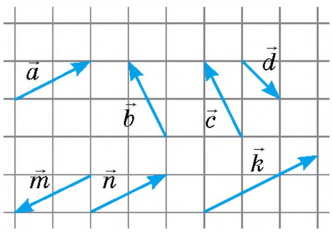
Vectori în fenomenele fizice

PROBLEME CU DESENE GATA

A | **B**

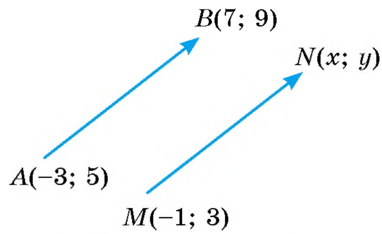
1

A. Indicați vectorii coliniari, egali, opuși.



B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

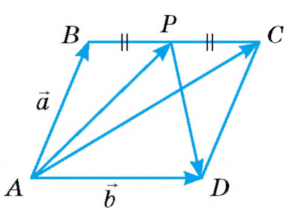
$N(x;\ y)$



2

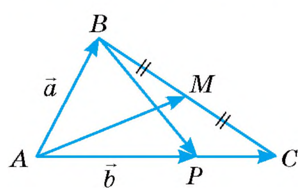
A. $ABCD$ — paralelogram.

Exprimați $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PD}$ prin $\vec{a}$ și $\vec{b}$.



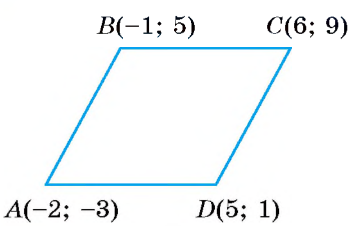
B. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PC} = 3:1$.

Exprimați prin $\vec{a}$ și $\vec{b}$ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$.

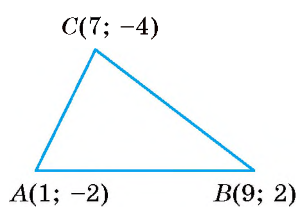


3

A. Demonstrați: $ABCD$ — romb.



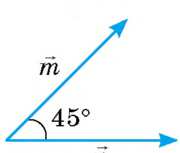
B. $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$.



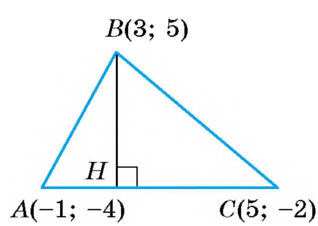
4

A. $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{n}| = 3$.

$|\vec{m} + \vec{n}|$; $|\vec{m} - \vec{n}|$



B. Ecuația BH.



Lucrarea independentă 2

Varianta 1

1°. Desenați doi vectori arbitrari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și construiți vectorul $\vec{c}=2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

2°. Aflați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, dacă $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ -5)$.

3•. Aflați modulul vectorului $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, dacă $|\vec{p}|=\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p};\ \vec{q}})=45°$.

Varianta 2

1°. Desenați doi vectori arbitrari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și construiți vectorul $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

2°. Aflați cosinusul unghiului B al triunghiului ABC, dacă $A(3;\ 7)$, $B(-3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$.

3•. Aflați modulul vectorului $\vec{n}=2\vec{a}-3\vec{b}$, dacă $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=60°$.

Varianta 3

1°. Desenați doi vectori arbitrari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și construiți vectorul $\vec{c}=-2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

2°. Găsiți cosinusul unghiului C al triunghiului ABC, dacă $A(-3;\ -3)$, $B(5;\ 1)$, $C(3;\ 5)$.

3•. Aflați modulul vectorului $\vec{n}=4\vec{a}-3\vec{b}$, dacă $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=30°$.

Varianta 4

1°. Desenați doi vectori arbitrari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și construiți vectorul $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$.

2°. Aflați cosinusul unghiului B al triunghiului ABC, dacă $A(-3;\ -5)$, $B(3;\ 3)$, $C(5;\ -1)$.

3•. Aflați modulul vectorului $\vec{p}=3\vec{m}-4\vec{n}$, dacă $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m};\ \vec{n}})=60°$.

ÎNSĂRCINĂRI TESTE 2

1	Aflaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă $A(-1; -3)$, $B(-7; 12)$.	a) $(6; -15)$; c) $(-8; 9)$; b) $(-6; 15)$; d) $(-6; 9)$.
2	Care este condiţia perpendicularităţii vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$?	a) $\vec{a}+\vec{b}=0$; c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$; b) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$; d) nu se poate stabili
3	Se dă $\vec{p}=(-2; 1)$, $\vec{q}=(4; -3)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{m}=2\vec{p}+3\vec{q}$.	a) $(8; -7)$; c) $(8; 11)$; b) $(-14; 0)$; d) $(-2; 3)$.
4	Aflaţi lungimea vectorului $\vec{a}=(-2; 4)$.	a) $2\sqrt{10}$; c) $\pm 2\sqrt{5}$; b) $\pm 2\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{5}$.
5	Care din următorii vectori este coliniar cu vectorul $\vec{a}=(-1; 4)$?	a) $(-2; -8)$; c) $(3; -3)$; b) $(0,5; 2)$; d) $(4; -16)$.
6	Stabiliţi tipul triunghiului ABC, dacă $\overrightarrow{AB}=(-1; 3)$, $\overrightarrow{AC}=(6; 2)$.	a) isoscel; b) ascuţitunghic; c) dreptunghic; d) obtuzunghic.
7	Aflaţi unghiul făcut de vectorii unitari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,5$.	a) $30°$; c) $120°$; b) $60°$; d) $45°$.
8	Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}=(-2; 6)$ şi $\vec{b}=(9; m)$ sunt perpendiculari?	a) -3; c) 3; b) 27; d) -27.
9	Pentru care valoare a lui x vectorii $\vec{m}=(3; x)$ şi $\vec{n}=(-6; 7)$ sunt coliniari?	a) 14; c) $-3,5$; b) $3,5$; d) -14.
10	În care cazuri punctele M_1 şi M_2 coincid?	a) $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{BM_2}$; c) $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{M_1M_2}$; b) $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}$; d) $\overrightarrow{M_1M_2}\neq\vec{0}$.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Construiţi doi vectori arbitrari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Construiţi vectorii:
a) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}$; г) $\vec{n}=0,5\vec{a}-2\vec{b}$.

2°. Sunt date punctele $A(-1;\ 4)$, $B(-3;\ 1)$, $C(5;\ 0)$, $D(3;\ -3)$. Demonstraţi că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

3°. Se dă: $\vec{a}=(-1;\ 3)$, $\vec{b}=(-2;\ 4)$. Aflaţi $|\vec{c}|$, dacă $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

4°. Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}=(m;\ 2)$ şi $\vec{b}=(4;\ m+2)$ sunt:
a) perpendiculari; b) coliniari?

5•. Sunt date punctele $A(3;\ 1)$, $B(5;\ -2)$, $C(-4;\ 5)$. Aflaţi coordonatele punctului D, dacă $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

6•. Aflaţi modulul vectorului $\vec{c}=\vec{p}-2\vec{q}$, dacă $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $(\widehat{\vec{p};\ \vec{q}})=60°$.

7•. $ABCD$ — dreptunghi, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Exprimaţi vectorii $\overline{AM}$ şi $\overline{MD}$ prin vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă $M\in BC$ şi $BM : MC = 1 : 2$.

8•. Demonstraţi că patrulaterul cu vârfurile în punctele $A(-7;\ -5)$, $B(-5;\ 1)$, $C(9;\ 3)$, $D(7;\ -3)$ — paraleloram; aflaţi unghiul format de diagonalele lui.

9••. Aflaţi $|\vec{a}-\vec{b}|$, dacă $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$.

10••. Oare aparţin punctele M, P şi K aceleiaşi drepte, dacă $M(-7;\ 8)$, $P(4;\ 1)$, $K(-40;\ 29)$?

> La acele popoare, care ştiu geometria, chiar cele mai simple lucruri au o anumită frumuseţe specifică.
>
> *F. Procopovici*

Principalul în capitolul 2

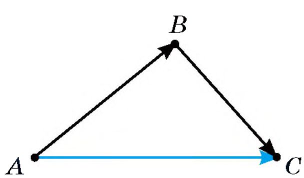
Mărimile vectoriale sunt acelea care sunt determinate nu numai de valorile numerice, dar și de direcții. Valorile mărimilor vectoriale sunt **vectori**. Geometric vectorii (nenuli) se reprezintă prin **segmente orientate**. Segmentul orientat are origine și extremitate. Distanța dintre ele – **modulul** (sau lungimea) **vectorului**.

Doi vectori se numesc **coliniari**, dacă segmentele orientate ce le corespund sunt situate pe aceeași dreaptă sau pe drepte paralele. Vectorii coliniari sunt coorientați sau orientați în sens opus. Doi vectori sunt **egali**, dacă ei sunt coorientați și au moduli egali. Doi vectori se numesc **opuși**, dacă ei au moduli egali și sunt orientați în sens opus.

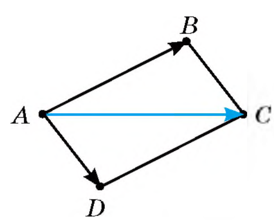
Coordonate ale vectorului cu originea $A(x_1;\ y_1)$ și extremitatea $B(x_2;\ y_2)$ sunt numite numerele $x = x_2 - x_1$și $y = y_2 - y_1$. Se scrie acest vector în forma $\overrightarrow{AB}=(x;\ y)$, sau $\vec{a}=(x;\ y)$, sau $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}=(x;\ y)$ se notează cu simbolul $|\overrightarrow{AB}|$, și este egal cu $\sqrt{x^2+y^2}$.

Sumă a doi vectori $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ este numit vectorul $\vec{a}+\vec{b}=$ $=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$. La adunarea vectorilor se îndeplinesc proprietățile comutativă și asociativă. Geometric se pot aduna vectorii după regula triunghiului (fig.126, *a*) sau a paralelogramului (fig. 126, *b*).



a



b

Fig.126

Totdeauna sunt adevărate egalitățile vectoriale

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Diferență a vectorilor $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ este numit vectorul $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$. Pentru a scădea un vector din altul trebuie de adunat la primul vector nul, opus celui de-al doilea, adică

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

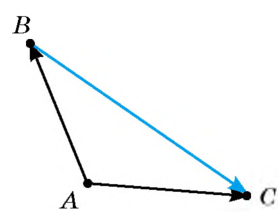


Fig.127

Pentru orice vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, totdeauna

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC} \quad \text{(fig.127).}$$

Produsul vectorului $\vec{a}=(x;\ y)$ cu numărul n se numeşte vectoru $n\vec{a}=(nx;\ ny)$. Totdeauna sunt adevărate egalităţile: $(n+m)\vec{a}=n\vec{a}+m\vec{a}$ și $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este numit produsul modulilor acestor vectori cu cosinusul unghiului format de ei:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este determinat după formula

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ sau

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

$\vec{a}=k\vec{b}$ — condiţia coliniarităţii a vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ — condiţia perpendicularităţii.

În formă de coordonate:

Dacă $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, atunci $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

Vectorii nenuli $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ **sunt perpendiculari atunci și numai atunci, când $x_1x_2+y_1y_2=0$.**

Vectorii $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ și $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ sunt coliniari atunci și numai atunci, când coordonatele corespunzătoare ale lor sunt proporţionale: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Dacă X – punct arbitrar, iar M – mijlocul segmentului AB sau punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC, atunci avem corespunzător

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}) \text{ sau } \overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}).$$

La multe proprietăţi ale figurilor geometrice le corespund unele sau altele egalităţi vectoriale.

1. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ — punctele A și B coincid.
2. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ — dreptele AB și CD sunt paralele.
3. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ — punctele A, B, C sunt situate pe aceeași dreaptă.
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ — dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
5. $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, iar numerele m și n sunt pozitive – punctul M împarte segmentul AB în raportul $AM : MB = m : n$.
6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ — unghiul format de dreptele, pe care sunt situaţi vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, este egal cu φ.

Anume matematica în primul rând ne apără de inducerea în eroare a simţămintelor şi ne învaţă, că o treabă este cum de construit obiectele, care sunt percepute de simţăminte, alta – ce impresie ele fac.

LEONARD EULER

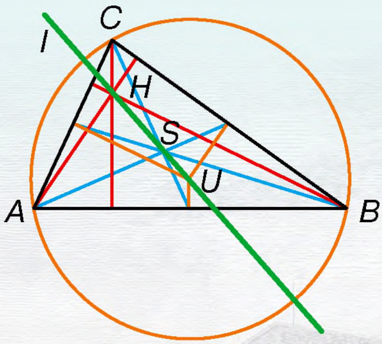
(1707–1783)

Ilustru matematician, fizician, astronom, inginer ş.a. elveţian, rus şi german. Unul din cei mai remarcabili matematicieni ai secolului XVIII.

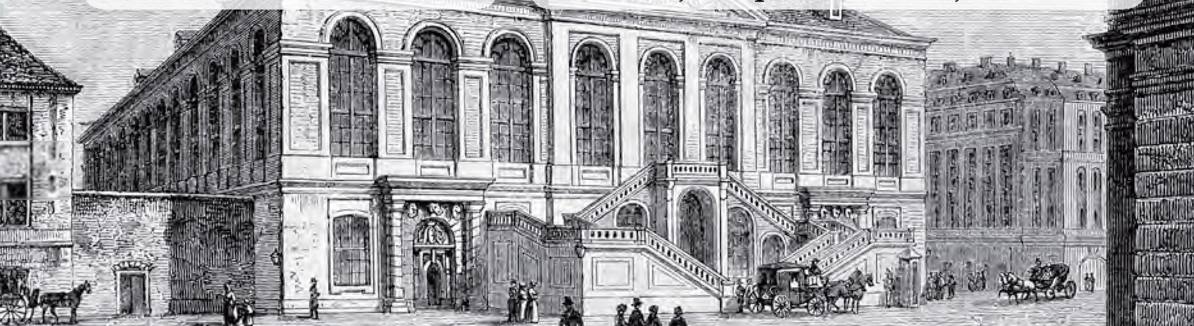
- În matematică descoperirile lui fundamentale se referă la matematica elementară, trigonometrie, teoria numerelor, analiza matematică, geometria diferenţială, topologie.
- A elaborat partea considerabilă a terminologiei contemporane.
- Aproape în toate domeniile matematicii şi ale aplicaţiilor ei sunt termeni legaţi de numele lui.

Influenţa lui Euler asupra matematicii o descrie enunţul lui P. Laplace:

"Citiţi-l pe Euler, citiţi-l pe Euler el este învăţător pentru noi toţi".



Dreapta lui Euler



Capitolul 3 | Section 3

Rezolvarea triunghiurilor | Triangels solving

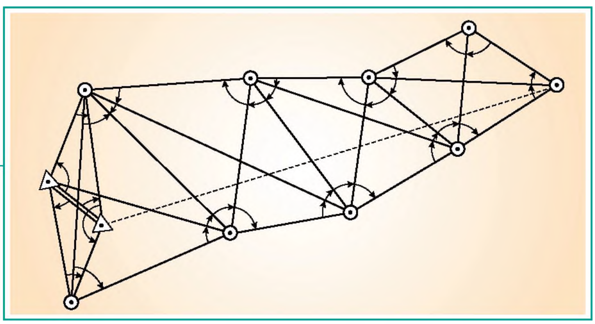
A rezolva triunghiul – aceasta înseamnă că, știind câteva elemente ale triunghiului, trebuie de determinat celelalte elemente ale lui. Triunghirile dreptunghice se rezolvă, folosind sinusul, cosinusul și tangenta unghiului ascuţit, iar triunghiurile arbitrare – cu ajutorul teoremelor a cosinusului și a sinusului. Astfel de probleme din vechime erau nevoiţi mulţi savanţi să le rezolve, de aceea încă în antichitate a fost creată o știinţă matematică separată a celor mai importante știri din *trigonometrie*. Capitolul dat este expunerea prescurtată a celor mai importante știri din trigometrie.

PROIECT DE ÎNVĂŢĂMÂNT "Trigonometria cunoscută și necunoscută" | EDUCATIONAL PROJECT “Familiar and Unfamiliar Trigonometry”

Pentru ce trebuie de învăţat trigonometria

Trigonometria, în primul rând, trebuie pentru aceea ca să fie măsurate distanţele dintre obiecte și dimensiunile obiectelor acolo, unde este dificil sau imposibil de-a ajunge: în cosmos, în ocean, sub pământ ș.a.

Geodeziștii, determinând poziţia obiectelor pe suprafaţa Pământului, utilizează reţeaua geodezică, metoda triangulaţiei și dispozitivele electronice moderne: tahimetrul electronic și receptorul GPS.



Se stabilesc dimensiunile zăcămintelor de minerale și acumularea de ape subpământene, sunt construite tunele pentru transport ș.a. Până a construi o mină pentru extragerea cărbunelui trebuie de știut dimensiunile și unghiul de înclinare a stratului. Pentru a le determina sunt forate 3 sonde în trei locuri diferite și se clarifică la ce adâncime în fiecare loc se găsește stratul. Pe baza acestor date și a calculelor speciale, legate cu funcţiile trigonometrice, sunt stabilite datele necesare.

Se fac calcule cu ajutorul funcţiilor trigonometrice în biologie (analiza rontghnostructurală, vizualizarea medicală (tomografia computerizată și cercetarea ultrasonoră)

Încă unde se mai folosește trigonometria? Aduceţi exemplele voastre.

§ 13 Teorema cosinusurilor

Pentru a rezolva nu numai triunghiurile dreptunghice, ci orice triunghiuri, trebuie de ştiut teoremele cosinusului şi a sinusului. Pentru înţelegerea mai bună a lor să cădem de acord cu aceea, că laturile triunghiului – acesta-s lungimile lor, iar unghiurile sunt măsurile în grade ale lor.

Mai frecvent vom nota laturile cu literele latine a, b şi c, iar unghiurile opuse lor (de la vârfurile A, B, C) — cu literele greceşti α, β şi γ.

TEOREMA 7

(A cosinusurilor). **Pătratul laturii triunghiului este egal cu suma pătratelor a celorlalte două laturi ale lui fără îndoitul produs al acestor laturi cu cosinusul unghiului format de ele.**

DEMONSTRAŢIE.

Fie ABC — triunghi arbitrar (fig. 128), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ şi $\angle A = \alpha$. Să demonstrăm că $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

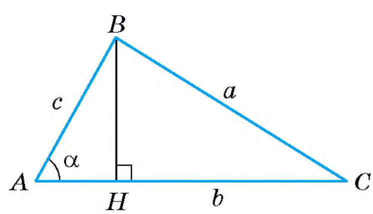


Fig.128

Ducem BH în triunghiul dat şi găsim pătratul laturii a după teorema lui Pitagora din $\triangle BHC$.

1) Dacă $\alpha < 90°$, atunci $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, $CH = AC - AH = b - c \cos \alpha$.

Atunci $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 - 2bc \cos \alpha = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$. Cazul când, $\angle C$ — obtuz, cercetaţi-l de sine stătător.

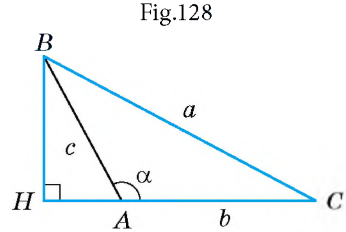


Fig.129

2) Dacă $\alpha > 90°$ (Fig. 129), atunci $BH = c \sin (180° - \alpha) = c \sin \alpha$, $AH = c \cos (180° - \alpha) = -c \cos \alpha$, $HC = AC + AH = b + (-c \cos \alpha) = b - c \cos \alpha$.

Ca şi în primul caz:

$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$.

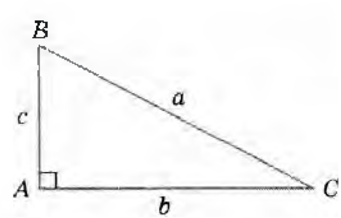


Fig.130

3) Dacă $\alpha = 90°$ (fig. 130), atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic şi $\cos \alpha = 0$. În virtutea teoremei lui Pitagora $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Aşadar, care nu ar fi unghiul α al triunghiului ABC totdeauna

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad \square$$

Atrageţi atenţia!

Teorema lui Patagora este un caz particular al teoremei cosinusurilor. Pe baza teoremei cosinusurilor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Dacă însă $\gamma = 90°$, atunci $\cos \gamma = 0$ şi $c^2 = a^2 + b^2$.

Din formula $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ reiese:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Această formulă permite de-a calcula unghiurile triunghiului, dacă sunt cunoscute laturile lui. În general teorema cosinusurilor leagă patru elemente ale triunghiului: trei laturi ale triunghiului şi unghiul. De aceea cu ajutorul acestei teoreme totdeauna se poate afla unul din elementele necunoscute, dacă sunt cunoscute altele trei.

Folosind teorema cosinusurilor să demonstrăm următoarea teoremă.

TEOREMA 8

(Proprietatea diagonalelor paralelogramului). **Suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui.**

DEMONSTRAŢIE.

Fie că laturile paralelogramului sunt a, b, a, b, iar diagonalele — m şi n(fig.131). Pe baza teoremei cosinusurilor din $\triangle ABD$ şi $\triangle ABC$ respectiv avem:

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A,$$
$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B.$$

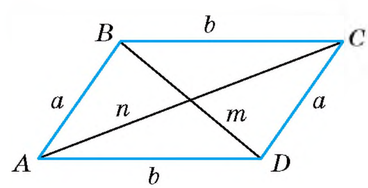


Fig.131

Deoarece $\angle B = 180° - \angle A$, iar cosinusurile a astfel de unghiuri se deosebesc numai prin semne, reiese că $\cos B = -\cos A$. De aceea $m^2 + n^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cos A + 2ab \cos A = 2a^2 - 2b^2$.

Aceasta şi trebuia de demonstrat.

PENTRU CEI CURIOŞI

Aplicând teorema cosinusurilor se poate determina tipul triunghiului (ascuţitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic), fără a calcula unghiurile lui. Se ştie că unghiul drept sau cel obtuz al triunghiului este opus laturii mai mari a lui. Fie în $\triangle ABC$ laturile a, b, c şi cea mai mare din ele este a. În acest caz unghiurile B şi C sunt ascuţite, iar unghiul A poate fi ascuţit, drept sau obtuz. Pentru a clarifica aceasta să ne folosim de formula $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Dacă $b^2 + c^2 > a^2$, atunci $\cos A > 0$, din aceasta reiesă că unghiul $\angle A$ — ascuţit. Dacă $b^2 + c^2 = a^2$, atunci $\cos A = 0$ şi unghiul $\angle A$ —drept. Iar dacă $b^2 + c^2 < a^2$, atunci $\cos A < 0$ şi unghiul $\angle A$ va fi obtuz. Deci, dacă:

$b^2 + c^2 > a^2$, atunci $\angle A$ — ascuţit;
$b^2 + c^2 = a^2$, atunci $\angle A$ — drept;
$b^2 + c^2 < a^2$, atunci $\angle A$ — obtuz.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulaţi teorema cosinusurilor.
2. Arătaţi că teorema lui Pitagora este consecinţă din teorema cosinusurilor.
3. Cum de aflat unghiurile triunghiului după laturile cunoscute ale lui?
4. Cu este egală suma pătratelor diagonalelor ale unui paralelogram?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Aflaţi cosinusul celui mai mic unghi al triunghiului ale cărui laturi sunt 3,5 şi 6. Indicaţi valoarea aproximativă a măsurii acestui unghi.

● Unghiul cel mai mic α este opus laturii celei mai mici. Pe baza teoremei cosinusurilor $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ avem:
$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$, de unde

$$60 \cos \alpha = 5^2 + 6^2 - 3^2 = 52, \quad \cos \alpha = \frac{52}{60} = \frac{13}{15} \approx 0,8667.$$

Conform tabelei de pe forzaţ aflăm: $\alpha \approx 30°$.

2 Aflaţi lungimea medianei triunghiului cu laturile 12 cm, 14 cm şi 22 cm, dusă la cea mai mare latură.

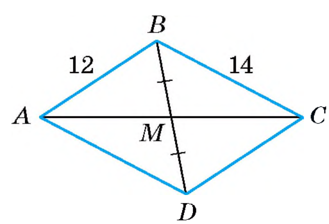


Fig.132

● Fie că în $\triangle ABC$ $AB = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 22$ cm, BM — mediană (fig.132)
Prelungim mediana după punctul M la distanţa $MD = BM$ şi unim punctul D cu punctele A şi C. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, fiindcă diagonalele lui sunt împărţite în jumătate de punctul de intersecţie al lor.
Atunci $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, adică $22^2 + BD^2 = 2(12^2 + 14^2)$, avem: $484 + BD^2 = 2\ (144+196)$, de unde $BD^2 = 2 \cdot 340 - 484 = 196$.
Aşadar, $BD = 14$ cm, atunci $BM = 7$ cm.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

412. Care va fi egalitatea $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, dacă $\alpha = 90°$?
413. Cu ce este egal unghiul β în triunghiul ABC, dacă: a) $b^2 = a^2 + c^2$; b) $a = b = c$?
414. Două laturi ale triunghiului sunt constante, iar unghiul format de ele se măreşte. Demonstraţi că totodată a treia latură se măreşte.

415. Folosind figura 133 exprimaţi pe baza teoremei cosinusurilor fiecare latură a triunghiului MNK.

416. Exprimaţi cosinusul fiecărui unghi al triunghiului MNK (fig.133).

417. Aflaţi suma pătratelor diagonalelor ale unui romb cu latura a.

418. Aflaţi suma pătratelor diagonalelor ale dreptunghiului cu laturile a şi b.

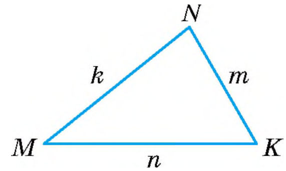


Fig.133

A

419. Aflaţi latura necunoscută a triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm, $\angle A = 60°$; b) $AB = 4$ см, $BC = 10$ cm, $\angle B = 120°$.

420. Aflaţi latura necunoscută a triunghiului MNK, dacă:
a) $MN = 4$ cm, $NK = 2$ cm, $\angle N = 60°$;
b) $MN = 3$ cm, $MK = 2\sqrt{2}$ cm, $\angle M = 135°$;
c) $NK = 2$ cm, $MK = 2\sqrt{3}$ cm, $\angle K = 30°$;
d) $MK = 7$ cm, $MN = 8$ cm, $\angle M = 120°$.

421. Aflaţi $\angle B$ al triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 5$ dm, $BC = 8$ dm, $AC = 7$ dm;
b) $AB = 8$ km, $BC = 7$ km, $AC = 13$ km.

422. Aflaţi cosinusurile unghiurilor ale triunghiului cu laturile:
a) 5 cm, 6 cm şi 7 cm; б) 2 cm, 4 cm şi 5 cm.

423. Poarta de fotbal AB are lăţimea de 8 iarzi (fig.134). Jucătorul X a marcat golul când se afla la distanţa de 25 iarzi de la unul din stâlpii porţii şi la 28 de iarzi de la celălalt stâlp. Sub ce unghi jucătorul vede poarta din acest loc?

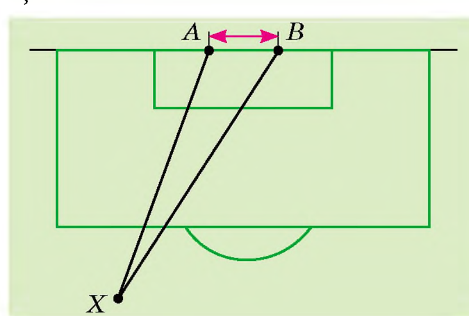


Fig.134

424. Ascuţitunghic sau obtuzunghic este triunghiul cu laturile
a) 3 cm, 5 cm şi 7 cm;
b) 5 cm, 7 cm şi 8 cm?

425. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 14 cm şi 16 cm. Aflaţi unghiul cu măsura mijlocie.

426. Aflaţi cel mai mare unghi al triunghiului cu laturile 6 cm, 10 cm şi 14 cm.

427. Aflaţi diagonalele paralelogramului, dacă laturile lui sunt egale cu 7 cm şi $3\sqrt{2}$ cm, iar unghiul ascuţit 45°.

428. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu $8\sqrt{3}$ см şi 16 см, iar una din diagonale este egală cu 30°. Aflaţi lungimea celeilalte diagonale.

429. Laturile paralelogramului sunt egale cu 13 cm şi 15 cm, iar una din diagonale este egală cu 14 cm. Aflaţi lungimea celeilalte diagonale.

430. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 7 cm și 11 cm, iar permiterul lui cu 26 cm. Aflați laturile paralelogramului.

431. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6cm și 7 cm, iar diagonalele sunt proporționale cu numerele 11 și 7. Aflați lungimile diagonalelor.

432. Laturile triunghiului sunt egale cu 11cm, 12cm și 13cm. Aflați lungimea medianei, duse la cea mai mare latură.

433. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6cm și 8 cm, iar mediana, dusă la a treia latură este, egală cu $\sqrt{14}$ cm. Aflați a treia latură a triunghiului.

B

434. În $\triangle ABC$ $AB = 6$ cm, $AC = 14$ cm, $\angle B = 120°$. Aflați BC.

435. Laturile AC și BC ale triunghiului ABC sunt corespunzător egale cu 9 cm și 21cm, iar unghiul $\angle A = 60°$. Aflați AB.

436. Două laturi ale triunghiului sunt proporționale cu numerele 3 și 8 și formează unghi de 60°. Aflați perimetrul triunghiului, dacă a treia latură este egală cu 35 cm.

437. Suma a două laturi ale triunghiului este egală cu 32 cm, unghiul format de ele are — 120°. Aflați aceste laturi, dacă a treia latură este egală cu 28 cm.

438. Lungimea acului minutar al ceasornicului este egală cu 6 cm, iar a celui orar — 5,2 cm. Ceasornicul arată amiaza (fig.135). Peste care cel mai mic număr de minute distanța dintre vârfurile acelor va fi egală cu 3,2 cm? Dar 11,2 cм?

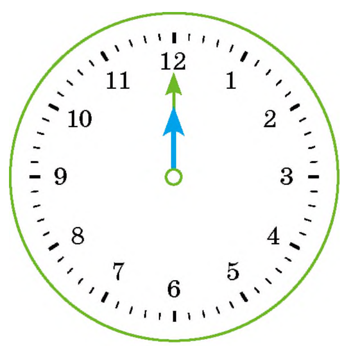


Fig.135

439. În figura 135 este reprezentat un ceasornic care nu funcționeaz și indică amiaza. Lungimea acului minutar al acestui ceasornic este egală cu 20 cm, iar al celui orar – 17 cm. Un copil, jucându-se, rotește numai acul minutelor. Stabiliți corespondența dintre cantitatea de minute (1-4), indicată de minutar conform acestor condiții, și distanța dintre vârfurile acelor ceasornicului (A-E).

1 10 min.	**A** ≈ 23 cm
2 15 min.	**B** ≈ 19 cm
3 25 min.	**C** ≈ 36 cm
4 7,5 min.	**D** ≈ 26 cm
	E ≈ 14 cm

440. Unul din unghiurile triunghiului isoscel cu baza de $2\sqrt{21}$ cm este egal cu 120°. Aflați medianele triunghiului.

441. BM — mediana triunghiului ABC. Aflați AB, dacă AC = 16 cm, BC = 13 cm $\angle BMC = 120°$.

442. Mediana dusă la latura triunghiului de 32 cm, este egală cu 14 cm și face cu această latură unghiul de 60°. Aflați alte laturi ale triunghiului.

443. Într-un triunghi mediana și latura, la care ea este dusă, sunt corespunzător egale cu 10 cm și 30 cm. Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 64 cm.

444. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6 cm și 10 cm, iar mediana, dusă la a treia latură, este egală cu $\sqrt{19}$ cm. Aflați:

a) a treia latură a triunghiului;

б) cel mai mare unghi al triunghiului.

445. Laturile triunghiului sunt — a, b și c. Demonstrați că mediana, dusă la latura a este egală cu $m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

446. În paralelogramul $ABCD$ AD = 8 cm, $\angle A = 60°$, iar înălțimea $BH = 2\sqrt{3}$. Aflați diagonalele paralelogramului.

447. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 4 cm și 5 cm, iar sinusul unghiului format de ele este egal cu 0,6. Aflați a treia latură a triunghiului. Câte soluții are problema?

448. În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) AD = 11 cm, BC = 3 cm, AC = 6 cm, BD = 10 cm. Aflați:

a) unghiul format de diagonalele trapezului;

б) cosinusurile unghiurilor, pe care le formează diagonalele cu bazele trapezului.

449. ***Problemă deschisă.*** Ieșind din autobuz Cristina și Ionel se grăbeau spre casă. Fiecare din ei se mișca rectiliniu, însă sub un anumit unghi unul față de altul: Cristina cu viteza de 6 km/oră, iar Ionel cu viteza de 8 km/oră. Aflați distanța dintre casele lor, dacă ... .

450. În paralepipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 12$, $BC = 18$, $BB_1 = 6$. Aflați cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului A_1BC_1 (fig.136)

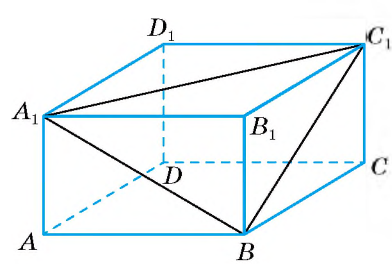


Fig.136

451. Demonstrați că într-un paralelogram unghiului mai mare i se opune diagonala mai mare. Oare este adevărată afirmația inversă?

452. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu a și b, iar unghiul format de ele este α. Aflați lungimea bisectoarei, duse din vârful acestui unghi.

453. BL — bisectoarea triunghiului ABC. Aflați cosinusul $\angle ABL$, dacă $AB = a$, $BC = b$, $BL = l$.

Însărcinare practică

454. Aflați laturile și unghiurile necunoscute ale triunghiurilor, reprezentate în figura 137, folosind programa Excel și modelul adus în figura 138.

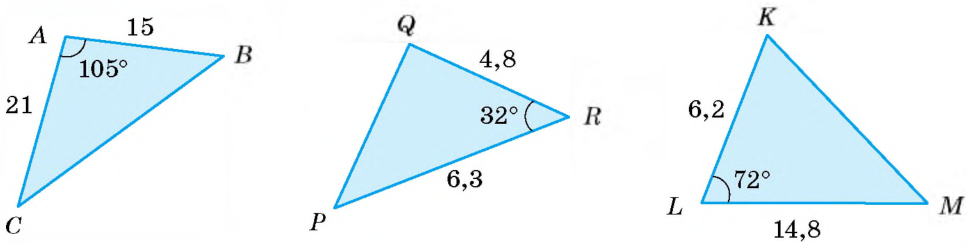


Fig.137

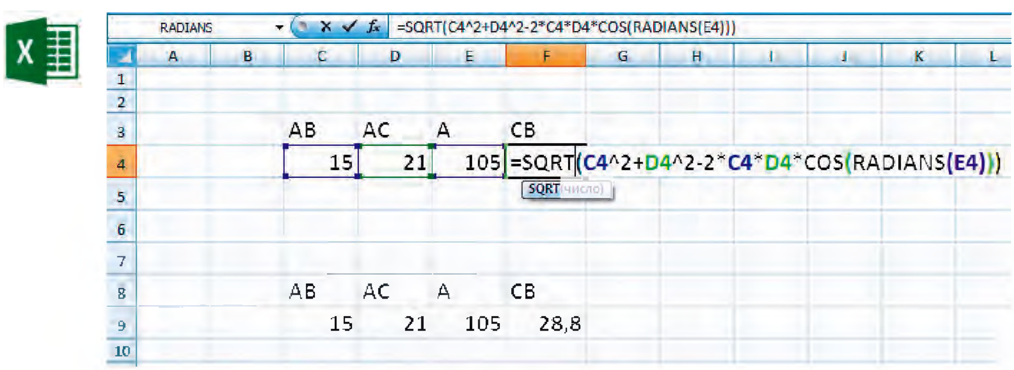


Fig.138

Probleme pentru repatre

455. Calculați:

a) $2\sin 120° + \cos 90° \cdot \sin 135° - \operatorname{tg} 60°$;

b) $\cos 120° - \operatorname{ctg} 60° + \sin 90° \cos 135°$.

456. Simplificați expresia:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1$.

457. Se dau vectorii $\vec{a} = (1; -3)$ și $\vec{b} = (7; 2)$. Aflați produsul scalar al vectorilor:

a) $(\vec{a} + \vec{b})$ și $(\vec{a} - \vec{b})$;

b) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} + 3\vec{a})$.

458. Aflați aria triunghiului isoscel cu laturile și 25 cm, 25 cm și 14 cm.

§ 14 Teorema sinusurilor

TEOREMA 9

Diametrul circumferinţei circumscrise triunghiului este egal cu raportul laturii triunghiului către sinusul unghiului opus.

DEMONSTRAŢIE.

1) Fie că se dă triunghiul ascuţitunghic ABC, în care este cunoscută latura $BC = a$ şi unghiul opus ei A (fig.139). Ducem diametrul BK al circumferinţei circumscrise triunghiului şi segmentul KC.

Unghiul BCK — drept, deoarece este înscris şi se sprijină pe diametru; unghiurile K şi A — egale, deoarece sunt înscrise şi se sprijină pe unul şi acelaşi arc BC. Triunghiul BCK este dreptunghic cu ipotenuza $BK = 2R$. De aceea $BC : BK = \sin K$, de unde $BC = 2R \sin K = 2R \sin A$, adică $a = 2R \sin A$.

2) Fie unghiul A obtuz (fig.140), atunci $\angle K = 180° - \angle A$. Sinusurile a astfel de două unghiuri sunt egale: $\sin(180° - \angle A) = \sin A$. De aceea şi în acest caz $BC = BK \sin K = BK \sin(180° - \angle A) = BK \sin A$, $a = 2R \sin A$.

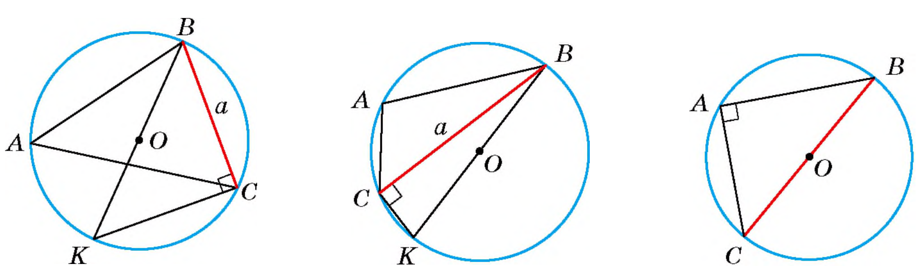


Fig.139 Fig.140 Fig.141

3) Dacă unghiul A este drept, atunci el se sprijină pe diametru (fig.141), adică $a = 2R = 2R \sin A$, fiindcă sinusul unghiului drept este egal cu 1.

Deci, totdeauna $a = 2R \sin A$, de unde $2R = \dfrac{a}{\sin A}$. Ceea ce trebuia de demonstrat □

Atrageţi atenţia! Folosind această teoremă se poate afla raza circumferinţei circumscrise triunghiului arbitrar cu formula $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

TEOREMA 10

(A sinusurilor). **Laturile triunghiului sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.**

DEMONSTRAŢIE.

Din teorema anterioară reiese că

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad \frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Deci,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Iar aceasta înseamnă că laturile triunghiului *a, b, c* sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse *A, B,* și *C*.□

Teorema sinusurilor se folosește pentru a afla laturile necunoscute ale triunghiului dacă se știe o latură și două unghiuri, și de asemenea, pentru a afla unghiurile triunghiului, dacă se știu două laturi și unghiul care este opus uneia din ele.

Exemplu. Se știe latura triunghiului și două unghiuri: $a=27{,}3$ cm, $\angle B=43°$, $\angle C=75°$. Aflați celelalte două laturi ale lui.

Rezolvare. $\angle A=180°-43°-75°=62°$. $\dfrac{27{,}3}{\sin 62°}=\dfrac{b}{\sin 43°}=\dfrac{c}{\sin 75°}$, de unde

$$b=\frac{27{,}3\cdot\sin 43°}{\sin 62°}\approx 21{,}1,\quad c=\frac{27{,}3\cdot\sin 75°}{\sin 62°}\approx 29{,}9.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Teorema sinusurilor poate fi demonstrată și altfel. De exemplu, de exprimat înălțimea ***CH*** a triunghiului *ABC* cu două procedee diferite (fig.142).

$CH=b\sin A$ și $CH=a\sin B$, de unde

$b\sin A=a\sin B$, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ ș.a. m.d.

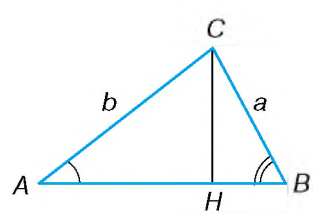


Fig.142

Acei care știu formula ariei triunghiului $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, pot determina aria aceluiași triunghi prin trei procedee diferite:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

i și fiecare parte a egalității de o împărțit la $0{,}5abc$. Încercați de sine stătător să terminați fiecare din aceste demonstrări.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulaţi teorema sinusurilor.
2. Care probleme se pot rezolva cu teorema sinusurilor?
3. Cu ce este egal raportul laturii triunghiului către sinusul unghiului opus?
4. Cu este egală raza circumferinţei circumscrise triunghiului?
5. Cum de aflat latura triunghiului, ştiind raza circumferinţei circumscrise şi unghiul opus?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Aflaţi latura BC a triunghiului ABC, dacă $AB = 12$, $\angle A=\alpha$, $\angle C=\gamma$ (fig.143).

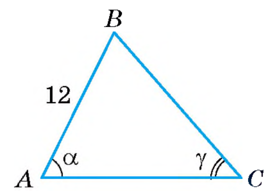


Fig.143

- Pe baza teoremei sinusurilor pentru triunghiul ABC avem:

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ de unde } BC=\frac{12\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

2 Aflaţi raza circumferinţei circumscrise trapezului isoscel $ABCD$, a cărui înălţime BH este egală cu 24 cm şi împarte baza mare în segmentele de 10 cm şi 18 cm.

- Fie $ABCD$ – trapezul isoscel, în care BH = 24 cm, AH = 10 cm şi HD = 18 cm (fig.144). Circumferinţa circumscrisă trapezului $ABCD$ este circumscrisă şi $\triangle ABD$. De aceea vom afla raza circumferinţei, circumscrise triunghiului. Să ne folosim de formula:

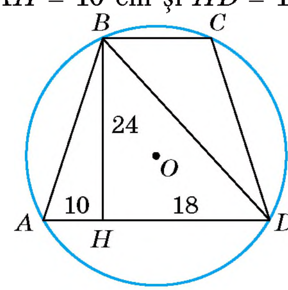


Fig.144

$$R=\frac{BD}{2\sin A}.$$

Pe baza teoremei lui Pitagora din $\triangle ABH$:

$AB=\sqrt{24^2+10^2}=26$ (cm).

Deci, $\sin A=\frac{BH}{AB}=\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$.

Pe baza teoremei lui Pitagora din $\triangle BHD$: $BD=\sqrt{24^2+18^2}=30$ (cm).

Atunci $R=\frac{BD}{2\sin\alpha}=\frac{30\cdot 13}{2\cdot 12}=\frac{65}{4}=16,25$ (cm). Aici α = A.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

EFECTUAŢI ORAL

459. Examinați fig. 145. Înlocuiți * cu așa o expresie, ca să obținem o egalitate adevărată:

a) $\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{n}{*}$; c) $\frac{*}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$;

b) $\frac{k}{\sin\beta}=\frac{*}{\sin\alpha}$; d) $\frac{m}{*}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

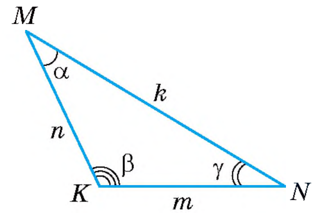


Fig.145

460. Folosind figura 145 indicați egalitatea neadevărată:

a) $\frac{n}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$; c) $\frac{n}{\sin\gamma}=\frac{k}{\sin\alpha}$; e) $\frac{\sin\gamma}{k}=\frac{\sin\beta}{n}$;

b) $\frac{k}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$; d) $\frac{\sin\alpha}{m}=\frac{\sin\beta}{k}$; f) $\frac{m}{n}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

461. Oare există triunghi, în care:
a) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}8$; $\sin C = 0{,}3$; b) $\sin A=\frac{1}{2}$; $\sin B=\frac{1}{3}$; $\sin C=\frac{1}{4}$;
c) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}6$; $\sin C = 0{,}2$?

462. Cu ce este egală raza circumferinței, circumscrise triunghiului echilateral cu latura a?

463. Cu ce este egală raza circumferinței circumscrise unui triunghi isoscel cu baza a și unghiul de la vârf $120°$?

464. Aflați raza circumferinței circumscrise unui trapez isoscel cu diagonala de 10 cm și unghiul ascuțit $45°$.

A

465. Pe baza teoremei sinusurilor exprimați fiecare latură a triunghiului EFK (fig.146).

466. Folosindu-vă de figura 146 și teorema sinusurilor exprimați sinușii unghiurilor E, F și K ai triunghiului EFK.

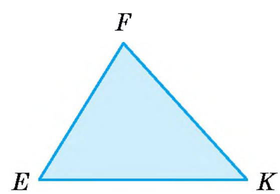


Fig.146

467. Aflați latura AB a triunghiului ABC, dacă:
a) BC = 8 cm, $\angle A=30°$, $\angle C=45°$;
b) AC = 9 cm, $\angle B=60°$, $\angle C=45°$;
c) BC = 16 cm, $\angle A=45°$, $\angle B=105°$.

468. Aflați latura AC a triunghiului ABC, dacă:
a) AB = 20 cm, $\angle B=30°$, $\angle C=45°$;
b) BC = 15 cm, $\angle A=60°$, $\angle B=45°$;
c) AB = 18 cm, $\angle A=105°$, $\angle C=30°$.

469. Aflați unghiul ascuțit C al triunghiului ABC, dacă:

a) $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm, $\angle A = 30^\circ$;

b) $AC = 18$ cm, $AB = 9\sqrt{6}$ cm, $\angle B = 45^\circ$;

c) $AC = 9$ cm, $AB = 3\sqrt{6}$ cm, $\angle B = 120^\circ$.

470. Aflați unghiul ascuțit A al triunghiului ABC, dacă:

a) $AB = 6$ cm, $BC = 3\sqrt{6}$ cm, $\angle C = 45^\circ$;

б) $AC = 12$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, $\angle B = 60^\circ$.

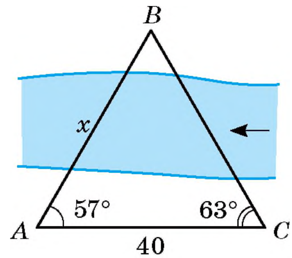


Fig.147

471. Pentru a determina distanța de la punctul A până la punctul inaccesibil B (fig.147) au măsurat distanța $AC = 40$ m și unghiurile: $\angle BAC = 57^\circ$, $\angle ACB = 63^\circ$. Aflați distanța AB.

472. Diagonala paralelogramului este egală cu d și face cu laturile unghiurile α și β. Aflați laturile paralelogramului.

473. Pe baza datelor din figura 148 stabiliți corespondența dintre segmentele (*1-4*), reprezentate în această figură, și lungimile lor (*A-E*).

1	AB	**A**	≈ 33
2	BD	**B**	≈ 18
3	CD	**C**	≈ 39
4	BC	**D**	≈ 23
		E	≈ 41

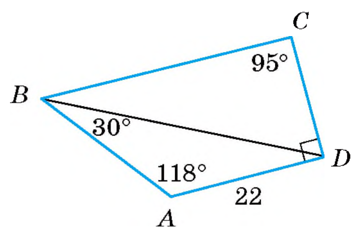


Fig.148

474. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 6 cm, iar unghiul de la vârf este egal cu 150°. Aflați raza circumferinței circumscrise.

475. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 12 cm, iar unghiul de la bază este egal cu 30°. Aflați raza circumferinței circumscrise.

476. Aflați raza circumferinței, circumscrise trapezului isoscel cu diagonala de 10 cm și unghiul ascuțit egal cu 45°.

B

477. Aflați $\angle A$ și $\angle B$ ale triunghiului ABC, dacă $AB = 12$ cm, $BC = 6\sqrt{6}$ cm, $\angle C = 45^\circ$. Câte soluții are problema?

478. În triunghiul MNK $MN = 3$ cm, $MK = \sqrt{3}$ cm, $\angle N = 30^\circ$. Aflați unghiurile necunoscute. Câte soluții are problema?

479. Oare există triunghiul ABC, în care $AB = 15$ cm, $BC = 8$ cm, $\sin \angle A = 0,6$?

480. Pe baza figurii 149 calculați înălțimea jetului de apă a havuzului, CO, dacă $AB = 0,5$ m, $\angle A = 87^\circ$, $\angle B = 84^\circ$.

Fig.149

481. Pe cateta BC a triunghiului ABC ($\angle C = 90°$) s-a luat punctul K astfel, că $BK = a$, $\angle KAB = \alpha$, $\angle AKB = \beta$. Aflați laturile triunghiului ABC.

482. Pe prelungirea catetei AC după punctul A în triunghiul ABC ($\angle C = 90°$) este luat punctul M astfel, că $AM = m$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CMB = \beta$.. Aflați laturile triunghiului ABC.

483. Diagonala trapezului isoscel este egală cu d și formează cu baza mare unghiul α, iar cu latura laterală — unghiul β. Aflați laturile trapezului.

484. Unghiurile triunghiului sunt egale cu α, β și γ. Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu P.

485. În triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$) prin mijlocul înălțimii BH este dusă o dreaptă, care intersectează laturile AB și BC în punctele M și N corespunzător. Aflați BH, dacă $MN = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BMN = \beta$.

486. Bazele trapezului sunt egale cu a și b ($a > b$), iar unghiurile ascuțite de la bază — α și β. Aflați laturile laterale ale trapezului.

487. Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu b, iar unghiul de la vârf — α. Aflați raza circumferinței circumscrise.

488. Unghiurile unui triunghi sunt α și β. Aflați înălțimea dusă din vârful unghiului al treilea, dacă raza circumferinței circumscrise este egală cu R.

489. Aflați unghiurile triunghiului, două laturi ale căruia sunt egale cu 6 cm și $2\sqrt{6}$ cm, dacă raza circumferinței circumscrise este egală cu $2\sqrt{3}$. Câte soluții are problema?

490. Aflați raza circumferinței, circumscrise unui trapez cu bazele de 5 cm și 13 cm, iar înălțimea lui este egală cu 12 cm.

491. Aflați raza circumefrinței circumscrise unui trapez, latura laterală a căruia este egală cu 15 cm, iar raza circumferinței înscrise – cu 6 cm.

492. Pentru a vedea vârful copacului, aflându-se la poalele unui bloc de apartamente trebuie de se uitat în sus sub unghiul de 22°. Dar pentru a vedea vârful copacului de pe balconul care se află la distanța de 50 m de la suprafața pământului, trebuie de se uitat în jos sub unghiul de 50° (fig.150). Aflați: a) înălțimea copacului, b) distanța de la copac până la clădire.

493. Demonstrați teorema 9, folosind figura 151.

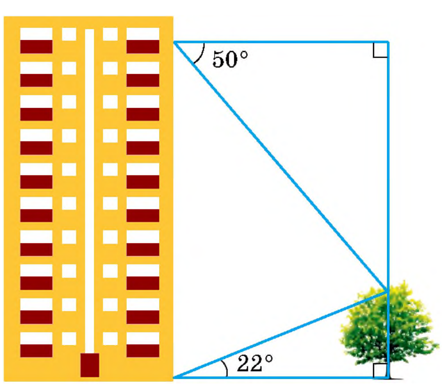


Fig.150

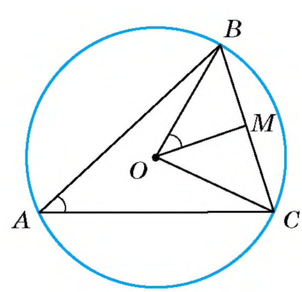


Fig.151

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

494. Un avion trebuie să zboare spre răsărit dintr-un oraş în altul cu viteza de **400** km/oră. Însă constant suflă vântul nord-estic cu viteza de **50** km/oră. În ce direcţie trebuie să se mişte avionul şi cu ce viteză pentru a sosi la timp în punctul de destinaţie?

495. În figura 152 sunt reprezentate trei circumferinţe şi în fiecare din ele este înscris un triunghi. Măsuraţi lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor ale fiecărui triunghi. Verificaţi justeţea afirmaţiei: raza circumferinţei, circumscrise oricărui triunghi, se exprimă prin formula:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

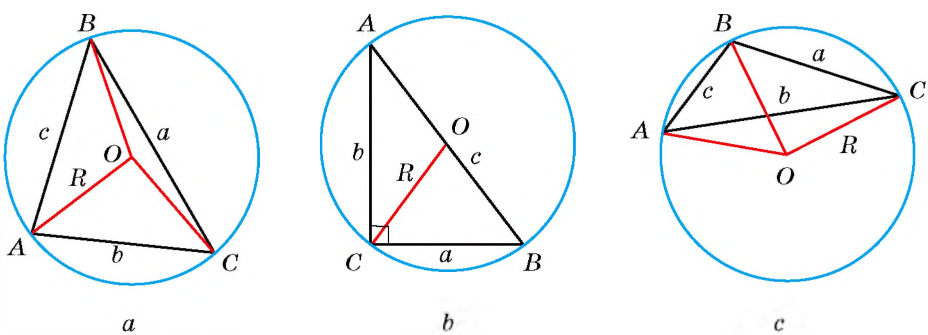


Fig.152

PROBLEME PENTRU REPETARE

496. Aflaţi:
a) cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului cu laturile 3 cm, 5 cm şi 6 cm. Indicaţi tipul acestui triunghi;
b) latura BC a triunghiului ABC, dacă AB = **10** cm, AC = **14** cm, $\angle B=60°$. Stabiliţi tipul acestui triunghi.

497. ***Problema lui Brahmaguptu.*** Produsul lungimilor a două laturi ale triunghiului, împărţit la lungimea perpendicularei, coborâte pe a treia latură din vârful opus al triunghiului este egal cu lungimea diametrului circumferinţei circumscrise. Demonstraţi.

498. Aflaţi înălţimea paralelogramului, dacă laturile lui sunt egale cu **6** cm şi **9** cm şi fac unghiul **30°**.

§ 15 Rezolvarea triunghiurilor

A rezolva triunghiul – aceasta înseamnă a găsi laturile şi unghiurile lui după câteva laturi şi unghiuri cunoscute. Să ne amintim cum se rezolvă triunghiurile dreptunghice.

Problemă. Impotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 10, iar unul din unghiurile ascuţite este egal cu – $40°$. Aflaţi celelalte laturi şi unghiuri ale triunghiului.

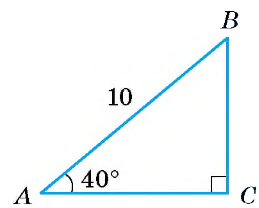


Fig.153

Rezolvare. Fie că în $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$, $AB = 10$ (fig.153).

Atunci $\angle B = 90° - 40° = 50°$; $BC = 10\sin 40° \approx 10 \cdot 0{,}643 \approx$ $\approx 6{,}43$; $AC = 10\cos 40° \approx 10 \cdot 0{,}766 \approx 7{,}66$.

Răspuns: $\angle B = 50°$, $BC \approx 6{,}43$, $AC \approx 7{,}66$.

Teoremele ale sinusurilor şi cosinusurilor permit rezolvarea oricărui triunghi (fig.154) după trei elemente date ale lui (afară de trei unghiuri). Există patru tipuri de probleme principale în rezolvarea triunghiurilor:

1) după două laturi şi unghiul făcut de ele;
2) este dată o latură şi două unghiuri alăturate ei;
3) sunt date trei laturi;
4) după două laturi şi unghiul opus uneia din ele.

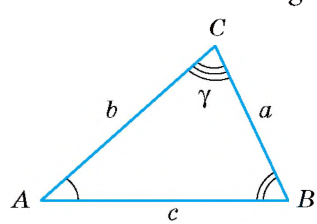


Fig.154

Să examinăm fiecare din aceste cazuri.

1. Dacă sunt date două laturi şi unghiul format de ele, atunci în virtutea teoremei cosinusurilor se află a treia latură, iar cu ajutorul teoremei sinusurilor – ungiurile necunoscute.

Se dă: a, b, γ. Trebuie de aflat c, α şi β (fig.155).

Rezolvare. Latura c o aflăm pe baza teoremei cosinusurilor: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Unul din unghiurile necunoscute (nu acel ce este opus laturii mai mari) este mai comod de-l determinat după teorema sinusurilor:

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}, \text{ atunci } \beta = 180° - (\alpha + \gamma).$$

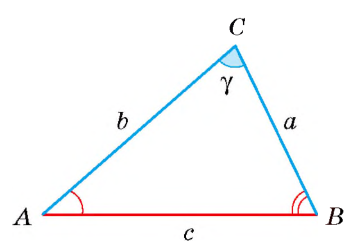


Fig.155

Dacă însă trebuie mai întâi de determinat cel mai mare unghi al triunghiului, atunci e mai bine să ne folosim nu de teorema sinusurilor, ci de teorema cosinusurilor, fiindcă semnul cosinusului va indica imediat la aceea cum este unghiul ascuţit sau obtuz, pe când după valoarea lui sinus aceasta nu se poate face.

2. Dacă se dă latura şi unghiurile alăturate ei, atunci la început se află al treilea unghi al triunghiului, apoi după teorema sinusurilor – laturile.

Se dă: c, α și β. Trebuie de aflat γ, a, b (fig.156)

Rezolvare: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Laturile le aflăm pe baza teoremei sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},\ \text{de unde}\ a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Analogic $b = \dfrac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$.

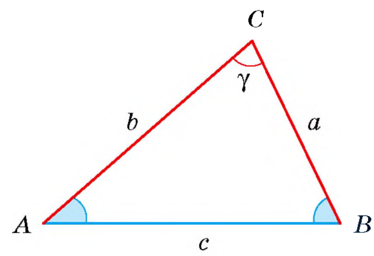


Fig.156

3. Dacă sunt date trei laturi, atunci unul din unghiuri (mai bine cel mai mare) se află după teorema cosinusurilor, al doilea – după teorema sinusurilor sau teorema cosinusurilor.

Se dă: a, b, c ($a \le b \le c$). Trebuie de aflat α, β și γ (fig.157).

Rezolvare. Unul din unghiuri îl determinăm pe baza teoremei cosinusurilor (e bine de-l determinat la început pe unghiul cel mai mare, ca să știm, este el obtuz sau ascuțit):

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

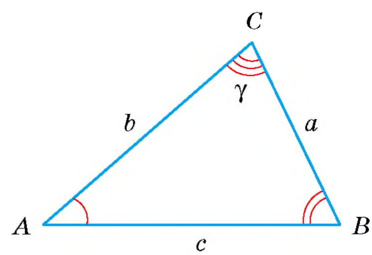


Fig.157

Al doilea unghi îl determinăm după teorema sinusurilor sau a cosinusurilor:

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}\ \ \text{sau}\ \ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Atunci $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$.

4. Dacă sunt date două laturi și unghiul opus uneia din ele, atunci conform teoremei sinusurilor se află mai întâi unghiul opus celei de-a doua latură dată. Astfel de unghiuri pot fi două (dacă unul este α, atunci al doilea e $180° - \alpha$).

Se dă: a, b, α. Trebuie de aflat c, β și γ (fig. 158).

Rezolvare. Pe baza teoremei sinusurilor aflăm unghiul β:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

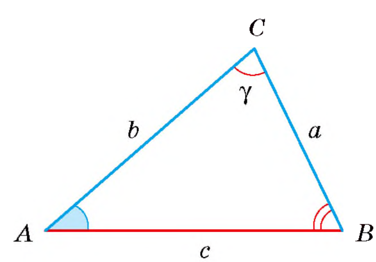


Fig.158

Trebuie de ținut minte că valorii date a lui $\sin\beta$ au să-i corespundă două unghiuri: β și $180° - \beta$. De aceea problema poate avea două soluții și trebuie de examinat două cazuri: când unghiul β — este ascuțit și când el este obtuz.

Apoi aflăm unghiul γ: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Pe baza teoremei sinusurilor aflăm c: $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

PENTRU CEI CURIOŞI

Uneori rezolvarea triunghiurilor este tălmăcită mai pe larg: printre date pot fi nu numai laturile şi unghiurile triunghiului, dar şi unele altele elemente ale lui – mediane, bisectoare, înălţimi ş.a.

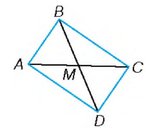


Fig.159

Problemă. Două laturi şi mediana triunghiului, care pornesc din acelaşi vârf sunt egale corespunzător cu 10,24 şi 13. De aflat a treia latură şi unghiurile triunghiului.

Rezolvare. Fie BM – mediana triunghiului ABC (fig. 159). Depunem pe dreapta BM segmentul MD astfel, ca $MD = BM$, şi unim punctul D cu punctele C şi A. Deoarece $AM = MC$ (conform condiţiei) şi $BM = MD$ (conform construcţiei), reiese că $ABCD$ este paralelogram. Atunci pe baza proprietăţii diagonalelor paralelogramului $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Putem afla AC.

$AC^2 = 2(10^2+24^2)-26^2 = 2\cdot 676-676=676$, de unde $AC=26$.

Pe baza teoremei cosinusurilor din triunghiului ABC:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC\cdot AB\cos B$, de unde

$$\cos B = \frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB} = \frac{24^2+10^2-26^2}{2\cdot 24\cdot 10} = 0.$$ Deci, $\angle B = 90°$.

Atunci $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{26} \approx 0{,}385$. $\angle A \approx 68°$. $\angle C \approx 90° - 68° = 22°$.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulaţi teorema sinusurilor.
2. Formulaţi teorema cosinusurilor.
3. Cum se rezolvă triunghiurile când sunt date două laturi şi unghiul format de ele?
4. Cum de rezolvat triunghiurile după o latură şi două unghiuri?
5. Cum de rezolvat triunghiurile după trei laturi?
6. Cum se rezolvă triunghiurile după două laturi şi unghiul opus uneia din ele? Câte soluţii poate avea această problemă?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Rezolvaţi triunghiul după două laturi $a = 39{,}7$, $b = 73{,}2$ şi unghiul format de ele $\gamma = 46{,}5°$ (fig.160).

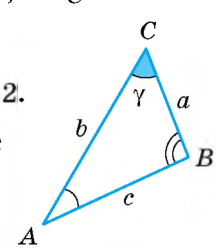


Fig.160

- Pe baza teoremei cosinusurilor

$$c = \sqrt{39{,}7^2 + 73{,}2^2 - 2\cdot 39{,}7\cdot 73{,}2\cdot\cos 46{,}5°} \approx 54{,}2.$$

Conform teoremei sinusurilor $\dfrac{39{,}7}{\sin\alpha} = \dfrac{54{,}2}{\sin 46{,}5°}$, de unde

$$\sin\alpha = \frac{39{,}7\cdot\sin 46{,}5°}{54{,}2} \approx 0{,}531.$$

Atunci $\alpha \approx 32{,}1°$, $\beta = 180° - 46{,}5° - 32{,}1° \approx 101{,}4°$.

Deci, $c \approx 54{,}2$, $\alpha \approx 32{,}1°$, $\beta \approx 101{,}4°$.

2 Diagonala paralelogramului este egală cu 10 şi formează cu laturile unghiurile de 26° şi 34°. Aflaţi laturile paralelogramului.

- Fie $ABCD$ — paralelogram (fig. 161), în care $AC = 10$, $\angle BAC = 26°$, $\angle BCA = 34°$.
Atunci $\angle B = 180° - (26° + 34°) = 120°$. Conform teoremei sinusurilor din $\triangle ABC$ aflăm laturile AB şi BC.

$$\frac{AB}{\sin 34°} = \frac{AC}{\sin 120°}.$$

De unde $AB = \dfrac{AC \cdot \sin 34°}{\sin 120°} = \dfrac{10 \cdot 0,559}{0,866} \approx 6,5$.

$\dfrac{BC}{\sin 26°} = \dfrac{AC}{\sin 120°}$. De unde

$BC = \dfrac{AC \cdot \sin 26°}{\sin 120°} = \dfrac{10 \cdot 0,438}{0,866} \approx 5,1$. Aşadar, $AB = 6,5$, $BC = 5,1$.

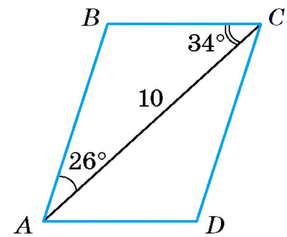


Fig.161

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

499. Folosindu-se de figura 162, povestiţi cum de aflat elemntele necunoscute ale triunghiului pentru fiecare caz: a), b) şi c).

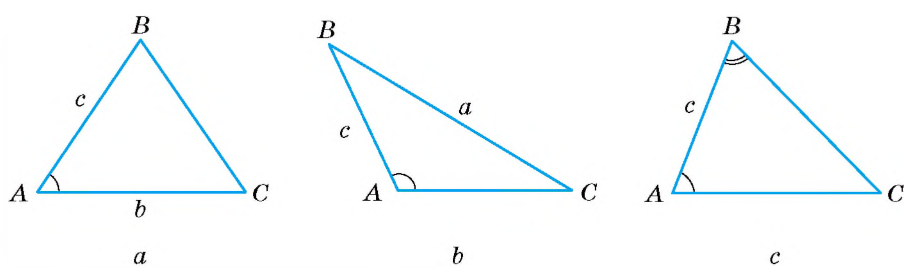


Fig.162

500. Cum de aflat unghiurile rombului, a cărui latură este egală cu a, iar diagonala mai mică d?

A

501. Rezolvaţi triunghiul după două laturi date şi unghiul făcut de ele:
a) $b = 22$, $c = 26$, $\alpha = 78°$; c) $a = 0,8$, $c = 0,6$, $\beta = 50°$;
b) $a = 10$, $b = 5$, $\gamma = 102°$; d) $a = 49,3$, $b = 26,4$, $\gamma = 47,3°$.

502. Rezolvaţi triunghiul după latura dată şi unghiurile alăturate ei:
a) $a = 32$, $\beta = 36°$, $\gamma = 42°$; c) $c = 17,4$, $\alpha = 64°$, $\beta = 44°$;
b) $b = 20$, $\alpha = 31°$, $\gamma = 124°$; d) $a = 7,3$, $\beta = 28°$, $\gamma = 109°$.

503. Rezolvaţi triunghiul după trei laturi:
a) $a = 15,\ b = 18,\ c = 25$; c) $a = 3,\ b = 6,\ c = 3\sqrt{3}$;
b) $a = 41,\ b = 19,\ c = 40$; d) $a = 91{,}2,\ b = 125{,}3,\ c = 176{,}2$.

504. În paralelogramul *ABCD* $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm, $\angle A = 45°$.
Aflaţi lungimea diagonalei *BD*.

505. Latura rombului este egală cu 38 cm, iar unghiul lui are 58°. Aflaţi diagonalele.

506. În spaţiu pe semidreptele *OA*, *OB*, *OC*, fiecare din ele este perpendiculară pe celelalte două, la distanţele de 12, 13 şi 15 unităţi de lungime de la punctul *O* sunt luate punctele *A*, *B*, *C* (fig.163). Aflaţi cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului *ABC*.

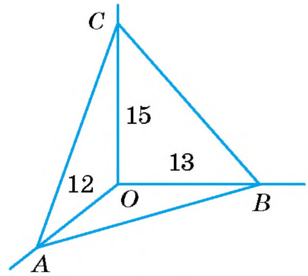


Fig.163

507. La ce înălţime s-a ridicat fundul nacelei a balonului, dacă într-un oarecare moment s-a reuşit de fixat poziţia lui faţă de punctele *A* şi *B*, aşa cum se reprezintă în figura 164?
Aflaţi distanţa care era în acel moment dintre balon şi fiecare din punctele A şi B.

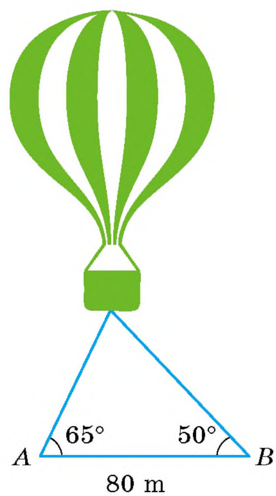


Fig.164

508. Rezolvaţi triunghiul după două laturi date şi unghiul opus uneia din ele:
a) $a = 4{,}2,\ b = 3{,}5,\ \alpha = 70°$;
b) $c = 1{,}5,\ b = 2{,}4,\ \gamma = 28{,}5°$;
c) $a = 4{,}5,\ c = 3{,}2,\ \gamma = 85°$.

509. Laturile paralelogramului sunt egale cu 12 cm şi 8 cm, iar unghiul ascuţit — 48°. Aflaţi diagonala mai mare a paralelogramului şi unghiurile ce le face ea cu laturile.

510. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 12 cm şi 20 cm, iar unghiul făcut de ele este de 37°. Aflaţi laturile paralelogramului.

511. Aflaţi laturile paralelogramului, diagonala căruia este egală cu 9 cm şi face cu laturile lui unghiurile de 24° şi 57°.

B

512. Aflaţi laturile trapezului isoscel, dacă diagonala lui este egală cu 16 cm şi formează cu latura laterală şi baza corespunzător unghiurile 53° şi 48°.

513. Bazele unui trapez sunt egale cu 14 m şi 18 m, iar laturile — 7 m şi 10 m. Aflaţi unghiurile trapezului.

514. În triunghiul *ABC* latura $AC = 16$ m, $\angle CAB = 122°$. $AL = 10$ m — bisectoarea triunghiului dat. Aflaţi lungimile laturilor *AB* şi *BC*.

515. Aplicând teorema sinusurilor, demonstraţi că bisectoarea unghiului triunghiului împarte latura lui în segmente, proporţionale laturilor alăturate.

516. BM — mediana triunghiului ABC. Aflaţi AB şi BC, dacă $BM = 5$ cm, $AC = 12$ cm, $\angle ABM = 56°$.

517. Medianele AM şi CN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Aflaţi laturile triunghiului, dacă $AM = 9$ cm, $CN = 12$ cm, $\angle AON = 35°$.

518. În triunghiul ABC $AB = 8$ cm, $AC = 20$ cm, $\angle A = 68°$. Aflaţi medianele triunghiului.

519. Baza triunghiului isoscel este egală cu 18 cm, iar unul din unghiuri – cu 100°. Aflaţi bisectoarele triunghiului.

520. Pentru a determina înălţimea turnului de televiziune (fig. 165), au măsurat distanţa $AB = 12$ m şi unghiurile $\alpha = 35°$, $\beta = 49°$. Aflaţi înălţimea turnului.

521. Pentru a afla distanţa dintre punctele A şi B (fig. 166) au măsurat distanţa CD şi unghiurile α, β, γ, δ (delta). Cum de găsit AB?

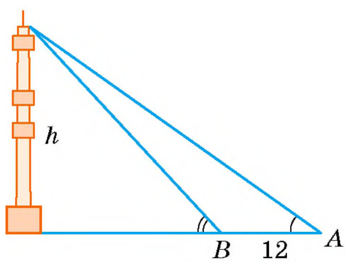


Fig.165

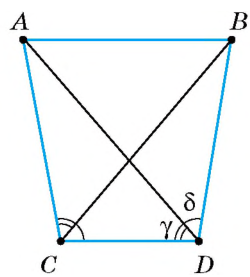


Fig.166

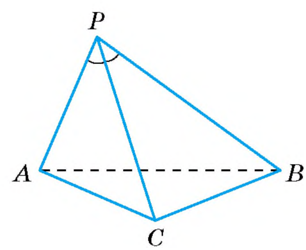


Fig.167

522. În ce mod, ştiind distanţa $AB = l$ şi unghiurile α, β, γ, δ, arătate în figura 166, de determinat distanţa CD?

523. Din două puncte A şi B de pe malul mării este supravegheată o şalupă care se mişcă uniform şi rectiliniu. La ora 10.00 şalupa era văzută din punctul A sub unghiul de 100° faţă de direcţia AB, iar din punctul B – sub unghiul de 51° faţă de direcţia BA. La ora 10.10 unghiurile s-au schimbat şi deja erau egale corespunzător cu 84° şi 74°. Aflaţi viteza şalupei, dacă $AB = 2{,}5$ km.

524. În piramida triunghiulară $PABC$ muchiile laterale sunt egale respectiv cu 3 dm, 4 dm şi 5 dm, iar unghiul făcut de fiecare două din ele — 60°. Aflaţi perimetrul triunghiului ABC (fig. 167).

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

525. Pe baza figurii 168 confecţionaţi eclimetrul (cel mai simplu dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în planul vertical). Argumentaţi principiul folosirii lui. Cu ajutorul lui încercaţi să măsuraţi unghiurile, sub care se vede clădirea înaltă (biserica, turnul de televiziune ş.a.) de la diferite distanţe.

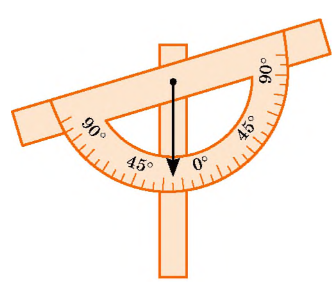


Fig.168

PROBLEME PENTRU REPETARE

526. Aflaţi unghiul făcut de diagonalele paralelogramului $ABCD$, dacă $AB = 7$ cm, $AC = 16$ cm şi $BD = 6$ cm.

527. Unghiul de la baza triunghiului isoscel este egal cu $30°$. Aflaţi raportul laturilor triunghiului.

528. Perimetrul rombului este egal cu 40 cm, iar una din diagonale — 10 cm. Aflaţi unghiurile rombului şi a doua diagonală.

529. Diagonala dreptunghiului este egală cu d şi formează cu latura mai mică unghiul α. Aflaţi aria dreptunghiului.

GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU






Triunghiurile şi patrulaterele în arhitectură

§ 16 Formule pentru aflarea ariei triunghiului

După cum ştiţi aria S a triunghiului cu baza a şi înălţimea h se află cu formula:

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

Folosind funcţiile trigonometrice se pot deduce câteva alte formule pentru calcularea ariei triunghiului. Fie în triunghiul ABC baza $BC = a$, $AC = b$, $\angle C=\gamma$, $AH = h$ — înălţimea (fig.169). Din triunghiul dreptunghic ACH avem: $h = b \sin \gamma$. Deci,

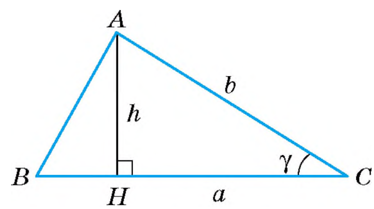


Fig.169

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Formula ariei triunghiului $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ este adevărată şi atunci, când unghiul γ este drept sau obtuz (demonstraţi aceasta de sine stătător). Deci, **aria triunghiului este egală cu semiprodusul a oricăror două laturi ale lui cu sinusul unghiului format de ele**.

Pe baza teoremei sinusurilor $2R=\frac{c}{\sin\gamma}$, unde R — raza circumferinţei circumscrise. De aceea $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$. Aşadar, $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$.

Aria triunghiului este egală cu produsul a trei laturi ale lui, împărţit la împătrita rază a circumferinţei circumscrise.

Există încă o formulă pe care des o folosesc la determinarea ariei triunghiului. Dacă p — semiperimetrul triunghiului cu laturile a, b, c, atunci:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Aceasta-i formula lui Heron. Să o demonstrăm: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos$, de unde $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. De aceea $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=$

$$=\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}=\frac{1}{(2ab)^2}\left(c^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-c^2\right).$$

De aceea $\sin\gamma=\frac{1}{2ab}=\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$.

Înlocuind această valoare a lui sin γ în formula $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ şi notând semiperimetrul triunghiului cu litera *p*, obţinem:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Folosind figura 170, demonstraţi de sine stătător următoarea afirmaţie.

Aria triunghiului este egală cu produsul razei circumferinţei, înscrise în triunghi, la semiperimetrul acestui triunghi, adică $S = pr$.

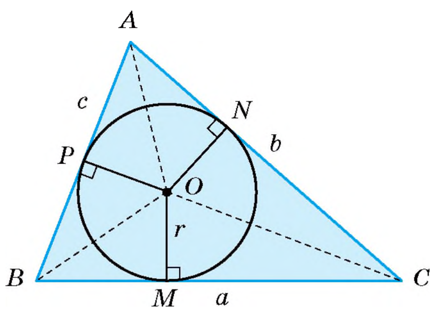


Fig.170

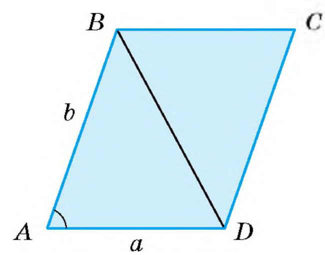


Fig.171

Aşadar, aria triunghiului poate fi aflată, utilizând oricare din formulele:

$$S=\frac{1}{2}ah,\ \ S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ \ S=pr,\ \ S=\frac{abc}{4R},\ \ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dacă sunt cunoscute laturile *a*, *b* și *c* ale triunghiului *ABC*, atunci din formulele $S=pr$ şi $S=\frac{abc}{4R}$ se pot găsi razele circumferinţelor înscrise (*r*) şi circumscrise (*R*):

$$r=\frac{S}{p},\ \ R=\frac{abc}{4S}.$$

Aplicând formula $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, se poate demonstra că **formula ariei paralelogramului cu laturile *a* şi *b* şi unghiul γ făcut de ele are forma:**

$$\boldsymbol{S = ab\sin\gamma}.$$

Doar dacă *ABCD* — paralelogram, atunci aria lui este de două ori mai mare decât aria triunghiului *ABD* (fig. 171). De aceea

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{ABD}=2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\gamma=ab\sin\gamma.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Să mai deducem formula ariei patrulaterului covex cu diagonalele d_1 şi d_2 şi unghiul α format de ele.

Fie că diagonalele AC şi BD ale patrulaterului conext se intersectează în punctul O (fig. 172). Dacă unul din patru unghiuri cu vârful O este egal cu α, atunci şi unghiul vertical, corespunzător lui tot va fi egal cu α, iar altele două – câte (180° –α). Deoarece sin (180° – α) = sin α, reiese că sinusurile fiecăruia din unghiurile AOB, BOC, COD, AOD este egal cu sin α.

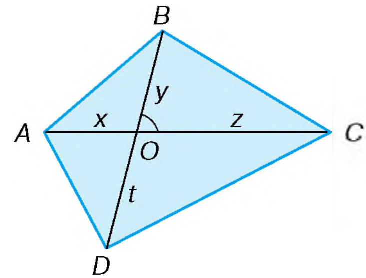


Fig.172

Notăm părţile diagonalelor patrulaterului cu literele x,y,z,t ca pe figura 172. Aria întregului patrulater este egală cu suma ariilor ale acelor patru triunghiuri obţinute.

De aceea:

$$S_{ABCD}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCD}+S_{ODA}=\frac{1}{2}(xy\sin\alpha+yz\sin\alpha+zt\sin\alpha+xt\sin\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}(xy+yz+zt+xt)\sin\alpha=\frac{1}{2}(y(x+z)+t(z+x))\sin\alpha=\frac{1}{2}(x+z)\cdot(y+t)\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Aşadar, **dacă diagonalele patrulaterului de lungimile d_1 şi d_2 se intersectează, formând unghiul α, atunci aria patrulaterului se calculează cu formula:**

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Încercați să deduceți această formulă, circumscriind acestui patrulater un paralelogram, ale cărui laturi sunt paralele cu diagonalele patrulaterului (fig.173) Oare este adevărată această formulă pentru patrulaterul neconvex? Încercați să o demonstrați.

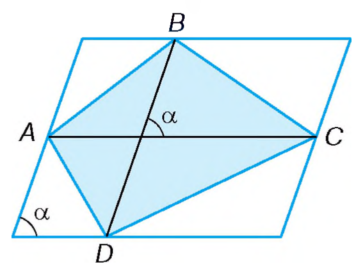


Fig.173

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum de aflat aria triunghiului, știind o latură și înălțimea coborâtă pe ea?
2. Cum de aflat aria triunghiului după două laturi și unghiul format de ele?
3. Cum de aflat aria triunghiului după laturi și raza circumferinței circumscrise?
4. Cum de aflat aria triunghiului știind perimetrul lui și raza circumferinței înscrise?
5. Formulaţi formula lui Heron.
6. Cum de aflat raza circumferinței circumscrise triunghiului?
7. Cum de aflat raza circumefrinței, înscrise în triunghi?
8. Cum de aflat aria paralelogramului?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstrați că **înălțimile triunghiului sunt invers proporționale cu laturile corespunzătoare.**

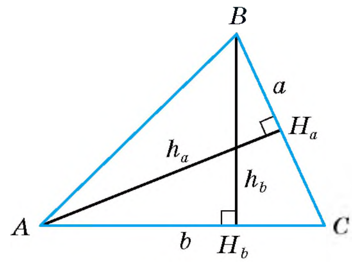


Fig.174

- Fie a și b — două laturi ale triunghiului ABC, iar înălțimile, coborâte pe ele — h_a, h_b (fig.174).Exprimăm aria triunghiului prin două procedee: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$.

Deci, $ah_a = bh_b$, de unde $h_a : h_b = b : a$.
Iar aceasta și trebuia de demonstrat.
Așa un procedeu de rezolvare a problemelor, când se egalează ariile figurilor egale, pe scurt este numită **metoda ariilor**.

2 Demonstrați că **mediana triunghiului îl împarte în două triunghiuri echivalente.**

- Fie $BM = m$, $AM = MC = n$ (fig.175).

Atunci $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha.$

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha.$

Deci, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$.

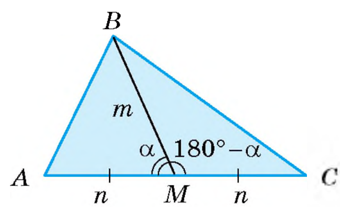


Fig.175

Rezolvați problema cu alt procedeu.

3 Deduceți formula ariei triunghiului după o latură și unghiurile alăturate ei.

- Fie că se dă triunghiul ABC, în care $CB = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (fig.176) $\angle A = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, de aceea $\sin\angle A = \sin(\beta + \gamma)$. Pe baza teoremei sinusurilor $\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b}{\sin\beta}$, de unde $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$.

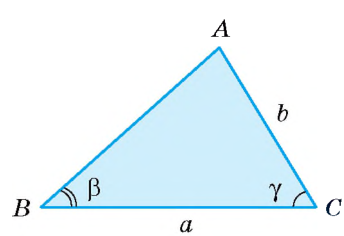


Fig.176

Aria triunghiului:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}a\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Așadar, aria căutată a triunghiului $S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

530. Aflați aria triunghiului, ale cărui două laturi sunt egale cu 2 și 3, iar unghiul format de ele este de 30°.

531. Aflați aria triunghiului isoscel, a cărui latură laterală b = 6 cm, iar unghiul de la vârf: a) 45°; б) 60°; в) 120°.

532. Aflați aria triunghiului echilateral, a cărui latură este egală cu: a) 8 cm; b) 1 dm; c) $\sqrt{3}$ m.

533. Cum se va schimba aria triunghiului, dacă lungimile a două laturi ale lui a și b vor rămâne neschimbate, iar unghiul γ format de ele îl vom mări de la 0° până la 180°?

534. Care cea mai mare arie o poate avea triunghiul, două laturi ale căruia sunt egale cu 2 cm şi 3 cm?

535. Aria triunghiului este de 15 cm², iar laturile lui au 10 cm şi 6 cm. Aflaţi unghiul format de ele.

536. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 3 cm şi 10 cm. Oare poate aria lui să fie egală cu 12 cm², 15 cm², 18 cm²?

A

537. Folosind figura 177 aflați aria triunghiului ABC.

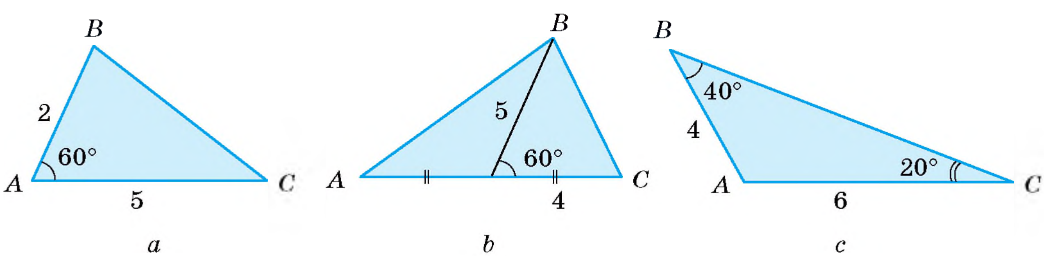


Fig.177

538. Aflați aria triunghiului ABC, dacă:

a) BC = 4 cm, AC = 8 cm, $\angle C = 45°$; b) $AB = 12$ cm, $BC = 7$ cm, $\angle B = 150°$.

539. Demonstrați că aria triunghiului echilateral cu latura a se determină cu formula $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

540. Aflați aria, razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă pentru triunghiul echilateral cu latura de 6 cm.

541. Aria triunghiului echilateral este egal cu $16\sqrt{3}$ cm². Aflați perimetrul triunghiului.

542. Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 8 cm, iar unghiul de la bază — $15°$. Aflaţi aria triunghiului.

543. Aflaţi laturile triunghiului isoscel, a cărui arie este egală cu $25\sqrt{3}$ cm², iar unghiul de la vârf este de $120°$.

544. Una din laturile triunghiului este cu 3 cm mai mare decât alta. Aflaţi aceste laturi, dacă unghiul făcut de ele este de $30°$, iar aria triunghiului este egală cu 22 cm².

545. Două laturi ale triunghiului sunt proporţionale numerelor 7 şi 8, iar unghiul format de ele este de $120°$. Aflaţi perimetrul triunghiului, dacă aria lui este $56\sqrt{3}$ cm².

546. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 16 cm şi 18 cm, iar unghiul format de ele este de $60°$. Aflaţi înălţimile, coborâte pe aceste laturi.

547. Mediana triunghiului şi latura, la care ea este dusă, sunt egale respectiv cu 10 cm şi 26 cm şi fac unghi de $60°$. Aflaţi aria triunghiului.

548. Mediana triunghiului şi latura, la care ea este dusă, sunt corespunzător egale cu 6 cm şi 16 cm. Aflaţi unghiul, făcut de ele, dacă aria triunghiului este de 24 cm².

549. Laturile triunghiului sunt 10 cm, 10 cm şi 12 cm. Aflaţi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă.

550. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 25 cm şi 29 cm. Aflaţi aria lui şi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă lui.

551. Aflaţi cea mai mare înălţime a triunghiului cu laturile 6 cm, 10 cm şi 14 cm.

552. Trei circumferinţe de razele 8 cm, 9 cm şi 17 cm sunt tangente exterior, două câte două (fig.178). Aflaţi aria triunghiului cu vârfurile în centrele acestor circumferinţe.

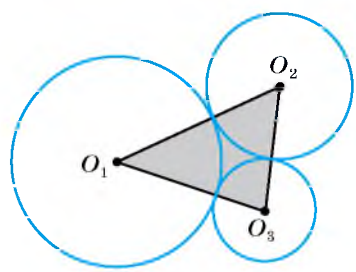


Fig.178

553. Bisectoarea AM a paralelogramului $ABCD$ împarte latura BC în segmentele $BM = 10$ cm, $MC = 8$ cm. Aflaţi aria paralelogramului dacă $\angle A = 30°$.

554. Aflaţi aria romblui a cărui latură este de 8 cm, iar unghiurile sunt proporţionale cu numerele 1 şi 3.

555. Aflaţi unghiurile rombului, a cărui arie este de 8 cm², iar perimetrul — 16 cm.

556. Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$, dacă $AB = a$, $AC = d$, $\angle BAC = \alpha$.

B

557. Medianele AM şi CN ale triunghiului ABC sunt egale cu 9 cm şi 12 cm şi se intersectează în punctul O. Aflaţi aria triunghiului AOC şi a patrulaterului $BMON$, dacă $\angle AOC = 120°$.

558. BL — bisectoarea triunghiului ABC. Aflaţi aria lui, dacă $AL = 15$ cm, $LC = 24$ cm, $BC = 40$ cm.

559. Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul O astfel, că $AO = 4$ cm, $BO = 6$ cm, $CO = 10$ cm, $DO = 8$ cm. Aflaţi ariile $\triangle AOC$ şi $\triangle BOD$, dacă suma ariilor lor este egală cu 22 cm².

560. Bazele trapezului $ABCD$ sunt egale cu 7 cm și 14 cm, iar diagonalele cu 9 cm și 15 cm. Aflați ariile triunghiurilor AOB, BOC, COD, AOD, unde O — punctul de intersecție al diagonalelor.

561. Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC sunt luate punctele M și N astfel, că $AM = 7$ cm, $BM = 8$ cm, $BN = 3$ cm, $NC = 11$ cm. Aflați aria patrulaterului $AMNC$, dară aria triunghiului MBN este egală cu 4 cm^2.

562. Demonstrați că **trei mediane ale triunghiului îl împart în 6 triunghiuri echivalente** (fig.179).

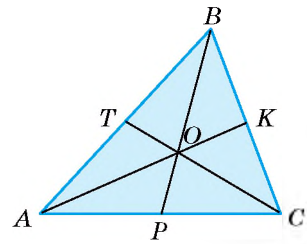


Fig.179

563. Centrul circumferinței, înscrise în triunghiul cu laturile 6 cm, 25 cm și 29 cm, este unit cu vârfurile triunghiului. Aflați ariile triunghiurilor create.

564. Înălțimea dusă la baza triunghiului isoscel este egală cu 16 cm, iar latura laterală cu — 20 cm. Aflați distanța dintre centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă.

565. Laturile triunghiului sunt egale cu 40 cm, 40 cm și 48 cm. Aflați distanțele de la centrul circumferinței circumscrise până la laturile triunghiului.

566. Laturile triunghiului sunt egale cu 15 cm, 15 cm și 24 cm. Aflați distanțele de la centrul circumferinței înscrise până la vârfurile triunghiului.

567. Aflați aria $\triangle ABC$, dacă $AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

568. Trei circumferințe cu razele de 6 cm, 7 cm și 14 cm sunt tangente exterior două câte două. Aflați raza circumferinței pe care sunt situate centrele circumferințelor date.

569. În triunghiul cu laturile 13 cm, 14 cm și 15 cm este înscrisă o circumferință, la care este dusă tangenta, paralelă cu latura mijlocie. Aflați aria părților în care această tangentă împarte triunghiul.

570. Folosind figura 180 demonstrați că aria fiecărui triunghi poate fi calculată cu formula $S = r\left(a + r\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{A}{2}\right)$, unde $a = BC$, r — raza circumferinței, înscrise în $\triangle ABC$.

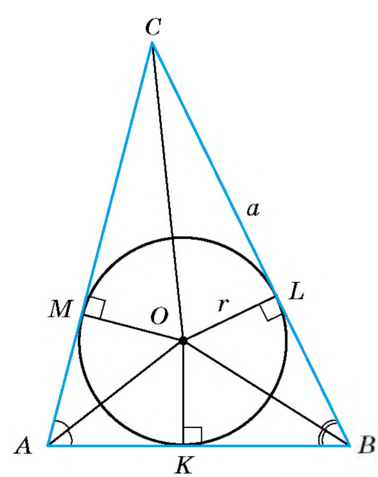


Fig.180

571. Aflați aria paralelogramului, ale cărui diagonale sunt egale cu 8 cm și 11 cm, iar unghiul făcut de ele — cu 30°.

572. Aflați diagonalele paralelogramului de aria $96\sqrt{2}$ cm^2, dacă una din ele este cu 8 cm mai lungă decât cealaltă, iar unghiul format de ele este egal cu 45°.

573. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 30 cm și 74 cm, iar una din latura cu — 26 cm. Aflați aria paralelogramului.

574. Aflați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $BD = d$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

575. Folosind o foaie de hârtie în pătrățele (fig.181) desenați triunghiul cu baza AB și cu aria de două ori mai mare decât aria triunghiului ABC. Câte astfel de triunghiuri există? Care poate fi cel mai mare cosinus al unghiului, opus laturii AB?

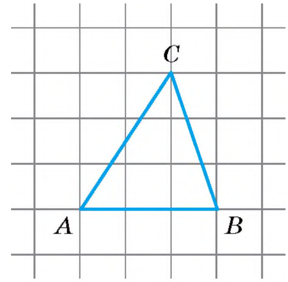


Fig.181

PROBLEME PENTRU REPETARE

576. Laturile triunghiului sunt egale cu 5 cm, 6 cm și 10 cm. Aflați unghiurile triunghiului.

577. Demonstrați că triunghiul cu laturile 7 cm, 24 cm și 25 cm este dreptunghic.

578. Aflați aria dreptunghiului, dacă perpendiculara, dusă din vârful unghiului drept, împarte diagonala în segmentele 2 cm și 8 cm.

579. Scrieți ecuațiile circumferințelor circumscrisă și înscrisă în patrulaterul $ABCD$ dacă: $A(-3; -3)$, $B(-5; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; -1)$.

GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU

Triunghiuri pe uscat și pe mare

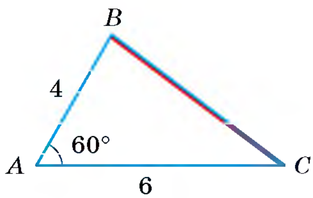
PROBLEME CU DESENE GATA

1

A

$AB = 4,\ AC = 6,\ \angle A = 60°.$

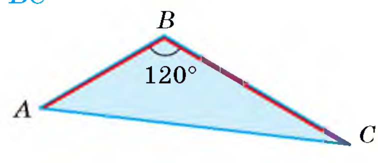
BC



B

$AC = 14,\ AB : BC = 3 : 5.$

AB, BC

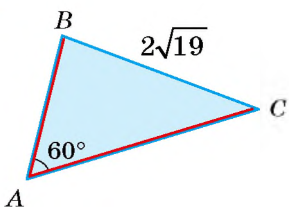


2

A

$BC = 2\sqrt{19},\ AC - AB = 6.$

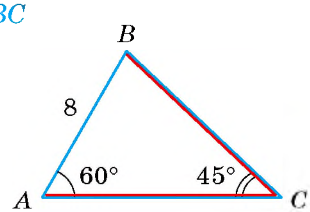
AC, AB



B

$\angle A = 60°,\ \angle C = 45°,\ AB = 8.$

AC, BC

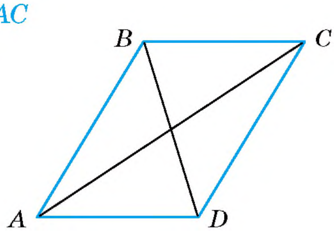


3

A

$\square ABCD$
$AB = 9,\ BC = 7,\ BD = 8.$

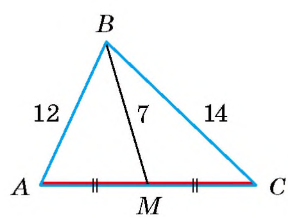
AC



B

$AM = MC.$

AC

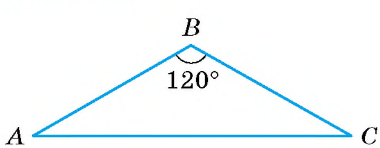


4

A

$AB + BC = 18;\ S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}.$

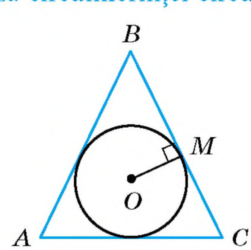
AB, BC, AC



B

$BM : MC = 9 : 8,\ r = OM = 24.$

R — raza circumferinţei circumscrise



Lucrarea independentă 3

Varianta 1

1°. Aflaţi aria triunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 7 cm şi 8 cm, iar unghiul format de ele este de $45°$.

2°. Aflaţi latura BC a triunghiului ABC, dacă $AB = 6$ dm, $AC = 14$ dm, $\angle B = 120°$.

3•. Latura laterală şi baza triunghiului isoscel sunt respectiv proporţionale cu numerele 5 şi 8. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 54 m.

Varianta 2

1°. Aflaţi aria paralelogramului, ale cărui laturi sunt egale cu 6 cm şi 9 cm, iar unghiul format de ele este egal cu $120°$.

2°. Aflaţi latura AB a triunghiului ABC, dacă $BC = 8$ m, $AC = 7$ m, $\angle B = 60°$.

3•. Latura laterală a triunghiului isoscel este cu 1 cm mai mare decât baza. Aflaţi raza circumferinţei înscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 50 cm.

Varianta 3

1°. Aflaţi aria triunghiului, ale cărui două laturi sunt egale cu 9 m şi 12 m, iar unghiul format de ele este egal cu $150°$.

2°. Aflaţi latura AC a triunghiului ABC, dacă $AB = 7$ cm, $BC = 13$ cm, $\angle A = 120°$.

3•. Baza şi latura triunghiului isoscel se raportă ca 6:5. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 64 dm.

Varianta 4

1°. Aflaţi aria rombului cu latura 6 m şi unghiul $135°$.

2°. Aflaţi latura BC a triunghiului ABC, dacă $AB = 14$ cm, $AC = 10$ cm, $\angle C = 60°$.

3•. Baza triunghiului isoscel este cu 6 dm mai mică decât latura laterală. Aflaţi raza circumferinţei înscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 72 dm.

ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 3

1	Care din următoarele egalitĭţii este neadevărată?	a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}$; b) $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; d) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.
2	Stabiliţi tipul triunghiului ABC, dacă $\cos B < 0$.	a) ascuţitunghic; b) dreptunghic; c) obtuzunghic; d) echilateral.
3	Aflaţi raza circumferinţei, circumscrise triunghiulu ABC, dacă $AC = 3$ cm, $\angle B = 30°$.	a) 3 cm; c) $\sqrt{3}$ cm; b) 6 cm; d) 12 cm.
4	Aflaţi pătratul lungimii a diagonalei mai mici a paralelogamului, ale cărui laturi sunt egale cu 5 şi 8, iar unghiul făcut de ele, este egal cu 60°.	a) 129; c) 49; b) 39; d) 69.
5	Aflaţi aria triunghiului două laturi ale căruia sunt egale cu 6 cm şi 14 cm, iar unghiul format de ele 30°.	a) 42 cm^2; c) $21\sqrt{2}$ cm^2; b) $21\sqrt{3}$ cm^2; d) 21 cm^2.
6	Aflaţi aria triunghiului isoscel, a cărui latură laterală este egală cu 10 cm, iar unghiul de la bază este egal cu 45°.	a) $25\sqrt{3}$ cm^2; c) $25\sqrt{2}$ cm^2; b) 50 cm^2; d) $50\sqrt{3}$ cm^2.
7	Două laturi ale triunghiului cu aria de $6\sqrt{3}$ cm^2 sunt egale cu 4 cm şi 6 cm. Găsiţi unghiul făcut de aceste laturi.	a) 30°; c) 30° sau 60°; b) 60°; d) 60° sau 120°.
8	Cu ce formulă se calculează raza circumfeinţei circumscrise triunghiului?	a) $\frac{abc}{4S}$; c) $\frac{S}{p}$; b) $\frac{4S}{abc}$; d) $\frac{p}{S}$.
9	Aflaţi aria triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 10 cm, iar raza cirmuferinţei înscrise în el cu — 2 cm.	a) 20 cm^2; c) 5 cm^2; b) 10 cm^2; d) 2,5 cm^2.
10	Indicaţi aria triunghiului echilateral cu latura de 2 dm.	a) 4 dm^2; c) $\sqrt{3}$ dm^2; b) $2\sqrt{3}$ dm^2; d) $0{,}5\sqrt{3}$ dm^2.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 14 cm şi 16 cm, iar unghiul format de ele este 120°. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului.

2°. În triunghiul ABC $AB = 8$ dm, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Aflaţi BC.

3°. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6 cm şi 10 cm, iar unghiul făcut de ele este 60°. Aflaţi diagonalele şi aria paralelogramului.

4°. Aria triunghiului ABC este egală cu 30 cm^2, $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm. Aflaţi $\angle B$. Câte soluţii are problema?

5•. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 14 cm şi 22 cm, iar laturile sunt proporţionale cu numerele 6 şi 7. Aflaţi perimetrul paralelogramului.

6•. Laturile triunghiului sunt egale cu 17 m, 25 m şi 26m. Aflaţi cea mai mare înălţime a triunghiului.

7•. În triunghiul cu laturile 15 m, 15 m şi 24 m este înscrisă o circumferinţă, centrul căreia este unit cu vârfurile triunghiului (fig.182). Aflaţi ariile triunghiurilor nou – formate.

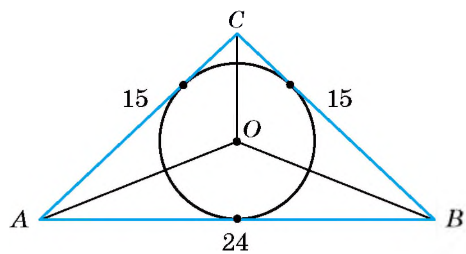


Fig.182

8•. Perimetrul triunghiului este egal cu 36 cm, iar două laturi ale lui, care sunt proporţionale cu numerele 8 şi 3, fac unghiul de 60°. Aflaţi laturile triunghiului şi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă.

9••. Laturile laterale ale trapezului sunt egale cu 5 cm şi $5\sqrt{3}$ cm, iar bazele cu — 8 cm şi 18 cm. Aflaţi unghiurile trapezului.

10••. Una din laturile triunghiului este egală cu c, iar unghiurile alăturate ei cu — α şi β. Aflaţi bisectoarele triunghiului, duse din vârfurile acestor unghiuri.

Lumea din jur – asta-i lumea geometriei...
Totul ce este de jur împrejur este geometrie.
Le Corbiuzies

Principalul în capitolul 3

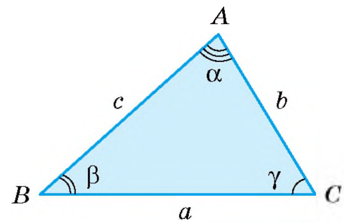
Dacă a, b, c sunt laturile triunghiului, iar α, β, γ — unghiurile opuse lor ale triunghiului, atunci totdeauna

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ — **teorema cosinusurilor;**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ — **teorema sinusurilor.**

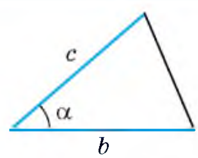
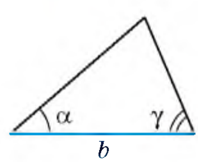
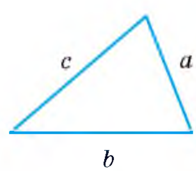
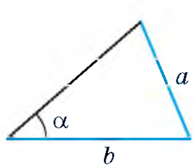
Fiecare din ultimele trei fracţii este egală cu $2R$, unde R – raza circumferinţei circumscrise triunghiului dat:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\,.$$



Suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui.

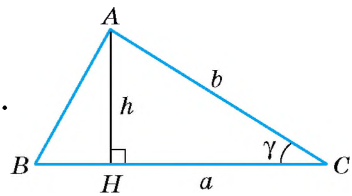
A rezolva triunghiul – aceasta înseamnă a afla laturile şi unghiurile lui necunoscute, ştiind câteva laturi şi unghiuri ale lui.

Nr.d/r	Figură	Tipul problemei	Alogoritmul rezolvării
1		Se ştiu două laturi şi unghiul făcut de ele	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; 2) $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
2		Se ştie o latură şi două unghiuri	1) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; 2) $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$; 3) $c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$
3		Se ştiu trei laturi	1) $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; 2) $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
4		Se ştie două laturi şi unghiul opus uneia din ele	1) $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; 2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; 3) $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

Razele circumferinţelor, înscrisă (r) în triunghiul ABC şi circumscrisă lui (R):

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S} \quad \text{sau} \quad R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Aria triunghiului poate fi determinată conform următoarelor formule:



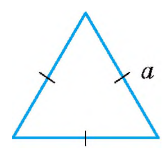
$S = \frac{1}{2}ah$, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — **Formula lui Heron.**

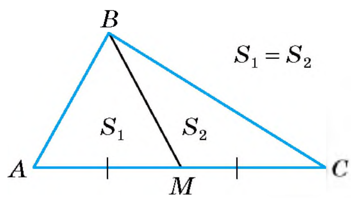
$S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$.

Aria triunghiului echilateral cu latura a se determină cu formula:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

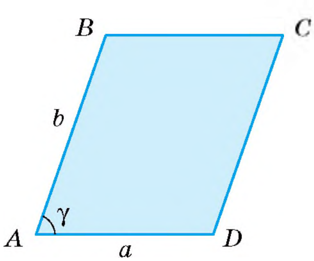


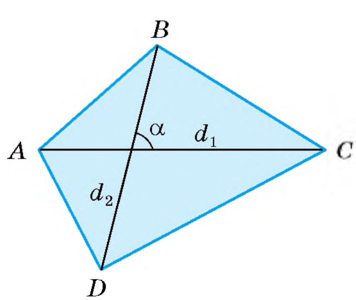
Mediana triunghiului îl împarte în două triunghiuri echivalente.



Aria paralelogramului: $S = ab\sin\gamma$, unde a, b — sunt laturile lui, iar γ — unghiul format de ele.

Aria patrulaterului convex: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, unde d_1 şi d_2 — diagonalele patrulaterului, iar α — unghiul făcut de ele.





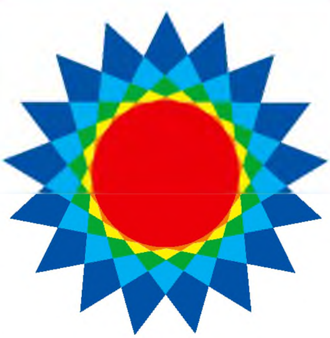
Nimic nu este făcut , dacă ceva a rămas nefinisat.
Matematicienii stau unul pe umerii altuia

KARL FRIDRIH GAUSS

(1777–1855)

Ilustru matematician, astronom, fizician şi geodezist german.

- Unul din cei mai mari şi mai influenţi matematicieni ai tuturor timpurilor. El este numit Rege al matematicii.
- Trăsăturile caracteristice ale cercetărilor lui Gauss sunt multilateralitatea extraordinară a lor şi legătura organică dintre matematica teoretică şi cea aplicată.
- În cinstea lui Uniunea internaţională a matematicienilor şi Societatea germană a matematicienilor au întemeiat premiul „Premiul Gauss” pentru realizări remarcabile în domeniul matematicii aplicate.



Poligon stelat regulat cu 17 vârfuri.

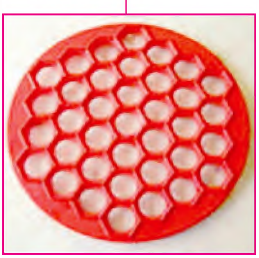
Capitolul 4 | Section 4

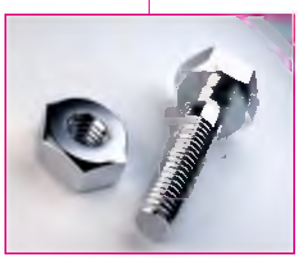
Poligoane regulate | Regular Polygons

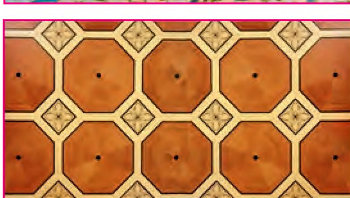
Regulate sunt numite astfel de poligoane convexe, în care toate laturile sunt egale şi toate unghiurile sunt egale. Ele joacă un rol important nu numai în geometrie, dar şi în cristalografie, chimie, mineralogie ş.a. Proprietăţile lor frecvent sunt folosite de arhitecţii, dizainerii. Se folosesc proprietăţile poligoanelor regulate pentru a determina lungimea circumferinţei şi aria cercului.

Pentru ce trebuie de studiat poligoanele regulate?

Poligoanele regulate – acestea-s noţiuni abstracte, create de savanţi. În natură poligoane absolut regulate nu există. Se întâlnesc obiecte în formă apropiată de poligoanele regulate. De exemplu, albinele fac faguri în formă apropiată de hexagoanele regulate. Florile a multor plante cresc astfel că capetele petalelor lor sunt amplasate în vârfurile unor poligoane regulate, iar capetele fulgilor de zăpadă sunt situate în vârfurile hexagoanelor regulate. Forme aproape de poligoane regulate au feţele unor cristale. De exemplu, feţele cristalelor sării de bucătărie sunt pătrate, feţele cristalelor de diamant – triunghiuri regulate. Poligoanele regulate se întâlnesc şi în multe produse (capurile buloanelor şi a piuliţelor, dispozitivelor de preparare a colţunaşilor cu carne).







În arhitectură deseori se pot vedea construcţii, care au forme de poligoane regulate sau de părţi ale lor. Mai ales foarte frecvent au de lucru cu poligoane regulate parchetarii, teracotiştii, arhitectorii. În unele palate, săli se aşterne parchet ce constă din câteva poligoane regulate diferite: triunghiuri şi hexagoane regulate, pătrate şi octagoane regulate ş.a.

Dar mai unde se folosesc poligoanele regulate? Aduceţi exemplele voastre.

§ 17 Poligoane regulate şi proprietăţile lor

Poligonul convex se numeşte regulat, dacă toate laturile lui sunt egale şi toate unghiurile sunt egale.

Triunghiul echilateral şi pătratul – exemple de poligoane regulate. În figura 183 este reprezentat un pentagon regulat şi un hexagon regulat.

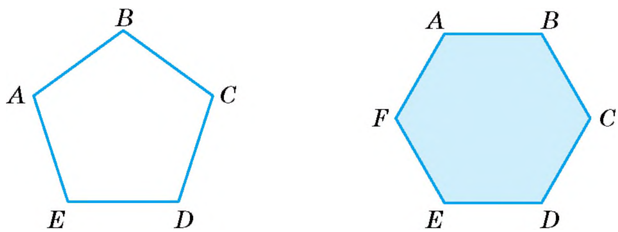


Fig. 183

Dacă poligonul regulat are n laturi, atunci suma tuturor unghiurilor interioare ale lui este egală cu $180°(n-2)$, iar unul din ei — de n ori mai mic, adică este egal cu

$$\frac{180°(n-2)}{n}.$$

Cu cât este mai mare numărul n, cu atât este mai mare unghiul poligonului regulat cu n laturi.

TEOREMA 11

Dacă poligonul este regulat, atunci lui i se poate circumscrie o circumferinţă şi în el se poate înscrie o circumferinţă.

ДDEMONSTRAŢIE.

Fie $ABCDE...K$ — poligonul regulat cu n laturi (fig.184). Bisectoarele unghiurilor lui A şi B se intersectează într-un oarecare punct O. Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, unde α — unghiul poligonului dat. Unim punctul O cu segmente cu toate vârfurile poligonului. Triunghiurile OBC şi OBA sunt egale, deoarece ele au latura comună OB, $BC = BA$ şi $\angle OBC = \angle OBA$. Cu un procedeu asemănător ne convingem, că $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE ...$

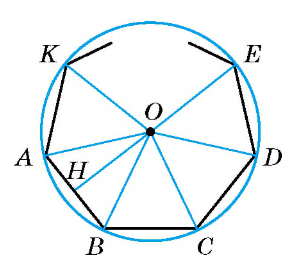


Fig.184

Deci, $OA = OB = OC = OD = \ldots = OK$, adică toate vârfurile poligonului regulat dat $ABCDE\ldots K$ sunt egal depărtate de la punctul O. De aceea circumferința de raza OA este circumscrisă poligonului dat. Prima parte a teoremei este demonstrată.

Deoarece triunghiurile OAB, OBC, OCD, ODE, $\ldots$, OKA sunt egale, reiesă că sunt egale și înălțimile lor corespunzătoare, adică pendicularele, coborâte din punctul O pe toate laturile poligonului regulat dat. Deci, circumferința cu centrul O, care are contact cu latura AB, este tangentă la toate laturile poligonului $ABCDE\ldots K$. Această circumferință este înscrisă în poligonul dat. A doua parte a teoremei de asemenea este demonstrată. $\square$

După cum rezultă din raționamentele anterioare, centrul circumferinței, înscrise în poligonul regulat și a circumferinței circumscrise lui, este unul și același punct O. El este numit **centrul poligonului regulat**.

Unghiul sub care se vede latura poligonului regulat din centrul lui se numește unghi la centru al acestui poligon. Perpendiculara, coborâtă din centrul poligonului regulat pe latura lui – apotema poligonului regulat. În figura 184 $\angle AOB$ — unghiul la centru al poligonului regulat $AB\ldots K$, iar OH — apotema lui. Măsura unghiului la centru al poligonului regulat cu n laturi este egală cu $\dfrac{360°}{n}$. De ce?

În vârfurile poligoanelor regulate de regulă sunt situate centrele bilelor în rulmenți, centrele găurilor flanșelor, capetele dinților ferestraielor circulare (fig.115) ș.a.

Fig.185

Plăcuțele și plăcile pentru acoperirea podelei în case, piețelor și străzilor, aerodromurilor cel mai des sunt confecționate în formă de poligoane regulate.

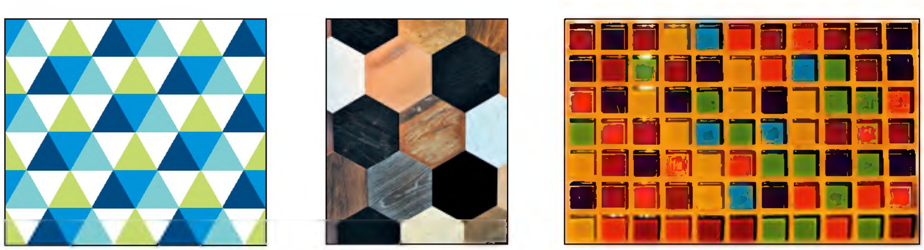


Fig.186

PENTRU CEI CURIOŞI

Oare se poate din definiţia poligonului regulat de omis îmbinarea de cuvinte „laturi egale” sau „unghiuri egale”?. Nu, deoarece poligonul regulat, toate unghiurile căruia sunt egale sau toate laturile sunt egale, poate fi neregulat (fig.187).

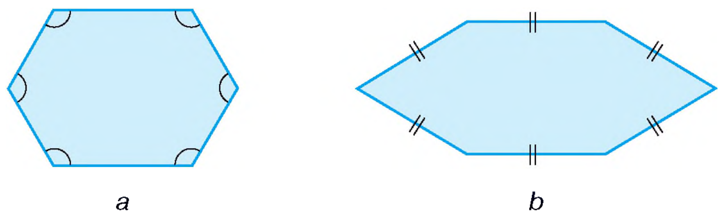


Fig.187

Exemple de poligoane neconvexe, ale cărora toate laturile sunt egale, sunt aduse în figura 188. Ele nu sunt considerate poligoane regulate.

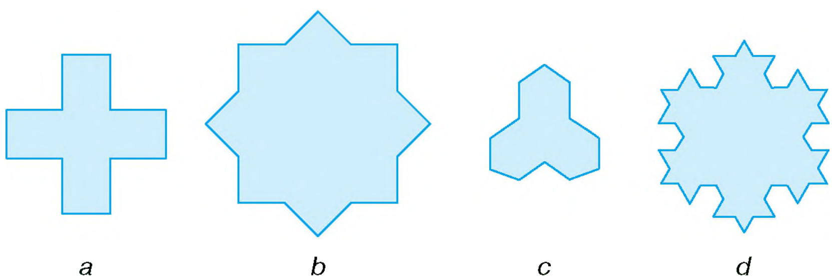


Fig.188

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulaţi definiţia poligonului regulat.
2. Cum altfel este numit triunghiul regulat? Dar patrulaterul regulat?
3. Cu ce este egală suma unghiurilor ale poligonului regulat?
4. Cu ce este egală măsura unghiului interior al poligonului regulat cu n laturi?
5. Cu ce este egală măsura unghiului la centru al poligonului regulat cu n laturi?
6. Oare se poate circumscrie o circumferinţă oricărui poligon regulat?
7. Oare se poate înscrie o circumferinţă în orice poligon regulat?
8. Ce se numeşte centrul poligonului regulat?
9. Ce se numeşte apotemă a poligonului regulat?
10. Aduceţi exemple de obiecte din mediul înconjurător care au formă de poligoane regulate.

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Câte diagonale are poligonul regulat cu n laturi?

- Din fiecare vârf al poligonului cu n laturi ies n-3 diagonalele (fig.189). De tot sunt n vârfuri. Avem produsul n (n-3). Însă fiecare diagonală iese din două vârfuri diferite. De aceea n (n-3) este cantitatea dublă de diagonale. Aşadar, fiecare poligon regulat (ca şi fiecare poligon convex) are $0{,}5n(n-3)$ diagonale. Triunghiul diagonale nu are.

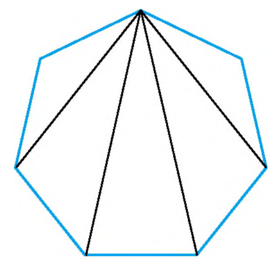


Fig.189

2 Demonstraţi că latura hexagonului regulat, înscris într-o circumferinţă este egală cu raza acestei circumferinţe.

- În figura 190 este reprezentat hexagonul regulat $ABCDEF$, înscris în circumferinţa cu centru în punctul O. Să demonstrăm că $AB = OA$. Hai să examinăm triunghiul AOB. Deoarece $AO = BO$, ca raze ale aceleiaşi circumferinţe, reiesă că triunghiul AOB — isoscel. $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ca unghi la centru al hexagonului regulat. Atuncii $\angle OAB = \angle OBA = (180^\circ - 60^\circ):2 = 60^\circ = \angle AOB$. Deci, $\triangle AOB$ — echilateral şi de aceea $AB = OA$.

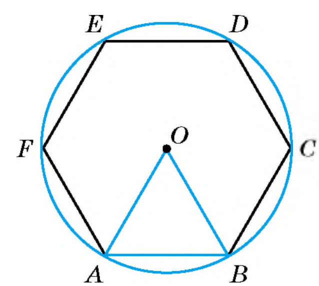


Fig.190

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

580. Cum altfel sunt numiţi triunghiul regulat şi patrulaterul regulat?
581. Latura poligonului cu n laturi este egală cu a. Aflaţi perimetrul lui.
582. Perimetrul poligonului regulat cu n laturi este egal cu $2p$. Aflaţi lungimea laturii lui.
583. Aflaţi latura pentagonului regulat, dacă ea este mai mică decât perimetrul cu 20 cm.
584. Cu ce este egală suma unghiurilor a următoarelor poligoane regulate: a) triunghiului; b) patrulaterului; c) pentagonului; d) hexagonului.
585. Câte diagonale are poligonul regulat: a) triunghiul; b) patrulaterul; c) pentagonul, d) hexagonul.
586. Cu ce este egală suma unghiurilor exterioare ale pătratului, luaţi câte unul de la fiecare vârf al lui? Dar la triunghiul regulat?

A

587. Câte diagonale are poligonul regulat cu n laturi, dacă:
a) $n = 5$; b) $n = 7$; c) $n = 12$; d) $n = 100$?

588. Aflaţi suma unghiurilor a poligonului regulat cu n laturi, dacă:
a) $n = 5$; b) $n = 8$; c) $n = 10$; d) $n = 18$.

589. Aflaţi unghiul poligonului regulat cu n laturi, dacă:
a) $n = 5$; b) $n = 10$; c) $n = 15$; d) $n = 20$.

590. Aflaţi unghiurile de la centru interior şi ale poligonului regulat cu n laturi, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 6$; c) $n = 12$; d) $n = 100$.

591. **Suma unghiurilor exterioare ale poligonului regulat cu n laturi luate câte unul la fiecare vârf al lui, este egală cu 360°**. Demonstraţi.

592. Câte laturi are poligonul regulat, dacă fiecare unghi al lui este egal cu 108°, 120°, 135°, 140°, 144°, 150°?

593. Care laturi are poligonul regulat cu n laturi, fiecare unghi exterior al căruia este egal cu: a) 24°; b) 30°; c) 36°; d) 18°?

594. Latura pătratului este egală cu 10 cm. Aflaţi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă.

595. Duceţi în circumferinţă două diametre reciproc perpendiculare şi uniţi extremităţile lor. Demonstraţi că patrulaterul obţinut este regulat.

596. Stabiliţi corespondenţa dintre măsurile unghiurilor la centru ale poligoanelor regulate (*1-4*) şi măsurile unghiurilor interioare ale lor (*A-E*).

1	36°	**A**	150°
2	45°	**B**	135°
3	30°	**C**	145°
4	24°	**D**	144°
		E	156°

597. Latura unui poligon regulat este egală cu *a*, iar raza circumferinţei circumscrise lui este *R*. Aflaţi raza circumferinţei înscrise.

598. Laura poligonului regulat este egală cu *a*, iar raza circumferinţei înscrise în el este *r*. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise lui.

599. *R* şi *r* – razele circumferinţelor circumscrise poligonului regulat şi înscrise în el. Aflaţi latura poligonului.

600. În figura 191 este reprezentată cheia cu care se manipulează la şuruburi, piuliţe şi 4 piuliţe. Care din piuliţe se pot desface cu această cheie?

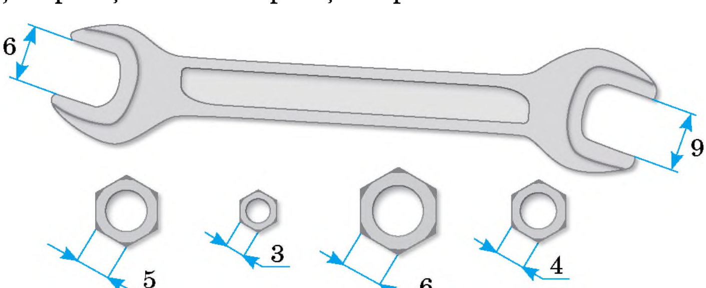


Fig.191

B

601. Demonstraţi că în hexagonul regulat laturile opuse sunt paralele.
602. Aflaţi diagonalele hexagonului regulat, a cărui latură este egală cu a.
603. Distanţa dintre laturile paralele ale hexagonului regulat este egală cu l. Aflaţi latura hexagonului.
604. În octagonul regulat cu latura de 6 sunt unite mijlocurile a patru laturi, luate peste una. Demonstraţi că patrulaterul obţinut este pătrat şi aflaţi latura lui.
605. Într-un dodecagon regulat cu latura de 8 cm sunt unite mijlocurile laturilor, luate peste una. Demonstraţi că hexagonul obţinut este regulat şi aflaţi perimetrul lui.
606. Demonstraţi că mijlocurile laturilor unui poligon regulat cu n laturi sunt vârfurile altui poligon regulat cu n laturi.
607. Tăind unghiurile unui triunghi regulat cu latura m, am obţinut un hexagon regulat (fig.192). Aflaţi latura lui.
608. Tăind unghiurile pătratului au obţinut un octagon regulat. Aflaţi latura lui, dacă latura pătratului este egală cu a.

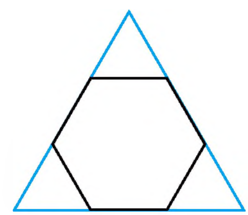


Fig.192

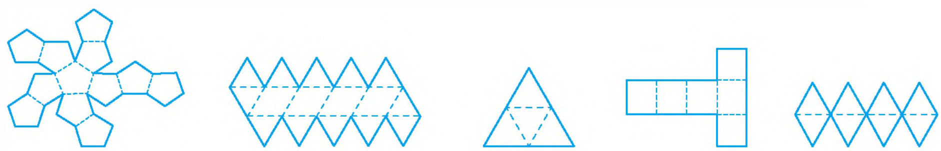
609. Demonstraţi că în pentagonul regulat:
a) toate diagonalele sunt egale;
b) fiecare diagonală este paralelă cu una din laturile lui.
c) două diagonale, care ies din acelaşi vârf, formează 3 triunghiuri isoscel.
610. În ce raport diagonala pentagonului regulat împarte unghiul, din vârful căruia ea iese?
611. Ce unghi formează două diagonale ale pentagonului regulat , duse din vârfuri diferite şi care se intersectează?
612. De ce plăcile pentru acoperirea pieţelor, străzilor, aerodromurilor nu sunt confecţionate în formă de pentagoane regulate?
613. *Problema Katalana.* Divizaţi hexagonul regulat dat în 7 hexagoane regulate şi 12 triunghiuri echilaterale.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

614. 1) Tăieţi din hârtie trainică trei romburi egale astfel, ca din ele să se poată monta un hexagon regulat. Aflaţi: a) unghiurile fiecărui romb şi a hexagonului obţinut; b) raportul perimetrelor a hexagonului şi a rombului.
2) Decupaţi din hârtie durabilă zece triunghiuri regulate egale şi alcătuiţi din ele un triunghi regulat şi un hexagon regulat. Aflaţi rapoartele: a) diametrelor ale figurilor obţinute; b) ale ariilor figurilor obţinute.

Probleme pentru repetare

615. Din poligoanele regulate (triunghiuri, patrulatere şi pentagoane) sunt alcătuite desfăşuratele poliedrelor regulate. După desfăşuratele aduse mai jos încercaţi să confecţionaţi modelele poliedrelor regulate (de avut în vedere fâşiile pentru încleiat). De stabilit corespondenţa dintre desfăşuratele poliedrelor regulate (1-5) şi poliedrele corespunzătoare (A-E).



1 2 3 4 5

A B C D E

616. Aflaţi aria triunghiului isoscel, a căruia latură laterală este cu 3 cm mai mică decât baza, iar înălţimea mai mică este egală cu 12 cm.
617. Aflaţi înălţimile paralelogramului, dacă laturile lui sunt 5 cm şi 12 cm, iar unghiul format de ele are 60°.
618. Aflaţi raza circumferinţei, dacă coarda cu lungimea de 24 cm este situată de la centru la distanţa de 5 cm.
619. Aflaţi unghiurile trapezului isoscel, al cărui perimetru este egal cu 48 cm, iar raza circumferinţei înscrise este de 3 cm.

Geometria în jurul nostru

Poligoanele în desghinul landşaftului

§ 18 Poligoane regulate şi circumferinţe

Să stabilim corelaţiile dintre latura poligonului regulat cu n laturi a_n şi razele R_n şi r_n ale circumferinţelor circumscrisă şi înscrisă lui.

Fie $ABC...K$ — poligon regulat cu n laturi cu centrul O şi latura $AB = a_n$ (Fig. 193).

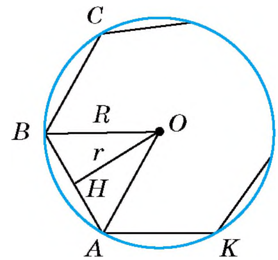


Fig.193

Atunci $OA = OB = R$, $OH = r$. Unghiul la centru AOB, care se sprijină pe latura AB a poligonului regulat cu n laturi, este egal cu $\frac{360°}{n}$. Atunci $\angle AOH = \frac{180°}{n}$, $AH = \frac{1}{2}a_n$, fiindcă înălţimea OH a triunghiului isoscel AOB este concomitent şi bisectoare, şi mediană.

Din triunghiul dreptunghic $\triangle AOH$ avem:

1) $\frac{AH}{AO} = \sin\frac{180°}{n}$ sau $\frac{a_n}{2R_n} = \sin\frac{180°}{n}$, de unde $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$

şi $R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$.

2) $\frac{AH}{HO} = \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$ sau $\frac{a_n}{2r_n} = \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, de unde $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$ şi $r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$.

Aceste formule permit exprimarea laturilor poligonului regulat cu n laturi prin razele circumferinţelor circumscrisă sau înscrisă şi, invers, se poate afla razele circumferinţelor circumscrisă sau înscrisă, cunoscând latura poligonului regulat cu n laturi.

De exemplu, înlocuind în formulele $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$ şi $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$ pe n cu numerele 3,4 şi 6 obţinem exprimările lungimilor laturilor triunghiurilor, patrulaterelor şi hexagoanelor regulate prin raza R a circumferinţei circumscrise şi raza r a circumferinţei înscrise.

Cantitatea de laturi ale poligonului regulat cu n laturi	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Latura poligonului regulat cu n laturi	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_6 = R$
	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$a_4 = 2r$	$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

Dacă în formulele $R_n = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ şi $r_n = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ înlocuim n cu numerele **3**, **4** şi **6**, atunci obţinem exprimările razei R a circumferinţei circumscrise şi a razei r a circumferinţei înscrise prin latura triunghiului, patrulaterului şi hexagonului regulaţi cu latura a_n.

Cantitatea de laturi ale poligonului regulat cu n laturi	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Raza circumferinţei circumscrise	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Raza circumferinţei înscrise	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Atrageţi atenţia!

Latura hexagonului regulat este egală cu raza circumferinţei circumscrise. Deci pentru a diviza circumferinţa în 6 părţi egale este suficient de depus succesiv 6 cooarde, care sunt egale cu raza circumferinţei (fig.194). Dacă punctele de divizare de le unit peste unul, atunci obţinem un triunghi regulat (fig.195). Dacă însă fiecare din cele 6 arce obţinute de le împărţit în jumătate şi punctele de devizare de le unit succesiv, atunci se obţine un dodecagon regulat (fig.196) ş.a.m.d. Aşadar, dacă circumferinţa este împărţită în n părţi egale, atunci această circumferinţă nu este greu de o împărţit în 2 n părţi egale.

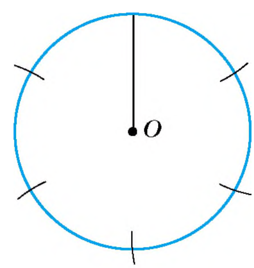


Fig.194

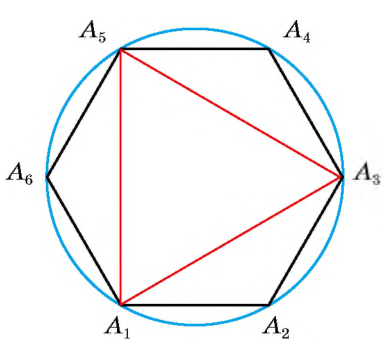


Fig.195

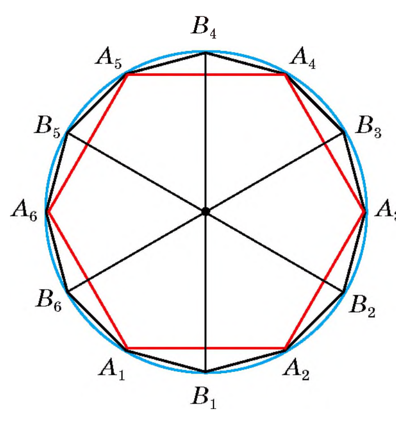


Fig.196

Pentru a construi un patrulater regulat (pătrat) în circumferinţă sunt duse două diametre perpendiculare, de exemplu AC şi BD (fig.197) şi se unesc consecutiv capetele lor. Patrulaterul astfel obţinut $ABCD$ – pătrat.
Folosind figura 197, încercaţi de sine stătător să construiţi un octagon regulat.
Voi deja ştiţi cum de construit triunghi, patrulater, hexagon regulaţi. Dar cum de construit un pentagon sau un poligon cu n laturi oarecare regulat?

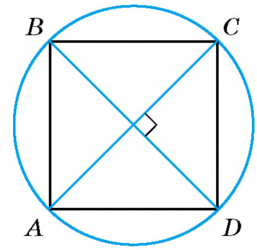


Fig.197

Dacă împărţim circumferinţa în n părţi egale şi punctele de divizare obţinute de le unit succesiv cu segmente, atunci se va obţine un poligon regulat cu n laturi. Aşadar, problema construirii unui poligon regulat cu n laturi se reduce la împărţirea circumferinţei în n părţi egale. Unghiul la centru $\angle AOB$, care se sprijină pe latura poligonului regulat cu n laturi, înscris în circumferinţă, este egal cu $\frac{360°}{n}$. De aceea dacă trebuie de împărţit circumferinţa în 9 părţi egale, noi la început calculăm unghiul la centru corespunzător $(360° : 9 = 40°)$ şi cu ajutorul raportului construim aşa un unghi la centru — $\angle AOB = 40°$ (fig.198).

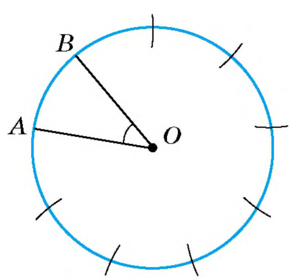


Fig.198

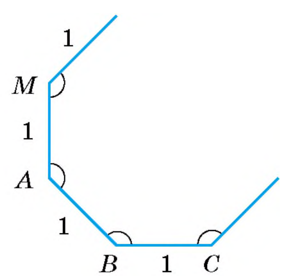


Fig.199

Iar mai departe cu deschizătura compasului ce este egală cu AB, facem ocolul întregii circumferinţe. Dacă punctele de divizare de le unit succesiv cu segmente, atunci se obţine nonegon regulat. El este regulat, fiindcă laturile lui sunt egale (ca coarde, care subîntind arce egale) şi unghiurile sunt egale (ca unghiuri înscrise, care se sprijină pe arce egale).

Se pot construi poligoane regulate şi fără a folosi circumferinţa. Să construim, de exemplu, un octagon regulat cu latura de 1 cm. Deoarece unghiul octagonului regulat este egal cu 135°, cu ajutorul raportului, construim la început $\angle A = 135°$ (fig.199) şi pe laturile lui depunem segmentele $AM = AB = 1$ cm. Iar mai departe continuăm să construim consecutiv unghiuri de 135° şi depunem pe ele segmente cu lungimea de 1 cm. Octagonul obţinut va fi regulat, deoarece unghiurile şi laturile lui sunt egale conform construcţiei. Dar octagonul construit cu un aşa procedeu practic se poate foarte deosebi de octagonul regulat, deoarece greşelile inivitabile ale desenării se adună şi în final pot fi foarte mari. În construcţiile clasice se permite utilizarea numai a compasului şi a riglei, iar nu şi a raportorului.

Cum se poate afla aria unui poligon regulat cu n laturi? După cum se ştie aria oricărui poligon cu perimetrul $2p$, circumscris circumferinţei de raza r se poate afla cu formula $S = pr$. Această formulă este adevărată şi pentru poligonul regulat cu n laturi.

Dacă latura lui este a, atunci $p = \frac{1}{2}na$, iar $S = \frac{1}{2}nar$.

PENTRU CEI CURIOŞI

Mai sus a fost vorba despre construirea unui poligon regulat cu n laturi. Dar cum de construit poligonul regulat cu n laturi a cărui latură are lungimea dată a (sau raza r sau R a circumferinţei, înscrise în acest poligon regulat, sau a circumferinţei circumscrise lui)? Astfel de construcţii se fac, folosind metoda asemănării. De exemplu, pentru a construi un pentagon regulat cu latura $a_5 = 2$ cm, mai întâi se construieşte un pentagon regulat arbitrar $ABCDE$ (fig. 200) şi sunt duse semidreptele OA, OB, OC, OD, OE. Pe semidreapta AB se depune segmentul $AK = a_5 = 2$ cm şi se duce $KM \parallel OA$. Dacă KM intersectează semidreapta OB în punctul B_1, atunci mai departe se duce $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ şi ş.a.m.d. Pentagonul $A_1B_1C_1D_1E_1$ este acela care trebuia construit.

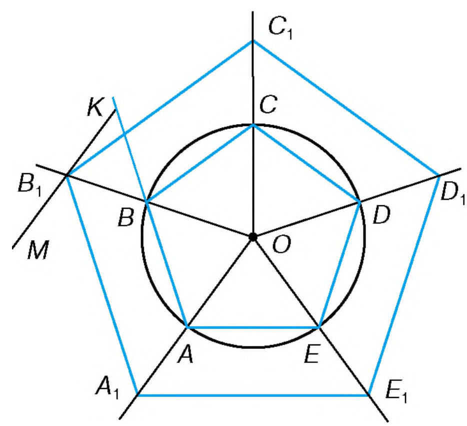


Fig.200

ÎNSĂRCINĂRI ŞI ÎNTREBĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum se exprimă prin raza circumferinţei circumscrise latura poligoanelor regulate: a) poligonului cu n laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
2. Cum se exprimă prin raza circumferinţei înscrise latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu n laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
3. Cum se exprimă raza circumferinţei circumscrise prin latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu n laturi; b) triunghiului, c) patrulaterului; d) hexagonului?
4. Cum se exprimă raza circumferinţei înscrise prin latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu n laturi; b) triunghiului, c) patrulaterului; d) hexagonului?
5. Cum de aflat aria poligonului cu n laturi regulat?
6. Cum de construit poligonul cu n laturi regulat?
7. Cum de construit poligonul cu n laturi regulat, ştiind latura lui?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Latura hexagonului regulat circumscris circumferinţei este egală cu 4 cm. Aflaţi latura triunghiului regulat, înscris în această circumferinţă.

- Fie raza circumferinţei r (fig.201). Atunci pentru hexagon aceasta va fi raza circumferinţei înscrise, iar pentru triunghi – raza circumferinţei circumscrise. Deci,

$$r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm. Deoarece } r_6 = R_3,$$

reiesă că $a_3 = R_3\sqrt{3}$, $a_3 = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$ cm.

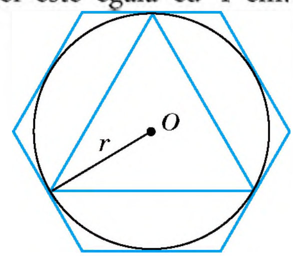


Fig.201

2 Demonstraţi că aria poligonului regulat cu n laturi, înscris în circumferinţa de raza R, se poate determina cu formula

$$S = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

- În figura 202 este reprezentat poligonul regulat cu n laturi $ABC...K$, înscris în circumferinţa de raza R. Examinăm $\triangle AOB$:

$$AO = BO = R,\ \angle AOB = \frac{360^\circ}{n},$$

şi de aceea $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}R^2 \sin\dfrac{360^\circ}{n}.$

Deoarece $ABC...K$ — poligon regulat cu n laturi, reiesă că aria lui S este de n ori mai mare decât aria triunghiului AOB.
Deci,

$$S = n\cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

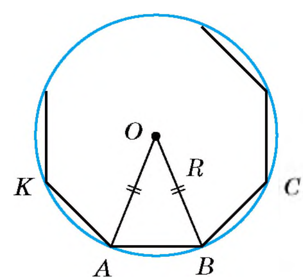


Fig.202

Atrageţi atenţia la formulele cu ajutorul cărora se poate afla aria triunghiului, patrulaterului şi hexagonului regulaţi cu latura a.

Cantitatea de laturi a poligonului cu n laturi regulat.	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Aria poligonului regulat cu n laturi	$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = a^2$	$S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Probleme şi exerciţii

Efectuaţi oral

620. Latura patrulaterului regulat este egală cu a. Cu ce este egal: a) perimetrul lui; b) lungimea diagonalei; c) unghiul format de diagonale; d) raza circumferinţei circumscrise; e) raza circumferinţei înscrise; f) aria patrulaterului?

621. Diagonala patrulaterului regulat este egală cu d. Cu ce este egală: a) latura patrulaterului; b) perimetrul lui; c) raza circumferinţei circumscrise; d) raza circumferinţei înscrise; e) aria patrulaterului?

622. Latura hexagonului regulat este egală cu a (fig. 203). Aflaţi: a) perimetrul lui; b) raza circumferinţei circumscrise; c) raza circumferinţei înscrise; d) distanţa dintre cele mai îndepărtate puncte ale hexagonului; e) aria hexagonului.

623. Latura pătratului, circumscris circumferinţei, este egală cu a. Aflaţi latura hexagonului regulat, înscris în această circumferinţă.

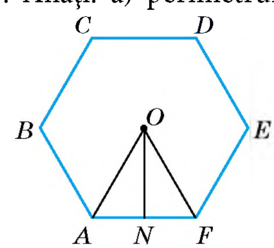


Fig.203

A

624. Construiţi poligonul regulat cu n laturi, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 6$; c) $n = 8$; d) $n = 12$.

625. Construiţi poligonul regulat cu n laturi, cu latura de 2 cm, dacă:
a) $n = 5$; b) $n = 6$; c) $n = 9$; d) $n = 12$.

626. Construiţi triunghiul regulat după raza dată R a circumferinţei circumscrise, dacă: $h = 3$ cm.

627. Construiţi hexagonul regulat după a) raza dată R a circumferinţei circumscrise; b) latura dată; c) perimetrul dat.

628. Raza circumferinţei este egală cu 8 cm. Aflaţi latura poligonului regulat cu n laturi, înscris în această circumferinţă, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 12$.

629. Raza circumferinţei este egală cu $8\sqrt{3}$ cm. Aflaţi latura poligonului regulat cu n laturi, circumscris ei, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 18$.

630. Latura poligonului regulat cu n laturi este egală cu $4\sqrt{3}$. Aflaţi raza circumferinţei, circumscrise lui, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 12$.

631. Latura poligonului cu n laturi regulat este egală cu $3\sqrt{6}$ cm. Aflaţi raza circumferinţei, înscrise în el, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 18$.

632. Latura poligonului regulat înscris în circumferinţă este egală cu 12 cm. Aflaţi perimetrul şi aria acestui poligon, dacă:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 5$; d) $n = 6$.

633. Aflaţi aria poligonului cu n laturi regulat, dacă raza circumferinţei, circumscrise lui este egală cu 6 cm. Cercetaţi cazurile:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 5$; d) $n = 6$; e) $n = 12$.

634. În circumferinţă este înscris un hexagon regulat, al cărui perimetru este 24 cm. Aflaţi perimetrul şi aria următoarelor poligoane regulate, înscrise în această circumferinţă: a) triunghiului, b) patrulaterului.

635. Aflaţi aria poligonului cu n laturi regulat, dacă raza circumferinţei înscrise în el este egală cu 4 cm şi:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 12$.

636. De câte ori aria pătratului, circumscris circumferinţei este mai mare decât aria pătratului, înscris în această circumferinţă?

637. Perimetrele pătratului, triunghiului echilateral şi a hexagonului regulat sunt egale cu 36 cm. Care din aceste figuri are cea mai mică arie, şi care – cea mai mare?

B

638. Se dă triunghiul regulat ABC. Construiţi hexagonul regulat $AKBPCT$. Cum se raportă perimetrele şi ariile lor?

639. Se dă un pătrat. Construiţi un octagon regulat, patru vârfuri ale căruia ar coincide cu vârfurile pătratului dat. Cum se raportă perimetrele şi ariile lor?

640. Folosindu-se de figurile 204-206 aflaţi laturile necunoscute x şi y ale poligoanelor regulate.

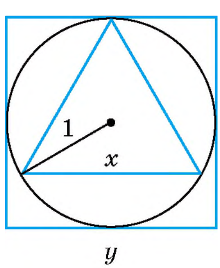


Fig.204

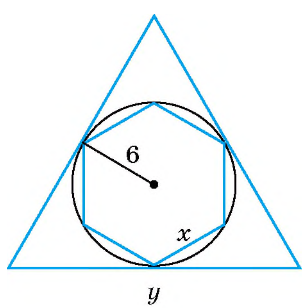


Fig.205

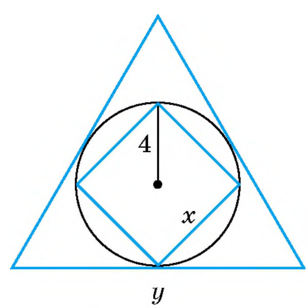


Fig.206

641. Aflaţi lungimile diagonalelor octagonului regulat: a) ştiind raza R a circumferinţei circumscrise; b) cunoscând latura egală cu a.

642. Aflaţi lungimile diagonalelor dodecagonului regulat, dacă se ştie: a) raza R a circumferinţei circumscrise; b) latura a.

643. În circumferinţa de raza 12 cm este înscris un poligon cu n laturi regulat şi sunt unite succesiv mijlocurile laturilor lui. Determinaţi latura poligonului ce s-a format şi raza circumferinţei circumscrise lui, dacă: a) $n = 4$; b) $n = 6$.

644. În circumferinţa de raza R este înscris un triunghi regulat, iar pe latura lui este construit un pătrat. Aflaţi raza circumferinţei, circumscrise pătratului.

645. În circumferinţa de raza R este înscris un triunghi regulat, în triunghi este înscrisă o circumferinţă, în care este înscris un pătrat. Aflaţi latura pătratului.

646. Într-o circumferinţă este înscris un hexagon regulat cu latura a, iar circumferinţei îi este circumscris un triunghi regulat. El de asemenea este înscris într-o oarecare circumferinţă. Aflaţi raportul razelor acestor circumferinţe.

647. ***Problemă deschisă.*** În circumferinţa de raza R este înscris un triunghi regulat. În triunghi este înscrisă o **...** , iar în ea este înscris un **...** . Aflaţi latura **...** .

648. Coarda comună a două circumferinţe, care se intersectează este egală cu l şi serveşte pentru una din circumferinţe ca latură a triunghiului regulat înscris, iar pentru a doua – ca latură a pătratului înscris în ea (fig. 207). Aflaţi distanţa dintre centrele circumferinţelor. Examinaţi alt caz.

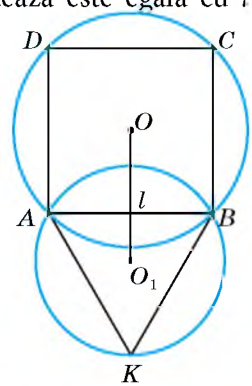


Fig.207

649. Latura hexagonului regulat este egală cu **10** cm. Aflaţi aria triunghiului regulat echivalent cu el.

650. Aria hexagonului regulat, circumscris unei circumferinţe este egală cu $72\sqrt{3}$ cm². Aflaţi aria triunghiului regulat circumscris acestei circumferinţe.

651. Aria octagonului regulat înscris într-o circumferinţă, este egală cu $162\sqrt{2}$ m². Stabiliţi corespondenţa dintre poligoanele regulate (1-4), înscrise în această circumferinţă şi valorile ariilor acestor poligoane (A-E).

1 Triunghi
2 Patrulater
3 Hexagon
4 Dodecagon

A $\dfrac{243\sqrt{3}}{2}$
B 243
C $\dfrac{243\sqrt{2}}{4}$
D 162
E $\dfrac{243\sqrt{3}}{4}$

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

652. Un mare interes faţă de construcţiile geometrice au manifestat pictorii renumiţi în toată lumea: Leonardo da Vinci, Alibreht Diurer, Salvador Dali, Mauriţi Eser. Cu ajutorul construcţiilor geometrice corecte ei au izbutit să reprezinte perfect spaţiul.

Examinaţi schiţa lui Leonardo da Vinci la a lui „Cina cea de taină” (fig. 208), în care, printre altele, este reprezentată construcţia octagonului regulat, înscris în circumferinţă, după latura lui.

a) Demonstraţi că aşa o construcţie asigură determinarea corectă a centrului circumferinţei, circumscrise ocatgonului regulat cu latura dată.

b) Construiţi cu aşa un procedeu un octagon regulat, a cărui latură este egală cu 2 cm.

Fig.208

Probleme pentru repetare

653. Câte diagonale are poligonul cu 75 de laturi regulat?

654. Aflaţi unghiurile poligonului cu 30 de laturi regulat.

655. În ce raport împart unghiul diagonalele hexagonului regulat, care ies din vârful acestui unghi?

656. Diagonalele rombului sunt proporţionale cu numerele 3 şi 4, iar aria este egală cu 12 cm^2. Aflaţi perimetrul rombului.

§ 19 Lungimea circumferiţei şi a arcului de circumferinţă

În clasele primare lungimea circumferinţei se determină cu ajutorul firului de aţă (amintiţi-vă cum aceasta se face). Dar aţa nu este noţiune geometrică, şi pe lângă aceasta măsurarea lungimii circumferinţei cu aţa ne dă numai rezultate aproximative. De aceea vom examina această întrebare din punctul de vedere al geometriei.

Să ne imaginăm că în circumferinţă este înscris un decagon regulat, apoi un icosagon regulat, un poligon regulat cu 40 de laturi ş.a.m.d. Perimetrele lor P_{10}, P_{20}, P_{40}, ... tot mai puţin se deosebesc de lungimea a circumferinţei date. Dacă cantitatea de laturi a poligonului (n) de o mărit infinit de mult, atunci P_n – se apropie de C. Se poate spune astfel: **lungimea circumferinţei** –acesta-i numărul de care se apropie valoarea numerică a perimetrului poligonului cu n laturi regulat, înscris în această circumferinţă, la creşterea nemărginită a cantităţii laturilor lui.

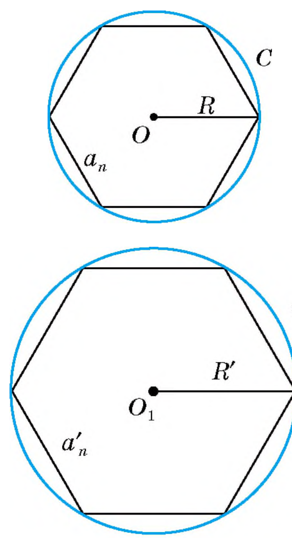


Fig.209

Să deducem formula care exprimă lungimea circumferinţei prin raza ei. Fie că avem două circumferinţe arbitrare (fig.209). Notăm razele lor cu literele R şi R', ar lungimile lor – cu literele C şi C'. În fiecare din aceste circumferinţe înscriem un poligon cu n laturi regulat cu acelaşi număr de laturi. Dacă a_n şi a'_n — sunt laturile acestor poligoane, iar P_n şi P'_n — perimetrele lor, atunci

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ şi } P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

De aici

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

Această proporţie este adevărată pentru fiecare valoare a lui n. De aceea, dacă mărim nemărginit valoarea lui n, atunci perimetrele P_n şi P'_n vor tinde către lungimile circumferinţelor C şi C', iar raportul perimetrelor – către raportul $\frac{C}{C'}$. Deci,

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \text{ sau } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Deoarece $2R$ — diametrul circumferinţei de raza R reiesă că raportul lungimii circumferinţei către diametrul ei este unul şi acelaşi pentru fiecare circumferinţă.

Acest raport constant este primit de-l notat cu litera grecească π (se citeşte „pi”). Numărul π este iraţional, valoarea lui aproximativă cu precizia de sutimi este π =3,14. La sfârşitul secolului trecut cu ajutorul unei asigurări speciale de programare la computator au fost găsite un milion de cifre ale acestui număr.

Aşadar, dacă C este lungimea circumferinţei de raza R, atunci $\frac{C}{2R} = \pi$, de unde $C = 2\pi R$.

Aceasta este formula lungimii circumferinţei.

De exemplu, dacă raza circumferinţei R=150 cm, atunci lungimea ei

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 = 942 \text{ (cm)}.$$

Să deducem formula pentru calcularea lungimii unui arc de circumferinţă (a unei părţi a ei).

Lungimea arcului este proporţională cu măsura unghiului la centru corespunzător. Arcul care corespunde unghiului la centru de 1°, are lungimea $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Atunci unghiului la centru de n° îi corespunde arcul cu lungimea de $\frac{\pi R n}{180}$ (fig.210).

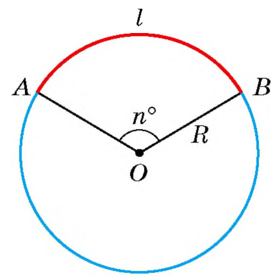


Fig.210

Aşadar, lungimea l a arcului circumferinţei de raza R, măsura în grade a căruia constituie $n°$, se calculează cu formula:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Lungimea circumferinţei şi a părţilor ei (cu un anumit grad de aproximaţie) ştiau să o determine încă cu 2000 de ani în urmă în Egiptul şi Babilonul Antic. Mai târziu în Grecia Antică Arhimede, luând diametrul circumferinţei drept unitate, înscria în circumferinţă şi circumscria circumferinţei poligoane regulate. Aflând perimetrul poligonului cu 96 de laturi regulat înscris şi circumscris, el a stabilit că lungimea circumferinţei cu diametrul 1 se află între limitele:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Deoarece $3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$, de aceea ca valoarea aproximativă a numărului π pentru rezolvarea a multe probleme practice se lua numărul 3,14.

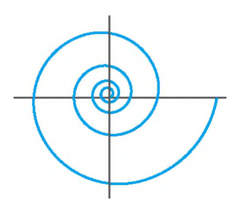


Fig.211

Până acum noi am considerat lungimile circumferinţelor şi a părţilor lor. Afară de ele există o infinitate de alte linii curbe: parabole, elipse, spirale (fig.211) ş.a. Cum de determinat lungimile a astfel de curbe sau a părţilor lor? Din istoria matematicii se ştie că aceasta a fost o problemă foarte complicată, care avea denumirea de „curbă rectificabilă”. A determina lungimea arcului curbei, afară de circumferinţă, s-a izbutit tocmai în secolul XVII. La ora actuală lungimile curbelor sunt determinate cu ajutorul metodelor analizei matematice.

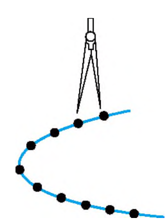


Fig.212

În practică lungimile a astfel de linii sunt determinate aproximativ. Lungimea curbei, care nu este parte a circumferinţei, se poate determina aproximativ, păşind pe ea cu compasul de o anumită deschizătură (fig.212).

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum se notează raportul lungimii circumferinţei către diametrul ei?
2. Cu ce este egală valoarea aproximativă a numărului π cu precizie de sutimi?
3. Cu care formulă se determină lungimea circumferinţei?
4. Cu care formulă se află lungimea arcului de circumferinţă?

EFECTUĂM ORAL

1 Aflaţi diagonala pătratului, circumscris circumferinţei, a cărei lungime este l.

● Notăm raza circumferinţei examinate cu litera r. Atunci $l = 2\pi r$, de unde $r = \frac{l}{2\pi}$. Latura pătratului circumscris este egală cu diametrul circumferinţei (fig.213). $AB = KP = 2 \cdot r = \frac{l}{\pi}$. Lungimea căutată a diagonalei $AC = AB\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2}}{\pi}$.

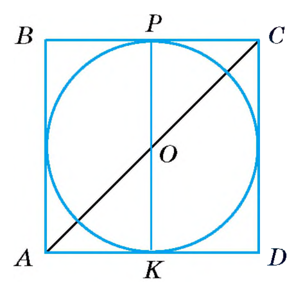


Fig.213

2 Aflaţi raza circumferinţei, lungimea căreia este egală cu o treime din lungimea circumferinţei de raza 30 cm.

● Lungimea circumferinţei mai mici este egală cu $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 30$ sau 20π. Dacă raza căutată este r, atunci $2\pi r = 20\pi$, de unde $r = 10$ (cm).

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

657. Aflaţi valoarea aproximativă a expresiilor 10π; 2π; $\frac{\pi}{2}$.

658. Cu ce este egală lungimea circumferinţei de raza 1 cm; 1 m?

659. Diametrul circumferinţei este egal cu 2 m. Cu ce este egală lungimea circumferinţei?

660. Cu ce este egală raza circumferinţei de lungimea 2π cm; 10π dm; $2m\pi$ cm?

661. Mai mult sau mai puţin de 5 cm are lungimea circumferinţei cu raza de 1m?

662. Aflaţi lungimea circumferinţei, circumscrise triunghiului dreptunghic cu ipotenuza 10 cm.

663. Cu ce este egală lungimea arcului AB al circumferinţei cu centrul în punctul O şi raza 3 m, dacă $\angle AOB = 120°$?

A

664. Aflaţi lungimea circumferinţei de raza: a) 30 cm; b) 12 cm; c) 25 cm.
665. Aflaţi raza circumferinţei, lungimea căreia este de: a) 12π cm; b) 6,28 cm; c) 40π cm.
666. Cum se va mări lungimea circumferinţei, dacă vom mări raza ei de k ori?
667. Aflaţi lungimea circumferinţei, circumscrise pătratului cu latura de 8 cm şi lungimea circumferinţei, înscrise în acest pătrat.
668. Diagonala pătratului este egală cu *d*. Aflaţi lungimea circumferinţei înscrise.
669. Aflaţi lungimea circumferinţei circumscrise dreptunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 33 cm şi 56 cm.
670. Latura hexagonului regulat este egală cu 9 cm. Calculaţi lungimea circumferinţei circumscrise acestui hexagon şi a circumferinţei înscrise în el.
671. Latura triunghiului regulat este egală cu 12 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei: a) înscrise în triunghi; b) circumscrise triunghiului.
672. Aflaţi lungimea arcului circumferinţei a cărei rază este de 6 cm, iar unghiul la centru corespunzător este: a) 30°; b) 60°; c) 90°; d) 120°.
673. Triunghiului echilateral *ABC* cu latura de 6 cm îi este circumscrisă o circumferinţă. Aflaţi lungimile arcelor *AB*, *BC* şi *AC*.
674. Punctele *M* şi *N* împart circumferinţa cu diametrul de 20 cm în părţi, proporţionale cu numerele 2 şi 3. Aflaţi lungimile arcelor obţinute.
675. Punctele *P* şi *K* împart circumferinţa de raza 4 cm în două arce astfel, că diferenţa lungimilor lor este egală cu $1,4\pi$. Aflaţi lungimea arcului mai mare.
676. Pe latura *AC*, egală cu 6 cm a triunghiului echilateral *ABC*, ca pe diametru este construită o semicircumferinţă. Aflaţi lungimile arcelor, în care laturile *AB* şi *BC* împart această semicircumferinţă.
677. Coarda circumferinţei este egală cu raza ei. Aflaţi lungimile arcelor în care această coardă împarte circumferinţa, dacă diametrul circumferinţei este de 36 cm.
678. Se dă poligonul regulat *ABC…K* (fig.214), a cărui latură este egală cu 18 cm. BK – arcul circumferinţei cu centrul în punctul A şi raza AB. Stabiliţi corespondenţa dintre măsura unghiului A (1-4) şi lungimea arcului BK (A-E).

1	60°	**A**	14π
2	108°	**B**	$10,8\pi$
3	140°	**C**	6π
4	156°	**D**	15π
		E	$15,6\pi$

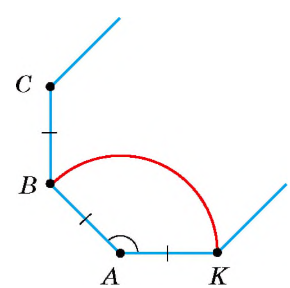


Fig.214

679. Pe o bobină cu diametrul de 0,6 m sunt 30 de spirale de sârmă. Aflaţi lungimea sârmei.
680. Aflaţi lungimea orbitei satelitului artificial al Pământului, dacă el se roteşte pe o circumferinţă la distanţa de 320 km de la suprafaţa Pământului. Raza Pământului este aproximativ egală cu 6370 km.

Б

681. Imaginaţi-vă că o sferă cu raza de 6370 km este încercuită pe ecuator cu un cerc. Dacă lungimea acestui cerc de o mărit cu 1 m, el se va depărta de la suprafaţa sferei (peste tot la fel) la o oarecare distanţă. Aflaţi-o.

682. Locomotiva Diesel are roata cu diametrul de 0,8 m. Câte rotaţii pe minută face această roată când locomotiva se mişcă cu viteza de 60 km/oră?

683. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu a, iar unghiul ascuţit alăturat β. Aflaţi lungimea circumferinţei circumscrise.

684. Cum se raportă lungimile a două circumferinţe, dacă una din ele este circumscrisă unui triunghi regulat, iar cealaltă este înscrisă în el?

685. Aflaţi lungimile liniilor, care mărginesc figurile, reprezentate în figura 215.

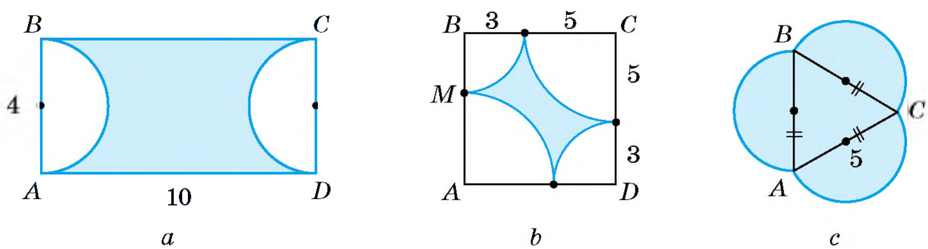


Fig.215

686. Latura rombului este egală cu 15 cm, iar unghiul cu — 30°. Aflaţi lungimea circumferinţei înscrise.

687. Aflaţi lungimea circumferinţei circumscrise trapezului cu laturile a, a, a şi $2a$.

688. Coarda comună a două circumferinţe care se intersectează este egală cu l şi serveşte pentru una din circumferinţe drept latură a triunghiului regulat înscris, iar pentru cealaltă – ca latură a pătratului înscris. Aflaţi lungimile acestor circumferinţe.

689. Aflaţi lungimea circumferinţei, care este mai lungă decât diametrul ei cu 21,4 cm.

690. Circumferinţa de raza 3 cm este îndreptată într-un arc de raza 9 cm. Aflaţi măsura în grade a arcului obţinut şi măsura unghiului la centru corespunzător lui.

691. Unui triunghi, ale cărui unghiuri sunt proporţionale cu numerele 3,4 şi 5, îi este circumscrisă circumferinţa de raza 6 cm. Aflaţi lungimile arcelor ei AB, BC şi CA.

692. Aflaţi lungimile arcelor, în care circumferinţa cu lungimea de 20π este împărţită de coarda, dusă la distanţa de $5\sqrt{2}$ cm de la centrul circumferinţei.

693. Lungimea circumferinţei este egală cu 24π cm. Aflaţi lungimile arcelor, în care această circumferinţă este împărţită de coarda cu lungimea de $12\sqrt{3}$ cm.

694. Din punctul A al circumferinţei cu centrul O sunt duse coardeleAB şi AC astfel, că $AC=6\sqrt{2}$ cm, $\angle BOC=120°$. Aflaţi lungimile arcelor AB, AC şi BC, dacă lungimea circumferinţei este de 12π cm. Câte soluţii are problema?

695. Coarda întide arcul circumferinţei cu lungimea l, a căruia măsură în grade este de $n°$. Aflaţi lungimea coardei.

696. Aflaţi lungimea curelei de transmisie, care uneşte două roţi de curea, dacă razele lor sunt egale cu **10** cm şi **30** cm, iar distanţa dintre centrele lor OO_1 = **1** m (fig.216).

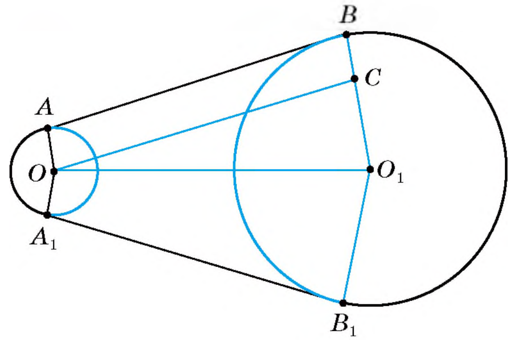


Fig.216

Însărcinare practică

697. a) În sistemul de coordonate rectangular, în care segmentul unitar are lungimea de 1 cm în intervalul **[**−2; **3]** construiţi graficul funcţiei $y = x^2$. Cu ajutorul compasului şi riglei aflaţi lungimea aproximativă a acestui grafic.

б) Analogic aflaţi lungimea aproximativă a unei părţi a spiralei de aur, reprezentată în figura 217. Care deschizătură a compasului este raţional de-o luat în acest caz? Aflaţi mai mult despre această spirală. De ce ea este astfel numită?

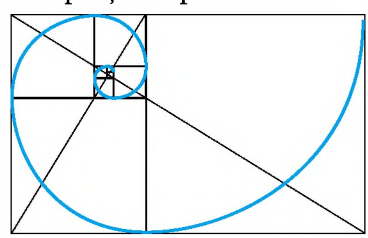


Fig.217

Probleme pentru repetare

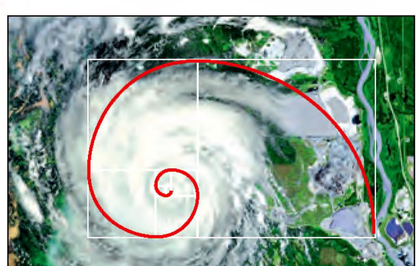
698. Aflaţi suma distanţelor de la centrul circumferinţei cu diametrul d până la laturile triunghiului regulat, înscris în această circumferinţă.

699. Aflaţi perimetrul hexagonului, înscris în circumferinţa de raza R.

700. În circumferinţa de raza 3 cm înscrieţi un dodecagon regulat.

701. Latura rombului este egală cu a, iar unghiul ascuţit – cu α. Aflaţi diagonalele rombului, aria şi raza circumferinţei înscrise.

Geometria din jurul nostru



Spirala de aur în natură

§ 20 Aria cercului şi a părţilor lui

Cerc se numeşte partea planului, mărginită de circumferinţă. **Centru, rază, diametru, coardă a cercului este numit** corespunzător centrul, raza, diametrul, coarda circumferinţei, care mărgineşte cercul dat. **Poligon, înscris în cerc** este numit poligonul înscris în circumferinţa cercului dat.

Partea cercului mărginită de două raze ale lui, se numeşte **sector** (fig.218, *b*). Coarda cercului îl împarte în două **segmente** (fig.218, *c*). În figura 218 este reprezentat cercul, două sectoare de cerc şi două segmente.

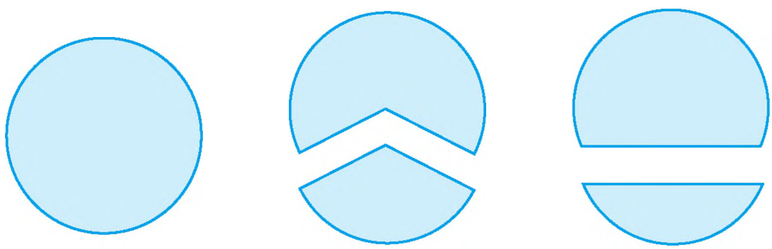


Fig.218

Ce este aria cercului? Nu este uşor de răspuns la această întrebare, deoarece teoria strictă a ariilor figurilor, mărginite de linii curbe, este destul de complicată; noi nu vom considera-o. Numai remarcăm, că fiecare cerc are arie şi că aria poligonului cu n laturi regulat, înscris în cerc, când numărul n creşte nemărginit, tinde spre aria cercului. Pe baza acestor afirmaţii deducem formula pentru calcularea ariei cercului.

Fie că este dat cercul de rază arbitrară R. Înscriem în el poligonul cu n laturi regulat $ABCD...F$ (fig. 219).

Dacă OH — înălţimea triunghiului OAB, atunci

$AH = \frac{1}{2}AB$, $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$ şi $OH = R\cos\frac{180^\circ}{n}$.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n}$. Poligonul cu n laturi $ABCD...F$ este compus din n astfel de triunghiuri, de aceea aria lui

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}PR\cos\frac{180^\circ}{n},$$

unde P – perimetrul poligonului dat.

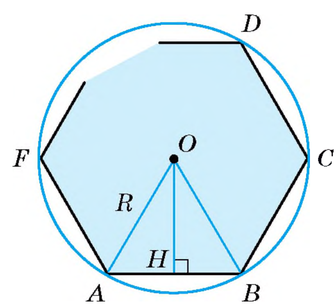


Fig.219

Dacă numărul n îl mărim nemărginit, atunci perimetrul P se va apropia de lungimea circumferinţei $2\pi R$, unghiul $\frac{180°}{n}$ — до $0°$, iar cosinusul lui – de 1. De aceea

$$S = \pi R \cdot R \cdot 1 = \pi R^2.$$

Aria cercului de raza R se află cu formula

$$S = \pi R^2.$$

Să deducem formulele pentru calcularea ariilor sectorului şi segmentului.

Aria sectorului, care corespunde unghiului la centru de $1°$, este egală cu $\frac{\pi R^2}{360}$. De aceea unghiului la centru de $n°$ îi corespunde sectorul, a cărui arie este egală cu $\frac{\pi R^2 n}{360}$.

Aşadar, **aria sectorului** de cerc de raza R, a cărui măsură de grad constituie $n°$, se calculează cu formula

$$S_{sec} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

De exemplu, dacă raza sectorului $OA = 9$ cm, iar $\angle AOB = 120°$ (fig.220), atunci aria acestui sector

$$S_{sec} = \pi \cdot 9^2 \cdot \frac{120}{360} = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

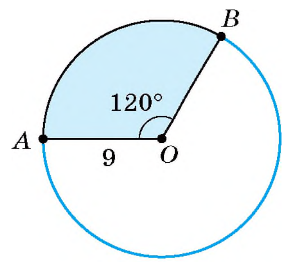


Fig.220

Pentru a afla aria segmentului AMB (fig.221), trebuie de scăzut din aria sectorului corespunzător aria triunghiului OAB, dacă unghiul sectorului $\alpha < 180°$ (fig.221,a) sau de adunat aria triunghiului OAB, dacă unghiul sectorului $\alpha > 180°$ (fig. 221,b). Sectorul cu unghiul de $180°$ — **semicerc,** aria lui este egală cu jumătate din aria cercului corespunzător.

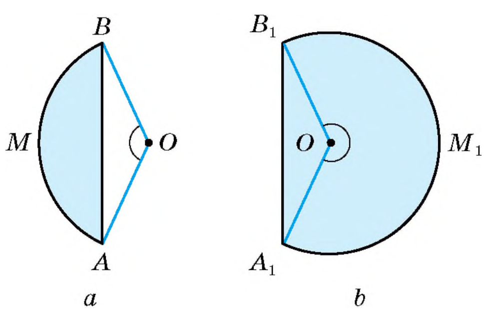


Fig.221

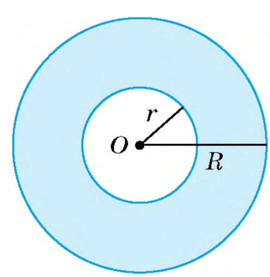


Fig.222

Parte a cercului este de asemenea inelul, mărginit de două circumferinţe concentrice (fig.222). Dacă razele circumferinţelor, care mărginesc inelul, sunt egale cu R şi r atunci aria inelului

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Din punctul de vedere al geometrie sunt interesante părţile cercului mărginite de arcurile a două circumferinţe – **lentilele** (fig. 223) şi **seceruicile** (fig. 224). Gândiţi-vă cum se poate determina ariile acestor figuri, ştiind, de exemplu, razele circumferinţelor, care le mărginesc, şi distanţa dintre centrele lor.

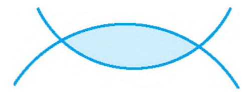


Fig.223

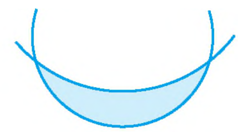


Fig.224

Drept exemplu să examinăm o astfel de seceruică, mărginită de semicircumferinţa de raza r şi de un sfert de cerc de raza $r\sqrt{2}$ (fig. 225). Aria ei

$$S=\frac{\pi r^2}{2}-\left(\frac{1}{4}\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2-r^2\right)=r^2.$$

Aria seceruicii *AKBP* este egală cu aria pătratului AOO_1H. Există seceruici, cvadratura cărora este posibilă! Aceasta a demonstrat în secolul V î.e.n. Hipocrat Hiosikii (nu confundaţi cu mediul antic grec, autorul "Jurământul lui Hipocrat", care a trăit în secolul III î.e.n).

Cvadratura figurii – asta-i calcularea ariei ei. Înainte se spunea, că cvadratura figurii este posibilă dacă se poate construi (cu compasul şi rigla!) pătratul, echivalent cu figura dată.

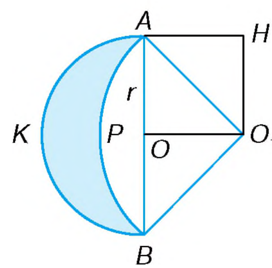


Fig.225

ÎNTREBĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numeşte cerc?
2. Cu care formulă se calculează aria cercului?
3. Ce se numeşte sector?
4. Cu care formulă se află aria sectorului?
5. Ce se numeşte segment?
6. Cu care formulă se calculează aria segmentului?
7. Ce se numeşte inel? Cu care formulă se află aria inelului?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 În triunghiul regulat este înscrisă o circumferinţă de raza r şi tot lui îi este circumscrisă o circumferinţă. Aflaţi aria inelului, mărginit de aceste circumferinţe.

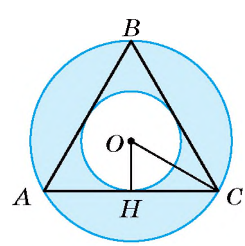


Fig.226

- Problemei îi corespunde figura 226, în care OH = r, OC = R. Deoarece în triunghiul regulat R = 2r, reiesă că aria inelului $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(4r^2-r^2)=3\pi r^2$.

2 Trei circumferinţe de raza r au contact exterior două câte două. Calculaţi aria „triunghiului curb", mărginit de arcele acestor circumferinţe.

- Centrele circumferinţelor date formează triunghiul regulat OO_1O_2 cu latura $2r$ (fig.227). Aria lui este

$$S=\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4r^2\sqrt{3}}{4}=r^2\sqrt{3}.$$

Deoarece $\angle O_2OO_1=60°$, reiesă că aria fiecăruia din sectoarele obţinute este egală cu $\frac{1}{6}\pi r^2$.

Atunci aria figurii căutate este

$$S=\sqrt{3}r^2-3\cdot\frac{1}{6}\pi r^2=r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right).$$

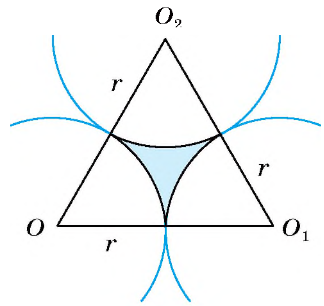


Fig.227

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

702. Aflaţi aria cercului de raza 1 m; 2 dm; 5 cm.
703. Aflaţi aria cercului cu diametrul de 2 dm; 6 cm; 3 m.
704. Aflaţi aria semicercului de raza 6 cm.
705. Aria cercului este egală cu 3π m^2. Cu ce este egală raza lui?
706. Aflaţi aria cercului, circumscris unui pătrat cu diagonala d.
707. Aflaţi aria cercului, înscris în pătratul cu latura a.
708. Cum se va schimba aria cercului, dacă raza lui de o mărit de 2 ori?
709. Cum se va schimba aria cercului, dacă vom micşora diametrul lui de 3 ori?
710. Rezolvaţi rebusul din figura 228.

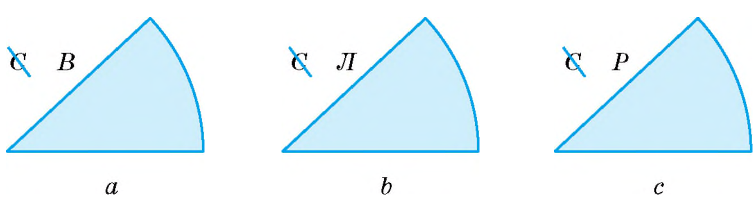


Fig.228

A

711. Calculaţi aria cercului, a cărui rază este egală cu 8 cm; 10 cm; 5 cm.
712. Calculaţi aria cercului, a cărui diametru este egal cu 6 cm; 18 cm; 22 cm.
713. Aria cercului este egală cu S. Aflaţi lungimea circumferinţei, care-l mărgineşte, dacă S este egal cu: a) 12,56 cm^2; b) 16π cm^2; c) $1,44\pi$ cm^2.

714. Aflaţi aria arenei circului, lungimea circumferinţei căreia este de 41 m.

715. Construiţi cercul aria căruia este egală cu 4π cm², înscrieţi în el un pătrat. Aflaţi aria cercului înscris în acest pătrat.

716. Ariile a două cercuri se raportă ca 4:9. Aflaţi raportul lungimilor ale circumferinţelor acestor cercuri.

717. Aflaţi aria cercului, dacă laturile dreptunghiului înscris în el sunt egale cu 12 cm şi 16 cm.

718. Aflaţi raportul ariilor ale cercurilor: a) înscris în triunghiului regulat: b) circumscris aceluiaşi triunghi.

719. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 6 cm şi 8 cm. Aflaţi aria: a) cercului, înscris în triunghi; b) cercului, circumscris triunghiului.

720. Aflaţi aria inelului, mărginit de circumferinţele concentrice de razele 2 cm şi 5 cm.

721. Aria inelului, mărginit de două circumferinţe concentrice este egală cu 63π cm². Aflaţi razele acestor circumferinţe, dacă:
a) una din ele este cu 3 cm mai mare decât cealaltă;
b) ele sunt proporţionale cu numerele 3 şi 4;
c) suma lor este egală cu 21 cm.

722. Aflaţi aria sectorului de cerc de raza 12 cm, dacă unghiul la centru corespunzător este egal cu:
a) 40°; b) 60°; c) 120°; d) 270°.

723. Aflaţi aria segmentului de cerc, dacă raza cercului este egală cu 6 cm, iar arcul conţine:
a) 60°; b) 90°; c) 120°; d) 150°.

724. Dintr-o foaie pătrată de tablă au decupat un cerc cu cea mai mare arie posibilă. Câte procente din foaie constituie deşeurile?

B

725. Aflaţi ariile figurilor vopsite (fig.229-231).

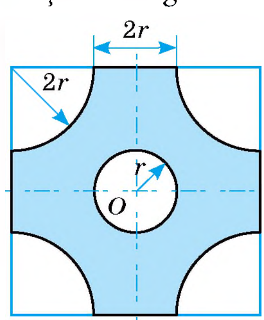


Fig.229

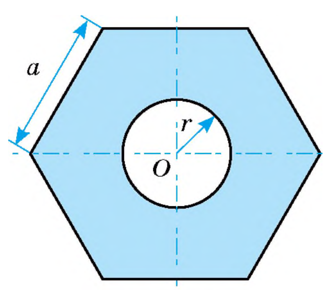


Fig.230

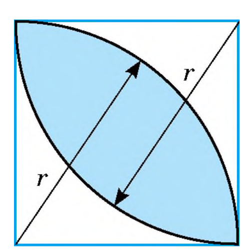


Fig.231

726. Suma catetelor triunghiului dreptunghic este cu 10 cm mai mare decât ipotenuza. Aflaţi aria cercului, înscris în acest triunghi.

727. Pe laturile triunghiului dreptunghic , ca pe diametre, sunt construite trei semicercuri. Demonstraţi că aria celui mai mare din ei este egală cu suma ariilor celorlalţi doi.

728. Latura hexagonului regulat este egală cu **3** cm. Aflaţi ariile cercurilor: înscris în acest hexagon şi circumscris lui.

729. Aria cercului circumscris triunghiului isoscel, este egală cu **100**π cm². Aflaţi aria cercului, înscris în acest triunghi, dacă înălţimea, coborâtă pe bază este egală cu 18 cm.

730. Aria cercului, înscris într-un trapez dreptunghic, este egală cu **144**π cm². Aflaţi aria trapezului, dacă baza mare a lui este de **36** cm.

731. Laturile unui triunghi sunt egale cu **13** cm, **14** cm şi **15** cm. Aflaţi aria inelului format de circumferinţele înscrisă şi circumscrisă triunghiului.

732. Unui poligon regulat cu n laturi îi este circumscrisă o circumferinţă şi tot lui îi e înscrisă o circumferinţă. Latura poligonului este *a*. Demonstraţi că aria inelului, mărginit de aceste circumferinţe nu depinde de numărul *n*.

733. Stabiliţi corespondenţa dintre figurile vopsite (1-4), reprezentate în figura 232 şi ariile lor (A-E).

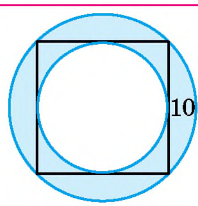
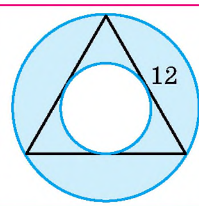
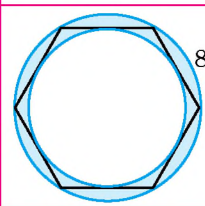
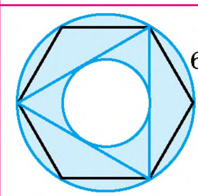
1	2	3	4
			

Fig. 232

A	B	C	D	E
36π	27π	25π	16π	9π

734. Într-un sector de cerc cu unghiul de **60**° este înscris în cerc (fig. 233). Aflaţi raportul ariei sectorului către aria cercului înscris.

735. Aflaţi aria cercului, înscris într-un segment de cerc de raza R, a cărui arc are **120**° (fig. 234).

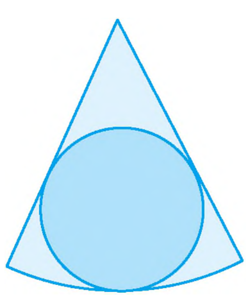


Fig.233

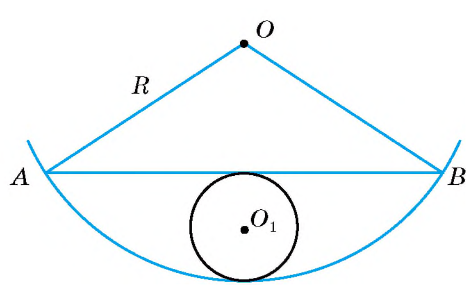


Fig.234

736. Aflaţi raza cercului, dacă aria sectorului acestui cerc este egală cu 20π см^2, iar unghiul la centru corespunzător este egal cu $72°$.

737. Coarda cu lungimea de $9\sqrt{3}$ cm împarte cercul cu diametrul de 18 cm în două segmente. Aflaţi ariile acestor segmente.

738. În cercul de raza R sunt duse două coarde paralele, fiecare din ele subîntinde un arc de 60°. Aflaţi aria acelei părţi a cercului care este situată între coarde.

739. Aflaţi aria părţii comune a cercului cu diametrul AB şi a triunghiului ABC, dacă: $AB = BC = CA = a$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

740. Desenaţi două circumferinţe concentrice de raze R şi r, iar coarda AB a celei mai mari din ele să fie tangentă la cea mai mică (fig. 235). Comparaţi aria inelului, mărginit de ceste circumferinţe cu aria cercului ce are diametrul AB. Cercetaţi dacă oare totdeauna aceste arii sunt egale.

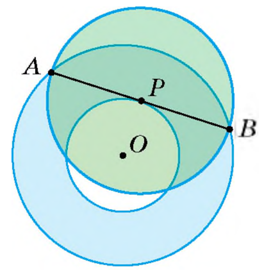


Fig.235

PROBLEME PENTRU REPETARE

741. Aflaţi lungimea circumferinţei circumscrise triunghiului dreptunghic isoscel cu cateta a.

742. Bisectoarea unghiului ascuţit a triunghiului dreptunghic împarte cateta în segmentele de 10 cm şi 26 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei, înscrise în triunghi.

743. Razele trapezului isoscel sunt proporţionale cu numerele 4 şi 9, iar perimetrul este egal cu 52 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei, înscrise în trapez.

744. Aflaţi cel mai mare unghi al triunghiului cu laturile de 9 cm, 15 cm, 21 cm.

GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU

Cercul în viaţa de toate zilele şi în artă

PROBLEME CU DESENE GATA

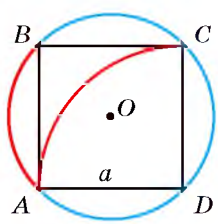
A | B

Aflați lungimea arcului

1

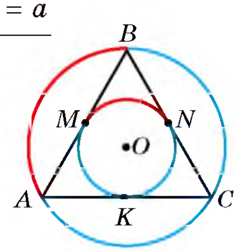
A: $ABCD$ — pătrat
$AD = a$

AB; AC



B: $AB = BC = AC = a$

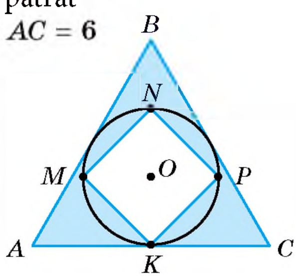
AB; MN



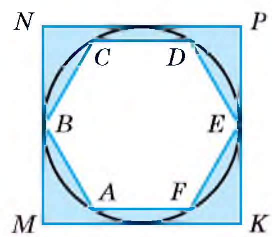
Aflați ariile figurilor vopsite

2

A: $MNPK$ — pătrat
$AB = BC = AC = 6$

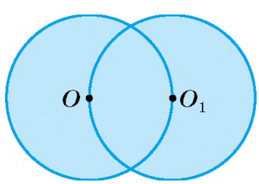


B: $ABCDEF$ — hexagon regulat,
$MNPK$ — pătrat,
$MN = 8$

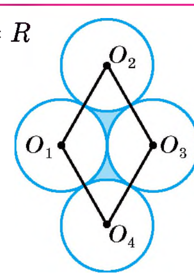


3

A: $OO_1 = 8$

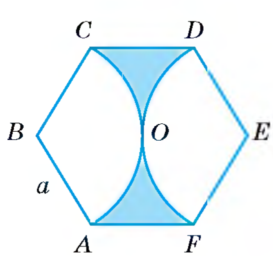


B: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

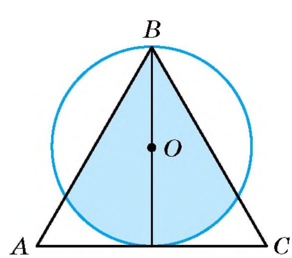


4

A: $ABCDEF$ — hexagon regulat
$AB = a$



B: $AB = BC = AC = 12$



LUCRAREA INDEPENDENTĂ 4

VARIANTA 1

1°. Aflaţi măsura în grade a unghiurilor interior şi de la centru ale dodecagonului regulat.
2°. Latura hexagonului regulat este egală cu 8 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei şi aria cercului, înscris în hexagon.
3•. În circumferinţă este înscris un pătrat cu perimetrul de 24 cm. Aflaţi perimetrul triunghiului regulat, circumscris acestei circumferinţe.

VARIANTA 2

1°. Aflaţi măsura în grade a unghiurilor interior şi de la centru ale nonadecagonului regulat.
2°. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 18 cm şi 24 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei şi aria cercului, circumscris triunghiului.
3•. Într-o circumferinţă este înscris un hexagon regulat cu perimetrul de 36 cm. Aflaţi perimetrul triunghiului regulat, circumscris acestei circumferinţe.

VARIANTA 3

1°. Aflaţi măsura în grade a unghiurilor interior şi de la centru ale decagonului regulat.
2°. Diagonala şi latura laterală ale unui trapez isoscel sunt perpendiculare şi egale cu 24 cm şi 10 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei şi aria cercului, circumscrise acestui trapez.
3•. Într-o circumferinţă este înscris un triunghi echilateral cu perimetrul 12 cm. Aflaţi perimetrul pătratului, circumscris acestei circumferinţe.

VARIANTA 4

1°. Aflaţi măsura în grade a unghiurilor interior şi de la centru ale unui octadecagon regulat.
2°. Laturile dreptunghiului sunt egale cu 7 cm şi 24 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei şi aria cercului, circumscrise dreptunghiului.
3•. Perimetrul triunghiului regulat, circumscris circumferinţei, este egal cu 36 cm. Aflaţi perimetrul hexagonului regulat, înscris în această circumferinţă.

ÎNSĂRCINĂRI TESTE 4

1	Lungimea circumferinţei de raza 6 cm este egală cu:	a) 3π cm; b) 6π cm;	c) 12π cm; d) 36π cm.
2	Unghiul hexagonului regulat este egal cu:	a) 110°; b) 120°;	c) 135°; d) 150°.
3	Unghiul la centru al octagonului regulat este egal cu:	a) 60°; b) 40°;	c) 45°; d) 72°.
4	R şi r – razele circumferinţelor circumscrise şi înscrise în un triunghi regulat. Ce semn trebuie de pus în loc de $*$: $R * 2r$?	a) $>$; b) $<$;	c) $=$; d) nu se poate stabili.
5	Aria semicercului cu diametrul de 10 cm este egală cu:	a) 25π cm^2; b) 100π cm^2;	c) $12{,}5\pi$ cm^2; d) 50π cm^2.
6	Latura pătratului, circumscris circumferinţei de lungimea 16π, este egală cu:	a) 16 cm; b) 8 cm;	c) 4 cm; d) $4\sqrt{2}$ cm.
7	Triunghiul regulat ABC este înscris în circumferinţă. Aflaţi lungimea circumferinţei, dacă lungimea arcului BAC este egală cu 6 cm.	a) 12π cm; b) 12 cm;	c) 9 cm; d) $4\sqrt{3}\pi$ cm.
8	Aflaţi aria sectorului de cerc de raza 6 cu unghiul la centru de 60°.	a) 6π cm^2; b) 36π cm^2;	c) 9π cm^2; d) 2π cm^2.
9	Aria cercului este egală cu 100π cm^2. Aflaţi lungimea circumferinţei lui.	a) 100π cm; b) 50π cm;	c) 20π cm; d) 2500π cm.
10	Perimetrul hexagonului regulat este egal cu 48 cm. Aflaţi lungimea circumferinţei circumscrise lui.	a) 16π cm; b) 96π cm;	c) 8π cm; d) 12π cm.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Aflaţi unghiul interior al decagonului regulat.

2°. Aflaţi aria sectorului, a cărui rază este egală cu 9 cm, iar unghiul la centru — 80°.

3°. Raza circumferinţei, înscrise în pătrat este egală cu 10 cm. Aflaţi raza circumferinţei, circumscrise acestui pătrat.

4°. Aria inelului, format de două circumferinţe concentrice, este egală cu 32π cm^2. Aflaţi razele acestor circumferinţe, dacă una din ele este de 3 ori mai mare decât cealaltă.

5•. Aflaţi perimetrul poligonului regulat, a cărui latură este egală cu 5 cm,iar unghiul cu — 156°.

6•. Latura triunghiului regulat, înscris într-o circumferinţă este egală cu 12 cm. Aflaţi latura hexagonului regulat, circumscris acestei circumferinţe.

7•. În triunghiul regulat *ABC* este înscrisă o semicircumferinţă cu centrul pe latura *AC* (fig.236), care este tangentă la laturile *AC* şi *BC* în punctele *M* şi *N* corespunzător. Aflaţi lungimile arcelor *PM*, *MN*, *NK*, dacă *PK* = 4 cm.

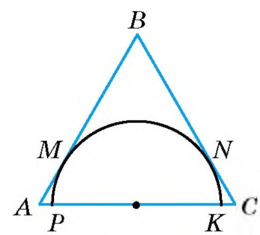


Fig.236

8•. Latura laterală şi baza triunghiului isoscel sunt proporţionale corespunzător cu numerele 13 şi 10, iar înălţimea, coborâtă pe bază, este egală cu 24 cm. Aflaţi raportul ariei cercului, înscris în triunghi, către aria cercului, circumscris acestui triunghi.

9••. Demonstraţi că mijlocurile laturilor decagonului regulat sunt vârfurile ale altui decagon regulat.

10••. În sectorul de cerc de raza *R* cu unghiul la centru de 60° sunt înscrise două circumferinţe, care sunt tangente una cu alta, şi au razele care mărginesc sectorul (fig. 237). Aflaţi raportul lungimilor acestor circumferinţe, dacă raza uneia din ele este cu 4 cm mai mare decât raza celeilalte. Cu ce este egală *R*?

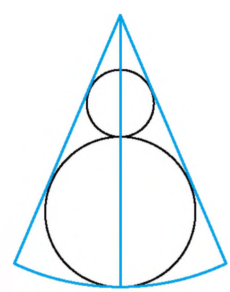


Fig.237

Lumea reală – cea mai bună lume
G. Leibniz

Principalul în capitolul 4

Poligonul se numeşte **regulat,** dacă el este convex, ale lui toate laturi sunt egale, toate unghiurile sunt egale. Dacă poligonul este regulat, atunci i se poate circumscrie o circumferinţă şi i se poate înscrie o circumferinţă. Centrele acestor circumferinţe este unul şi acelaşi punct – **centrul poligonului regulat**. Perpendiculara, coborâtă din centrul poligonului regulat pe latura lui, – **apotema** poligonului dat.

Pentru a calcula unghiurile referitoare la poligonul regulat cu n laturi, se aplică formulele:

Unghiul interior	Unghiul exterior	Unghiul la centru
$\frac{180°(n-2)}{n}$	$\frac{360°}{n}$	$\frac{360°}{n}$

Pentru a construi un poligon regulat cu n laturi, se poate deviza circumferinţa în n părţi egale şi punctele succesive de divizare de le unit cu segmente.

Latura a_n a poligonului regulat cu n laturi se exprimă prin raza R a circumferinţei circumscrise şi raza r a circumferinţei înscrise prin formulele:

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n} \text{ şi } a_n = 2r\,\text{tg}\,\frac{180°}{n}.$$

În particular,

$a_3 = R\sqrt{3},\ \ a_4 = R\sqrt{2},\ \ a_6 = R$ şi $a_3 = 2\sqrt{3}r,\ a_4 = 2r,\ a_6 = r.$

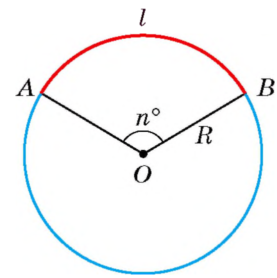
Latura hexagonului regulat este egală cu raza circumferinţei circumscrise.

Pentru poligonul regulat cu n laturi cu latura a raza circumferinţei circumscrise (R) şi raza circumferinţei înscrise (r) se calculează conform formulelor.

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}} \text{ şi } r = \frac{a}{2\,\text{tg}\,\frac{180°}{n}}.$$

În particular pentru $n = 3,\ 4,\ 6$ aceste şi alte mărimi se calculează cu formulele:

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
P	$3a$	$4a$	$6a$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$



Raportul lungimii circumferinţei către diametrul ei este egal cu numărul constant $\pi \approx 3{,}14$. De aceea lungimea C a circumferinţei de raza R se poate determina cu formula $C = 2\pi R$. Lungimea l a arcului unei circumferinţe de raza R, care are n grade, se poate determina cu formula

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Porţiunea panului, mărginită de circumferinţă este **cerc. Centru, rază, diametru, coardă a cercului** sunt numite corespunzător centrul, raza, diametrul, coarda circumferinţei, care mărgineşte cercul dat.

Aria S a cercului de raza R se calculează cu formula

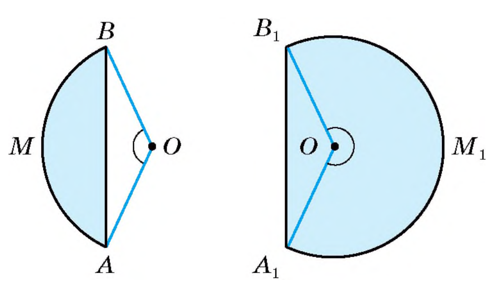
$$S = \pi R^2.$$

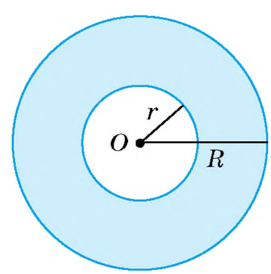
Porţiunea cercului mărginită de două raze ale lui se numeşte **sector**, iar partea cercului, mărginită de coarda şi arcul lui, – **segment**. Segmentul poate fi mai mic sau mai mare decât semicercul.

Dacă sectorul cercului de raza R are n grade, atunci aria lui se calculează cu formula

$$S_{sec} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Pentru a afla **aria segmentului** de cerc AMB trebuie de scăzut din aria sectorului corespunzător aria triunghiului OAB, dacă unghiul sectorului $\alpha < 180°$, şi de adunat aria triunghiului OAB, dacă $\alpha > 180°$. Sectorul cu unghiul de $180°$ este **semicerc**, aria lui este egală cu jumătate din aria cercului corespunzător.





Porţiune a cercului este de asemenea **inelul**, mărginit de două circumferinţe concentrice. Dacă razele circumferinţelor, care mărginesc inelul sunt egale cu R şi r, atunci aria inelului

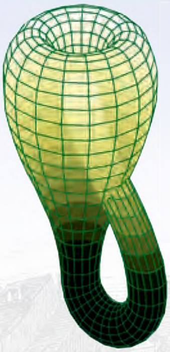
$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Modelul geometric, din punctul de vedere intuitiv, este foarte instructiv şi interesant.
Lucrul constructiv al matematicianului, care pentru prima dată a descoperit o teoremă, este cel puţin tot atât de valoros, ca şi lucrul deductiv al celui, care primul a demonstrat-o.

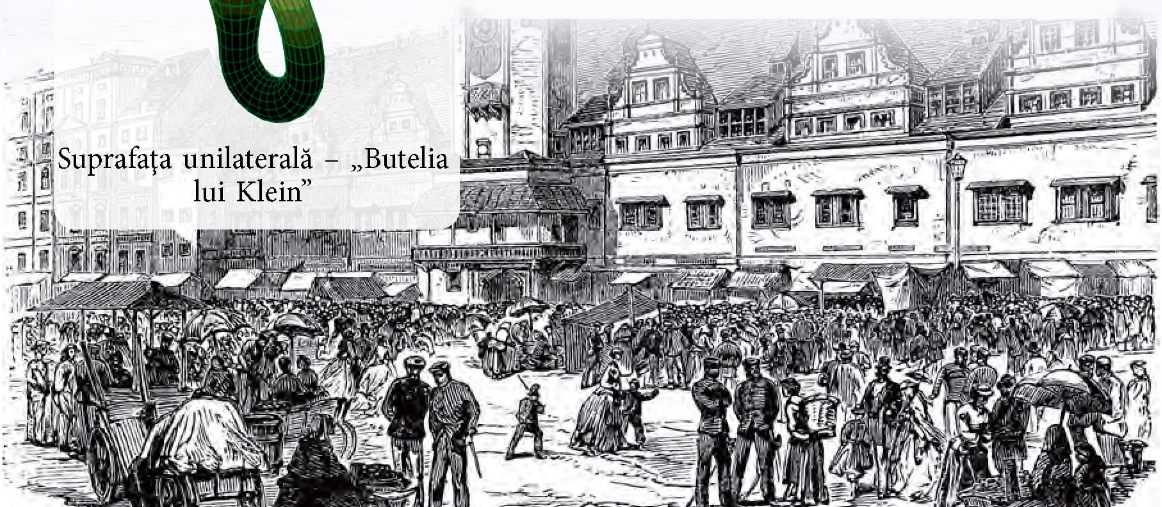
FELIX CRESTIAN KLEIN

(1849–1925)

Ilustrul matematician, istoric al matematicii şi pedagog german. Principalele lucrări ale lui se referă la geometrie, teoria ecuaţiilor algebrice, teoria grupelor, teoria funcţiilor, topologie. Lucrarea lui „Examinarea comparativă a noilor cercetări geometrice", cunoscută sub denumirea „Programa Erlanghen", în care se dădea clasificarea diferitelor geometrii pe baza grupelor de transformări, a exercitat o mare înrâurire asupra matematicienilor, a schimbat esenţial părerile lor despre geometrie şi a dezvoltării ulterioare a matematicii. Primul preşedinte al Comisiei Internaţionale în chestiunile învăţământului matematic, reformator al învăţământului matematic şcolar.



Suprafaţa unilaterală – „Butelia lui Klein"



Capitolil 5 | Section 5

Transformări geometrice | Geometric Transformations

Transformările geometrice – unul din cele mai importante capitole ale geometriei actuale. În geometrie ele joacă aproximativ tot aşa un rol ca funcţiile în algebră. Pe baza transformărilor geometrice sunt demonstrate afirmaţii complicate din diferite compartimente ale matematicii şi rezolvate probleme, care prin alte metode este foarte dificil de le rezolvat sau deloc este imposibilă rezolvarea lor.

Transformările geometrice sunt folosite nu numai de geometri, dar şi de specialiştii altor ramuri: arhitectori, constructori, maeştrii artei aplicate.

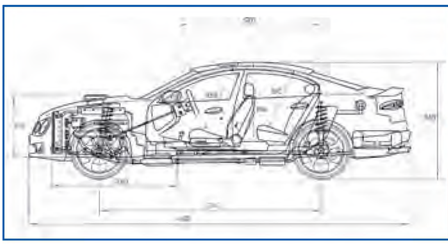
PROIECT DE ÎNVĂŢĂMÂNT
"Ornamente şi transformările geometrice"

EDUCATIONAL PROJECT
“Decorative Patterns and Geometrical Transformations”

Pentru ce se studiază transformările geometrice?

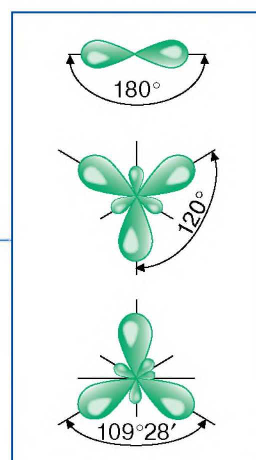
Geometria ajută mai bine de studiat mediul înconjurător să fie examinate nu numai stările (diferite tipuri de figuri, dimensiunile şi formele lor), dar şi procesele.Pentru aceasta cel mai bine se potrivesc transformările geometrice.

Cine are necesitatea folosirii transformărilor geometrice? Înainte de toate învăţaţii, inginerii, arhitectorii, constructorii, pictorii şi alţii.



Transformările geometrice – o parte considerabilă a unui limbaj specific, pe care îl folosesc între ei creatorii de idei şi muncitorii, inginerii. Înainte de-a confecţiona un oarecare mecanism constructorii elaborează desenul.

Fizicienii, mecanicii, inginerii şi alţi specialişti se îndeletnicesc cu figuri asemenea simetrice, în raport cu o dreaptă sau cu un punct. Chiar bijutierii, pictorii şi brodezele au treabă cu transformările geometrice.



Transformările geometrice voi le folosiţi pentru construirea graficelor şi cercetarea proprietăţilor funcţiilor, pentru studierea diferitelor procese în fizică şi legăturilor de valenţă în chimie, pentru caracterizarea organismelor vii în biologie, pentru înfrumuseţarea şi construirea îmbrăcămintei şi altele.

Un rol important transformările geometrice îl joacă în computatoare. Rotirea figurilor cu diferite unghiuri, transportul paralel al lor – totul acestea-s mişcări. Mărirea sau micşorarea figurilor şi a caracterelor – exemple de transformări de asemănare.

Mai unde sunt folosite transformările geometrice? Aduceţi exemplele voastre.

§ 21 Mişcarea şi proprietăţile ei

Să examinăm cum sunt create ornamentele, care sunt folosite pentru înfrumuseţarea tapetelor, covoarelor, îmbrăcămintei, bijuteriilor şi ale altor obiecte de uz casnic. La început se alege elementul de bază al ornamentului (motivul) – partea modelului care se va repeta de multe ori (fig. 238). Cel mai simplu ornament în formă de rând se poate obţine, dacă mutăm motivul în direcţia aleasă şi repetăm această operaţie de câteva ori (fig. 239).

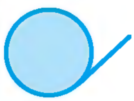


Fig.238

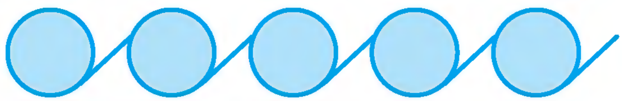
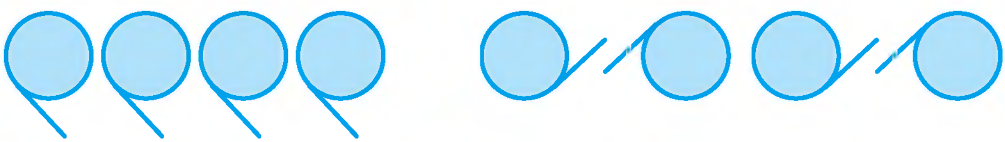


Fig.239

Deplasând motivul ornamentului în diferite direcţii se pot obţine multe ornamente diferite cu ajutorul unuia şi acelaşi motiv (fig.240).



a *b*

Fig.240

Dacă punctele figurii F de le mutat cu un oarecare procedeu, atunci obţinem o figură nouă F_1. Dacă concomitent diferite puncte ale figurii F trec (se aplică) în puncte diferite ale figurii F_1, atunci se spune despre **transformarea geometrică** a figurii F în figura F_1. Totodată figura F_1 este numită imaginea figurii F, iar figura F – preimaginea figurii F_1.

În figurile 241-245 sunt reprezentate exemple de transformări geometrice ale figurilor F în figurile F_1. Atrageţi atenţia că în rezultatul primelor patru transformări (fig. 241-244) distanţele dintre punctele corespunzătoare se păstrează: $AB = A_1B_1$. În al cincelea caz (fig.245) distanţele dintre punctele figurii F şi punctele corespunzătoare ale figurii F_1 nu se păstrează: $AB \neq A_1B_1$.

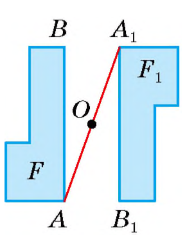


Fig.241

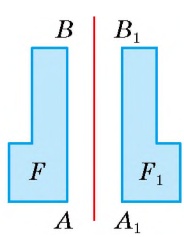


Fig.242

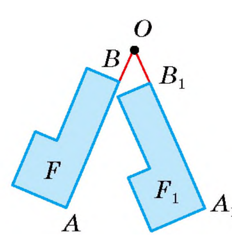


Fig.243

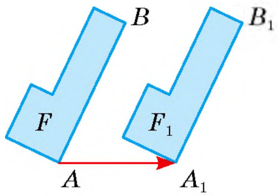


Fig.244

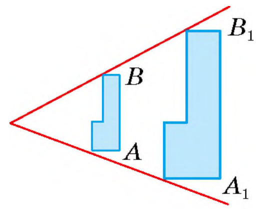


Fig.245

Transformările geometrice, la care se păstrează distanţele dintre puncte se numesc **deplasări** (sau **mişcări**).

În cele ce urmează noi vom considera tipuri separate de deplasări: simetria în raport cu un punct (fig. 241), simetria în raport cu o dreaptă (fig. 242), rotaţia (fig.243) şi translaţia (transport paralel) (fig. 244). Iniţial vom atrage atenţia la proprietăţile generale ale mişcărilor. Să ne amintim, că punctul B este situat între punctele A şi C atunci şi numai atunci, când B – punct interior al segmentului AC, adică când se îndeplineşte egalitatea $AB + BC = AC$.

TEOREMA 12

Dacă punctul B este situat între punctele A şi C, iar mişcarea le aplică pe ele corespunzător în punctele B_1, A_1 şi C_1, atunci B_1 este situat între A_1 şi C_1.

DEMONSTRAŢIE.

Dacă punctul B este situat între punctele A şi C, atunci $AB + BC = AC$ (fig.246). La translaţie distanţele dintre puncte se păstrează: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC= A_1C_1$.Înlocuind aceste valori în egalitatea $AB + BC = AC$, obţinem: $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. Iar aceasta şi înseamnă că punctul B_1 se află între A_1 şi C_1. □

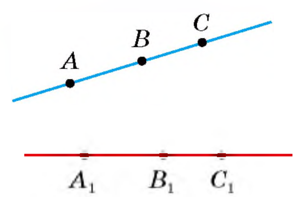


Fig.246

TEOREMA 13

Mişcarea aplică segmentul pe un segment egal cu el.

DEMONSTRAŢIE.

Fie AC — segment, iar B – a lui punct interior arbitrar (fig.247). Să considerăm o mişcare arbitrară. În virtutea teoremei 12 fiecare mişcare trece punctele A,C şi B în astfel de puncte A_1, C_1 *şi* B_1, că punctul B_1 este situat între punctele A_1 şi C_1. Aşadar, această mişcare fiecare punct al segmentului AC îl transferă într-un oarecare punct al segmentului A_1C_1.

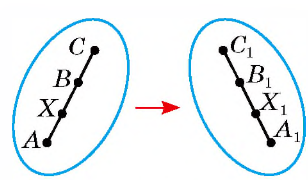


Fig.247

Să mai considerăm un punct arbitrar X_1 al segmentului A_1C_1. Depunem pe AC segmentul AX egal cu A_1X_1. Deoarece la mişcare distanţele dintre puncte se păstrează, reiesă că punctul X al segmentului AC se aplică pe punctul X_1 al segmentului $A_1 C_1$.

Aşadar, fiecare punct al segmentului AC la micaşre se aplică pe un oarecare punct al segmentului A_1C_1, şi totodată la această mişcare fiecare punct al segmentului A_1C_1 este obţinut dintr-un oarecare punct al segmentului AC. Aceasta şi înseamnă că mişcarea aplică segmentul AC pe segmentul A_1C_1. Totodată $A_1C_1 = AC$. □

Din cele două teoreme anterioare rezultă, că mişcarea transferă: dreapta în dreaptă, semidreapta – în semidreaptă, unghiul – în unghiul egal lui, triunghiul – în triunghiul egal cu el.

Aplicând noţiunea de mişcare se poate introduce noţiunea generală de egalitate a figurilor geometrice arbitrare.

Două figuri se numesc egale, dacă ele se aplică una în alta cu o mişcare.

Din această definiţie reiesă:

1) dacă figura F este egală cu figura F_1, atunci şi F_1 este egală cu F;

2) dacă figura F este egală cu figura F_1, iar F_1 este egală cu figura F_2, atunci F este egală cu F_2.

Definiţiile egalităţii segmentelor, unghiurilor şi triunghiurilor, cunoscute vouă din clasele anterioare, nu contrazic definiţiile generale noi ale egalităţii figurilor.

Din raţionamentele premergătoare rezultă următoarele afirmaţii:

1) orice mişcare transferă o figură oarecare într-o figură egală cu ea;

2) dacă două figuri geometrice sunt egale, atunci există o mişcare care apică o figură în alta.

PENTRU CEI CURIOŞI

Imaginaţi-vă că fiecare punct al circumferinţei w a fost proectat pe dreapta a (fig.248). În consecinţa s-a format segmentul AB. Oare poate fi considerată aşa o aplicare a circumferinţei pe segmentul AB transformare geometrică a circumferinţei date? Nu, deoarece la o astfel de aplicare două puncte diferite K şi P ale circumferinţei s-au transferat într-un sigur punct T al segmentului.

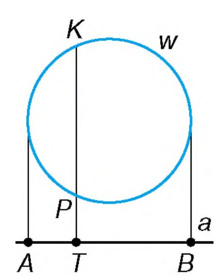


Fig.248

Transformare geometrică a figurii F în F_1 se numeşte o astfel de aplicare, la care:

1) fiecărui punct al figurii F îi corespunde un singur punct al figurii F_1;

2) fiecare punct al figurii F_1 este imaginea unui oarecare punct al figurii F;

3) punctelor diferite ale figurii F le corespund diferite puncte ale figurii F_1.

Mişcarea figurii pe plan se poate imagina ca schimbarea poziţiei acestei figuri pe plan, dar mai bine – în formă de mişcare a întregului plan în acelaşi timp cu figura din el.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformări geometrice se numesc mişcări?
2. În ce figură trece mişcarea:
a) segmentul; b) dreapta; c) unghiul; d) triunghiul?
3. Formulaţi definiţia generală a egalităţii a două figuri.
4. Ce proprietăţi au figurile egale?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstraţi că mişcarea trece unghiul într-un unghi, egal cu el.

● Fie că este dat unghiul ABC (fig. 249). Unim cu un segment două puncte arbitrare A şi C ale laturilor lui, obţinem $\triangle ABC$. Acest triunghi este aplicat la mişcare în $\triangle A_1B_1C_1$, care este egal cu $\triangle ABC$ (deoarece $AB=A_1B_1, AC=A_1C_1$, $BC = B_1C_1$), iar unghiul dat ABC — în unghiul $A_1B_1C_1$. Deoarece unghiurile corespunzătoare ale triunghiurilor egale sunt egale, rezultă că $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. Dar aceasta şi trebuia de demonstrat.

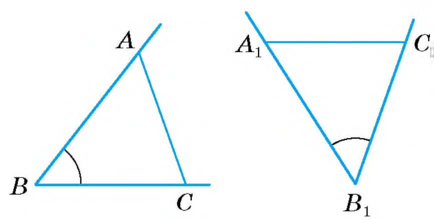


Fig.249

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

745. Oare corect exprimă corelaţia dintre mişcări şi transformările geometrice diagrama, reprezentată în figura 250?

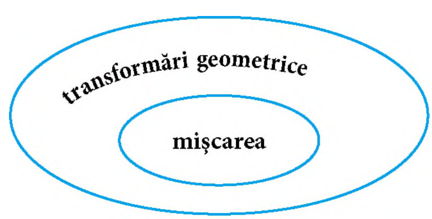


Fig.250

746. Câte există puncte care sunt situate între punctele A şi B?
747. Oare este adevărat că orice transformare geometrică aplică segment pe segment?
748. Oare este adevărată că orice mişcare aplică segmentul pe un segment?
749. Oare poate transformarea geometrică să aplice segmentul cu lungimea de 2 cm într-un segment cu lungimea de 3 cm?
750. Oare poate mişcarea aplica segmentul într-un segment neegal cu el?
751. Poate oare mişcarea aplica circumferinţa pe cerc? Dar cercul – pe circumferinţă?
752. Oare poate mişcarea aplica triunghiul isoscel în triunghiul echilateral?

753. Oare există mişcare care aplică triunghiul în patrulater? Dar patrulaterul – în triunghi?
754. Oare sunt egale figurile reprezentate în figura 251?

Fig.251

A

755. Sunt date segmentele $AB = 3$ cm, $CP = 5$ cm şi $KM = 5$ cm. Demonstraţi că există mişcare care trece segmentul KM în CP, şi nu există mişcare care trece CP în AB.
756. Triunghiul ABC — echilateral. Oare există mişcare care aplică segmentul AB în segmentul AC, unghiul A în unghiul B? Argumentaţi răspunsul.
757. Demonstraţi că mişcarea aplică triunghiul în triunghi egal cu el.
758. Aflaţi unghiurile triunghiului, dacă există mişcare, care aplică triunghiul, unul din unghiurile căruia este egal cu 30°, într-un triunghi, unul din unghiurile căruia este egal cu 50°.
759. Într-un triunghi este unghi de 100°, iar în altul – unghi de 120°. Oare există mişcare care aplică un triunghi în altul? Oare pot să fie egale aceste triunghiuri?
760. Stabiliţi tipul triunghiului , dacă există mişcare , care aplică fiecare latură a triunghiului pe altă latură a lui.
761. Se dă un triunghi dreptunghic isoscel. Demonstraţi că există mişcare care aplică o catetă în alta. Oare există mişcare care aplică cateta în ipotenuză?
762. Stabiliţi tipul patrulaterului, dacă există mişcare, care aplică fiecare latură a lui pe altă latură.
763. Măsurile în grade a două arce sunt egale. Oare pot să nu fie egale lungimile lor? Oare există totdeauna mişcare , care aplică unul din aceste arce pe altul?
764. Perimetrul pătratului este egal cu 28 cm. Oare există mişcare care aplică pătratului dat în:
a) pătrat cu aria de 49 m^2;
b) dreptunghi cu perimetrul de 28 cm;
c) pătrat, circumscris circumferinţei de raza 3,5 cm;
d) romb cu diagonalele 4 cm şi $2\sqrt{3}$ cm?
765. Mişcarea trece linia frântă ABC în linia frântă KPT (fig. 252). Construiţi punctele, în care trec la această mişcare punctele X şi Y.

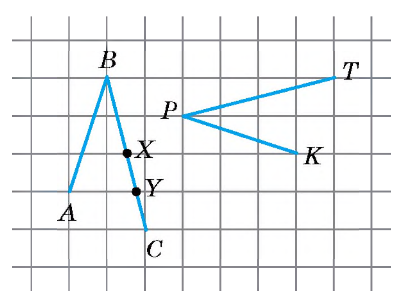


Fig.252

B

766. Demonstraţi că mişcarea trece circumferinţa în circumferinţă.

767. Demonstraţi că mişcarea trece dreptele paralele în drepte paralele.

768. Mişcarea trece $\triangle ABC$ în $\triangle KPT$. Demonstraţi că această mişcare trece:
a) medianele primului triunghi în medianele celuilalt;
b) bisectoarele primului triunghi în bisectoarea celuilalt;
c) înălţimile primului triunghi în înălţimile triunghiului al doilea.

769. La mişcare punctul O trece în punctul $O_1(-4; 5)$. Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul O_1, dacă $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ este ecuaţia circumferinţei cu centrul în O.

770. ***Problemă deschisă.*** Mişcarea trece circumferinţa ... în circumferinţa cu centrul în punctul ... . Aflaţi ... .

771. Sunt date punctele $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-5; -1)$, $D(-1; -3)$. Demonstraţi că:
a) există mişcare care trece segmentul AB în segmentul CD;
б) nu există mişcare care să treacă segmentul AC în segmentul BD.

772. Rombul $ABCD$ cu perimetrul 20 cm şi unghiul 60° este trecut de o mişcare oarecare în patrulaterul $MNPK$. Aflaţi diagonalele şi aria acestui patrulater.

773. La mişcare $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$ cu catetele 5 cm şi 12 cm trece în $\triangle KMN$. Aflaţi sinusurile unghiurilor $\triangle KMN$.

774. Dacă diagonalele unui romb sunt egale cu diagonalele altui romb, atunci astfel de romburi sunt egale. Demonstraţi.

775. Dacă diagonala şi latura unui dreptunghi sunt egale corespunzător cu diagonala şi latura altuia, atunci aşa dreptunghiuri sunt egale. Demonstraţi.

776. Formulaţi şi demonstraţi un criteriu oarecare de egalitate a paralelogramelor.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

777. a) Copiaţi în caiet figura 253 şi construiţi figura în care trece circumferinţa dată în urma mişcării, care aplică $\triangle ABC$ în $\triangle KPT$.
б) Copiaţi în caiete figura 254. Reprezentaţi figura în care trece circumferiţa în urma mişcării, care aplică linia frântă ABC în linia frântă KPT.

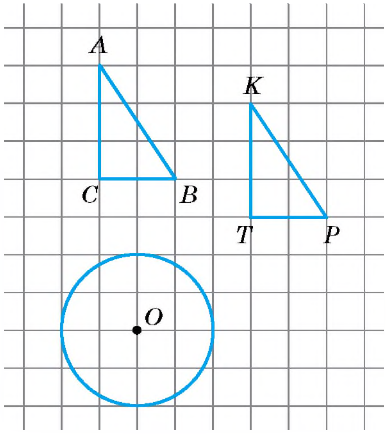


Fig.253

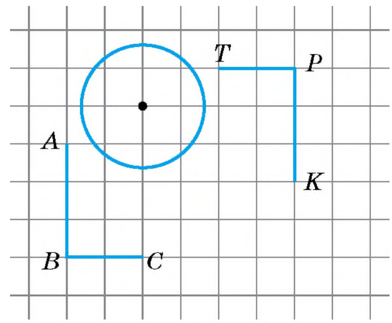


Fig.254

Probleme pentru repetare

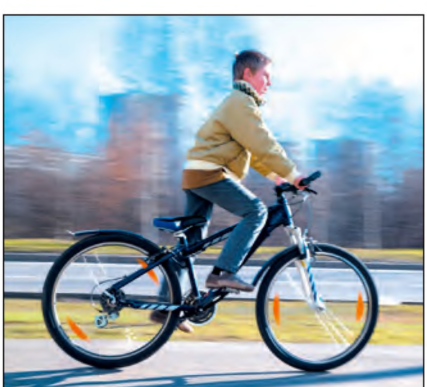
778. Sinusul unuia din unghiurile triunghiului dreptunghic este egal cu 0,4. Aflaţi sinusurile altor două unghiuri ale triunghiului.

779. Prin extremitatea diametrului unei circumferinţe este dusă coarda care este de două ori mai scrută decât diametrul. Aflaţi unghiul format de coardă şi diametru.

780. Dreptele a şi c se intersectează şi fac unghiul α. Ce unghi formează dreptele x şi y la intersecţie, dacă:
a) $a \parallel x$ şi $c \parallel y$; b) $a \perp x$ şi $c \perp y$?

781. Aflaţi unghiurile triunghiului dacă două unghiuri exterioare ale lui sunt egale cu 100° şi 120°.

Geometria din jurul nostru



Iată aşa mişcări diferite

§ 22 Simetria în raport cu un punct

Punctele X şi X_1 se numesc **simetrice în raport cu punctul O**, dacă O este mijlocul segmentului XX_1 (fig. 225). Dacă în raport cu punctul O fiecare punct al figurii F este simetric cu un oarecare punct al figurii F_1, şi invers, atunci figurile F şi F_1 sunt simetrice în raport cu punctul O (fig. 256). O astfel de aplicare a figurii F în figura F_1 se numeşte **transformare de simetrie în raport cu punctul O**.

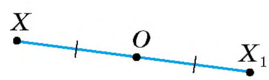


Fig.255

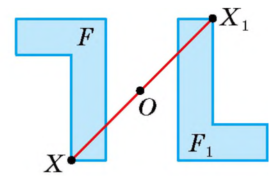


Fig.256

TEOREMA 14

Simetria în raport cu un punct este mişcare.

DEMONSTRAŢIE.

Admitem că simetria în raport cu punctul O transferă punctele arbitrare A şi B ale figurii F în punctele A_1 şi B_1 ale figurii F_1 (fig. 257). Să demonstrăm că $AB = A_1B_1$.

Punctul O — mijlocul segmentelor AA_1 şi BB_1, de aceea $OA = OA_1$ şi $OB = OB_1$.

Dacă punctele A, B şi O nu sunt situate pe o dreaptă, atunci unghiurile AOB şi A_1OB_1 sunt egale, deoarece sunt verticale. După două laturi şi unghiul făcut de ele triunghiurile ABO şi A_1B_1O sunt egale, de aceea $AB = A_1B_1$.

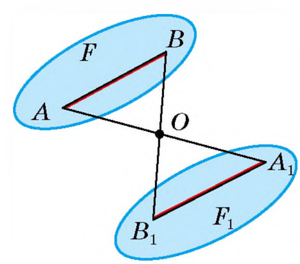


Fig.257

Dacă punctul B, de exemplu, se află între A şi O (fig. 258), atunci $AB = OA - OB = OA_1 - OB_1 = A_1B_1$.

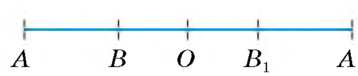


Fig.258

Dacă punctul O este situat între A şi B (fig.259), atunci $AB = OA + OB = OA_1 + OB_1 = A_1B_1$.

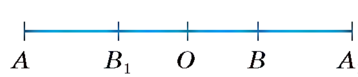


Fig.259

Aşadar, dacă punctele A şi B sunt simetrice cu punctele A_1 şi B_1 în raport cu punctul O, atunci totdeauna $AB = A_1B_1$. De aceea simetria în raport cu un punct este mişcare. □

Deaoarece simetria în raport cu un punct este mişcare ea aplică dreapta în dreaptă, semiderаptă - în semidreaptă, segmentul - în segment egal cu el unghiul - în unghi egal lui şi în general - orice figură în figură, egală cu ea.

Simetria în rapoart cu un punct (sau transformarea de simetrie în raport cu un punct) deseori este numită de asemenea **simetrie centrală**.

Se întâmplă uneori că simetria în raport cu un punct transferă figura F în sine însăşi.

Dacă transformarea de simetrie în raport cu un punct oarecare o transferă figura F în sine însăşi (adică tot în aceeaşi figură), atunci aşa o figură se numeşte **central simetrică**, iar punctul O – **centrul ei de simetrie**. De exemplu, fiecare paralelogram este figură central simetrică. Centrul de simetrie al paralelogramului este punctul de intersecţie al diagonalelor lui.

Fiecare punct X al paralelogramului este simetric în raport cu punctul O unui oarecare punct X_1 al aceluiaşi paralelogram(fig. 260). De ce? Punctul O este numit de asemenea **centrul paralelogramului**. Figuri central simetrice sunt: circumferinţa, pătratul, hexagonul regulat ş.a.

Exemple de figuri central simetrice, care se întâlnesc în natură, tehnică, în viaţa zilnică, sport sunt reprezentate în figurile 261-263.

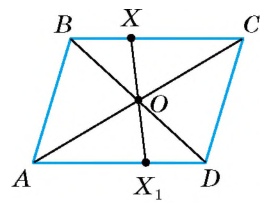


Fig.260


Fig.261


Fig.262


Fig.263

PENTRU CEI CURIOŞI

Să examinăm proprietăţile importante ale poligoanelor central simetrice. Dacă poligonul cu n laturi are centrul de simetrie O, atunci numărul n este par, deoarece fiecărui vârf al lui îi corespunde vârful opus simetric în raport cu O.

TEOREMA 15

Laturile opuse ale poligonului central simetric sunt paralele şi egale.

DEMONSTRAŢIE.

Fie $ABC...KPT...$ — poligon central simetric, iar O – centrul lui de simetrie (fig. 264). Ducem diagonalele AK şi BP. După două laturi şi unghiul făcut de ele rezultă că $\triangle ABO = \triangle KPO$. De aceea $AB = KP$ şi $\angle BAO = \angle PKO$. Aceste unghiuri sunt alterne interne faţă de secanta AK şi dreptele AB şi KP. De aceea $AB \parallel KP$. □

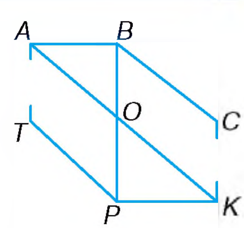


Fig.264

Teorema este adevărată nu numai pentru poligoanele convexe central simetrice, dar şi pentru cele neconvexe (fig. 265).

Dacă figurile central simetrice sunt mărginite, atunci ele au numai un sigur centru de simetrie.

Figurile nemărginite pot avea infinit de multe centre de simetrie. De exemplu, curba nemărginită în ambele extremităţi, reprezentată în figura 266, are infinit de multe centre de simetrie. Unde ele sunt amplasate?

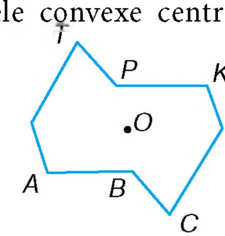


Fig.265

Reţeaua nemărginită din toate părţile constituită din pătrate egale de asemenea are infinit de multe centre de simetrie. Ele sunt: centrele tuturor pătratelor, toate vârfurile şi mijlocurile tuturor laturilor ale acestor pătrate (fig. 267).


Fig.266

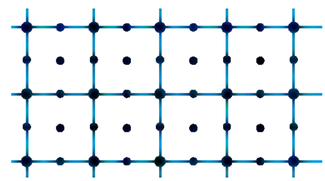


Fig.267

Întrebări şi însărcinări pentru autocontrol

1. Care puncte se numesc simetrice în raport cu un punct?
2. Oare este mişcare transformarea de simetrie în raport cu un punct? Demonstraţi.
3. Formulaţi proprietăţile simetriei în raport cu un punct.
4. Care figuri se numesc central simetrice?
5. Aduceţi exemple de figuri central simetrice.

Efectuăm împreună

1 Construiţi triunghiul, simetric $\triangle ABC$ în raport cu punctul O, care este situat în afara triunghiului (fig. 268).

- Prin vârfurile $\triangle ABC$ şi punctul O ducem dreptele AO, BO, CO şi depunem segmentele $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$. Unind punctele A_1, B_1, C_1, obţinem $\triangle A_1B_1C_1$, simetric $\triangle ABC$ în raport cu punctul O.

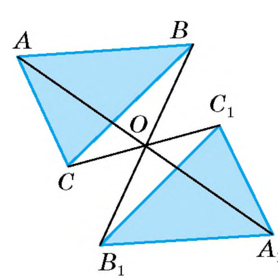


Fig.268

2 Pe o dreaptă sunt date două segmente egale. Indicaţi centrul lor de simetrie.

- Fie segmentele egale AB şi KP situate pe o dreaptă. Sunt posibile diferite cazuri de repartizare a lor (fig. 269), însă totdeauna centrul lor de simetrie punctul O – împarte în jumătate distanţa dintre cele mai îndepărtate puncte ale segmentelor date.

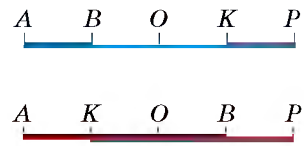


Fig.269

3 Este dat punctul $A(a;\ b)$. Aflaţi coordonatele punctului B, simetric punctului A în raport cu punctul M $(m;\ n)$.

- Dacă punctul $B(x;\ y)$ este simetric cu punctul $A\ (a,b)$ în raport cu punctul M, atunci punctul $M\ (m;n)$ – mijlocul segmentului AB. Deci,

$$\frac{x+a}{2}=m,\quad \frac{b+y}{2}=n,\ \text{de unde, } x = 2m - a,\ y = 2n - b.$$

Aşadar, avem punctul $B(2m - a;\ 2n - b)$.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

782. Punctele A şi B sunt simetrice în raport cu punctul M. Aflaţi rapoartele: a) $AM : AB$; b) $AM : MB$.

783. Pe dreapta de coordonate sunt date punctele $A(-2)$, $B(-1)$, $O(0)$, $C(1)$, $D(2)$. Care din aceste puncte sunt simetrice în raport cu altele?

784. Terminaţi formularea afirmaţiei adevărate: „În raport cu punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului fiecare vârf al lui este simetric cu..., fiecare latură a lui este simetrică cu..., fiecare diagonală a lui este simetrică cu...».

785. Numiţi câteva figuri geometrice care au centre de simetrie.

786. Oare există figuri care au infinit de multe centre de simetrie? Aduceţi exemple.

787. Câte centre de simetrie au două drepte paralele? Dar două drepe care se intersectează?

788. Oare are centru de simetrie triunghiul sau pentagonul?

789. Oare are centru de simetrie graficul funcţiei $y = x^3$?

A

790. Reprezentaţi două figuri care au centru de simetrie.

791. Sunt date punctele A şi O. Construiţi punctul A_1, simetric punctului A în raport cu punctul O.

792. Se dă segmentul AB şi punctul O. Construiţi segmentul A_1B_1, simetric segmentului AB în raport cu punctul O, dacă: a) $O \notin AB$; b) $O \in AB$; c) O — mijlocul lui AB.

793. Construiţi figura simetrică cu dreapta a în raport cu punctul O, dacă: a) $O \notin a$; b) $O \in a$.

794. Construiţi un triunghi arbitrar şi triunghiul, simetric lui în raport cu punctul O, dacă:
a) O e situat în afara triunghiului;
b) O este situat pe latura triunghiului;
c) O – vârful triunghiului;
d) O – punctul de intersecţie al medianelor triunghiului.

795. Se dau punctele $A(2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-3; -3)$, $D(-5; 1)$.Aflaţi coordonatele punctelor, simetrice celor date în raport cu:
a) originea de coordonate;
b) punctul M (1;1).

796. În raport cu care punct sunt simetrice punctele:
a) $A(1; 2)$ şi $B(5; 6)$;
b) $M(-1; 0)$ şi $H(3; 6)$;
c) $E(2; 6)$ şi $C(-8; 3)$;
d) $P(9; 0)$ şi $K(6; 8)$?

797. Demonstraţi că punctele $A(a; c)$ şi $B(-a; -c)$ sunt simetrice în raport cu originea de coordonate.

798. Se dau două drepte paralele. Construiţi locul geometric al centrelor de simetrie ale lor.

799. Se dau două segmente egale şi paralele. Construiţi centrul lor de simetrie. Demonstraţi că punctul construit este centrul de simetrie al segmentelor date.

800. Desenaţi un pătrat, romb, dreptunghi şi paralelogram. Notaţi cu altă culoare centrele lor de simetrie.

801. Demonstraţi că centrul de simetrie al rombului este punctul de intersecţie al diagonalelor lui.

802. Demonstraţi că două drepte central simetrice sunt paralele.

B

803. Anexaţi la triunghiul dat figura simetrică acestui triunghi în raport cu mijlocul uneia din laturile lui.

804. Anexaţi la trapezul dar figura simetrică acestui trapez în raport cu mijlocul uneia din laturile laterale.

805. Construiţi hexagonul central simetric: a) convex; b) neconvex.

806. Două circumferinţe de raze egale sunt tangente exterior în punctul M. Demonstraţi că M – centrul de simetrie al acestor circumferinţe.

807. Demonstraţi că patrulaterul care are centru de simetrie este paralelogram.

808. Pentru care valori ale lui x şi y punctele $M(-1; y)$ şi $N(x; 3)$ sunt simetrice în raport cu punctul $K(2; -1)$?

809. Scrieţi ecuaţia circumferinţei care este simetrică circumferinţei $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ în raport cu:
a) originea de coordonate; b) punctul $M(3; -2)$.

810. Stabiliţi în raport cu care punct sunt simetrice circumferinţele $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 6$ şi $(x + 7)^2 + (y - 9)^2 = 6$.

811. Scrieţi ecuaţia dreptei care este simetrică cu dreapta 2x+y-6=0 în raport cu: a) originea de coordonate; b) punctul K (1;1). Construiţi dreptele date şi demonstraţi că ele sunt paralele.

812. $x + 2y + 11 = 0$ şi $2x - y + 7 = 0$ sunt ecuaţiile dreptelor cărora le aparţin laturile pătratului, M (-2;-2) – centrul de simetrie al acestui pătrat. Scrieţi ecuaţiile ale celorlalte două laturi ale lui. Calculaţi perimetrul şi aria pătratului.

813. Se dă $\angle ABC$ şi punctul M în interiorul lui. Construiţi un astfel de segment cu extremităţile pe laturile unghiului, ca punctul M să fie mijlocul lui.

814. Stabiliţi corespondenţa dintre figurile (1-4) şi coordonatele centrului de simetrie al lor (dacă el există).

1	Segmentul AB, dacă $A(-1; 3)$, $B(5; 7)$	**A**	(0,5; 4)
2	Patrulaterul $ABCD$, dacă $A(-2; 6)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$, $D(1; 4)$	**B**	(2; −4)
		C	(0; 0)
3	Triunghiul ABC, dacă $A(-2; 2)$, $B(3; 3)$, $C(2; -2)$	**D**	nu există
4	Circumferinţa $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$	**E**	(2; 5)

815. Copiaţi în caiet septagonul, reprezentat în figura 270. Isprăviţi de construit la el septagonul simetric în raport cu mijlocul laturii:
a) AB;
b) BC;
c) CD;
d) AK.

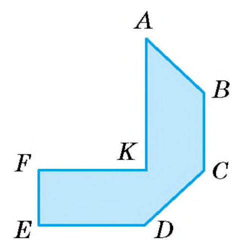


Fig.270

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

816. 1. Decupaţi din hârtie colorată două trapeze dreptunghice egale de culori diferite şi repartizaţi-le pe masă astfel, ca să iasă la iveală că ele sunt simetrice în raport cu:
a) unul din vârfurile trapezului (4 cazuri);
b) mijlocul uneia din laturi (4 cazuri);
c) un punct arbitrar al celei mai mari laturi;
d) un punct arbitrar situat în afara trapezului;
e) punctul de intersecţie al diagonalelor unuia din trapeze.
2. Pe baza rezultatelor a însărcinării 1 desenaţi un ornament, al cărui motiv este trapezul dreptunghiular.
Fotografiaţi ornamentul creat şi faceţi-l cunoscut apropiaţilor voştri, colegilor de clasă.

Probleme pentru repetare

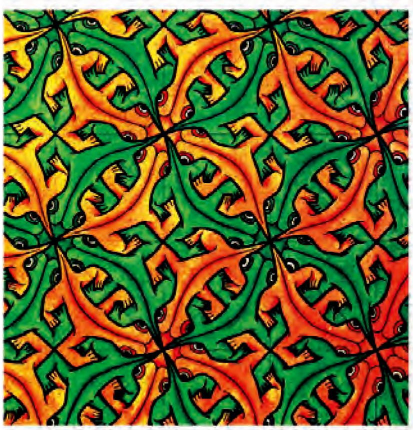
817. Răzorul are forma octagonului regulat, înscris în cercul de raza 5 m. Se prevede că octagonul va fi plantat cu plante de flori multianuale, iar restul cercului – cu iarbă de gazon. Câtă iarbă pe gazon trebuie pregătiră pentru acest strat de flori, dacă în mediu la un 1 m^2 de sol se seamănă 9 g sământă de iarbă?

818. Oare există mişcare care aplică o latură a pătratului în latura opusă? Dar în latura vecină?

819. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 7 cm şi 24 cm. Aflaţi sinusul, cosinusul şi tangenta celui mai mic unghi al lui.

820. Aflaţi unghiurile rombului, dacă perimetrul lui este de 4 ori mai mare decât una din diagonalele lui.

Geometria din jurul nostru




Simetria în raport cu un punct în lucrările lui Mauriţa Eşer

§ 23 Simetria în raport cu o dreaptă

Punctele X şi X_1 se numesc **simetrice în raport cu dreapta** l, dacă această dreaptă este mediatoarea segmentului XX_1 (fig. 271). Dacă punctul X aparţine dreptei l, atunci el se consideră simetric cu sine însuşi în raport cu dreapta l.

Transformarea figurii F_1 la care fiecare punct al ei se transferă în punctul simetric lui în raport cu dreapta l, se numeşte **transformare de simetrie în raport cu dreapta l**. Dacă în această transformare figura F se aplică în F_1, atunci **aceste două figuri se numesc simetrice în raport cu dreapta l.**

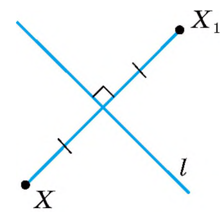


Fig.271

TEOREMA 16

Transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă este mişcare.

DEMONSTRAŢIE.

Fie că punctele arbitrare X şi Y ale figurii F se transferă la transformarea de simetrie în raport cu dreapta l, în punctele X_1 şi Y_1 ale figurii F_1 (fig.272, a). Să demonstrăm că $XY = X_1Y_1$.

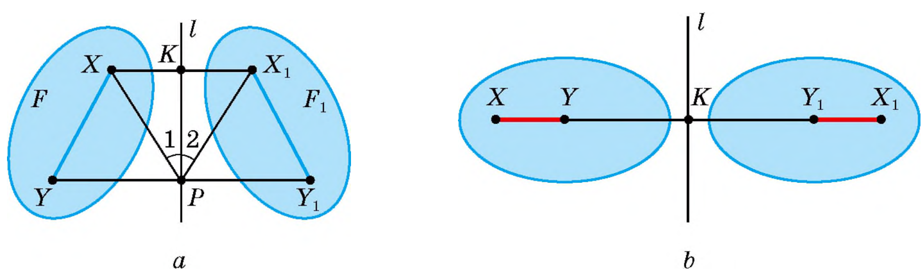


Fig.272

Dacă K şi P — punctele de intersecţie ale segmentelor XX_1 şi YY_1 cu dreapta l, atunci $\triangle XKP = \triangle X_1KP$ (după două catete). Deci, $XP = X_1P$ şi $\angle 1 = \angle 2$, de unde $\angle XPY = \angle X_1PY_1$. Deoarece $PY = PY_1$, reiesă că $\triangle XYP = \triangle X_1Y_1P$, de aceea $XY = X_1Y_1$.

Dacă punctele X, Y, X_1 şi Y_1 aparţin aceleiaşi drepte (fig.272,b), atunci

$$XY = |KX - KY| = |KX_1 - KY_1| = X_1Y_1.$$

Aşadar, în ambele cazuri $XY = X_1Y_1$, adică transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă păstrează distanţele dintre puncte. Această transformare este mişcare. □

Din teorema demonstrată reiesă că transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă transferă dreapta în dreaptă, orice figură într-o figură egală ei.

Dacă la simetria în raport cu dreapta l figura F se transferă în sine însăşi, atunci aşa o figură se numeşte **simetrică în raport cu o dreaptă** l, iar dreapta l – **axa de simetrie** a figurii F. De exemplu, trapezul isoscel este simetric în raport cu dreapta care trece prin mijlocurile bazelor lui (fig.273). Rombul, deosebit de pătrat, are două axe de simetrie (fig.274), pătratul – patru (fig.275), iar circumferinţa – o infinitate. Poligonul regulat cu n laturi are n axe de simetrie. Ele toate trec prin centrul lui. Figuri, simetrice în raport cu o dreaptă, deseori se întâlnesc în natură (fig.276), tehnică (fig.277) şi artă (fig. 278).

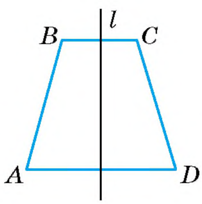


Fig.273

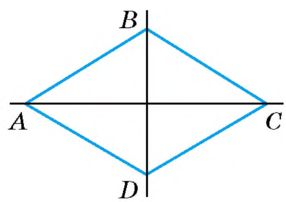


Fig.274

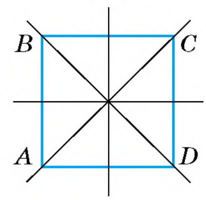


Fig.275

Fig.276

Fig.277

Fig.278

PENTRU CEI CURIOŞI

Două figuri simetrice în raport cu o dreaptă sunt egale şi sunt situate în acelaşi plan. Oare totdeauna translându-le numai în acest plan putem face ca ele să coincidă prin suprapunere? Nu. De exemplu, două triunghiuri dreptunghice neisoscele ABC şi $A_1B_1C_1$, simetrice în raport cu o dreaptă, sunt egale. Însă ca ele să coincidă prin suprapunere, trebuie ca pe unul din ei de-l întors cu altă parte, iar pentru aceasta de-l scos din plan în spaţiu (fig.279).

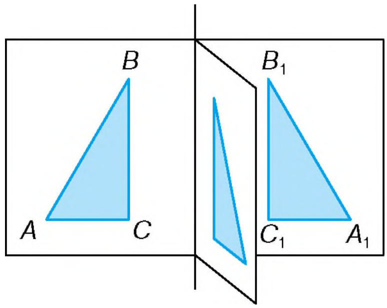


Fig.279

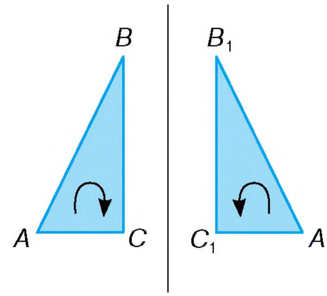


Fig.280

Se spune că astfel de triunghiuri sunt egale, însă orientate nu la fel. Dacă vârfurile A, B, C ale primului triunghi pot fi înconjurate unul după altul în direcţia mişcării acului orar, apoi vârfurile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ — în direcţia opusă (fig.280).

Aşadar, simetria în raport cu o dreaptă schimbă orientarea figurilor.

ÎNTREBĂRI ŞI EXERCIŢII PENTRU AUTOCONTROL

1. Care puncte se numesc simetrice în raport cu o oarecare dreaptă?
2. Care transformare se numeşte simetrie în raport cu o dreaptă?
3. Demonstraţi că simetria în raport cu o dreaptă este mişcare.
4. Care figuri se numesc simetrice în raport cu o dreaptă?
5. Câte axe de simetrie are: a) rombul; b) pătratul; c) circumferinţa?
6. Oare are axă de simetrie: a) triunghiul; b) trapezul; c) paralelogramul?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Construiţi triunghiul simetric triunghiului ABC, în raport cu dreapta l, situată în afara triunghiului (fig.281).

- Prin vârfurile $\triangle ABC$ ducem dreptele AA_1, BB_1, CC_1, perpendiculare cu dreapta l, şi punem pe ele segmentele $A_1A_2 = AA_1$, $B_1B_2 = BB_1$, $C_1C_2 = CC_1$. Unind punctele A_2, B_2, C_2, obţinem $\triangle A_2B_2C_2$, simetric triunghiului ABC în raport cu dreapta l.

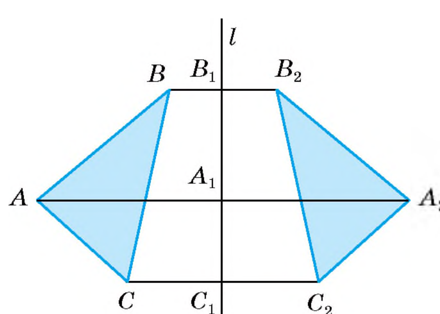


Fig.281

2 Punctele A şi B sunt situate de aceeaşi parte a dreptei l. Găsiţi pe această dreaptă aşa un punct K, ca să fie suma $AK+KB$ cea mai mică.

- Să notăm punctul B_1, simetric lui B în raport cu l (fig.282).
Punctul K de intersecţie al dreptelor AB_1 şi l este cel căutat. Într-adevăr, dacă K_1 este un oarecare alt punct al dreptei l, atunci

$$AK_1 + K_1B = AK_1 + K_1B_1 > AK + KB_1 = AK + KB.$$

Suma $AK + KB$ este mai mică decât orice sumă $AK_1 + K_1B$.

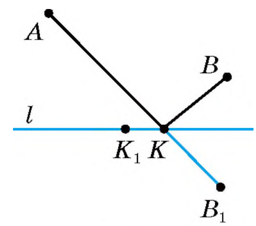


Fig.282

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

821. Care din figurile, reprezentate în figura 283, au axe de simetrie?

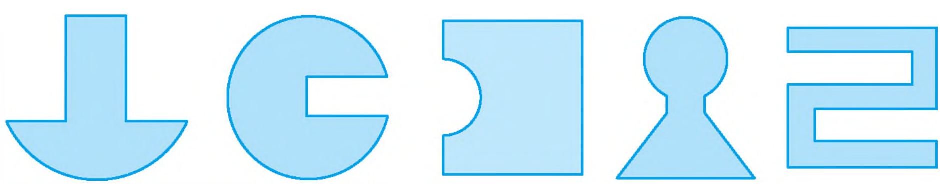


Fig.283

822. Care din literele aduse mai jos sunt simetrice în raport cu o dreaptă: A, Ă, Â, B, C, D, E, F, G, H, Y, M, N, O, P, Z, R, S, Ş, T, Ţ, U, V, W, X?
823. Oare este adevărat că bisectoarea unghiului este axa lui de simetrie?
824. Câte axe de simetrie are: a)segmentul; b) dreapta; c) circumferinţa?
825. Oare poate să aibă axă de simetrie linia frântă, care are 4 laturi? Dar 5 laturi, n laturi?
826. Câte axe de simetrie poate avea: linia frântă deschisă; b) linia frântă închisă?
827. Figura constă din două circumferinţe egale care se intersectează. Câte axe de simetrie are această figură?
828. O figură constă din trei circumferinţe egale care sunt tangente două câte două. Câte axe de simetrie are această figură?
829. Care patrulatere au numai o singură axă de simetrie?

A

830. Construiţi punctul, simetric cu punctul dat A în raport cu dreapta l.
831. Sunt date două puncte. Construiţi dreapta în raport cu care ele sunt simetrice.
832. Construiţi figura simetrică cu segmentul dat AB în raport cu dreapta dată l. Examinaţi câteva cazuri (fig.284).

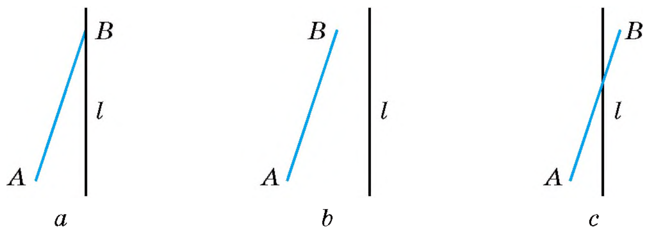


Fig.284

833. Construiţi triunghiul simetric cu triunghiul dat în raport cu dreapta dată l. Cercetaţi diferite cazuri (fig.285).

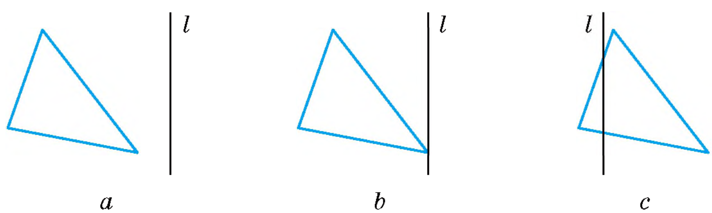


Fig.285

834. Construiţi figura simetrică circumferinţei date, în raport cu dreapta, care:
a) nu are cu circumferinţa puncte comune;
b) este tangentă la circumferinţă;
c) intersectează circumferinţa.
835. În interiorul unghiului AOB este dat punctul M. Punctele M_1 şi M_2 sunt simetrice cu punctul M în raport cu dreptele OA şi OB. Aflaţi măsura unghiului M_1OM_2, dacă $\angle AOB = \alpha$.
836. Circumferinţele cu centrele O şi O_1 se intersectează în punctele A şi B. Demonstraţi că punctele A şi B sunt simetrice în raport cu dreapta OO_1.
837. Demonstraţi că triunghiul care are axă de simetrie este isoscel.
838. Demonstraţi că triunghiul care are două axe de simetrie este echilateral. Câte axe de simetrie are triunghiul echilateral?
839. Demonstraţi că bisectoarea unghiului aparţine axei lui de simetrie.
840. Construiţi punctele $A(-3; 1)$, $B(4; 5)$, $C(-2; -6)$, $D(0; 3)$, $E(2; 0)$, $K(1; 1)$ şi punctele, care le sunt simetrice celor date în raport cu: a) axa OX; b) axa OY. Scrieţi coordonatele acestor puncte.
841. Stabiliţi tipul triunghiului ABC, dacă $A(-4; 2)$, $B(3; 6)$, $C(2; -2)$. Câte axe de simetrie are acest triunghi?

B

842. În patrulaterul $ABCD$ $AB = AD$ şi $CB = CD$. Demonstraţi că dreapta AC — axa lui de simetrie.

843. Diagonalele patrulaterului sunt axele lui de simetrie. Demonstraţi că acest patrulater este romb.

844. Se dă dreapta l, a cărei ecuaţie este $y = 2x + 3$. Scrieţi ecuaţiile dreptelor, simetrice lui l în raport cu: a) axa x; b) axa y.

845. Scrieţi ecuaţiile axelor de simetrie ale patrulaterului $ABCD$, dacă $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(1; 3)$, $D(-1; -1)$.

846. Două segmente sunt simetrice în raport cu dreapta a. Demonstraţi că mediatoarele acestor segmente tot sunt simetrice în raport cu dreapta a.

847. Demonstraţi că suma distanţelor de la orice punct al bazei unui triunghi isoscel ascuţitunghic până la laturile laterale ale lui este egală cu înălţimea triunghiului, coborâtă pe latura laterală.

848. Segmentele AB şi CD sunt simetrice în raport cu o oarecare dreaptă l. Scrieţi ecuaţia acestei drepte, dacă $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(-3; 2)$, $D(-2; -1)$. Faceţi desenul.

849. Câte axe de simetrie are figura, care este reuniunea circumferinţelor:
a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ şi $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ şi $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
c) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ şi $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$?
Faceţi desenul.

850. Determinaţi tipul patrulaterului $ABCD$, dacă $A(-3; -1)$, $B(-5; 3)$, $C(-1; 5)$, $D(1; 1)$. Câte axe de simetrie are el? Scrieţi ecuaţiile lor.

851. Printr-un punct interior al unghiului dat duceţi o dreaptă care taie pe laturile lui segmente egale.

852. Se dă un unghi, al cărui vârf este inaccesibil. Construiţi un unghi de două ori mai mare decât cel dat.

853. Vârfurile A,B şi C ale triunghiului sunt inaccesibile. Construiţi segmentele egale cu AB, AC şi BC.

854. Punctele A şi B sunt situate de părţi diferite ale dreptei l. Găsiţi pe dreapta l aşa un punct, ca bisectoarea unghiului AMB să aparţină acestei dreptei.

855. Un patrulater convex, care are numai o singură axă de simetrie, care trece prin două vârfuri ale lui, se numeşte deltoid. Desenaţi un oarecare deltoid şi examinaţi proprietăţile lui.

856. Fiecare din figurile *(A-E)* are axă de simetrie, care este dată de o oarecare dreaptă *(1-4)*. Stabiliţi corespondenţa dintre dreptele (1-4) şi figurile *(A-E)*.

1	$y = x + 1$	**A**	Patrulaterul $ABCD$, dacă $A(-1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 1)$
2	$y = -x - 2$	**B**	Triunghiul ABC, dacă $A(2; -1)$, $B(-1; 8)$, $C(8; 5)$
3	$y = 7 - x$	**C**	Circumferinţa $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$
4	$y = 0$	**D**	Patrulaterul $ABCD$, dacă $A(0; 1)$, $B(1; 6)$, $C(6; 7)$, $D(5; 2)$
		E	Unghiul AOB, dacă $A(5; 5)$, $O(0; 0)$, $B(3; -3)$

Însărcinare practică

857. Faceţi o prezentare pe tema „Geometria din jurul nostru”. Afară de altele (geometria în natură, viaţa de toate zilele, tehnică, sport, artă, militărie ş.a), arătaţi, unde, când voi personal utilizaţi simetria şi proprietăţile ei.

Probleme pentru repetare

858. Construiţi un pătrat cu latura de 3 cm şi pătratul simetric lui în raport cu un oarecare punct *O*. Aflaţi perimetrul şi aria pătratului construit.

859. Perimetrul triunghiului este egal cu $2p$. Aflaţi laturile lui, dacă ele sunt proporţionale cu numerele 3, 4 şi 5.

860. O parcelă care are formă de cerc cu diametrul 90 m, trebuie îngrădită cu plasă nervurată. Câţi stâlpişori sunt necesari pentru această îngrădire, dacă distanţa dintre stâlpişorii vecini (pe arcul de circumferinţă) trebuie să fie de 90 cm?

861. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt egale cu a şi b.

Geometria din jurul nostru

Palatul Mariinsk din Kiev

§ 24 Rotaţia

Fie că se dă punctul O şi figura arbitrară F (fig. 286). Rotim punctul X al acestei figuri în jurul punctului O cu unghiul α în direcţia mişcării acului de ceasornic. Totodată punctul X se aplică în aşa un punct X_1, că măsura unghiulară a arcului XX_1 cu centrul O este egală cu α (OX şi OX_1 – raze egale). Dacă cu aşa un procedeu de rotit în jurul punctului O cu unghiul α fiecare punct al figurii F, atunci obţinem figura F_1. Se spune că rotaţia în jurul punctului O cu unghiul α transferă figura F în figura F_1.

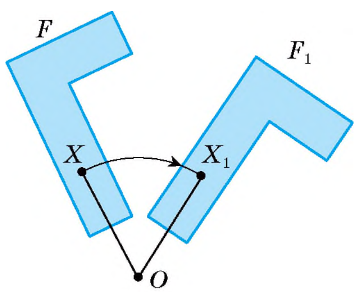


Fig.286

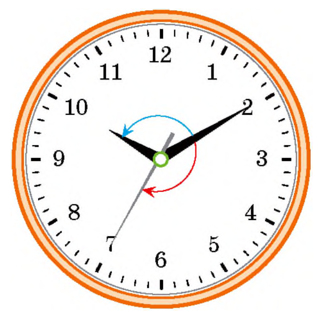


Fig.287

Punctul O se numeşte **centru de rotaţie**, iar unghiul XOX_1– **unghi de rotaţie**. Se poate efectua rotaţia atât în direcţia mişcării acului de ceasornic, cât şi împotriva mişcării lui (fig. 287).

TEOREMA 17

Rotaţia în jurul unui punct este mişcare.

DEMONSTRAŢIE.

Admitem că la rotaţia figurii F în jurul punctului O cu unghiul α punctele A şi B ale acestei figuri se transferă în punctele A_1 şi B_1 ale figurii F_1 (fig. 288). Atunci $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ şi $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$. Dacă punctele A, B şi O nu aparţin unei drepte, atunci $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (după două laturi şi unghiul făcut de ele, deoarece $\angle AOB = \angle A_1OB_1$). Deci, în acest caz $AB = A_1B_1$.

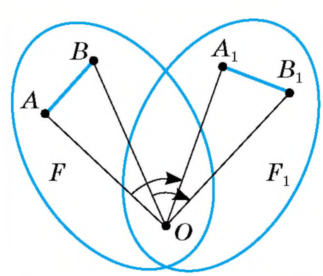


Fig.288

Dacă punctele A, B şi O sunt situate pe aceeaşi dreaptă (fig.289), atunci

$$AB = |OA - OB| = |OA_1 - OB_1| = A_1B_1.$$

Cazul când punctul este situat între A şi B, examinaţi-l de sine stătător.

Aşadar, totdeauna $AB = A_1B_1$. □

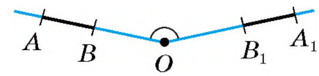


Fig.289

După cum vedem, rotaţia este unul din felurile de mişcare. De aceea la rotaţie dreapta trece în dreaptă, orice figură – în figură egală însăşi ei.

Există figuri, care la rotaţia în jurul unui punct se aplică în sine însăşi. Din capitolul precedent voi deja ştiţi că unghiul la centru al unui poligon regulat cu n laturi este egal cu $\frac{360°}{n}$. De acea orice poligon cu n latri regulat trece în sine însăşi la rotaţia în jurul centrului său cu unghiul de $\frac{360°}{n}$. De exemplu, trec în sine însuşi triunghiul regulat, patrulaterul şi octagonul regulaţi (fig. 290).

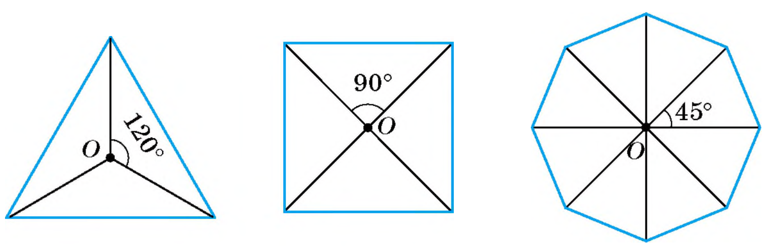


Fig.290

Atrageţi atenţia!

Rotaţia cu 180° în jurul punctului O – simetrie în raport cu acest punct (fig. 291).

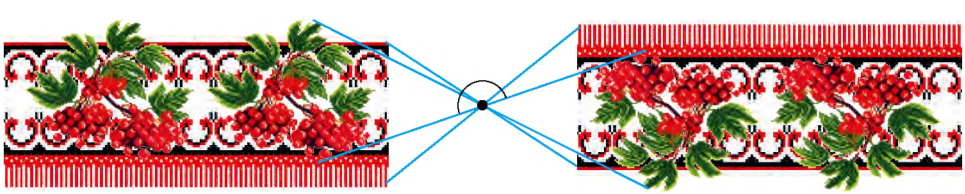


Fig.291

Este adevărată şi aşa o definiţie. **Simetria în raport cu un punct este rotaţia cu 180° în jurul acestui punct.**

PENTRU CEI CURIOŞI

Noţiunea geometrică **rotaţia** trebuie deosebită de rotaţia fizică. **Rotaţia fizică** aceasta-i un proces care este determinat de timp, viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară ş.a.

Rotaţia poate fi uniformă sau neuniformă, să se efectueze cu un unghi oricât de mare într-o direcţie sau alta. De exemplu, dacă roata de curea (fig. 292) va executa două sau zece rotaţii complete, se spunea că ea s-a rotit cu 720° sau 3600°. Rotaţia ca transformare geometrică nu este legată cu timpul sau viteza, da este transferarea unei figuri în alta, egală cu ea. Mai sus s-a spus despre rotaţia figurii. Însă învăţaţii mai des examinează rotaţia întregului plan. Rotaţia planului se poate da univoc, indicând centrul ei O şi unghiul α, unde $0 < \alpha \leq 180°$.

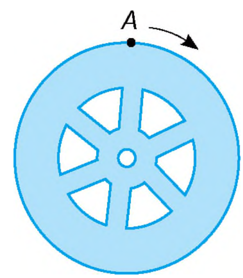


Fig.292

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformare geometrică se numeşte rotaţie?
2. Oare este rotaţia mişcare? De ce?
3. Formulaţi proprietăţile rotaţiei în jurul unui punct.
4. Care rotaţie se numeşte simetrie în raport cu un punct?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Sunt date două puncte diferite M şi O. Construiţi punctul M_1, în care trece punctul M la rotaţia în jurul punctului O cu 90°.

- Ducem semidreapta OM şi construim semidreapta OX astfel, ca $\angle MOX = 90°$ în direcţia mişcării acului de ceasornic. Pe semidreapta OX de la punctul O punem segmentul egal cu segmentul OM. Obţinem punctul M_1 (fig. 293).

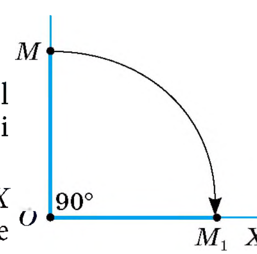


Fig. 293

2 Se dă dreapta a şi punctul $O \notin a$. Rotiţi dreapta a în jurul punctului O cu un oarecare unghi α în direcţia mişcării acului de ceasornic.

- *Primul procedeu.*
Coborâm perpendiculara OA pe dreapta a (fig.294). Rotim această perpendiculară în jurul punctului O cu unghiul α în direcţia mişcării acelor de ceasornic. Pentru aceasta construim unghiul $AOB = \alpha$ şi pe semidreapta OB punem segmentul $OB=OA$. Prin punctul B ducem dreapta b, perpendiculară pe OB. Dreapta b este aceea care trebuia construită.

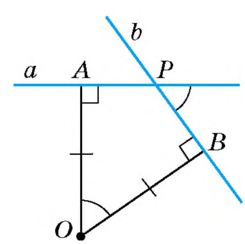


Fig. 294

Al doilea procedeu.
Notăm două puncte arbitrare A şi B ale dreptei a şi rotim fiecare din ele cu unghiul α în direcţia mişcării acelor de ceasornic. Dacă totodată ele vor trece în punctele A_1 şi B_1, atunci dreapta A_1B_1 este aceea, care trebuia construită. Faceţi desenul de sine stătător.

3 Rotaţia cu unghiul α în jurul punctului O trece dreapta a în b. Aflaţi unghiul β format de aceste drepte.

- Dacă dreptele a şi b se intersectează în punctul P, iar OA şi OB sunt perpendiculare pe dreptele a şi b, atunci $\angle APB = 180° - \alpha$. Dacă unghiul α este ascuţit sau drept, atunci $\beta = \alpha$ (fig. 294). Dacă unghiul α este obtuz, atunci $\beta = 180° - \alpha$(fig.295).

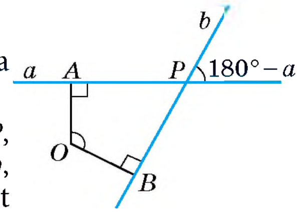


Fig.295

Probleme şi exerciţii

Efectuaţi oral

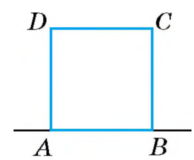


Fig.296

862. $ABCD$ – pătrat (fig.296). Cu ce unghi trebuie rotită dreapta AB în jurul punctului A, ca ea să treacă prin punctul: a) C; b) D; c) B?

863. Cu ce unghi trebuie rotită dreapta AB în jurul punctului C, ca nou-obţinuta dreaptă să fie: a) perpendiculară pe AB; b) paralelă cu AB?

864. Indicaţi coordonatele punctelor în care trec punctele A, B, C, D, E, F(fig. 297) la rotaţia în jurul originii de coordonate cu unghiul de 90°:
a) în direcţia mişcării acului de ceasornic;
b)împotriva mişcării acului de ceasornic.

865. În jurul cărui punct şi cu ce unghi trebuie de rotit una din dreptele paralele, ca ea să coincidă cu cealaltă dreaptă?

866. Două circumferinţe egale sunt tangente în punctul A. Cu ce unghi trebuie rotită una din ele în jurul punctului A pentru ca ea să coincidă cu cealaltă circumferinţă?

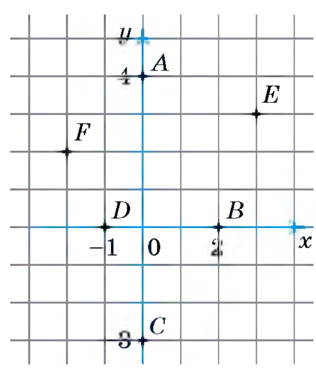


Fig.297

A

867. Se dau punctele O şi A. Executaţi rotaţia punctului A în jurul punctului O cu unghiul de 60° în direcţia mişcării acului de ceasornic.

868. Se dă segmentul AB şi punctul O, ce nu aparţine dreptei AB. Rotiţi segmentul AB în jurul punctului O cu unghiul de 45° împotriva mişcării acului de ceasornic.

869. Segmentul AB la rotaţia lui cu 60° în jurul punctului A s-a aplicat în segmentul AB_1. Aflaţi distanţa BB_1, dacă $AB = a$.

870. Rotiţi triunghiul dat ABC în direcţia mişcării acului de ceasornic cu 90° în jurul: a) vârfului A; b) mijlocului laturii BC.

871. Pătratul $ABCD$ l-au rotit în jurul punctului A astfel, că vârful lui B a trecut în D, iar C – în C_1. Aflaţi distanţa CC_1, dacă AB=a. Cu ce unghi s-a realizat rotaţia?

872. Sunt date două drepte perpendiculare. Aflaţi locul geometric al punctelor în jurul cărora se poate roti una din drepte ca ea să se suprapună pe prima dreaptă.

873. În jurul cărui punct şi cu ce unghi trebuie de rotit triunghiul echilateral ca el să coincidă cu sine însuşi?

874. Care patrulater poate fi rotit în jurul unui oarecare punct O cu 90° astfel, ca el să coincidă cu sine însuşi?

875. Un poligon regulat cu n laturi la rotaţia în jurul centrului cu unghiul β în direcţia mişcării acului de ceasornic trece în sine însuşi. Aflaţi cel mai mic unghi β ($\neq 0$) pentru: a) $n = 5$; b) $n = 6$; c) $n = 9$; d) $n = 10$; e) $n = k$.

876. Se dau punctele $A(-2; 5)$, $B(3; 6)$, $C(4; 1)$. Construiţi triunghiul $A_1B_1C_1$, în care va trece triunghiul ABC la rotaţia lui în jurul originii de coordonate cu unghiul de 90° în direcţia mişcării acelor de ceasornic. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului $A_1B_1C_1$.

B

877. Punctul $A(2; 3)$ la rotaţia în jurul originii de coordonate a trecut în punctul $B(3; -2)$. Cu ce unghi s-a executat rotaţia?

878. Aflaţi m şi n, dacă:
a) punctul $M(m; 1)$ trece în punctul $N(n; 4)$ la rotaţia în jurul punctului $O(0; 0)$ cu 90° în direcţia mişcării acului de ceasornic;
b) punctul $E(-4; m)$ trece în punctul $F(3; n)$ la rotaţia în jurul punctului $P(1; 4)$ cu 90° împotriva mişcării acului de ceasornic.

879. Sunt date două circumferinţe egale. Aflaţi locul geometric al punctelor în jurul cărora se poate efectua rotaţia uneia din circumferinţe ca ea să coincidă cu cealaltă.

880. Triunghiul AB_1C_1 — imaginea triunghiului regulat ABC la rotaţia lui în jurul punctului A cu unghiul de 60°: a) în direcţia mişcării acelor de ceasornic; b) împotriva mişcării acelor de ceasornic. Aflaţi BC_1, dacă $AB = a$.

881. La rotaţia hexagonului regulat $ABCDFF$ în jurul centrului lui cu 90° în direcţia mişcării acelor de ceasornic s-a obţinut hexagonul $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Aflaţi AA_1, AB_1, AC_1, AD_1.

882. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului ABC sunt construite în exterior triunghiurile echilaterale ABP şi BKC. Demonstraţi, că $AK=PC$. Aflaţi unghiul format de dreptele AK şi PC.

883. Patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ — imaginea pătratului ABCD, obţinută la rotaţia în jurul punctului A cu 45°. Aflaţi BC_1 şi BD_1, dacă $AB = a$. Examinaţi două cazuri:

a) rotaţia în direcţia mişcării acului de ceasornic;

b) rotaţia împotriva mişcării acului de ceasornic.

884. Se dau două segmente egale (fig.298). Aflaţi punctul, rotaţia în jurul căruia transferă pe unul din aceste segmente în celălalt.

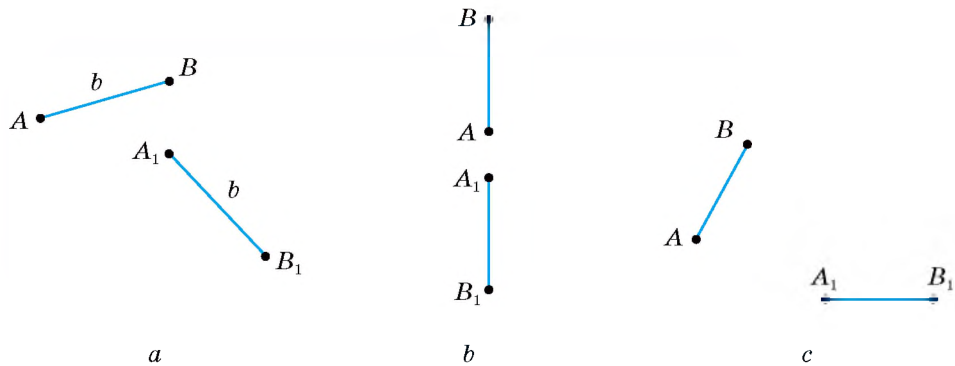


Fig.298

885. Pe segmentele succesive *AB* şi *BC* ale dreptei *AC* de aceeaşi parte a ei sunt construite triunghiurile regulate *ABK* şi *BCP*. Punctele *M* şi *H* – mijlocurile segmentelor *AP* şi *CK*. Demonstraţi că triunghiul *BMH* este regulat.

886. Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului ABC în exterior sunt construite pătratele *ABMH* şi *ACPK*. Demonstraţi că mediana *AE* a triunghiului *ABC* este perpendiculară pe segmentul *HK* şi este egală cu jumătate din el.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

887. Tăieţi din hârtie în pătrăţele un pătrat şi vopsiţi-l aşa cum se arată în figura 299. Cu ajutorul rotaţiei cu unghiul de 90°şi a simetriei axiale încercaţi să creaţi ornamentul, reprezentat în figura 300. Cu care transformare trebuie de început? Care alt motiv şi altă transformare se poate utiliza pentru a obţine un ornament asemănător?

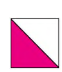


Fig.299

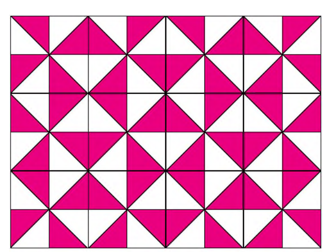


Fig.300

Probleme pentru repetare

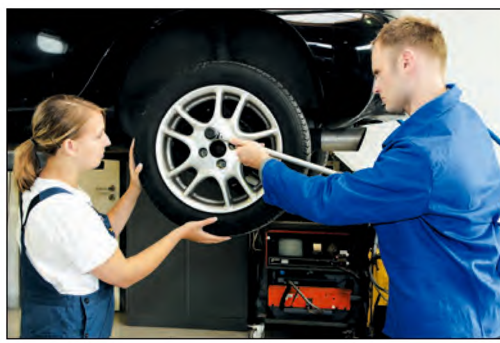
888. Laturile unui triunghi sunt proporţionale cu numerele 3, 5 şi 7. Aflaţi laturile triunghiului asemenea lui, dacă perimetrul lui este egal cu 3 m.

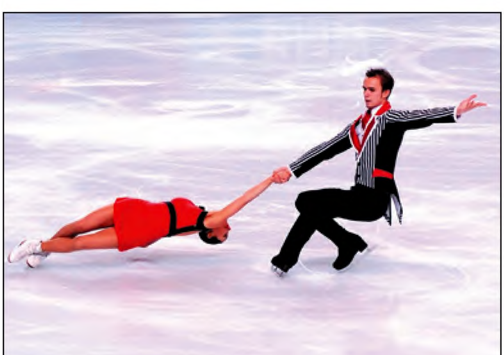
889. De pe o şalupă într-un oarecare moment se vede farul sub ughiul de 30° în direcţia de mişcare a navei, iar când şalupa a parcurs cu acelaşi curs 20,4 km, farul deja se vedea sub unghiul de 135° în stânga cursului navei. De aflat distanţa de la şalupă până la far în fiecare din momentele, când se măsura unghiul.

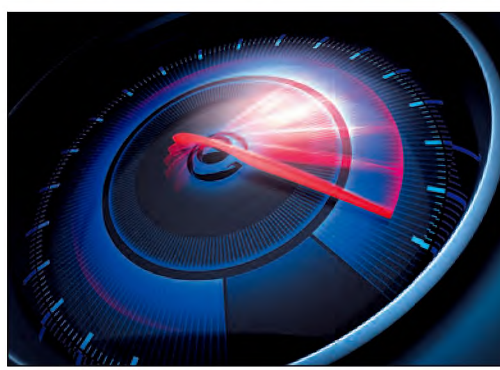
890. Catetele triunghiului dreptunghic se raportă ca 2:3. Calculaţi sinusurile, cosinusurile şi tangentele unghiurilor ascuţite ale lui.

891. Triunghiul dreptunghic, o catetă a cărui este egală cu n, este înscris în circumferinţa de raza r. Aflaţi perimetrul triunghiului.

Geometria din jurul nostru







Rotaţia în diferite domenii de activitate umană

§ 25 Transport paralel

Unul din exemplele de transformări geometrice este **transportul paralel (deplasarea de translaţie).**

Admitem că se dă figura F (fig.301). Dacă fiecare punct al ei de-l mutat în una şi aceeaşi direcţie la una şi aceeaşi distanţă XX_1 (sau cu vectorul $\overline{XX_1}$), atunci obţinem figura F_1. În acest caz se spune că transportul paralel (deplasarea de translaţie), care transferă punctul X în X_1, aplică figura F în F_1.

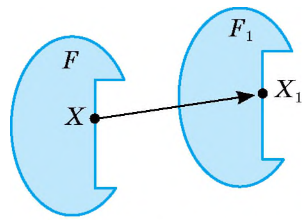


Fig.301

Aceleaşi desene, care periodic se repetă pe ţesături, pânze, tapete, pe cămăşile brodate (fig.302) pot fi executate cu ajutorul transportului paralel. Tot aceeaşi se poate spune despre etajele identice ale blocurilor de locuinţe, secţiile îngrădirii (fig.303), secţiile parchetului de podea, plăcile la aeroporturi, pieţe (fig. 304) ş.a.


Fig.302

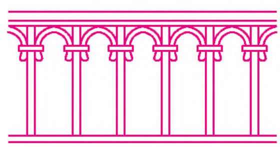


Fig.303

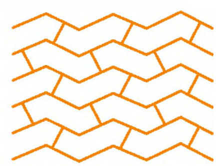


Fig.304

TEOREMA 18

Transportul paralel – mişcare.

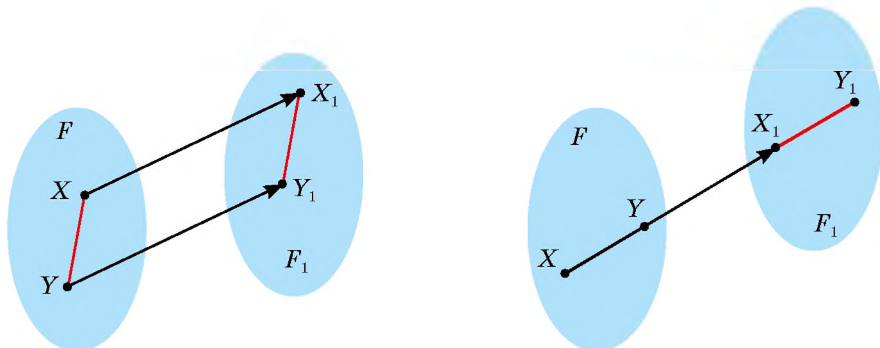
DEMONSTRAŢIE.

Dacă segmentul X_1Y_1 — imaginea segmentului XY la transportul paralel cu vectorul $\overline{XX_1}$, atunci segmentele XX_1 şi YY_1 sunt egale şi paralele sau sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Dacă aceste segmente sunt egale şi paralele atunci patrulaterul XX_1Y_1Y — – paralelogram. Deci, $XY = X_1Y_1$ (fig.305,a).

Dacă segmentele egale XX_1 şi YY_1 aparţin aceleaşi drepte (fig.305,b), atunci

$$XY = |XX_1 - YX_1| = |YY_1 - YX_1| = X_1Y_1.$$

Aşadar, în ambele cazuri $XY = X_1Y_1$. La transportul paralel se păstrează distanţa dintre puncte. De aceea transportul paralel este mişcare. □



a *b*

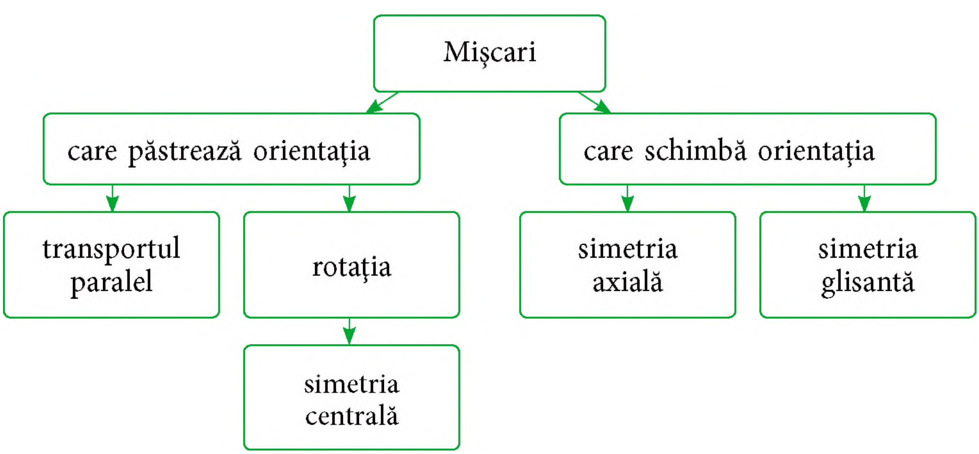
Fig.305

Transportul paralel transferă dreapta pe o dreaptă paralelă cu ea, orice figură – în figura egală ei. Rezolvând probleme geometrice sau demonstrând teoreme, uneori se efectuează transportul paralel separat al unor părţi ale figurii. În acest caz se vorbeşte despre **metoda transportului paralel**.

PENTRU CEI CURIOŞI

Până acuma noi am considerat tipuri aparte de mişcări: simetria în raport cu un punct, simetria în raport cu o dreaptă, rotaţia, transportul paralel.Merită atenţia a lor compoziţii – executarea succesivă a două sau a câtorva din ele. De exemplu, dacă transportul paralel transferă figura F în F_1, iar simetria în raport cu o dreaptă trece figura F_1 în F_2, atunci se spune că figura F în F_2 este transferată de compoziţia transportului paralel şi de simetria în raport cu o dreaptă. Compoziţia transportului paralel în lungul dreptei l şi a simetriei în raport cu dreapta l se numeşte **simetrie glisantă**. Deoarece simetria în raport cu o dreaptă schimbă orientaţia figurilor, iar transportul paralel nu o schimbă, reiesă că simetria glisantă schimbă orientaţia figurilor.

Corelaţia dintre mişcările examinate poate fi reprezentată cu următoarea schemă



ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1.Care transformare se numeşte transport (deplasare) paralelă?
2. Aduceţi exemple de transport paralel din mediul înconjurător.
3. Formulaţi şi demonstraţi teorema despre proprietatea transportului paralel.
4 Oare se păstrează egalitatea figurilor la transportul paralel?
5. Care figură este imaginea dreptei la transportul paralel cu un vector nenul?
6. Ce se numeşte metoda transportului paralel?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Construiţi triunghiul, în care trece triunghiul ABC la transportul paralel, care transferă punctul A în A_1 (fig.306,a).

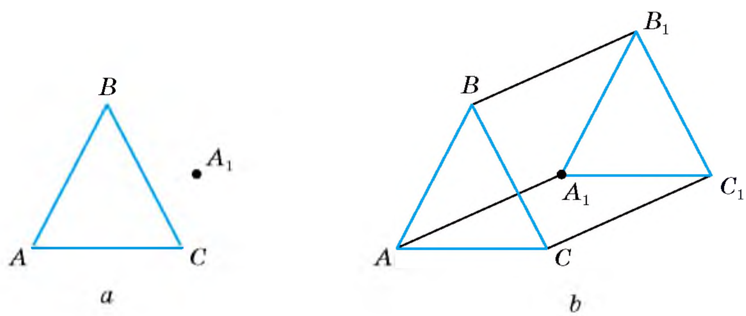


Fig.306

- Ducem segmentul AA_1. Prin punctele B şi C ducem drepte, paralele cu AA_1, şi punem pe ele segmentele $BB_1 = AA_1$ şi $CC_1 = AA_1$. Unim punctele A_1, B_1, C_1 cu segmente. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este cel căutat (fig.306,b).

2 La transportul paralel cu vectorul $\vec{a}$ punctul $A(1;\ 3)$ se transferă în punctul $A_1(-2;\ 5)$. Aflaţi coordonatele imaginii punctului $B(-4;\ 7)$ la acest transport paralel.

- Să aflăm coordonatele $\vec{a}$, la care s-a executat transportul paralel.
$\vec{a} = \overline{AA_1} = (-3;\ 2)$. Fie, că imaginea punctului $B(-4;\ 7)$ va fi punctul $B_1(x;\ y)$. Atunci $\overline{BB_1} = (x+4;\ y-7)$. Deoarece $\overline{BB_1} = a$, reiesă că $x + 4 = -3$, $y - 7 =$ $=2$, de unde $x = -7$, $y = 9$.
Deci, $B_1(-7;\ 9)$.

PROBLEME ŢI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

892. Arătaţi coordonatele punctelor, în care trec punctele, reprezentate în figura 307 la transportul paralel, care punctul O (0;0) îl trece în punctul: a) $D(3;\ 0)$; b) $K(-1;\ 0)$; c) $A(2;\ 2)$.

893. Se dau două drepte paralele. Câte există deplasări paralele, la care una din ele trece în cealaltă?

894. Două segmente egale sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Cu care deplasare paralelă se poate trece unul din segmente în celălalt?

895. Oare există deplasare paralelă care transferă una din laturile trapezului în celălaltă latură?

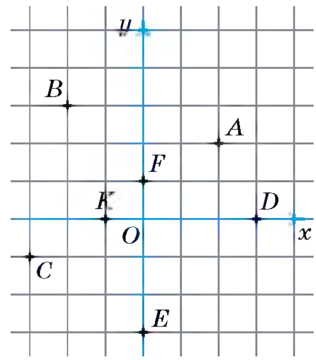


Fig.307

A

896. Notaţi punctele A, A_1 şi B. Construiţi punctul, în care trece punctul B la deplasarea paralelă cu vectorul $\overline{AA_1}$.

897. Se dă segmentul AB şi punctul K. Executaţi deplasarea paralelă a segmentului AB în aşa un mod, ca mijlocul lui să treacă în punctul K.

898. Construiţi figura în care trece triunghiul dat ABC la deplasarea paralelă, care transferă punctul A în punctul C.

899. Construiţi figura, în care trece paralelogramul dat $ABCD$ la deplasarea paralelă cu vectorul $\overline{AC}$.

900. Executaţi deplasarea paralelă a dreptei date AB astfel, ca punctul ei A să treacă în punctul dat C. Examinaţi două cazuri:
a) $C \notin AB$; b) $C \in AB$.

901. Executaţi deplasarea paralelă a circumferinţei date (fig.308) astfel, ca centrul ei să treacă în punctul dat: a) O_1; б) O_2; в) O_3.

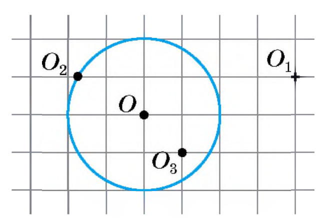


Fig. 308

902. Aflaţi punctele care sunt imaginile punctelor $M(4;\ -2)$, $P(6;\ 0)$, $K(-7;\ 4)$ la deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a}=(1;\ -3)$.

903. La deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$ imaginea punctului $A(1;\ -6)$ este punctul $A_1(-7;\ 2)$. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{a}$.

904. Oare există transport paralel care transferă punctul $A(1;\ 5)$ în punctul $A_1(4;\ 2)$, iar punctul $B(-1;\ 3)$ în punctul: a) $B_1(3;\ 1)$; b) $B_2(2;\ 0)$; c) $B_3(-4;\ 6)$?

905. Se dau punctele $M(-3; 7)$, $N(-1; 1)$, $P(1; 2)$. La transportul paralel mijlocul segmentului MN trece în punctul P. Faceţi desenul şi indicaţi coordonatele punctelor, în care trec punctele M şi N.

906. Triunghiul KPT este obţinut în rezultatul deplasării paralele a triunghiului ABC. Demonstraţi că medianele corespunzătoare ale acestor triunghiuri sunt egale şi paralele. Dar bisectoarele?

B

907. Executaţi transportul paralel al circumferinţei a cărei ecuaţie este $(x - 2)^2 + + (y + 5)^2 = 9$, în aşa un mod, ca centrul ei O să treacă în punctul $O_1(3; -2)$. Scrieţi ecuaţia circumferinţei obţinute.

908. La deplasarea paralelă dreapta a, a cărei ecuaţie este $2x + y = 5$, trece în dreapta l, care trece prin punctul: a) $A(-1; -1)$; b) $B(2; 5)$. Scrieţi ecuaţia dreptei l.

909. La deplasarea paralelă imaginea punctului $A(-1; 3)$ este punctul $A_1(5; -2)$, iar imaginea punctului $B(x; -3)$ — punctul $B_1(-2; y)$. Aflaţi x şi y.

910. Punctele $A_1(2; 9)$, $O_1(2; 5)$, $C_1(5; 5)$ sunt imaginile punctelor $A(0; y)$, $O(0; 0)$, $C(x; 0)$ la transportul paralel. Aflaţi x şi y şi perimetrul triunghiului AOC.

911. Demonstraţi că unghiurile de la baza trapezului isoscel sunt egale.

912. Demonstraţi că diagonalele trapezului isoscel sunt egale.

913. Demonstraţi că deplasarea paralelă se poate realiza, utilizând două simetrii în raport cu axe paralele.

914. Punctele $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 3)$ — vârfuri ale paralelogramului ABCD. Aflaţi imaginile punctelor A, B, C şi D la transportul paralel cu vectorul $\overline{AC}$.

915. Pe laturile AB şi CD ale paralelogramului ABCD sunt construite pătrate cu centrele O şi O_1. Demonstraţi, că mijlocul segmentului OO_1 — centrul paralelogramului.

916. De aceeaşi parte a unui segment rectiliniu de cale ferată se află două sate A şi B. În ce loc trebuie de construit peronul KP ca suma distanţelor AK, KP şi PB să fie cea mai mică?

917. Unde trebuie de construit podul KP, perpendicular la malurile râului, ca drumul $AKPB$ între punctele A şi B să fie cel mai scurt (fig.309)?

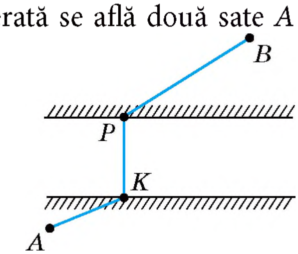


Fig.309

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

918. 1). Liniază o parte a foii din caiet în pătrăţele mai mici şi transferaţi pe ele figura 310 sau 311. Folosind deplasarea paralelă, faceţi reprezentarea broderiei de două ori mai lungă.

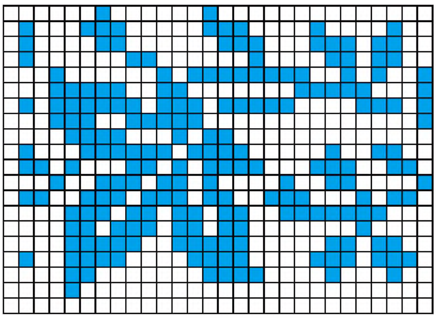


Fig.310

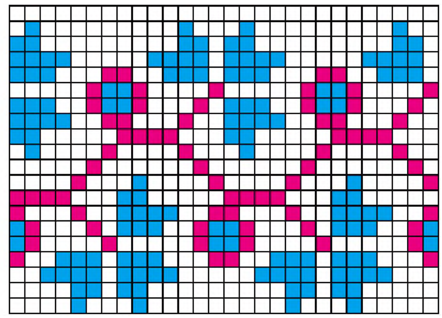


Fig.311

2) Elaboraţi o broderie sau ornament propriu.

PROBLEME PENTRU REPETARE

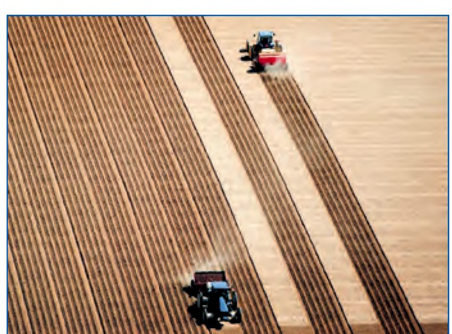
919. Oare se deosebesc noţiunile „triunghi regulat” şi „triunghi echilateral”?

920. Aflaţi laturile triunghiului dreptunghic, dacă cea mai mare din ele este egală cu 20 cm, iar sinusul a unuia din unghiuri este egal cu 0,2.

921. Aflaţi catetele triunghiului dreptunghic, dacă ipotenuza lui este egală cu c, iar aria cu S.

922. Se dă triunghiul cu laturile 2cm, 3cm şi 4cm. Aflaţi triunghiul asemenea cu el,al cărui perimetru este de 27 cm.

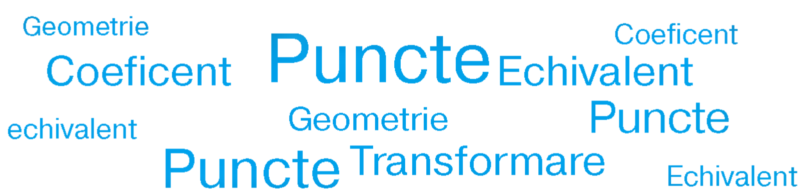
GEOMETRIADIN JURUL NOSTRU



Deplasarea paralelă şi agricultura

§ 26 Transformarea de asemănare

În viaţa cotidiană noi deseori ne întâlnim cu obiecte care au aceeaşi formă, însă au dimensiuni diferite. În plan acesta-i tabloul şi copia lui, planurile aceluiaşi obiect, făcute la diferite scări, literele şi cifrele, culese la computator cu acelaşi caracter, însă de dimensiuni diferite.



Transformarea figurii F în figura F_1, la care distanţele dintre puncte se schimbă de unul şi acelaşi număr de ori k, $k > 0$, se numeşte **transformare de asemănare**. Aceasta înseamnă: dacă punctele arbitrare A şi B ale figurii F la transformarea de asemănare trec în punctele A_1 şi B_1 ale figurii F_1, atunci $A_1B_1 = kAB$. Numărul k se numeşte **coeficientul de asemănare**.

Coeficientul de asemănare totdeauna este pozitiv. Dacă $k = 1$, atunci transformarea de asemănare este mişcare.

TEOREMA 19

Transformarea de asemănare transferă trei puncte, care aparţin unei drepte, în puncte, care sunt situate pe aceeaşi dreaptă şi păstrează ordinea repartizării reciproce a acestor puncte.

DEMONSTRAŢIE.

Fie că punctele A, B şi C aparţin unei drepte astfel, că punctul B este situat între punctele A şi C. Atunci $AC = AB + BC$. Pe baza definiţiei a transformării de asemănare pentru punctele A_1, B_1 şi C_1, care sunt imaginile punctelor A, B şi C, se realizează aşa egalităţi: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Din ultima egalitate avem:

$$A_1C_1 = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A_1B_1 + B_1C_1,$$

$$\text{sau } A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Din ultima egalitate reiesă că punctele A_1, B_1 şi C_1 sunt situate pe aceeaşi draptă şi punctul B_1 se află între punctele A_1 şi C_1. □

Se pot demonstra şi mai aşa proprietăţi ale asemănării. Transformarea de asemănare transferă segmentul în segment, semidreapta – în semidreaptă, dreptele paralele – în drepte paralele, unghiul – în unghi egal cu el (încercaţi să faceţi aceasta independent).

Pentru orice transformare de asemănare cu coeficientul k există transformarea inversă care este transformare de asemănare cu coeficientul de asemănare $\frac{1}{k}$.

Două figuri se numesc **asemenea** dacă ele se transferă una în alta printr-o transformare de asemănare. Dacă figura F este asemenea cu figura F_1, atunci se scrie $F \sim F_1$.

Relaţia de asemănare a figurilor are următoarele proprietăţi:

1) totdeauna $F \sim F$;

2) dacă $F \sim F_1$, atunci şi $F_1 \sim F$;

3) dacă $F \sim F_1$ şi $F_1 \sim F_2$ atunci $F \sim F_2$.

În clasa a 8-a aţi făcut cunoştinţă cu asemănarea triunghiurilor. Acum relaţia de asemănare poate fi extinsă asupra oricăror figuri geometrice. De exemplu, se poate demonstra, că **două poligoane sunt asemenea, dacă laturile lor sunt proporţionale, iar unghiurile corespunzătoare sunt egale.** De aceea două pătrate totdeauna sunt asemenea. Totdeauna vor fi asemenea şi două segmente, două circumferinţe, două cercuri.

Voi deja ştiţi că raportul perimetrelor triunghiurilor asemenea este egal cu coeficientul de asemănare. Această proprietatea este adevărată şi pentru alte figuri geometrice.

TEOREMA 20

Raportul perimetrelor ale poligoanelor asemenea este egal cu coeficientul de asemănare.

DEMONSTRAŢIE.

Fie $ABC...M$ şi $A_1B_1C_1...M_1$ — poligoane asemenea cu coeficientul de asemănare k (fg.312), adică $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, ..., $M_1A_1 = kMA$. Atunci $P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + ... + M_1A_1 = kAB + + kBC + ... + kMA = k(AB + BC + ... + MA) = kP$, de unde $P_1 : P = k$. □

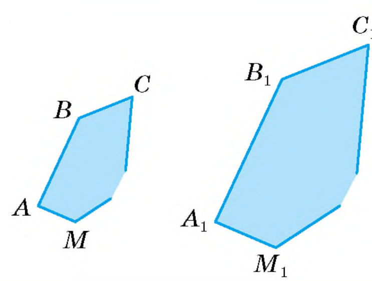


Fig.312

TEOREMA 21

Raportul ariilor ale poligoanelor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare.

DEMONSTRAŢIE.

Să demonstrăm mai întâi această teoremă pentru triunghiuri (fig.313). Fie $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ cu coeficientul de asemănare k, adică $A_1B_1 = kAB$, $A_1C_1 = kAC$, $\angle A_1 = \angle A$.

Atunci $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1 = \dfrac{1}{2} kAB \cdot kAC \cdot \sin A =$
$= k^2 \left(\dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \right) = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$, de unde $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = k^2$.

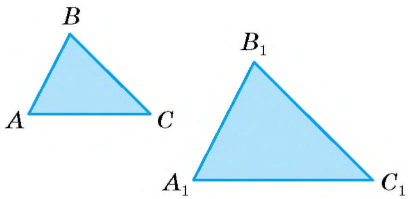


Fig.313

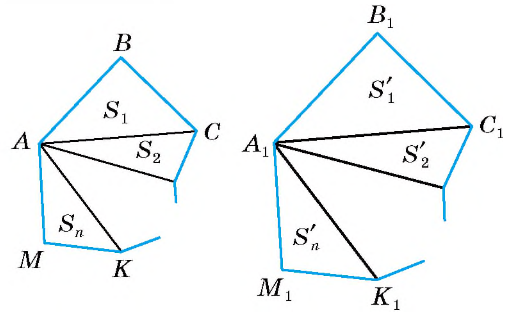


Fig.314

Să demonstrăm teorema pentru poligoane arbitrare. Fie că sunt date două poligoane asemenea, al căror coeficient de asemănare este k, iar ariile S şi S'. Împărţim poligoanele date în triunghiuri cu diagonalele care pornesc din vârfurile corespunzătoare (fig.314). Atunci $S' = S_1' + S_2' + \ldots + S_n' = k^2S_1 + k^2S_2 + \ldots + k^2S_n = k^2\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = k^2S.$

Deci, $S' : S = k^2$. □

Se poate demonstra, că aşa o proprietate au ariile oricăror figuri asemenea, dar nu numai poligoanele asemenea. De exemplu, figurile F şi F_1,care sunt reuniuni ale pătratelor şi semicercurilor sunt asemenea (fig.315). De aceea ariile lor se raportă ca pătratele elementelor liniare corespunzătoare:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$

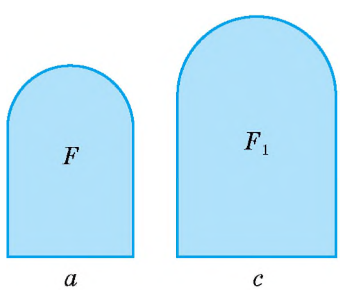


Fig.315

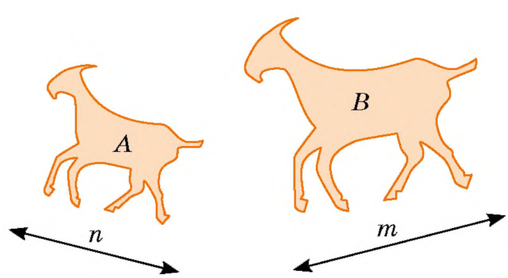


Fig.316

Figurile A şi B reprezentate în figura 316 tot sunt asemenea, de aceea ariile lor se raportă ca pătratele distanţelor dintre punctele corespunzătoare ale acestor figuri n şi m:

$$S_A : S_B = n^2 : m^2.$$

PENTRU CEI CURIOŞI

Fie că se dă punctul O şi fgura F (fig.317). Ducem printr-un punct arbitrar X al figurii F semidreapta OX şi notăm pe ea un astfel de punct X_1, că $OX_1 : OX = k$. Dacă într-un astfel de mod de construit punctele corespunzătoare pentru fiecare punct al figurii F, atunci obţinem figura nouă F_1.

Aşa o transformare a figurii F în F_1 se numeşte **omotetie** în raport cu punctul O şi coeficientul k. Se spune de asemenea că figura F_1 este omotetică figurii F în raport cu centrul O şi coeficientul k.

Dacă $k > 1$, arunci omotetia transferă figura dată în una mai mare: fiecare distanţă o măreşte de k ori. Dacă $0 < k < 1$, atunci omotetia fiecare distanţă o micşorează de k ori. Dacă $k=1$, atunci omotetia transferă fiecare figură în tot aceeaşi figură.

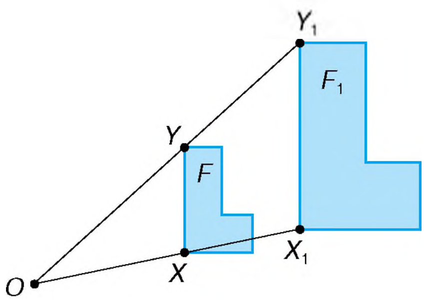


Fig.317

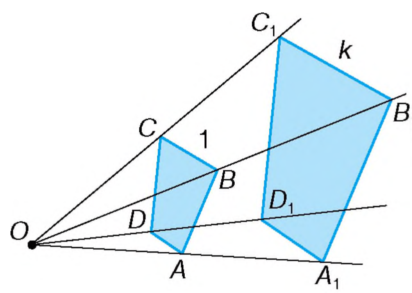


Fig.318

Pentru $k \neq 1$ omotetia nu păstrează distanţele dintre puncte. De exemplu, dacă $k = 2$, atunci punctele X şi Y sunt transferate de omotetie în aşa puncte X_1 şi Y_1 că $X_1Y_1 = 2XY$. Deci, $X_1Y_1 \neq XY$, de aceea omotetia nu este mişcare. Dar la omotetie se păstrează raportul distanţelor dintre puncte. De exemplu, dacă la omotetia cu coeficientul k patrulaterul ABCD trece în $A_1B_1C_1D_1$, atunci fiecare din raporturile

$\frac{A_1B_1}{AB}, \frac{B_1C_1}{BC}, \frac{C_1D_1}{CD}, \frac{D_1A_1}{DA}, \frac{A_1C_1}{AC}, \frac{B_1D_1}{BD}$ este egal cu k (fig.318).

Din definiţia transformării de asemănare rezultă, că fiecare două figuri egale sunt asemenea. Dar nu fiecare două figuri omotetice sunt egale. Analogic, fiecare două figuri omotetice sunt asemenea, însă nu fiecare figuri asemenea sunt omotetice. Cu ajutorul diagramei aceasta se poate reprezenta în felul următor (fig.319 şi 320).

Fig.319

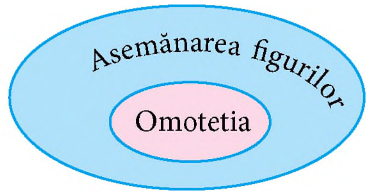


Fig.320

Oare există transformări geometrice, deosebite de mişcări şi transformările de asemănare? Există. Aşa sunt **comprimarea** şi **extensiunea**. De exemplu, dacă fiecare punct *a(x;y)* al planului de coordonate se transferă în punctul A *(x;ky)*, atunci se spune despre comprimarea acestui plan către axa x cu coeficientul *k*. Dacă coeficientul $k > 1$, atunci astfel de comprimare se numeşte extindere. În figuri este reprezentată: reţeaua cu celule hexagonale regulate (fig.312,a) şi reţeaua, care este comprimată către axa *x* (fig. 321, b).

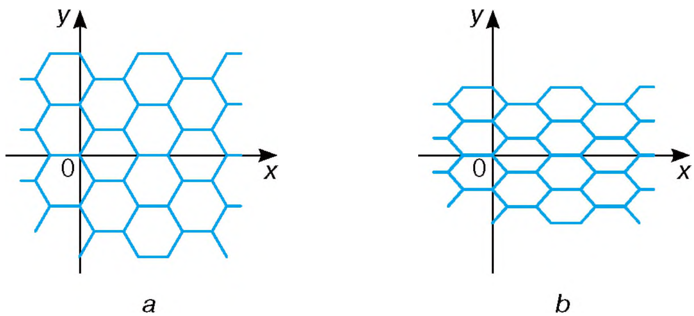


Fig.321

Transformarea geometrică interesantă este **inversia** – simetrie specifică în raport cu circumferinţa. Mulţimea punctelor, situate în domeniul interior al circumferinţei, această transformare o transferă în punctele domeniului exterior al acestei circumferinţe, şi invers. Inversia este examinată în cursurile superioare de geometrie.

ÎNTREBĂRI ŞI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformare geometrică este numită transformare de asemănare?
2. Ce proprietăţi are transformarea de asemănare?
3. Care figuri se numesc asemenea?
4. Numiţi proprietăţile figurilor asemenea.
5. Cum se raportă perimetrele figurilor asemenea?
6. Cum se raportă ariile figurilor asemenea?

EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Perimetrele a două poligoane asemenea sunt proporţionale cu numerele 2 şi 5. Aflaţi ariile acestor poligoane, dacă diferenţa lor este egală cu 42 cm².

- Dacă perimetrele sunt proporţionale cu numerele 2 şi 5, atunci ariile $S_1 : S_2 = 4 : 25$. Fie că coeficientul de proporţionalitate este x. Atunci $S_1 = 4x$, $S_2 = 25x$. Conform condiţiei problemei $25x - 4x = 42$, de unde $x = 2$. Atunci $S_1 = 8\text{cm}^2$, $S_2 = 50\text{ cm}^2$.

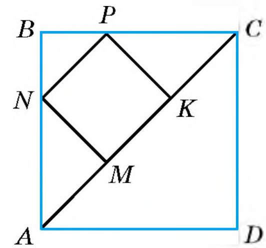


Fig.322

2 Se dă pătratul $ABCD$. În triunghiul ABC este înscris pătratul $MNPK$ (fig.322). Oare sunt asemenea aceste pătrate? Cu care coeficient de asemănare?

● Două pătrate totdeauna sunt asemenea. Să aflăm coeficientul de asemănare. Fie $AB = a$, atunci $AC = a\sqrt{2}$. $\triangle AMN$ — isoscel dreptunghic, deoarece $\angle AMN = 90°$, $\angle NAM = \angle ANM = 45°$. Atunci $AM = MN$. Analogic $KC = PK$.

Aşadar, $MK = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, de unde $k = \frac{MK}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII

EFECTUAŢI ORAL

923. În care din cazurile, reprezentate în figurile 323-326, pătratele sunt asemenea?

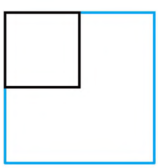


Fig.323

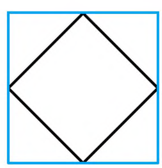


Fig.324

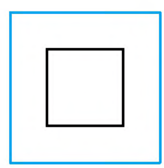


Fig.325

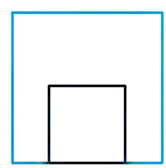


Fig.326

924. Oare totdeauna sunt asemenea două hexagoane regulate?
925. Numiţi figurile care totdeauna sunt asemenea.
926. Oare totdeauna sunt asemenea două romburi? Oare sunt asemenea romburile, dacă unul din ele are unghi de 55°, iar altul — de 125°?
927. Raza unei circumferinţe este egală cu diametrul alteia. Aflaţi coeficientul de asemănare.
928. Ariile a două poligoane asemenea se raportă ca 9:16. Cum se raportă perimetrele lor?
929. Laturile dreptunghiului sunt de 2 cm şi 6 cm. Aflaţi aria şi perimetrul dreptunghiului asemenea, dacă a) $k = 2$; b) $k = 0,5$.
930. Perimetrul poligonului este de 10 m. Aflaţi perimetrul poligonului asemenea, dacă k=0,2.
931. Două figuri sunt simetrice în raport cu o oarecare dreaptă. Oare sunt ele asemenea? Cu care coeficient de asemănare?

A

932. Diagonala unuia din pătrate este latura altuia. Cu ce este egal coeficientul de asemănare al acestor pătrate?

933. Segmentul paralel cu bazele trapezului, împarte acest trapez în două trapeze. Oare este măcar unul din ele asemenea cu cel dat??

934. Linia medie a trapezului îl împarte în două trapeze. Oare sunt ele asemenea?

935. Cum se raportă lungimile circumferinţelor:
a) înscrisă în pătrat şi circumscrisă lui;
b) înscrisă într-un triunghi echilateral şi circumscrisă lui?

936. Aflaţi raportul ariilor părţilor, în care este împărţit triunghiul de către linia lui medie.

937. Copiaţi tabelul în caiet şi completaţi-l, dacă P_1, P_2, S_1, S_2 sunt perimetrele şi ariile a două figuri asemenea, k – coeficientul lor de asemănare.

k	P_1	P_2	S_1	S_2
2	5			16
	12	3	48	
		5	90	10
0,6		10	72	

938. Aflaţi laturile patrulaterului cu perimetrul de 88 cm, dacă el este asemenea cu patrulaterul care are laturile de 3 cm, 5 cm, 6 cm şi 8cm.

939. Perimetrele a două poligoane asemenea se raportă ca 2:5, iar suma ariilor lor este egală cu 232 cm^2. Aflaţi aria fiecăruia din ele.

940. Laturile unui dreptunghi sunt egale cu 5 cm şi 9 cm. Aflaţi laturile dreptunghiului asemenea, dacă aria lui este egală cu 180 cm^2.

941. Diagonalele rombului sunt egale cu 10 cm şi 24 cm, iar latura rombului, asemenea cu el este egală cu 26 cm. Aflaţi aria celuilalt romb.

B

942. M – mijlocul laturii BC a paralelogramului $ABCD$, O – punctul de intersecţie al dreptelor AC şi MD. Aflaţi aria $\triangle MOC$, dacă $S_{\triangle AOD} = 12$.

943. Prelungirile laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M. Aflaţi aria trapezului, dacă $AB : BM = 2 : 3$, iar aria triunghiului BMC este egală cu 18 cm^2.

944. Aflaţi razele a două cercuri, care sunt tangente exterior, dacă ariile lor se raportă cu 4:25, iar distanţa dintre centrele lor este egală cu 14 cm.

945. AM şi BN — medianele triunghiului ABC. Aflaţi aria patrulaterului $ABMN$, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 48 см^2.

946. Formulaţi şi demonstraţi criteriile de asemănare: a) a două romburi; b) a două dreptunghiuri.

947. Demonstraţi că patrulaterele sunt asemenea, dacă diagonalele împart unghiurile ascuţite în unghiuri egale corespunzător.

948. Demonstraţi că două trapeze isoscele sunt asemenea, dacă unghiurile ascuţite ale lor sunt egale, iar diagonalele sunt bisectoarele acestor unghiuri.

949. Sunt date inele (fig.327). Razele unuia din ei sunt de 1 cm şi 2 cm, iar ale celui de-al doilea – 2 cm şi 3 cm. Oare sunt inelele asemenea? Cercetaţi şi stabiliţi pentru care condiţie două inele, mărginite de circumferinţe concentrice, sunt asemenea

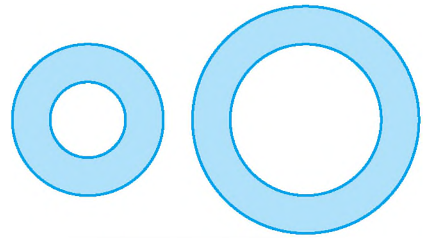


Fig.327

950. O – punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Aflaţi aria trapezului, dacă ariile triunghiului AOD şi BOC sunt egale respectiv cu 90 cm² şi 40 cm².

951. Aflaţi raportul lungimilor a două circumferinţe cu centrele O_1 şi O_2, dacă tangenta exterioară comună a lor intersectează linia centrelor în punctul P şi $PO_1 : O_1O_2 = 2 : 7$.

952. În interiorul pentagonului convex $ABCDE$ a fost luat un punct arbitrar O. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 —puncte simetrice cu punctul O în raport cu vârfurile pentagonului. Aflaţi aria pentagonului $ABCDE$, dacă aria pentagonului $A_1B_1C_1D_1E_1$ este egală cu 100 см².

953. În interiorul patrulaterului convex, a cărui arie este egală cu S este luat un punct arbitrar şi el este transferat simetric în raport cu mijlocurile tuturor laturilor. Punctele obţinute sunt consecutiv unite. Aflaţi aria patrulaterului obţinut.

954. În triunghiul ABC, a cărui arie este de 45cm², sunt duse înălţimile AN şi BM. Aflaţi aria patrulaterului $ABNM$, dacă $\cos C = \frac{1}{3}$.

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

955. Alegeţi cîteva citate despre matematică şi cu ajutorul computatorului faceţi un nor de cuvinte, şi ca pe el să fie imagini asemănătoare şi neasemănătoare.

PROBLEME PENTRU REPETARE

956. Demonstraţi că mijlocurile bazelor trapezului, punctul de intersecţie al diagonalelor lui şi punctul de intersecţie al dreptelor, pe care sunt situate laturile laterale ale trapezului se află pe aceeaşi dreaptă.

957. Cea mai scrută mediană a triunghiului dreptunghic este egală cu 5 dm, iar una din catete – cu 6 dm. Aflaţi aria triunghiului.

958. Într-un triunghi mediana dusă la o latură face cu ea unghiul de 60°, iar celelalte două laturi sunt egale cu 7 cm şi $\sqrt{19}$ cm. Aflaţi latura necunoscută a triunghiului.

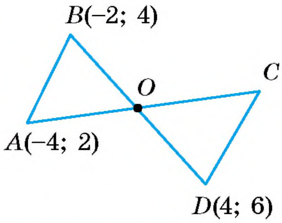
PROBLEME CU DESENE GATA

А | **Б**

1

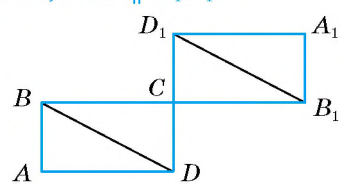
А. AB este simetric cu CD în raport cu O

$C(x;\ y)$



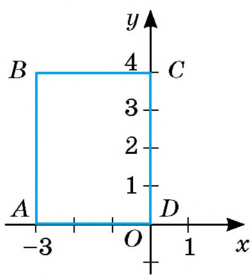
Б. $A_1B_1C_1D_1$ este simetric cu $ABCD$ în raport cu C

Demonstraţi: $BD \parallel B_1D_1$.



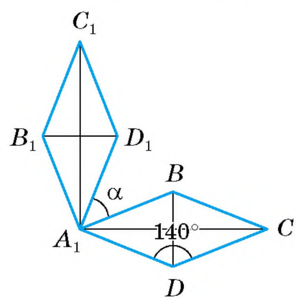
2

А. Ecuaţiile axelor de simetrie ale patrulatrului $ABCD$



Б. Este efectuată rotaţia cu 90°

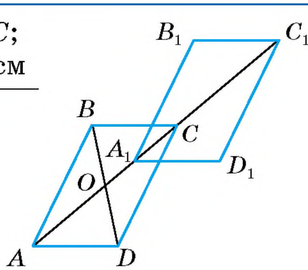
α



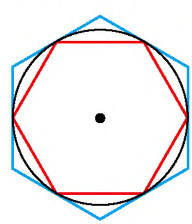
3

А. $OA_1 = A_1C$;
$AC = 10$ см

AC_1; BB_1



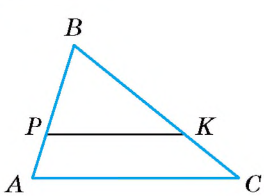
Б. Raportul ariilor ale hexagoanelor regulate



4

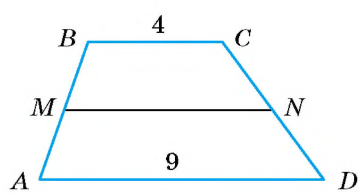
А. $PK \parallel AC$;
$S_{\triangle PBK} : S_{APKC} = 9:7$

$AP : PB$



Б. $MBCN \sim AMND$

MN; $S_{MBCN} : S_{AMND}$



LUCRAREA INDEPENDENTĂ 5

VARIANTA 1

1°. Construiţi un triunghi arbitrar ABC şi executaţi transportul paralel astfel, ca vârful A să se transfere în C.

2°. Construiţi pătratul $ABCD$ fiind dată latura lui $AB=4$ *cm* şi rotiţi-l cu **60°** în jurul mijlocului laturii AB împotriva mişcării acului de ceasornic.

3•. Paralelogramele $ABCD$ şi AB_1CD_1 sunt simetrice în raport cu dreapta AC. Demonstraţi că segmentele BD_1 şi B_1D sunt egale şi paralele.

VARIANTA 2

1°. Construiţi paralelogramul arbitrar $ABCD$ şi efectuaţi deplasarea paralelă a lui astfel, ca vârful A să treacă în C.

2°. Construiţi rombul $KPMT$ după latura KP = **3** cm şi unghiul K = **45°** şi rotiţi-l cu **60°** în jurul mijlocului laturii KP în direcţia mişcării acului de ceasornic.

3•. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $A_1BC_1D_1$ sunt simetrice în raport cu vârful B. Demonstraţi că segmentele AC_1 şi A_1C sunt paralele şi egale.

VARIANTA 3

1°. Construiţi dreptunghiul arbitrar $ABCD$ şi executaţi transportul paralel a lui astfel, ca vârful A să treacă în mijlocul lui BC.

2°. Construiţi triunghiul dreptunghic cu catetele de 3 cm şi 4 cm şi rotiţi-l cu 45° în jurul mijlocului ipotenuzei împotriva mişcării acului de ceasornic.

3•. Patrulaterele $ABCD$ şi A_1B_1CD sunt simetrice în raport cu dreapta CD. Demonstraţi că segmentele AA_1 şi BB_1 sunt paralele.

VARIANTA 4

1°. Construiţi paralelogramul arbitrar $KPMT$ şi efectuaţi deplasarea paralelă a lui astfel, ca vârful T să treacă în mijlocul lui PM.

2°. Construiţi dreptunghiul $ABCD$, în care AB =3 cm, BC=4 cm şi rotiţi-l cu **60°** în jurul mijlocului O al diagonalei AC în direcţia mişcării acului de ceasornic.

3•. Rombii $ABCD$ şi $A_1B_1CD_1$ sunt simetrici în raport cu vârful C. Demonstraţi, că segmentele AB_1 şi A_1B sunt egale şi paralele.

ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 5

1	Care din transformări nu întotdeauna păstrează distanţa dintre puncte?	a) rotaţia; b) simetria centrală; c) transformarea de asemănare; d) simetria axială
2	Punctele A şi B sunt simetrice în raport cu punctul O. Care semn trebuie de pus în loc de *: $AB * 2\ AO$?	a) $>$; c) $=$; b) $<$; d) $\neq$.
3	$\triangle ABC$ la rotaţia în jurul punctului A cu unghiul de 60° a trecut în $\triangle AB_1C_1$. Aflaţi $\angle BAC$, dacă $\angle B_1AC_1 = 85°$.	a) 85°; в) 95°; б) 145°; г) 35°.
4	Care din figuri are numai 4 axe de simetrie?	a) circumferinţa; c) rombul; b) pătratul; d) dreptunghiul.
5	Punctele A (–4; 6) şi B(–2; 2) sunt simetrice în raport cu punctul M. Aflaţi coordonatele lui.	a) (–6; 8); c) (–3; 4); b) (–3; 2); d) (–1; 2).
6	Punctele P şi K sunt simetrice în raport cu dreapta l, Ce semn trebuie de pus în loc de *: $PK * l$?	a) $\parallel$; c) $\perp$; b) $\in$; d) $=$.
7	La deplasarea paralelă punctul A(–3; 5) a trecut în punctul B(–1; 3). În care punct s-a transferat mijlocul segmentului AB?	a) (–2; 4); c) (1; 1); b) (–4; –6); d) (0; 2).
8	Care din figuri nu totdeauna sunt asemenea?	a) două circumferinţe; b) două pătrate; c) două triunghiuri regulate; d) două romburi.
9	Ariile a două semicercuri se raportă ca 4:9. Cum se raportă razele lor?	a) 16 : 81; c 1 : 1,5; b) 2 : 4,5; d2 : 3.
10	Care din poligoanele regulate sunt central simetrice?	a) triunghiul; b) pentagonul; c) hexagonul; d) septagonul.

PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Se dă segmentul AB şi punctul $O \notin AB$. Construiţi:
a) segmentul simetric segmentului AB în raport cu punctul O;
b) punctul O_1, simetric cu punctul O în raport cu dreapta AB;
c) segmentul care se obţine la rotaţia segmentului AB cu unghiul de $60°$ în jurul punctului O în direcţia mişcării acului de ceasornic;

2°. $\triangle ABC$ este simetric cu $\triangle AMC$ în raport cu dreapta AC. $\angle BCA = 20°$, $\angle MAC = 45°$. Aflaţi restul unghiurilor ale acestor triunghiuri.

3°. Paralelogramele $A_1B_1C_1D_1$ şi $ABCD$ sunt simetrice în raport cu un oarecare punct O. Aflaţi laturile paralelogramelor, dacă perimetrul lui $ABCD$ este egal cu 30 cm, iar B_1C_1 = 10 cm.

4°. Aflaţi coeficientul de asemănare a două dreptunghiuri şi ariile lor, dacă laturile unuia din ei sunt de 5 cm şi 8 cm, iar perimetrul celui de-al doilea – 52 cm.

5•. O — punctul de intersecţie al diagonalelor rombului $ABCD$. La deplasarea paralelă punctul A trece în punctul O, punctul C – în C_1. Aflaţi AC_1, dacă AC = 5 cm.

6•. Pentru care valori ale lui a şi b punctele $A(a;\ 4)$ şi $B(3;\ 2b)$ sunt simetrice în raport cu punctul M (-1;6)?

7•. BM — mediana triunghiului ABC (fig.328). Pe laturile BC şi AC sunt punctele P şi K astfel, că BP: :PC = MK : KC = 2 : 1. Aflaţi aria patrulaterului =$MBPK$, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 54 cm².

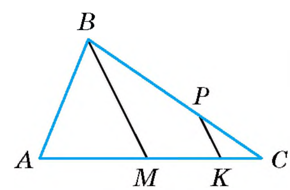


Fig.328

8•. Scrieţi ecuaţia dreptei în care trece dreapta $y=2$ la rotaţia în jurul punctului M $(1;-1)$ cu unghiul de 90°:
a) în direcţia mişcării acului de ceasornic;
b) împotriva direcţiei de mişcare a acului de ceasornic.

9••. Găsiţi pe axa OX punctul de la care suma distanţelor până la punctele M (-2;5) şi N(4;4) să fie cea mai mică.

10••. Demonstraţi că dacă latura şi diagonala unui paralelogram sunt proporţionale cu latura şi diagonala altui paralelogram şi unghiurile formate de ele, sunt egale, atunci paralelogramele sunt asemenea.

Principalul în capitolul 5

Dacă punctele figurii F de le strămutat, deplasat cumva, atunci obţinem o figură nouă $F_{1.}$ Dacă totodată diferite puncte ale figurii F trec (se transferă) în diferite puncte ale figurii F_1, atunci se spune despre **transformarea geometrică** a figurii F în figura F_1. Totodată figura F_1 se numeşte imaginea figurii F, iar figura F – preimaginea figurii F_1.

Cele mai importante transformări geometrice – mişcările şi transformarea de asemănare.

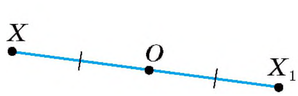
Mişcarea se numeşte aşa o transformare geometrică, la care se păstrează distanţele dintre punctele corespunzătoare.

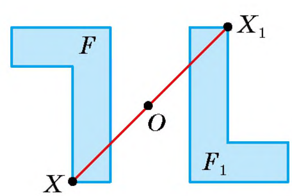
Mişcarea transferă: segmentul – în segmentul egal cu el, dreapta – în dreaptă, semidreaptă în semidreaptă, unghiul – în unghiul egal cu el, triunghiul în triunghiul egal cu el.

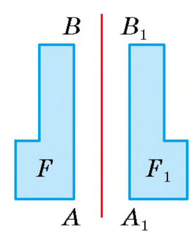
Două figuri se numesc **egale**, dacă există o mişcare, care trece o figură în cealaltă. Fiecare mişcare transferă orice figură în figura egală cu ea. Dacă două figuri geometrice sunt egale, atunci există o mişcare care transferă una din ele în cealaltă.

Cele mai importante mişcări ale figurilor în plan: **simetria în raport cu un punct, simetria în raport cu o dreaptă, rotaţia, deplasarea paralelă.**

Punctele X şi X_1 se numesc **simetrice în raport cu punctul** O, dacă O – mijlocul segmentului $XX_{1.}$ Dacă în raport cu O fiecare punct al figurii F este simetric unui oarecare punct al figurii F_1 şi invers, atunci figurile F şi F_1 sunt simetrice în raport cu punctul O. O astfel de transformare a figurii F în F_1 se numeşte **transformarea de simetrie în raport cu punctul** O.

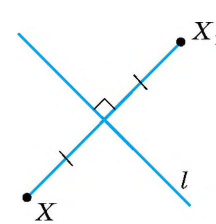


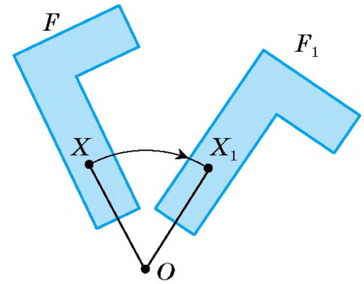




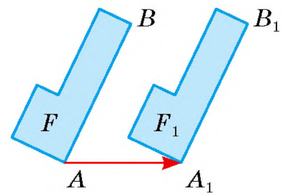
Punctele X şi X_1 se numesc **simetrice în raport cu dreapta** l, dacă această dreaptă este mediatoarea segmentului XX_1. Dacă punctul X aparţine dreptei l, atunci el se consideră simetric cu sine însuşi în raport cu dreapta l.

Transformarea figurii F, la care fiecare punct al ei se transferă în punctul simetric lui în raport cu dreapta l se numeşte **transformarea de simetrie în raport cu dreapta** l Dacă la această transformare figura F se transferă în F_1, atunci aceste două figuri se numesc **simtrie în raport cu dreapta** l.

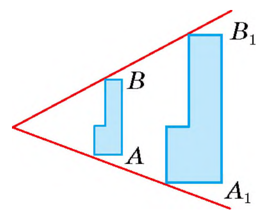




Fie că se dă punctul O şi o figură oarecare F. Rotim punctul X al acestei figuri în jurul punctului O cu unghiul α în direcţia mişcării acului de ceasornic. Totodată punctul X va trece în aşa un punct X_1, că măsura unghiulară a arcului XX_1 cu centrul O este egală cu α (OX şi OX_1 – raze egale). Dacă cu aşa un procedeu de rotit în jurul punctului O cu unghiul α fiecare punct al figurii F, atunci obţinem figura F_1. Se spune că rotaţia în jurul punctului O cu unghiul α transferă figura F în figura F_1. Punctul O se numeşte **centrul de rotaţie**, iar unghiul XOX_1 – **unghiul de rotaţie**.



Dacă fiecare punct al figurii F de-l strămutat, deplasat în una şi aceeaşi direcţie la una şi aceeaşi distanţă XX_1 (sau cu vectorul $\overline{XX_1}$), obţinem figura F_1. În acest caz se spune că **deplasarea paralelă, care transferă punctul X în X_1, transferă figura F în F_1.**



Transformarea figurii F în figura F_1 la care distanţele dintre puncte se schimbă de unul şi acelaşi număr de ori k, $k > 0$, se numeşte **transformare de asemănare.** Aceasta înseamnă că atunci, când punctele arbitrare A şi B ale figurii F la transformarea de asemănare trec în punctele A_1 şi B_1 ale figurii F_1 este adevărată egalitatea $A_1B_1 = kAB$. Numărul k se numeşte **coeficientul de asemănare**. Coeficientul de asemănare totdeauna este pozitiv. Dacă $k = 1$, atunci asemănarea este mişcare.

Două figuri se numesc **asemenea**, dacă există transformarea de asemănare care transferă una din ele în cealaltă.

Transformarea de asemănare transferă fiecare figură în figură asemenea cu ea.

Raportul perimetrelor a două figuri asemenea este egal cu coeficientul de asemănare k:

$$P_1 : P = k.$$

Raportul ariilor ale figurilor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare:

$$S : S_1 = k^2.$$

Ariile figurilor asemenea se raportă ca pătratele elementelor liniare corespunzătoare:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$

Anexe

Proiectul de învăţământ 1
Curbe interesante

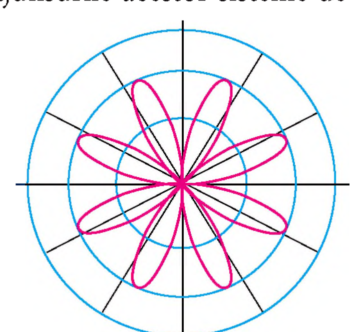
Clasa se împarte în trei grupe: „istoricii”, „matematicii”, „designii de computator”. Fiecare elev poate participa la lucrul uneia sau a două grupe de proiect. Elevii se organizează în grupe şi lucrează individual sau în perechi asupra uneia din temele propuse.

1 **”Istoricii”** cercetează, care curbe au constituit obiectul studierii de către matematicieni în diferite timpuri, examinează particularităţile folosirii acestor curbe, clarifică provinienţa denumirilor lor, fac cunoştinţă cu viaţa şi activitatea matematicienilor care au examinat aceste curbe. Se poate propune elevilor să cerceteze istoria studierii, deja cunoscute lor, curbelor (a parabolei, hiperbolei, elipsei, circumferinţei) sau a acelor, pe care le vor studia în clasele superioare (sinusoidele, tangenosoidelor). Afară de aceasta mai pot fi, de exemplu, şi aşa curbe:

- spirala lui Arhimede;;
- lănţişorul;
- bucla Aniezi;
- cicloida;
- Foaia Descartes.

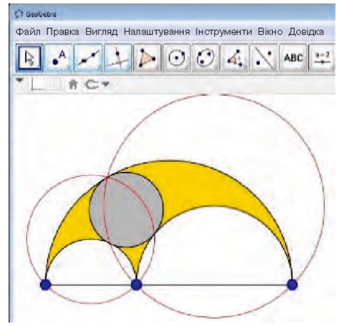
2 **„Matematicienii”** studiază diferite sisteme de coordonate şi regulile de construire în ele. Află cu care formule sunt date curbele cunoscute lor de noile sisteme de coordonare. Clarifică priorităţile şi neajunsurile acestor sisteme de coordonate şi metodele de folosire. Construiesc curba sa şi o definesc analitic şi grafic în câteva sisteme de coordonate.Se poate de le propus elevilor să facă cunoştinţă amănunţită cu una din următoarele sisteme de coordonate:

- sistemul de coordonate rectangular în plan;
- sistemul de coordonate rectangular în spaţiu;
- sistemul de coordonate polare;
- sistemul de coordonate sferice.



3 **„Designii de computator”** studiază unul din procedeele de programare accesibile (Excel, GeoGebra, Gran ş.a.) pentru construirea comodă a curbelor. Cu ajutorul procedeului de programare ales se construiesc curbe care sunt dificile de construit cu procedeul tradiţional.

Temele pentru activitatea asupra proiectului se anunţă elevilor la sfârşitul lui septembrie.



Rezultatele lucrului asupra proiectului este de dorit de perfectat în formă de portofoliu cu prezentare la computator.

Apărarea proiectelor este raţional de o petrecut la o măsură extraşcolară, invitând elevii altor clase, profesori, părinţi.

PROIECTUL DE ÎNVĂŢĂMÂNT 2
Metoda vectorială de rezolvare a problemelor

Acest proiect este raţional de-l îndeplinit individual. Elevilor li se propune să prelucreze materialul paragrafului 12 şi să găsească informaţii suplimentare referitoare la utilizarea vectorilor.

Metoda vectorială de rezolvare a problemelor este bazată pe folosirea proprietăţilor vectorilor. Particularitatea acestei metode constă în aceea, că în procesul rezolvării problemelor nu apare necesitatea în examinarea configuraţiilor geometrice complicate. Uneori cu ajutorul metodei vectoriale problema este foarte simplu de o redus la problemă algebrică, care este mai uşor de-o rezolvat decât problema geometrică iniţială.

Problemele care se rezolvă cu ajutorul vectorilor se împart în afine şi metrice. Primele se rezolvă cu utilizarea numai a operaţiilor liniare: adunarea şi scăderea vectorilor şi înmulţirea vectorului cu un număr. Problemele metrice, afară de altele, se referă la aflarea lungimii segmentului şi a măsurii unghiului, de aceea în procesul rezolvării lor se folosesc afară de operaţiile liniare şi produsul scalar al vectorilor.

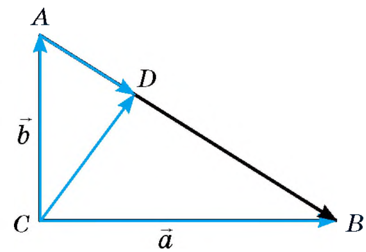
Elevii trebuie să înţeleagă regula-reper de rezolvare a problemelor metrice cu metoda vectorială. Să ilustrăm regula-reper pentru determinarea lungimii segmentului cu metoda vectorială pe un exemplu concert.

Pentru calcularea lungimii segmentului este necesar:

- de ales în plan doi vectori necoliniari (de bază), ale căror lungimi şi unghiul format de ei se consideră cunoscuţi.
- vectorul lungimea căruia este egală cu lungimea segmentului căutat, de-l descompus după vectorii de bază;

- de calculat lungimea segmentului căutat, ca modulul vectorului cu formula: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Problemă. Pe ipotenuza *AB* a triunghiului *ABC* este luat punctul *D*, care satisface condiţia: $BD:DA=3:1$. Exprimaţi lungimea segmentului *CD* prin lungimile catetelor: $CB = a$, $CA = b$.



Rezolvare. Fie că de bază sunt vectorii *CA* şi *CB*, $\angle C = 90°$, $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$. Exprimăm vectorul $\overrightarrow{CD}$ prin $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi aflăm lungimea lui.

Din triunghiul *CAD* $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\overrightarrow{AD}$; $AD\uparrow\uparrow AB$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$;

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{4}, \text{ iar } \overrightarrow{CD}=\vec{b}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{4}=\frac{3\vec{b}+\vec{a}}{4}.$$

Deoarece $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\overrightarrow{CD}^2}$, reisă $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{3\vec{b}+\vec{a}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{9\vec{b}^2+6\vec{a}\vec{b}+\vec{a}^2}}{4}$.

Conform condiţiei $\vec{a}\perp\vec{b}$, de aceea $\vec{a}\vec{b}=0$. Deoarece $\vec{a}^2=a^2$, $\vec{b}^2=b^2$, avem că $|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt{9b^2+a^2}}{4}$.

Deci, $CD=\frac{\sqrt{9b^2+a^2}}{4}$.

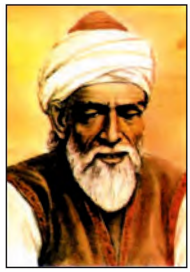
Cu metoda vectorială este raţional de rezolvat următoarele probleme geometrice:
- problemele la demonstrarea paralelismului dreptelor şi segmentelor;
- problemele la demonstrarea a celui fapt, că un oarecare punct împarte segmentul într-un oarecare raport;
- problemele la demonstrarea apartenenţei a trei puncte unei drepte;
- problemele la demonstrarea perpendicularității dreptelor şi segmentelor;
- problemele la demonstrarea dependenţelor dintre lungimile segmentelor;
- problemele la aflarea mărimii unghiului.

PROIECTUL DE ÎNVĂŢĂMÂNT 3
Trigonometria cunoscută şi necunoscută

Clasa este împărţită în trei grupe: „istoricii", „matematicienii", „practicienii". Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiect.
Elevii se organizează în grupe şi lucrează individual sau în perechi asupra uneia din temele propuse.

1 **„Istoricii”** cercetează apariţia trigonometriei şi dezvoltarea ei în anumite perioade:
- apariţia trigonometriei în Grecia Antică;
- dezvoltarea învăţăturii despre mărimile trigonometrice în ţările Orientului;
- dezvoltarea trigonometriei în Europa.


Ptolomei


Abuli-Bafa


Regiomontanus

Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii din grupa „Istoricii” în perfectează în formă de gazete de perete şi portfoliul de grupă cu prezentare computerizată.

2 **„Matematicienii”** însuşesc material teoretic suplimentar, referitor la geometrie. Acest material poate cuprinde , de exemplu, aşa întrebări:
- procese periodice şi funcţiile trigonometrice;
- graficele funcţiilor trigonometrice;
- teoremele adunării şi formulele unghiurilor multiple.

Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii grupei „matematicienii” le definitivează în formă de portfoliu individual..

3 **„Practicienii”** cercetează unde şi cum se utilizează cunoştinţele din trigonometrie.
Trigonometria a apărut ca mijloc de a măsura distanţele şi dimensiunile corpurilor. De aceea cel mai frecvent era folosită în astronomie, geografie şi navigaţia maritimă. Iniţial se foloseau de instrumente de măsurat primitive: distanţele erau măsurate cu sfoara, unghiurile – cu astrolabele, echerele, eclimetrul. Cu timpul instrumentariul este îmbunătăţit şi teoria îmbogăţită, au introdus funcţiile trigonometrice.
Mai târziu au descoperit că funcţiile trigonometrice de minune descriu oscilităţile armonice şi diverse procese periodice, de aceea mai ales des erau folosite în fizică, mai ales acolo unde are loc trecerea mişcărilor circulare în liniare şi invers (diverse tipuri de bielă-manivele). La ora actuală trigonometria este folosită în astronomie, geodezie, topografia minieră, fizică, cristalografie, chimie şi alte ştiinţe, în care se examinează dimensiuni liniare şi unghiuri, de asemenea, în ştiinţele care studiază procesele periodice.
Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii grupei "Practicienii" le definitivează în formă de prezentaţie.

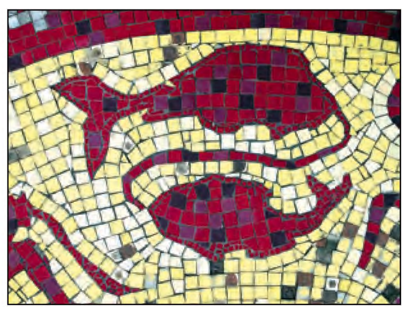
PROIECTE DE ÎNVĂŢĂMÂNT 4
Acoperirea planului

Tema pentru acoperirea planului este largă şi multilaterală. Ea conţine multe probleme simple, accesibile elevilor din clasele primare şi suficient de completare, cu care nu toţi studenţii se pot isprăvi.

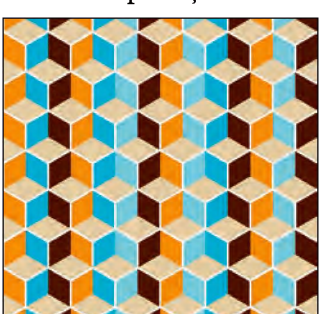
Elevilor din clasa a 9-a se poate de le propus aşa teme:

1. Parchete şi fâşii.
2. Pavarea planului cu poligoane regulate.
3. Acoperirea planului cu poligoane semiregulate.
4. Pavarea planului cu hexagoane egale.
5. Pavarea planului cu pentagoane egale.
6. Parchete pentru construcţii.
7. Mozaicuri tematice.
8. Pavarea planului cu poligoane colorate.

Aducem câteva exemple de mozaicuri tematice.



Pavarea planului cu poligoane colorate imită reprezentarea volumică sau reprezentarea suprafeţei reliefate.

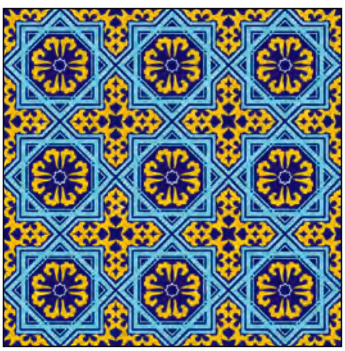


Este bine, dacă în procesul lucrului asupra proiectului elevii ar putea să creeze parchete sau mozaicuri interesante proprii. În acest caz este binevenită petrecerea concursului al lucrărilor de creaţie.

PROIECTUL DE ÎNVĂŢĂMÂNT 5
Ornamente şi transformările geomerice

Elevii clasei se organizează în grupe mici a câte 2-3 persoane. După dorinţa elevilor se poate realiza activitatea individuală asupra proiectului. Fiecare grupă îşi alege pentru activitatea asupra proiectului una din temele propuse mai jos.

- Ce este ornamentul. Când şi unde au apărut primele ornamente.
- Felurile de ornamente.
- Trăsăturile caracteristice ale ornamentelor la diferite popoare.



Ornament din Turkmenistan

Ornament norvegian

- Ornamentele culturii tripoliene.
- Ornamentele şi broderiile ţinutului meu.
- Felurile transformărilor geometrice în broderiile ucrainene.
- Felurile transformărilor geometrice în broderiile româneşti.
- Felurile transformărilor geometrice în ornamentele gravate pe lemn.
- Tehnologia creării ornamentelor.
- Crearea ornamentelor pe baza transportului paralel.
- Crearea ornamentelor pe baza simetriei centrale.
- Crearea ornamentelor pe baza simetriei axiale.
- Crearea ornamentelor pe baza rotaţiei.
- Crearea ornamentelor pe baza asemănării.
- Crearea ornamentelor pe baza compoziţiei transformărilor geometrice.
- Ornamentele îndrăgite ale familiei mele.
- Crearea ornamentului cu ajutorul computatorului.

Este de dorit ca însărcinările pentru activitatea asupra proiectului de le comunicat elevilor înaintea studierii temei "Transformări geometrice". În procesul studierii a unei transformări geometrice concrete la lecţie sau în afara lecţiilor elevii ar putea arăta rezultatele activităţii lor asupra proiectului. După studierea temei este raţional de petrecut o expoziţie-conferinţă.

Probleme de dificultate sporită

959. Demonstraţi că în triunghiul dreptunghic cu unghiul ascuţit de $15°$ produsul catetelor este egal cu jumătatea ipotenuzei la pătrat.

960. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu a şi b. Aflaţi lungimea bisectoarei, dusă la ipotenuză.

961. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu a, iar diametrul circumferinţei înscrise cu d. Aflaţi ipotenuza.

962. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 5 cm şi 12 cm. Aflaţi distanţa dintre centrele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă lui.

963. Demonstraţi că perimetrul triunghiului dreptunghic este egal cu diametrul circumferinţei, care este tangentă la ipotenuză şi la prelungirile catetelor lui.

964. Bazele trapezului sunt egale cu 3 şi 7, iar laturile laterale – cu 2 şi $2\sqrt{3}$. Aflaţi ughiurile trapezului.

965. Demonstraţi că suma catetelor triunghiului dreptunghic este egală cu suma diametrelor circumferinţelor circumscrisă şi înscrisă.

966. Punctul de tangenţă al circumferinţei înscrise în triunghiul dreptunghic împarte ipotenuza în părţile de 4 cm şi 6 cm. Aflaţi raza circumferinţei.

967. Construiţi triunghiul, ştiind a lui mediană, bisectoare şi înălţime, duse din acelaşi vârf.

968. **Problema lui Napoleon.** Folosindu-se numai de compas împărţiţi circumferinţa dată cu centrul notat în patru părţi egale.

969. Latura hexagonului regulat $ABCDEF$ este egală cu a. Aflaţi raza circumferinţei înscrise în triunghiul ACD.

970. Aflaţi coordonatele vârfurilor unui triunghi, dacă coordonatele mijlocurilor ale laturilor lui sunt: $K(1; 2)$, $P(3; 4)$, $T(5; 1)$.

971. Sunt date punctele $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ şi numărul n. Aflaţi coordonatele a unui astfel de punct P al segmentului AB, що $AP : PB = 1 : n$.

972. Demonstraţi că aria triunghiului cu unghiurile α, β, γ şi raza R a circumferinţei circumscrise este egală cu $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

973. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului echilateral (fig.329) notăm punctele C_1, A_1, B_1 astfel, că $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 2$. Cum se raportă ariile:
a) triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$;
b) triunghiului ABC şi a triunghiului $A_2B_2C_2$, mărginit de dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1?

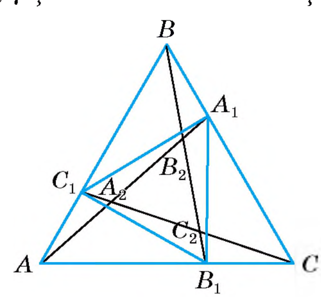


Fig.329

974. Un pătrat cu aria de 64 cm² elevul l-a tăiat în patru părţi şi a format din ele dreptunghiul, ale cărui laturi sunt egale cu 5 cm şi 13 cm (fig.330). De ce aria dreptunghiului nu este egală cu aria pătratului?

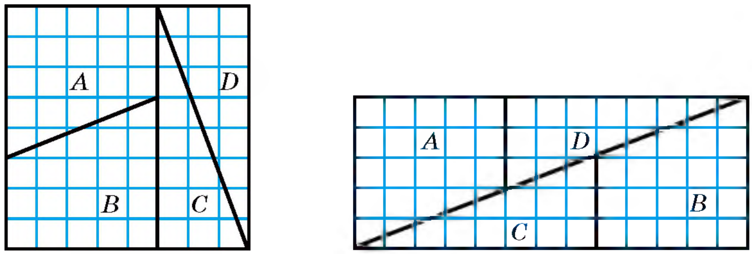


Fig.330

975. Punctu M este amplasat în interiorul pătratului $ABCD$ astfel, că $\angle MAB = 30°$, $\angle MCB = 15°$. Aflaţi unghiul AMB.

976. Aflaţi unghiurile patrulaterului convex $ABCD$, ale cărui laturi: $AD = 4$, $DC = 2$, $CB = 5 - \sqrt{3}$, $AB = 5\sqrt{2}$, diagonala $AC = 2\sqrt{7}$.

977. În patrulaterul convex $ABCD$ sunt cunoscute unghiurile: $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Aflaţi unghiul format de diagonalele patrulaterului.

978. Aflaţi unghiul făcut de latura AD a patrulaterului convex $ABCD$ şi diagonala lui, dacă $\angle CAB = 50°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle DBC = 20°$, $\angle CDB = 30°$.

979. Pe laturile BC şi CD ale pătratului sunt notate punctele M şi K astfel, că perimetrul triunghiului MKC este egal cu jumătate din perimetrul pătratului. Aflaţi unghiul MAK.

980. Pe laturile opuse ale paralelogramului, ca pe laturi sunt construite în afara lui, pătrate. Demonstraţi că dreapta care trece prin centrele pătratelor, de asemenea trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului.

Demonstraţi afirmaţiile 981-986.

981. Dacă circumferinţa înscrisă în triunghi este tangentă la laturile lui AB, BC şi CA în punctele C_1, A_1, B_1, atunci AA_1, BB_1, CC_1 se intersectează într-un punct.

982. Dacă circumferinţa, al cărui centru este situat pe latura AB a triunghiului, este tangentă la laturile lui AC şi BC în punctele B_1, A_1, iar dreptele AA_1 şi BB_1 se intersectează în punctul P, atunci $CP \perp AB$.

983. Produsul lungimilor segmentelor, care unesc centrul circumferinţei , înscrise în triunghi cu vârfurile triunghiului, este egal cu $4Rr^2$.

984. Dacă O este centrul circumferinţei circumscrise triunghiului ABC, iar I — centrul circumferinţei înscrise, atunci

$$\frac{AO}{AI} \cdot \frac{BO}{BI} \cdot \frac{CO}{CI} = \frac{R^2}{4r^2}.$$

985. Dacă patru drepte, intersectându-se două câte două, formează patru triunghiuri, atunci patru circumferinţe, circumscrise acestor triunghiuri, trec prin acelaşi punct, iar centrele lor sunt situate pe aceeaşi circumferinţă, care de asemenea trece tot pin acelaşi punct.

986. Laturile triunghiului sunt egale cu a, b, c, iar în vârfurile lui se află centrele circumferinţelor, fiecare din ele este tangentă cu altele două. Aflaţi razele acestor circumferinţe , şi de asemenea raza circumferinţei, care este tangentă cu fiecare din aceste trei circumferinţei. Examinaţi toate cazurile.

987. Laturile triunghiului înscris în circumferinţă sunt egale cu r, $r\sqrt{3}$, $2r$ şi taie segmente, ale căror arii sunt egale cu S_1, S_2, S_3. Demonstraţi că aria triunghiului $S = S_3 - S_2 - S_1$.

988. Pe diametrul AB sunt luate punctele arbitrare C, D şi pe segmentele AC, CD, DB, ca pe diametre, sunt construite circumferinţe mai mici. Demonstraţi că lungimile celor trei circumferinţe mai mici în sumă sunt egale cu lungimea celei mai mari circumferinţe.

989. Prin punctul circumferinţei de raza r trec două circumferinţe mai mici, tangente la ea, şi care împart cercul, mărginit de circumferinţa de raza r în trei figuri echivalente. Aflaţi razele circumferinţelor mai mici.

990. În circumferinţa de raza r sunt înscrise trei circumferinţe egale într-un astfel de mod, că fiecare din ele este tangentă interior la circumferinţa dată şi este tangentă exterior la cele două circumferinţe egale cu ea. Aflaţi ariile a şapte figuri, în care circumferinţele înscrise împart cercul dat de raza r.

991. Pe raza OA a circumferinţei, ca pe diametru, este construită o circumferinţă mică. Fie B şi C – punctele, în care sunt intersectate circumferinţele mică şi cea mare de o semidreaptă arbitrară, dusă din punctul O. Demonstraţi că lungimile arcelor AB şi AC sunt egale.

992. Dintr-un punct al circumferinţei sunt duse două coarde egale AB şi AC, care împart cercul, mărginit de această circumferinţă, în trei figuri echivalente. Aflaţi măsura unghiului BAC.

993. Punctul P se află la distanţa $2r$ de la centrul cercului de raza r. Prin P sunt duse două semidrepte, care împart cercul în trei părţi echivalente. Aflaţi măsura unghiului format de aceste semidrepte.

994. În sectorul de cerc cu unghiul de $60°$ este înscris un cerc. Aflaţi raportul ariilor ale sectorului dat şi a cercului înscris.

995. Se dă $\triangle ABC$. Pe dreptele BC, CA şi AB sunt date punctele A_1, B_1 şi C_1 corespunzător astfel, că $\overline{AC_1} = \alpha\overline{C_1B}$, $\overline{BB_1} = \beta\overline{A_1C}$, $\overline{CB_1} = \gamma\overline{B_1A}$. Demonstraţi că dacă punctele A_1, B_1, C_1 sunt situate pe aceeaşi dreaptă, atunci $\alpha\beta\gamma = -1$. Oare este adevărată afirmaţia inversă?

996. Prin vârful C al paralelogramului $ABCD$ este dusă dreapta l, care intersectează dreptele AB şi AD corespunzător în punctele M şi N. Demonstraţi că dacă $\overline{DC} = k\overline{AM}$, $\overline{BC} = l\overline{AN}$, atunci $k + l = 1$.

997. În care raport împarte latura AC semidreapta, care porneşte din vârful B al triunghiului ABC şi trece prin mijlocul medianei duse din vârful A?

998. Mediana AM_a de punctele K şi M este împărţită în trei părţi egale. În care părţi este împărţită latura AB de semidreaptele CK şi CM?

999. Aflaţi aria triunghiului S: a) după mediana lui m_a şi unghiurile B, C; b) dacă sunt date medianele lui m_a, m_b, m_c,

1000. Cunoscând unghiurile triunghiului, exprimaţi unghiul format de mediana şi înălţimea, ce pornesc din acelaşi vârf.

1001. Mediana –media proporţională a laturilor, care pornesc din acelaşi vârf. Aflaţi unghiul triunghiului din acest vârf.
1002. Aflaţi pe mediana triunghiului aşa un punct prin care se poate duce numai o singură dreaptă, care împarte aria triunghiului dat în raportul 1:2.
1003. Aflaţi ariile figurilor, în care cercul de raza r este divizat de coardele AC şi BD, care se intersectează, când arcele AB, BC, CD şi DA au corespunzător 150°, 30°, 90° şi 90°.
1004. h_1, h_2, h_3 — înălţimile triunghiului, iar r — raza circumferinţei înscrise. Demonstraţi, că $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.
1005. Pe laturile unui triunghi dreptunghic, ca pe diametre, sunt construite semicercuri (fig.331). Demonstraţi că suma ariilor S_1şi S_2 ale secerăţelelor formate este egală cu aria S a triunghiului dat.

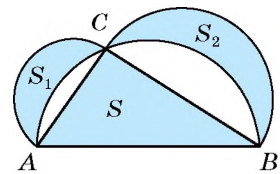


Fig.331

1006. ***Problema lui Arhimede.*** De aceeaşi parte a dreptei AB sunt duse semicircumferinţe cu diametrele de AC, CB şi AB (fig.332). Dreapta CM, perpendiculară pe AB, intersectează semicircumferinţa mai mare în punctul M. Demonstraţi, că aria figurii mărginită de aceste semicircumferinţei, este egală cu aria cercului cu diametrul CM.

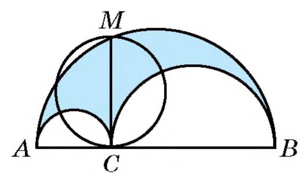


Fig.332

1007. ***Problema lui Ptolomeu.*** Demonstraţi că în patrulaterul înscris în circumferinţă, suma produselor a laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor.

Probleme pentru repetare

La capitolul 1

1008. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 5 cm şi 12 cm. Aflaţi sinusurile, cosinusurile şi tangentele unghiurilor ale triunghiului.
1009. Calculaţi unghiurile trapezului isoscel, dacă sinusul al unuia din ei este egal cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
1010. Calculaţi:
a) $\sin^2 36°+\cos^2 36°-\mathrm{tg}^2 45°$;
b) $\cos 60°\sin 30°-\sin 60°\cos 30°+\cos 120°\,\mathrm{tg}\,135°$;
c) $\mathrm{tg}\,135°\,\mathrm{tg}\,45°-\sin 30°\cos 120°$;
d) $2\cos 45°\sin 45°-\sin^2 60°-\cos^2 60°$.
1011. Aflaţi $\cos\alpha$ şi $\mathrm{tg}\,\alpha$, dacă $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $90°<\alpha<180°$.

1012. Aflaţi $\sin\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

1013. Simplificaţi expresiile:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\beta$;

b) $\sin\alpha \sin(180° - \alpha) - \cos\alpha \cos(180° - \alpha)$;

c) $\sin^2(180° - \alpha) + \cos^2\alpha + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2(180° - \alpha)}$;

d) $\dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)}$.

1014. *O* — centrul circumferinţei, înscrise în triunghiul *ABC*. Aflaţi:

a) $\angle B$, dacă $\angle AOC$ este egal cu $-\frac{1}{2}$;

b) $\angle AOC$, dacă $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1015. Bazele trapezului isoscel, în care poate fi înscrisă o circumferinţă, sunt proporţionale cu numerele 3 şi 11. Aflaţi sinusurile unghiurilor ale trapezului.

1016. Construiţi triunghiul isoscel cu latura laterală de 6 cm şi unghiul de la bază, al cărui cosinus este egal cu $\frac{1}{3}$.

1017. Construiţi triunghiul isoscel, dacă înălţimea dusă la latura laterală este egală cu 4 cm, iar tangenta unghiului de la bază este egală cu $\frac{4}{3}$.

1018. Cosinusurile unghiurilor ascuţite ale trapezului sunt egale cu 0,8 şi 0,6 . Cu ce sunt egale sinusurile, cosinusurile şi tangentele unghiurilor obtuze ale lui?

1019. *AK*, *BL*, *CM* — medianele $\triangle ABC$. Aflaţi coordonatele punctului L, dacă $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$, $K(1; -1)$.

1020. Segmentul *MN* cu punctele *K* şi *P* este împărţit în trei părţi egale ($MK = KP = PN$). Aflaţi coordonatele punctului *N*, dacă $M(2; -4)$, $P(-6; 2)$.

1021. Aflaţi laturile şi aria $\triangle ABC$, dacă $A(a; b)$, $B(-a; b)$, $C(-a; -b)$ şi punctul A este situat în cadranul III.

1022. Se dă $\triangle ABC$, în care $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Aflaţi lungimile medianei, înălţimii şi bisectoarei, duse din vârful *B*.

1023. Folosind condiţia problemei anterioare, scrieţi ecuaţiile medianei, înălţimii şi bisectoarei, duse din vârful *B*.

1024. Punctele $A(2; -5)$ şi $C(2; -1)$ sunt vârfurile pătratului *ABCD*. Scrieţi ecuaţia circumferinţei înscrise în acest pătrat, şi a circumferinţei circumscrise lui. Aflaţi vârfurile necunoscute ale pătratului.

1025. Pe axa absciselor aflaţi punctul M, care este echidistant de originea de coordonate şi de punctul P (2;3).

1026. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(1;\ 4)$ şi $B(-2;\ 1)$. Aflaţi aria triunghiului, pe care îl taie această dreaptă de la axele de coordonate.

1027. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin centrele a două circumferinţe: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ şi $x^2 + y^2 + 4x - 6t = 3$.

1028. Demonstraţi că triunghiul cu vârfurile $A(3;\ 4)$, $B(6;\ -2)$, $C(-3;\ 1)$ este isoscel. Aflaţi aria lui.

1029. Stabiliţi tipul patrulaterului $ABCD$, dacă $A(3;\ 1)$, $B(4;\ 6)$, $C(9;\ 7)$, $D(8;\ 2)$. Aflaţi perimetrul şi aria lui.

1030. Scrieţi ecuaţia circumferinţei circumscrise triunghiului ABC, dacă $A(1;\ 8)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -2)$.

1031. Oare se poate circumscrie o circumferinţă patrulaterului $ABCD$, dacă $A(-4;\ 3)$, $B(-1;\ 6)$, $C(4;\ 1)$, $D(-1;\ -2)$? Oare există circumferinţă înscrisă în acest patrulater? Scrieţi ecuaţia circumferinţei dacă aceasta este posibil.

1032. Construiţi circumferinţa dată cu ecuaţia:

a) $(x+2)^2 + y^2 = 9$;

b) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$;

c) $x^2 + (y-3)^2 = 4$.

1033. Aflaţi aria triunghiului, care s-a obţinut la intersecţia dreptei AB cu axele de coordonate, dacă *A (2;-3)* şi *B (6;3)*. Scrieţi ecuaţia circumferinţei, circumscrise acestui triunghi.

1034. Demonstraţi că linia dată cu ecuaţia $x^2 + 6x + y^2 = 0$, este ecuaţie a circumferinţei. Oare va fi segmentul AB diametrul acestei circumferinţe, dacă $A\left(-5; \sqrt{5}\right)$, $B\left(-1; -\sqrt{5}\right)$?

La capitolul 2

1035. Construiţi trei vectori arbitrari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Construiţi vectorul $\vec{d}$ aşa ca:

a) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$;

b) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

c) $\vec{d} = 0,5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$;

d) $\vec{d} = \vec{a} + 0,5\vec{b} - 2\vec{c}$.

1036. Oare sunt egali vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, dacă $A(1;\ 6)$, $B(3;\ 2)$, $C(0;\ -1)$, $D(2;\ -5)$?

1037. Aflaţi modulul vectorului $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, dacă $\vec{a} = (1;\ 3)$, $\vec{b} = (-2;\ 0)$.

1038. Pentru care valori ale lui x vectorii $\vec{a} = (x;\ -2)$ şi $\vec{b} = (-4;\ 2x)$ sunt coliniari?

1039. Aflaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:

a) $A(1;\ 3)$, $B(-2;\ 4)$;
b) $A(-6;\ 8)$, $B(1;\ -3)$;
c) $A(0;\ a)$, $B(a;\ 0)$;
d) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ n)$.

1040. Se dau punctele $M(-1;\ 4)$, $N(2;\ -3)$, $A(-2;\ 1)$. Aflaţi coordonatele a unui astfel de punct B , ca $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$.

1041. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{a}$, coorientat cu vectorul $\vec{p}=(3;-4)$, dacă $|\vec{a}|=15$.

1042. Demonstraţi că punctele $A(-1;\ 3)$, $B(4;\ 5)$, $C(19;\ 11)$ sunt situate pe aceeaşi dreaptă.

1043. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $(\vec{m}-2\vec{n})$ şi $(2\vec{m}+\vec{n})$, dacă $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60°$.

1044. Pentru care valoare a lui p produsul scalar al vectorilor $\vec{a}=(3;\ p)$ şi $\vec{b}=(-4;3)$ este egal cu 6?

1045. Latura triunghiului regulat ABC este egal cu 2 cm. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

1046. Demonstraţi că diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare, dacă $A(-5;\ -4)$, $B(-4;\ 2)$, $C(1;\ 6)$, $D(1;\ -1)$.

1047. Pentru care valori ale lui x vectorii $\vec{p}=(2;\ x)$ şi $\vec{s}=(x;\ x+3)$ sunt perpendiculari?

1048. Aflaţi modulul vectorului $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$, dacă $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)=60°$.

1049. Aflaţi cosinusurile unghiurilor ale triunghiului ABC,dacă $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(2;\ -1)$.

1050. Pentru care valori ale lui a unghiul format de vectorii $\vec{m}=(6;\ a)$ şi $\vec{b}\,(-5;\ a-1)$ este obtuz?

1051. Aflaţi unghiul format de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, dacă vectorul $\vec{a}+2\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a}-2\vec{b}$.

1052. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{p}$, dacă el este perpendicular pe vectorul $\vec{m}\,(1;\ -3)$ şi $|\vec{p}|=3\sqrt{10}$.

1053. Se dau punctele $A(4;\ -2)$ şi $B(2;\ -5)$. Scrieţi ecuaţia dreptei care este tangentă la circumferinţa cu diametrul AB în punctul A.

1054. Scrieţi ecuaţiile tangentelor, duse din punctul $A(5;\ 0)$ la circumferinţa $x^2+y^2=9$.

1055. Fie că O – punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC. Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{AO}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ şi $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

1056. Fie punctele P şi K – mijlocurile laturilor BC şi CD ale paralelogramului $ABCD$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{PK}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ şi $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

La capitolul 3

1057. Aflaţi laturile necunoscute ale $\triangle ABC$, dacă:

a) $AB = 3$ cm, $BC = 8$ cm, $\angle B = 60°$;

b) $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $\cos B = \frac{7}{9}$;

c) $AC - AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $\angle B = 120°$;

d) $AC = 6$ cm, $BC = 14$ cm, $\angle A = 60°$.

1058. Laturile triunghiului sunt proporţionale cu numerele 7, 8 şi 13. Aflaţi cel mai mare unghi al triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 56 cm.

1059. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 12 cm şi 32 cm, iar una din laturi 14 cm. Aflaţi perimetrul paralelogramului şi unghiul făcut de diagonale lui.

1060. Laturile triunghiului sunt egale cu 11 cm, 23 cm şi 30 cm. Aflaţi lungimea medianei, duse la cea mai mare latură.

1061. În $\triangle MNP$ $MN = 12$ cm, $\sin N = 0{,}4$, $\sin P = 0{,}6$. Aflaţi MP.

1062. În $\triangle ABC$ $AB = BC = 6$ cm, $\sin A = 0{,}4$. Aflaţi distanţa de la punctul de intersecţie al medianelor triunghiului până la centrul circumferinţei circumscrise triunghiului.

1063. AL — bisectoarea triunghiului isoscel $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BL = a$, $\angle A = 2\alpha$. Aflaţi laturile triunghiului şi lungimile bisectoarelor lui.

1064. BM — mediana $\triangle ABC$, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Aflaţi AB.

1065. Bazele trapezului sunt egale cu 6 cm şi 24 cm. Aflaţi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă.

1066. Pe laturile AB şi BC $\triangle ABC$ sunt luate punctele K şi T так, astfel, că $AB = 10$ cm, $AK = 2$ cm, $BC = 14$ cm, $TC = 9$ cm. Aflaţi aria patrulaterului $AKTC$, dacă $S_{\triangle ABC} = 28$ cm^2.

1067. Perimetrul paralelogramului este egal cu 52 cm, iar aria lui 60 cm^2. Aflaţi laturile şi înălţimile paralelogramului, dacă unghiul lui ascuţit este de 30°.

1068. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6 cm şi 8 cm, iar înălţimea dusă din acest vârf, — 4 cm. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise.

1069. Bazele trapezului isoscel $ABCD$ sunt egale cu 11 cm şi 21 cm, iar latura laterală are 13 cm. Aflaţi razele circumferinţelor:

a) circumscrisă trapezului;

b) înscrisă în $\triangle ABC$;

c) înscrisă $\triangle ACD$.

1070. În trapezul $ABCD$ bazele BC şi AD sunt egale corespunzător cu 9 cm şi 14 cm, iar $AB = 8$ cm. Aflaţi CD, dacă $\angle A = 60°$.

1071. Aflaţi înălţimea trapezului, dacă diagonalele lui AC şi BD se intersectează în punctul O şi $AC = 10$ cm, $BD = 6$ cm, $\angle AOC = 120°$.

1072. Una din laturile triunghiului este cu 6 cm mai lungă decât alta, iar unghiul fomat de ele este de 30°.Aflaţi aceste laturi, dacă aria triunghiului este egală cu 40 cm^2.

1073. Aflaţi razele circumferinţelor înscrisă şi circumscrisă triunghiului cu laturile de 13 cm, 20 cm, 21 cm.

1074. Aflaţi înălţimile triunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 6 cm, 25 cm, 29 cm.

1075. Trei circumferinţe de razele 6 cm, 7cm, 8 cm sunt tangente două câte două. Aflaţi aria triunghiului ale cărui vârfuri coincid cu centrele acestor circumferinţe.

1076. Centrul circumferinţei înscrisă în triunghiul cu laturile 11 cm, 25 cm şi 30 cm, este unit cu vârfurile triunghiului. Aflaţi ariile triunghiurilor, care totodată s-au format.

1077. Aflaţi aria trapezului dacă bazele lui sunt egale cu 4 cm şi 25 cm, iar laturile laterale au 13 cm şi 20 cm.

La capitolul 4

1078. Aflaţi unghiurile pentagonului convex, dacă ele sunt proporţionale cu numerele 3, 4, 5, 7, 8.

1079. Unghiul la centru al unui poligon regulat cu n laturi este de 4 ori mai mic decât unghiul interior al lui. Aflaţi n.

1080. Desenaţi circumferinţa de raza 6cm. Înscrieţi în circumferinţă şi circumscrieţi-i poligoane regulate cu n laturi şi calculaţi perimetrele lor, dacă:

a) $n = 3$; c) $n = 6$;
b) $n = 4$; d) $n = 12$.

1081. Aflaţi unghiurile poligonului regulat cu 12 laturi.

1082. Oare există poligon regulat, în care fiecare unghi este egal cu 145°?

1083. Într-un triunghi regulat este înscrisă o circumferinţă, iar în circumferinţă este înscris un pătrat. Aflaţi latura triunghiului, dacă ea este cu 5 cm mai mare decât latura pătratului.

1084. Într-o circumferinţă sunt înscrişi un pătrat şi un hexagon regulat. Perimetrul pătratului este egal cu 24 cm. Aflaţi perimetrul şi aria hexagonului.

1085. Unei circumferinţe i s-a circumscris un triunghi regulat, iar în circumferinţă este înscris un hexagon regulat al cărui perimetru este de 18 cm. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului.

1086. Se dă un hexagon regulat cu latura de 4 cm. De aflat lăţimea şi aria inelului format de circumferinţele înscrisă şi circumscrisă hexagonului.

1087. În sectorul de cerc *AOB*, cu raza $OA = 10$ cm este înscrisă o circumferinţă. Aflaţi raportul ariilor sectorului şi cercului, dacă $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$.

1088. Într-o circumferinţă cu lungimea de 24π cm este dusă coarda de $12\sqrt{2}$ cm. Aflaţi lungimile arcelor, în care această coardă împarte circumferinţa.

1089. În circumferinţa, lungimea căreia este egală cu 36π cm, la distanţa de 9 cm de la centru este dusă o coardă. De aflat lungimea celui mai mic arc din arcele formate.

1090. Aflaţi aria sectorului de raza 6 cm, dacă măsura în grade a lui este egală cu 150°.

1091. Într-un sector circular cu unghiul la centru de $120°$ este înscris un cerc. Aflaţi aria acestui cerc, dacă raza cercului dat este egală cu R.

1092. Unui pătrat cu latura de 10 cm i s-a circumcris o circumferinţă. În unul din segmentele formate este înscris un pătrat. Aflaţi aria acestui pătrat.

La capitolul 5

1093. Aflaţi coordonatele punctului, care este simetric cu punctul $A(3;\ -5)$ în raport cu punctul $Q(-1;\ 4)$.

1094. Oare are $\triangle ABC$, la care $A(-6;\ -1)$, $B(-3;\ 5)$, $C(3;\ 2)$, axă de simetrie? Dacă are, atunci scrieţi ecuaţia ei.

1095. AC — diagonala pătratului ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate. Scrieţi ecuaţiile axelor de simetrie ale acestui pătrat, dacă $A(1;\ 2)$, $C(5;\ 6)$.

1096. Circumferinţa de raza 3 este tangentă la axele de coordonate în I cadran. Scrieţi ecuaţia acestei circumferinţe şi a circumferinţei simetrice acesteia în raport cu:

a) originea de coordonate; c) axa ordonatelor;
b) axa absciselor; d) dreapta $y = 2x$.

1097. Oare pot să fie triunghiurile ABC şi MNP simetrice în raport cu un oarecare punct? În cazul răspunsului pozitiv aflaţi coordonatele acestui punct, dacă $A(1;-3)$, $B(5;-2)$, $C(3;1)$, $M(-3;1)$, $N(-7;0)$, $P(-5;-3)$.

1098. Determinaţi tipul patrulaterului $ABCD$ şi scrieţi ecuaţiile axelor de simetrie ale lui, dacă $A(-2;2)$, $B(6;2)$, $C(6;-4)$, $D(-2;-4)$.

1099. Sunt date triunghiurile ABC şi ADC. Demonstraţi că punctele B şi D sunt simetrice în raport cu dreapta AC, dacă $AB = AD$ şi $BC = CD$.

1100. La deplasarea paralelă cu vectorul $\bar{a}$ circumferinţă $(x-2)^2+(y+5)^2=16$ trece în circumferinţa $(x+2)^2+(y+2)^2=16$. Aflaţi coordonatele vectorului $\bar{a}$.

1101. Aflaţi cel mai mic unghi la rotaţia cu care pentagonul regulat trece în sine însuşi.

1102. Construiţi pătratul cu latura de 4 cm şi rotiţi-l în jurul punctului de intersecţie al diagonalelor cu unghiul de $45°$. Câte vârfuri are poligonul cu n laturi care s-a obţinut? Dar câte axe de simetrie?

1103. O — punctul de intersecţie al medianelor triunghiului echilateral ABC. La transportul paralel punctul A a trecut în punctul O. Executaţi deplasarea paralelă a $\triangle ABC$. Aflaţi perimetrul triunghiului construit, dacă $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$.

1104. Se dau romburile $ABCD$ şi $MNPK$. $\angle A = 50°$, $\angle N = 130°$, $AC : BD = 4 : 5$. Aflaţi diagonalele rombului $MNPK$, dacă aria lui este egală cu $40\ cm^2$.

1105. Dreapta MN, este paralelă cu baza AC $\triangle ABC$, şi îl împarte în două părţi – într-un triunghi şi un trapez. Ariile acestor figuri sunt proporţionale cu numerele 1 şi 3. Aflaţi perimetrul $\triangle ABC$, dacă perimetrul $\triangle MBN$ este egal cu 7 cm.

1106. Prelungirile laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul P. Aflaţi aria trapezului, dacă $AD : BC = 5 : 3$ şi $S_{\triangle BPC} = 27$ cm.

Testul pentru antrenament nr.1

1 Aflaţi coordonatele punctului A', simetric cu punctul $A(-1; 3)$ în raport cu originea de coordonate.

A	B	C	D
$(1; -3)$	$(1; 3)$	$(-1; -3)$	$(3; -1)$

2 Aflaţi aria hexagonului regulat înscris în circumferinţa de raza 6 cm.

A	B	C	D
$108\sqrt{3}$ cm^2	$9\sqrt{3}$ cm^2	$54\sqrt{3}$ cm^2	36 cm^2

3 Aflaţi aria cercului, circumscris $\triangle ABC$, dacă $AB = 10$ cm, iar $\angle ACB = 45°$.

A	B	C	D
200π cm^2	50π cm^2	$10\sqrt{2}\pi$ cm^2	100π cm^2

4 Scrieţi ecuaţia circumferinţei cu centrul în punctul $O(-3; 2)$, care este tangentă la axa ordonatelor.

A	B	C	D
$(x+3)^2 +$ $+ (y-2)^2 = 3$	$(x+3)^2 +$ $+ (y-2)^2 = 2$	$(x+3)^2 +$ $+ (y-2)^2 = 4$	$(x+3)^2 +$ $+ (y-2)^2 = 9$

5 Pentru care cea mai mică valoare a lui a lui vectorii $\vec{m}(a; 3)$ şi $\vec{n}(-2a; 6)$ sunt perpendiculari?

A	B	C	D
3	9	-3	$-3\sqrt{2}$

6 Determinaţi tipul triunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 2 cm, 5 cm, 6 cm.

A	B	C	D
ascuţitunghic	obtuz	dretpunghiular	nu se poate afla

7 Se dă punctul M (-3;5). Determinaţi corespondenţa dintre transformările geometrice (1-4) şi coordonatele imaginii punctului M (A-E) la această transformare.

1 Deplasarea paralelă cu vectorul $\bar{a}=(1;\ 3)$ — **A** $(-3;\ -5)$
2 Simetria în raport cu axa absciselor — **B** $(1;\ 1)$
3 Simetria în raport cu punctul $P(-1;\ 3)$ — **C** $(-2;\ 8)$
4 Simeria în raport cu dreapta $y = x$ — **D** $(3;\ 5)$
E $(5;\ -3)$

8 Sunt date punctele $A(-2;\ 0)$ şi $B(4;\ 0)$.
1) Scrieţi ecuaţia locului geometric al centrelor circumferinţelor, care trece prin punctele A şi B.
2) Scrieţi ecuaţia circumferinţei, care trece prin punctele A şi B, dacă raza ei este egală cu 5.

9 Aflaţi unghiul format de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}+\vec{c}$, dacă $\vec{a}=(3;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 5)$, $\vec{c}=(-3;\ 7)$.

10 Aflaţi imaginile punctelor $A(-2;\ 3)$ şi $B(4;\ 7)$, dacă la transportul paralel al segmentului AB imaginea mijlocului lui este punctul M (3;1).

11 Aflaţi ipotenuza unui triunghi dreptunghic, dacă centrul circumferinţei înscrise este îndepărtat de la extremităţile ei cu 4 cm şi $2\sqrt{2}$ cm.

12 În triunghiul regulat $\triangle ABC$, a cărui arie este S, este înscris rombul $AMPK$ ($M \in AB,\ P \in BC,\ K \in AC$). Aflaţi aria patrulaterului $AMPC$.

Testul pentru antrenament nr. 2

1 Punctele $A(2;\ -3)$ şi $A'(-4;\ 5)$ sunt simetrice în raport cu punctul M. Aflaţi coordonatele punctului M.

A	B	C	D
$M(-2;\ 2)$	$M(-1;\ 1)$	$M(-10;\ 13)$	$M(8;\ -11)$

2 Aflaţi raza circumferinţei circumscrise trapezului, dacă latura laterală a lui este egală cu 10 cm, iar diagonala face cu baza mai mare unghiul egal cu 30°.

A	B	C	D
10 cm	20 cm	5 cm	nu se stabileşte

3 Care din ecuaţii este ecuaţia medianei BM a triunghiului ABC, dacă $A(1;\ -3)$, $B(3;\ 4)$, $C(7;\ 1)$?

A	B	C	D
$y = -2x + 10$	$y = -3x + 13$	$y = -6x + 14$	$y = -5x + 19$

4 Câte laturi are poligonul reglat cu n laturi, dacă unghiul de la centru al lui este egal cu 30°?

A	B	C	D
$n = 6$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$

5 Care este cea mai mică valoare a lui a pentru care modulul vectorului $\vec{p} = (a; 5)$ este egal cu 13?

A	B	C	D
−9	−12	12	13

6 Un pătrat şi un hexagon regulat sunt înscrişi în aceeaşi circumferinţă. Aflaţi raportul perimetrului hexagonului către perimetrul pătratului.

A	B	C	D
$6\sqrt{2}:1$	$2\sqrt{2}:3$	$3\sqrt{3}:8$	$3:2\sqrt{2}$

7 *M* şi *N* – mijlocurile laturilor *AB* şi *AD* ale paralelogramului *ABCD*. Stabiliţi corespondenţa dintre figurile (1-4) şi ariile lor *(A-E)*, dacă aria paralelogramului este egală cu 120 cm^2.

1 $\triangle AMN$
2 $\triangle NDC$
3 Patrulaterul *MBDN*
4 Patrulaterul *ABCN*

A 45 cm^2
B 30 cm^2
C 15 cm^2
D 60 cm^2
E 90 cm^2

8 Sunt date punctele *A(−3; 5), O(0; −1)* şi *B(4; 1)*.
1) Stabiliţi tipul triunghiului *AOB*.
2)Aflaţi aria paralelogramului *ABCD*, dacă *O* – punctul de intersecţie al diagonalelor lui.

9 Perimetrul triunghiului regulat *ABC* este de 6 cm. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

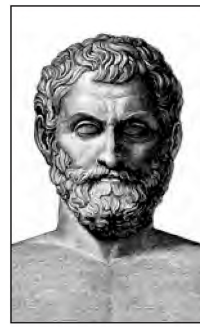
10 Două laturi ale triunghiului, care fac unghiul egal cu 60°, se raportă ca 5:8. Aflaţi perimetrul triunghiului, dacă a treia latură a lui este egală cu 14 cm.

11 Circumferinţa cu centrul *O* de raza *R* este circumscrisă $\triangle ABC$. Aflaţi raza circumferinţei circumscrise $\triangle AOC$, dacă $\angle B = 60°$.

12 Într-un cerc este înscris un hexagon regulat cu latura *a*. Aflaţi aria celui mai mic din segmentele, a cărui bază este latura hexagonului.

Fragmente din istoria geometriei

Geometria este una din cele mai vechi ştiinţe. După cum mărturiseşte denumirea ei (*geo* - pământ, *metreo* – măsor), iniţial ea era legată numai cu măsurarea loturilor de pământ. Cu timpul cunoştinţele geometrice au început să se aplice la măsurarea înălţimilor, adâncimilor, diferitelor distanţe.



Fales

La început oamenii măsurau distanţele şi unghiurile nemijlocit sau folosind proprietăţile figurilor asemenea. **Fales din Milet** (**sec. V** î.H) cu aşa un procedeu determina distanţele până la obiectele inaccesibile, a măsurat înălţimea uneia din piramidele egiptene. **Eratosfene Chirensikii** (**sec. II**.î. H) a determinat dimensiunile aproximative ale Pământului. **Heron din Alexandria** (**sec. I**. î. H) a scris cartea „Dioptrica”, care se poate considera ca prima lucrare din geometrie., de asemenea a construit un dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în diferite plane, care a devenit prototipul teodoliţilor contemporani.

Cu rezolvarea triunghiurilor înainte vreme se ocupa o ştiinţă matematică aparte – *trigonometria* (grecescul **τριγωνον** — triunghi, **μετρε'ω** — măsor). Matematicianul şi astronomul grec antic Ghipparh încă în sec. II î.H a elaborat tabelele coardelor cu ajutorul cărora a determinat distanţa de la Pământ până la Lună şi a rezolvat multiple alte probleme aplicate. El primul a introdus coordonatele geografice – lungititudinea şi latitudinea.

Un mare aport în dezvoltarea trigonometriei l-a făcut matematicianul, astronomul, geograful **Ptolomei Clavdir** (aproximativ aa 100-178) – creatorul teoriei heliocentrale a lumii. Lucrarea lui, tradusă în limba arabă sub denumirea „Alimaghest”, un timp îndelungat a servit ca manual de trigonometrie. Ptolomei a inventat astrolabul, a compus de asemenea tabelul sinusurilor ai unghiurilor ascuţite. Pentru dezvolatarea trigonometriei ca ştiinţă nu puţin a făcut mai târziu astronomul indian **Bhascara Bramagupta** (sec. VII), şi de asemenea învăţaţii arabi, în particular **Alibattani (sec. IX)**. Indienii au introdus termenii *sinus, cosinus,* iar arabii – *tangenta.*

Teorema sinusurilor primul care a demonstrat-o încă în sec. XI a fost savantul şi poetul din Asia Mjlocie **al Biruni (973-1048)**, iar *teorema cosinusurilor* – matematicianul francez **Francois Viete (1540-1603)**. În sec. XVI **Iogan Miller din Kenigsberg** (sau cum îl mai numeau *Regiomontanus*) a alcătuit tabelele precizate pentru toate funcţiile trigonometrice ale unghiurilor ascuţite.

Notarea simbolică sin α, cos α şi sistemul strict de studiere a funcţiilor trigonometrice le-a elaborat academicianul din Sanct-Petersburg **Leonard Euler (1707-1783)**.

Poligoanele regulate le studia încă Pitagora şi elevii lui. Ei au demonstrat că se poate acoperi planul cu poligoane cu *n* laturi regulate şi egale, de parcă ar fi parchet, numai cu condiţia, când n este egal cu 3,4 sau 6. Au examinat elevii lui Pitagora şi poligoane stelate regulate (neconvexe), mai ales *pentagrama*, care poate fi formată prelungind toate laturile pentagonului regulat. Se consideră că aşa un semn aduce

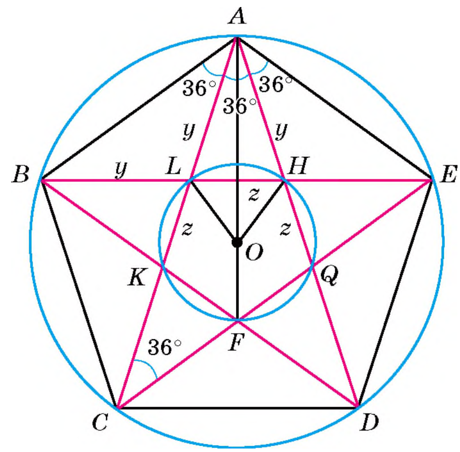


Fig.333

fericirea, de aceea, salutându-se pitagoreicii desenau pe nisip pentagrama. Din punctul de vedere al geometrie pentagrama într-adevăr este destul de interesantă figură (fig.333). Punctul K realizează „secţiunea de aur” a segmentului AC, L – a segmentului AK ş.a.m.d.

Construcţia poligoanelor regulate este strâns legată cu împărţirea circumferinţei în părţi egale.

În câte părţi egale poate fi împărţită circumferinţa, folosindu-se numai de compas şi riglă? Încă matematicienii Greciei Antice analizau aşa o problemă. Ei ştiau să împartă circumferinţa în 2, 3 şi 5 părţi egale, şi de asemenea, fiecare arc puteau să-l împartă în jumătate. De asemenea ştiau cum, folosindu-se numai de compas şi riglă, de împărţit circumferinţa în 2^n, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ şi $3 \cdot 5 \cdot 2^n$ părţi egale, unde n - număr natural arbitrar.

În decursul următorilor aproape 2000 de ani matematicienii ai multor ţări au cercetat în câte încă părţi egale se poate împărţi circumferinţa, folosindu-se numai de compas şi riglă, însă nimic nou aşa şi n-au inventat. Nu ştiau chiar dacă se poate, folosindu-se numai de compas şi riglă de împărţit circumferinţa în 7 şi 9 părţi egale.

Numai marele matematician german **Carl Gauss (1777-1855)**, fiind încă student a demonstrat, că cu ajutorul numai a compasului şi riglei se poate împărţi circumferinţa în 17 părţi egale, însă nu se poate – în 7. Mai târziu dânsul a demonstrat teorema generală. **Folosindu-se numai de compas şi riglă, se poate împărţi circumferinţa într-un număr impar m de părţi egale, atunci şi numai atunci, când m este prim şi este egal cu $2^{2n} + 1$ sau cu produsul a câtorva numere prime de aşa tip.** Numerele de tipul $2^{2n} + 1$ se numesc numerele lui Fermat, ele sunt rădăcinile ecuaţiilor de un anumit tip şi joacă un rol important în teoria numerelor. În aşa fel problema geometrică despre constituirea poligoanelor regulate şi împărţirea circumferinţei în părţi egale se leagă cu algebra şi teoria numerelor.

Din vechime cu poligoanele regulate erau legate problemele la determinarea lungimii circumferinţei şi a ariei cercului. Savanţii babilonieni şi egipteni considerau că raportul lungimii circumferinţei către diametrul ei, care acum se notează cu litera π, este egal cu 3.

Arhimede a dat o apreciere mai exactă a acestui număr: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Matematicianul chinez **Ţu Ciuncigi (428-499)** a arătat că $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Matematicianul şi astronomul din secolul XV iranian al-Caşi a calculat că $\pi \approx 3{,}1415926535897932$. La ora actuală se ştiu peste un miliard, începând cu primele semne zecimale, ale numărului π. La sfârşitul sec. XIX s-a determinat că numărul π este iraţional.

Sistemul coordonatelor geografice pentru prima dată l-a propus în sec. I î.H savantul grec din vechime Ghipparh din Nichei (180-125 î.H).În sec. XIV matematicianul francez Nicola Oresme (1323-1382) a construit un sistem de coordonate analogic în plan, folosindu-l pentru cercetarea unor dependenţe dintre mărimi. Însă în loc de actualele abscise şi ordonate el a folosit termenii geografici longitudinea şi latitudinea.

Mai târziu ideile lui N. Oresme le-au dezvoltat şi îmbogăţit matematicienii francezi **Pierre Fermat (1601-1665)** şi **Rene Descartes (1596-1650)**. Fermat mai devreme de Descartes a introdus coordonatele, a introdus noţiunea de ecuaţie a dreptei, circumferinţei, elipsei, parabolei, hiperbolei şi a publicat cercetările sale în lucrarea „Introducerea în teoria locurilor plane şi spaţiale" (1636) Descartes metoda de coordonate a sa a descris-o în lucrarea „Geometria" (1637). Însă el aici, examinând variabilele independente şi dependente a pus baza teoriei despre funcţii. Mai târziu cel mai simplu sistem de coordonate l-au numit cu numele lui Descartes.

Pe lângă aceea ca Descartes este matematician el mai este şi filozof, întemeietorul cartezianiei, recunoscut în toată lumea.

Descartes şi Fermat au considerat sistemul de coordonate numai în plan. În sec. XVIII **Iohan Bernoulli (1667-1748)** şi **Alexi Clairaut (1713-1865)** au extins sistemul de coordonate şi asupra spaţiului tridemensional: fiecărui punct al spaţiului tridiminsional i se punea în corespondenţă un triplet ordonat de numere reale. Sistemul de coordonate în spaţiu se studiază în clasele superioare.

Transformările geometrice intrau în geometrie şi mai lent, decât coordonatele. Unele tipuri de simetrii în raport cu o dreaptă şi în raport cu un punct la mulţi oameni le erau demult cunoscute: pe ele ei le-au văzut pe diferite plante, fiinţe vii, de aceea pictorii creau reprezentări simetrice. De exemplu, şumerii cu aproape 5 mii de anii în urmă reprezentau pe vase desene simetrice. Pe frescele palatului lui Darii din Suza înfăţişarea arcaşilor persani este realizată parcă cu ajutorul deplasării paralele. Sciţii, care au trăit pe plaiurile Ucrainei actuale, încă cu peste 2 mii de ani în urmă făceau roţi, simetrice în raport cu un punct şi în raport cu axa, confecţionau bijuterii simetrice. Nu puţine astfel de reprezentări au ajuns la noi încă din timpurile antice. E clar că creatorii acestor reprezentări ştiau multe despre simetrie şi deplasarea paralelă, măcar că nu foloseau termenii geometrici corespunzători.

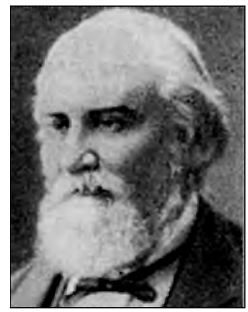
Elemente ale învăţăturii despre simetria figurilor pentru prima dată au apărut în cartea „Începuturile geometriei" a matematicianului francez Andrien Legendre (1752-1833). În geometrie transformările geometrice (ca analogie a funcţiei) au intrat tocmai în sec. XX. Matematicianul german **Felix Klein** (1849-1925) accentua: „Transformările geometrice sunt nu altceva decât generalizarea noţiunii funcţiei". Funcţia numerică trece o mulţime numerică în alta, iar transformarea geometrică – o mulţime de puncte în alta.

A introdus vectorii în matematică tocmai în sec. XIX matematicianul scoţian **Uliam Hamelton** (1805-1865). El a introdus termenul „vector", ceea ce înseamnă în traducere din latină „acel ce duce". Notarea "Δ" a propus-o în anul 1853 **O. Caughy** (1789-1857). Prima lucrare „Teoria calculului vectorial" a tipărit-o în anul 1887 profesorul Universităţii din Kiev U.P. Ermakov (1845-1922).

Vasili Petrovici Ermakov (1845-1922) – doctor în matematica pură, profesor emerit al Universităţii din Kiev (1890), membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din Petersburg (1884).

După ce în anul 1868 a terminat Universitatea din Kiev pe Vasilii Petrovici l-au lăsat ca stependiat pentru a fi pregătit să activeze ca profesor. După ce a apărat disertaţia de magistru în anul 1873 a lucrat la Universitatea din Kiev (docent, profesor extraordinar, profesor ordinar, profesor emerit). Din anul 1899 este profesorul şi primul administrator al catedrei de matematică superioară a Institutului Politehnic din Kiev. A publicat un şir de cursuri şi manuale la disciplinele pe care le citea, printre care: „Teoria vectorilor în plan” (1887), „Geometria analitică” (1899,1900,1918,1920) şi altele.

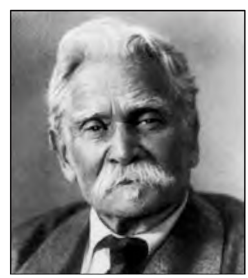
Vasili Petrovici Ermakov a fost un savant foarte cunoscut şi a avut o mare autoritate în mediul învăţaţilor. A fondat şi editat „Jurnalul matematicii elementare”. A fost unul din organizatorii Asociaţiei fizico-matematice din Kiev. A adus un aport ponderabil în dezvoltarea învăţământului matematic.



Mihailo Egorovici Vaşcenko-Zaharcenko

În Ucraina au făcut cercetări în domeniul geometriei de asemenea M.E. Vaşcenko-Zaharcenko, B. Ia. Bubreev, O. S. Smogorgevsikii, M.J. Kovanţov, Pogorelov ş.a.

Mihailo Egorovici Vaşcenko-Zaharcenko (1825-1912) s-a născut în satul Makiivka, ţinutul Poltava. Şi-a făcut studiile în Kiev şi Paris, a fost profesor al Univeristăţii din Kiev. A cercetat întrebările istoriei dezvoltării geometriei, a tipărit câteva manuale de geometrie, a tradus în limba rusă „Începuturile” lui Euclid.



Boris Iakovici Bukreev

Boris Iakovici Bukreev (1859-1962). S-a născut în Lvov. A terminat Universitatea din Kiev din anul 1885 a lucrat în ea, un timp îndeplungat a condus catedra de geometrie. Unul din fondatorii Asocieaţiei fizico-matematice din Kiev. Principalele cercetări se referă la geometrie, analiză şi teoria funcţiilor. A scos de sub tipar lucrările „Geometria diferenţială”, „Geometria neeuclidiană în expunere analitică”.

Olexandr Stepanovici Smogorjevsikii

Olexandr Stepanovici Smogorjevsikii (1896-1969) s-a născut în satul Lisove în ţinutul Vinniţa. A făcut studii în Nemirov şi Kiev, a fost profesor la Institutul politehnic din Kiev. A examinat chestiunile legate cu construcţiile geometrice, a publicat câteva manuale şi lucrări metodice, în particular, manualul referitor la bazele geometriei pentru studenţii universităţii. Lucrările lui sunt traduse în limbile engleză, bulgară, japoneză şi în altele.

Mykola Ivanovyci Kavanţov

Mykola Ivanovyci Kavanţov (1924-1988) s-a născut în regiunea Saratov, şi-a făcut studiile în Kazahstan. Din anul 1950 a trăit şi lucrat în Institutul pedagogic din Zaporojie, adminsta catedra de geometrie a Universităţii din Kiev T.G.Şevcenko. A creat şcoala ştiinţifică în teoria politipurilor liniare. A fost preşedintele comisiei disciplinei de studiere a matematicii pe lângă Ministerul de Învăţământ. A tipărit multe manuale de geometrie pentru aşezămintele superioare de învăţământ: „Geometria proiectivă", „Geometria diferenţială". Este interesantă lucrarea lui „Matematica şi romantica", în care M.I. Kovanţov scria:

„Dragi prieteni! Din copilărie fiecare din voi studiază matematica. Cineva – cu interes, iar cineva – fără tragere de inimă".

Se poate îndrăgi ştiinţa pentru concordanţa strictă a adevărurilor ei, pentru puterea şi multilateralitatea ei, se poate, invers, de-a nutri nu dragostea de ea pentru a ei pedantism şi complexitate. Însă această dragoste şi această lipsă de dragoste are să fie ceva superficial şi nedurabil, ceva întâmplător şi neobligatoriu, dacă de la voi va aluneca aceea, ce se putea numi sufletul ştiinţei, mintea ei şi al ei intelect, frumuseţea ei dihovnicească şi a ei subtilitate armonioasă. Noi anume ne-am folosit de termenii caracteristici pentru aprecierea personalităţii umane, deoarece anume aşa o personalitate, integră şi infinit de interesantă, ar trebui să apară înaintea voastră ştiinţa, ca voi să simţiţi cu adevărat ce ea cu sine reprezintă.."

Olexei Vasilievici Pogorelov

Olexei Vasilievici Pogorelov (1919-2002) – cunoscut specialist în domeniul geometriei, academician al AŞ a RSSU (1961), academician al AŞ a URSS, lider emerit în ştiinţă şi tehnică a Ucrainei. Şi-a făcut studiile la Universitatea din Harkov (1937-1941) şi Academia Militaro-Aeriană M.S. Jukovskii (Moscova, 1941-1945). În anul 1947 după apărarea disertaţiilor de candidat şi doctor obilitat a revenit în Harkov şi mai târziu a condus catedra de geometrie a Universităţii de Stat din Harkov.

O.V. Pogorelov este autorul a peste 200 lucrări, dintre care 60 de monografii şi manuale pentru aşezămintele de învăţământ superioare şi medii, editate în limbile ucraineană, rusă, engleză, germană şi spaniolă. Lui Olexei Vasilievici Pegorelov i s-au decernat multe decoraţii şi titluri. Dumnealui a primit premiul internaţional M.I. Lobacevski, câteva premii de stat şi premii de vază ale Academiei Naţionale de Ştiinţă a Ucrainei.

Lider emerit în ştiinţă şi cavaler al decoraţiilor de stat.

Se dezvoltă ştiinţa geomerică şi acuma. Geometria continuă să servească oamenii. Iată ce a scris unul din cei mai cunoscuţi arhitectori ai sec. XX Le Korbiuzie: „Niciodată până în timpurile noastre noi n-am trăit într-o astfel de perioadă geometrică... Lumea înconjurătoare - asta-i lumea geometriei, curată, adevărată, impecabilă în ochii noştri. Totul împrejur – asta-i geometrie".

Cunoştinţe din cursul şcolii de bază

Triunghiul dreptunghic

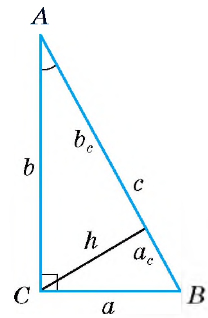
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\quad \frac{b}{c}=\cos\alpha;\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$a^2 + b^2 = c^2$ (teorema Pitagora);

$$a^2 = a_c \cdot c;$$

$$b^2 = b_c \cdot c;$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c;\quad h=\frac{ab}{c}.$$



$$S=\frac{1}{2}ab;\quad S=\frac{1}{2}ch;\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

$$R=\frac{c}{2};\quad r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Triunghiul echilateral

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2};\quad r=\frac{1}{3}h;$$

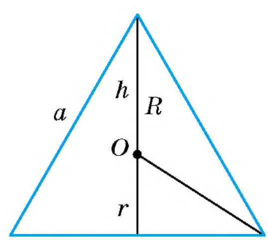
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$h = R + r.$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$R=\frac{2}{3}h;\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r.$$

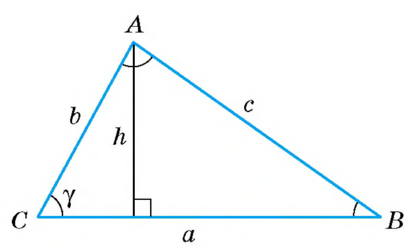


Triunghiul arbitrar

$$S=\frac{1}{2}ah;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

Formula lui Heron:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$



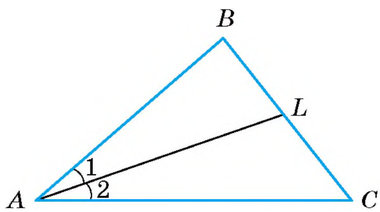
$$r=\frac{S}{p};\quad R=\frac{abc}{4S};\quad R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Teorema cosinusurilor

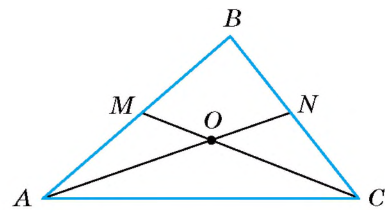
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\ .$$

Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

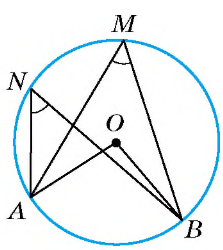


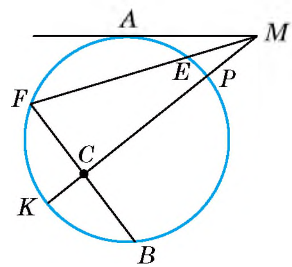
AL — bisectoare
1) $\angle 1 = \angle 2$;
2) $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$.

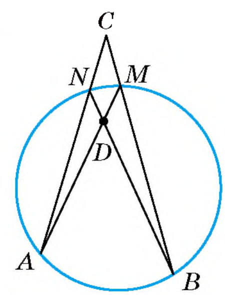


AN, CM — mediane
$AO : ON = 2 : 1$.

Cicrcumferinţă







$C = 2\pi r$; $S = \pi r^2$.

$\angle AMB = \dfrac{1}{2}\angle AOB = $

$= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$;

$\angle AMB = \angle ANB$.

$AM^2 = ME \cdot MF$;
$ME \cdot MF = MP \cdot MK$;
$FC \cdot CB = KC \cdot CP$.

$\angle ADB = \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MN})$;

$\angle ACB = \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN})$.

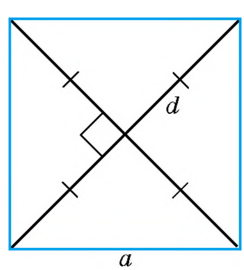
Pătratul

$d = a\sqrt{2}$;
$P = 4a$;
$S = a^2$.

$r = \dfrac{a}{2}$;

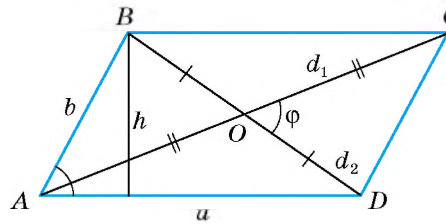
$R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = \dfrac{1}{2}d^2$.



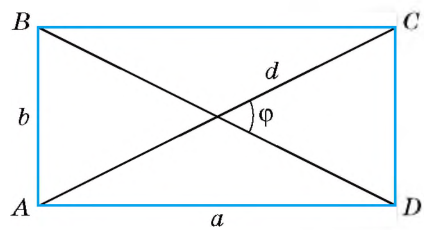
Paralelogramul

$\angle A + \angle B = 180°;$
$P = 2(a + b);$
$S = ah;\ S = ab \sin \alpha;$
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi;$
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$



Dreptunghiul

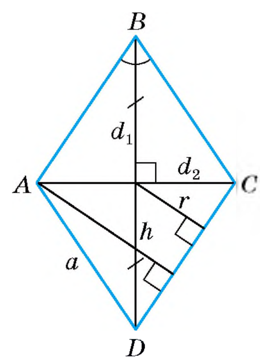
$AC = BD;$
$P = 2(a + b);$
$S = ab;$
$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi;\ R = \frac{1}{2} d.$



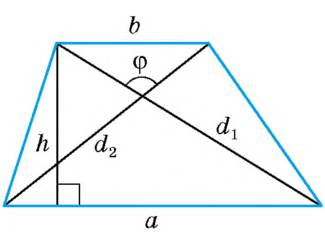
Rombul

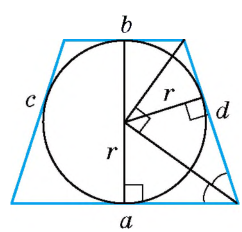
$P = 4a;$
$S = ah;$
$S = a^2 \sin \alpha;$
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$

$r = \frac{1}{2} h;$
$r = \frac{d_1 d_2}{4a}.$



Trapezul





$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi.$

$a + b = c + d;$
$h = 2r.$

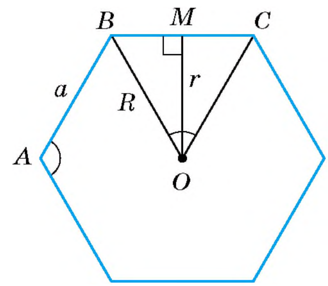
Poligonul regulat

Suma unghiurilor: $180(n-2)$; $P = na$;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \quad \angle BOC = \frac{360^\circ}{n};$$

$$S = \frac{1}{2}arn; \quad S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$



Coodronate în plan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$x^2 + y^2 = R^2$ — ecuaţia circumferinţei cu centrul $O(0;\ 0)$ de raza R.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ — ecuaţia circumferinţei cu centrul $O(a;\ b)$ de raza R.

Ecuaţia dreptei

$ax + by + c = 0$ — ecuaţia generală a dreptei;

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(x_1;\ y_1)$ şi $B(x_2;\ y_2)$;

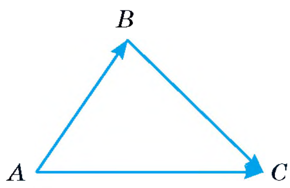
$y = kx + b$ — ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular.

Pentru dreptele $y_1 = k_1x + b_1$ şi $y_2 = k_2x + b_2$:
$k_1 = k_2$ — condiţia paralelismului;
$k_1 \cdot k_2 = -1$ — condiţia perpendicularităţii;

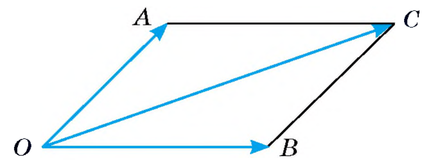
$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ — distanţa de la punctul $M(x_0;\ y_0)$ până la dreapta

$$ax + by + c = 0.$$

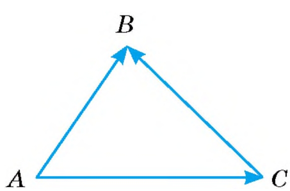
Vectori



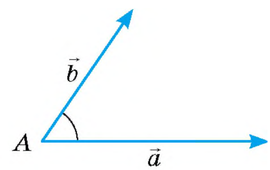
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ — adunarea vectorilor conform regulii triunghiului



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ — adunarea vectorilor conform regulii paralelogramului



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ — diferenţa vectorilor



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ — produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

În formă de coordonate:

Dacă punctul $A\,(x_1;\,y_1)$ — **originea**, iar $B\,(x_2;\,y_2)$ — extremitatea vectorului, atunci $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$ — coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$;

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ — modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Dacă $\vec{a} = (x_1;\, y_1)$ şi $\vec{b} = (x_2;\, y_2)$, atunci $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\, y_1 + y_2)$ — suma vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\, y_1 - y_2)$ — diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ — produsul scalar al vectorilor;

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ — condiţia de perpendicularitate a vectorilor nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ — condiţia de paralelism a vectorilor nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ — condiţia de perpendicularitate a avectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

$\vec{a}=\lambda\vec{b}$ — condiţia de coliniaritate a vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Indice la materie

Răspunsuri

20. a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **21.** a) 0; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23.** $\angle A = 135°$; $\angle B = 15°$; $\angle C = 30°$. **25.** 1D; 2B; 3A; 4E. **30.** 15°; 15°; 150°. **31.** 30°; 30°; 120° sau 15°; 15°; 150°. **34.** a și $a\sqrt{2}$. **39.** 0,2. **40.** $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$. **53.** a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. **54.** a) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **59.** $-0{,}25$; $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **60.** 0,7; $\sqrt{0{,}51}$. **62.** 1C; 2A; 3E; 4D. **63.** 1D; 2A; 3B; 4E. **64.** a) 1; b) 0; c) −1. **70.** a) $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{1}{2}$. **74.** a) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; b) 1; c) $\operatorname{tg}^2\alpha$; d) $-\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **89.** (2; −3). **90.** (0; 0); (0; 5); (5; 5); (5; 0). **91.** (−3; 0); (0; 5); (3; 0); (0; −5) sau (−5; 0); (0; 3); (5; 0); (0; −3). **92.** (2,5; 4). **94.** $M(3; 3)$. **95.** $B(3; -10)$. **96.** $C(10; -5)$; $B(2; 2)$. **97.** $M(1; 3)$; $D(3; 9)$. **98.** (0,5; 4,5); (3; 5); (1,5; 2,5). **99.** $A(-14; 10)$; $B(6; -6)$. **100.** $K(3; 1{,}25)$; $P(4; -0{,}5)$; $T(5; -2{,}25)$. **101.** $M(3; -8)$; $K(-9; 6)$; $B(-15; 13)$. **102.** a) $a = -11$; $b = 6$; b) $a = 1$; $b = 0$; c) $a = 13$; $b = 3$. **103.** (4; 3); (−2; 1); (2; 7). **106.** $D(-3; 7)$. **107.** (2; 1) sau (6; 3), sau (0; 5). **108.** $M(6; 0)$; $N(5; 2)$. **109.** (1; 3). **110.** (−7; 2). **114.** 24 cm^2. **115.** $2R^2 \sin\alpha\cos\alpha$. **116.** 125 cm^2. **126.** $12\sqrt{10}$. **127.** 5; $\sqrt{17}$; $\sqrt{10}$. **128.** 7,5. **129.** 13 și 17. **134.** $B(5; 3)$; $\alpha \approx 18°$. **135.** a) $x = 2$; b) $x = \pm 8$; c) $x = -3$ aбo $x = 1$. **136.** a) (−1; 0); b) (0; 4); c) $\left(-1\frac{1}{3}; -1\frac{1}{4}\right)$. **137.** (3; 6). **142.** Da. **143.** 1 : 3. **145.** 2. **146.** 26. **147.** $BL = \frac{\sqrt{97}}{3}$; $CL = \frac{2\sqrt{97}}{3}$. **151.** $A(-7; -12)$. **152.** 1D; 2E; 3A; 4C. **160.** a) $(x + 2)^2 + y^2 = 18$. **161.** a) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$; b) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **162.** a) $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ sau $x^2 + (y + 5)^2 = 25$. **164.** $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **165.** $x^2 + y^2 = 25$. **166.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ sau $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. **168.** $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **169.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. **170.** $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. **172.** $(x - 5{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25$ sau $\left(x - \frac{11}{14}\right)^2 + y^2 = \frac{2809}{196}$. **175.** a) $(-1; 0)$, $R = 1$; d) $(5; -1)$, $R = 2\sqrt{5}$. **176.** a) 5; б) 10. **177.** a) Se intersectează; b) sunt tangente. **178.** a) $(x - 1{,}5)^2 + (y + 2)^2 = 6{,}25$; b) $(x + 4)^2 + (y + 0{,}5)^2 = 6{,}25$; c) $x^2 + \left(y + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$. **179.** a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 40$; b) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$. **181.** a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$; b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

182. Pentru $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; 2) \cup (4; +\infty)$ — puncte comune nu sunt; pentru $a = \pm 2$ — tangenţă exterioară; pentru $a = \pm 4$ — tangenţă interioară; pentru $a \in (-4; -2) \cup (2; 4)$ — se intersectează. **183.** a) $a = 2$ sau $a = -6$; b) $a = 4$ sau $a = -8$. **198.** $x = 2$; $y = -4$. **200.** (0; 2); (3; 0). **201.** (−5; 2). **202.** a) $3y - 2x = 0$; b) $y = -x$; c) $y = -3x$; d) $y = 0{,}5x$. **203.** a) $y = 4 - x$; b) $y = x + 3$; c) $5y - 4x = 20$; d) $y - 6x = -23$. **205.** a) 135°; b) 45°; c) 30°; d) 150°. **206.** a) $y = 2x - 8$; b) $y = x - 6$; c) $y = -3x + 2$; d) $y = -0{,}5x - 3$. **207.** a) $y = 2x - 8$; b) $y = -x + 1$; c) $x + 2y + 1 = 0$; d) $2x + 3y = 0$. **208.** $a = -2$. **209.** $b = 1$. **210.** $l_1 : y = -x$; $l_2 : y = 1$; $l_3 : x = -2$; $l_4 : y = x + 2$; $l_5 : y = 0{,}5x - 2$. **212.** $y = -x + 5$; $S = 12{,}5$ sau $y = x + 3$; $S = 4{,}5$. **214.** (AB): $3y - x = 12$; (AC): $5y + 4x = 3$; (BC): $2y + 5x = 25$. **215.** $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3x} + 4\sqrt{3}$; $y = 0$; $x = 1$; $3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $3y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$ sau $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$; $y = 0$; $x = 1$; $3y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$; $3y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$. **216.** $x = 2$; $x + 9y - 14 = 0$; $8x + 9y - 28 = 0$; $2x - y + 2 = 0$; $3x - 5y + 22 = 0$; $3y + 2y - 16 = 0$. **217.** $y = x + 5$; $y = x - 5$; $y = -x - 5$. **218.** $y = \sqrt{3}x + 5$; $y = -\sqrt{3}x + 5$; $y = \sqrt{3x} - 5$; $y = -\sqrt{3}x - 5$. **219.** (1; 6); (−3; −2); (6; 1). **220.** (1; 4); (7; 3); $\left(\frac{27}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; $\left(-\frac{15}{7}; \frac{6}{7}\right)$. **221.** 1C; 2D; 3A; 4B. **222.** a), b), d) — se intersectează, b) nu au puncte comune. **223.** $4x + y - 8 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$; $2x - 3y + 2 = 0$; $O\left(\frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right)$. **224.** $a = 1$; $b = -2$. **225.** $a = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **246.** 1A; 2D; 3C; 4E. **257.** 25 cm. **258.** 2 cm şi 3 cm. **271.** $\overline{BA} = (-5; -3)$; $\overline{DC} = (4; -6)$; $\overline{NM} = (-3; 2)$. **272.** $\overline{MN} = (6; 2)$; $\overline{NK} = (-2; -6)$; $\overline{MK} = (4; -4)$; $|\overline{MN}| = 2\sqrt{10}$; $|\overline{NK}| = 2\sqrt{10}$; $|\overline{MK}| = 4\sqrt{2}$. $\triangle MNK$ — isoscel. **273.** a) Da; b) nu. **274.** (3,5; 1). **275.** Da. **276.** $\overline{AB} = (4; 2)$; $\overline{AD} = (4; -2)$; $\overline{BC} = (4; -2)$; $\overline{CD} = (-4; -2)$. **278.** a) $B(3; 8)$; b) $B(-3; -4)$; c) $B(-10; 1)$; d) $B(-11; 8)$. **279.** $D(9; -1)$; $R(3; 1)$; $X(2; -1)$. **280.** a) $x = \pm 8$; b) $x = 9$ sau $x = -7$; c) $x = -8$ sau $x = 6$; d) $x = 4$ sau $x = -2$. **281.** a) $m = 0$ sau $m = 1$; b) $m = 4$; c) $m = -1$. **286.** 1A; 2B; 3D; 4E. **304.** a) $x = 3$; b) $x = -11$. **305.** a) $x = -7$; $y = 1$; b) $x = 2$; $y = -8$. **308.** a) $\overline{AD}$; b) $\overline{MP}$; c) $\overline{PK}$; d) $\overline{AN}$; e) $\overline{NK}$. **311.** a) $\bar{d} = (5; -3)$; b) $\bar{d} = (3; 5)$; d) $\bar{d} = (1{,}5; 2{,}5)$. **312.** a) $C(2; 3)$; b) $C(-1; 5)$. **313.** a), c) circumferinţa cu raza de 10 cu centrul $A(-4; -2)$; b) circumferinţa cu raza de 10 cu centrul $B(2; 6)$. **326.** a) $8\bar{a} - \bar{b}$; b) $-4\bar{m} - 9\bar{n}$; c) $17\bar{c}$; d) $0{,}6\bar{b} - \bar{c}$. **328.** a) $2\sqrt{2}$; b) 1; c) 30; d) $\sqrt{185}$. **329.** $x = 2$; $\bar{p} = (6; 8)$ sau $x = -2$, $\bar{p} = (-6; -8)$. **332.** a) $m = 8$; б) $m = -\frac{4}{3}$; c) $m = \pm 6$; d) $m = \pm 3$. **333.** $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$; $\overline{NB} = \bar{a}$; $\overline{AB} = 2\bar{a}$; $\overline{BP} = -\frac{1}{2}\bar{a}$; $\overline{MP} = \bar{a}$; $\overline{MA} = -\frac{1}{2}\bar{a}$. **334.** $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$; $\overline{DB} = \bar{b} - \bar{a}$; $\overline{AM} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$; $\overline{MD} = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$. **335.** a) $N(-3; 10)$; b) $N(0; -0{,}5)$. **337.** $\overline{AK} = \left(\frac{4}{3}; 2\right)$; $\overline{AB} = \left(\frac{10}{3}; 5\right)$. **338.** $\overline{AB} = 3\bar{a}$; $\overline{BC} = \frac{3}{2}\bar{b}$; $\overline{AC} = 3\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}$; $\overline{BD} = \frac{3}{2}\bar{b} - 3\bar{a}$; $\overline{AD} = \frac{1}{2}\left(3\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}\right)$; $\overline{AM} = 3\bar{a} + \frac{3}{4}\bar{b}$; $\overline{AN} = \frac{3}{2}\bar{a} + \frac{3}{2}b$. **340.** $\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$. **341.** $\bar{b} = (3; -4)$. **342.** 1C; 2E; 3D; 4A.

343. $|\bar{a}|=5$; $|\bar{b}|=5\sqrt{2}$; $|\bar{c}|=2\sqrt{5}$; $|\bar{d}|=6$. **344.** $\alpha=\frac{10}{33}$; $\beta=\frac{29}{33}$.

345. a) $\bar{m}=-20\bar{a}-11\bar{b}$; b) $\bar{m}=-9\bar{c}-\frac{16}{3}\bar{d}$. **354.** a) 40°; b) 130°; c) 140°.

356. a) 16; b) 48. **357.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; c) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; d) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$. **358.** a) 45°; b) 135°; c) 45°; d) 30°. **361.** a) 72; b) −72. **362.** a) $x = 0$; b) $x = -3$; c) $x = -2{,}4$; d) $x = 1$.

363. a) $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos C=0$. **364.** 135°. **365.** 135°. **366.** a) $D(-2; 0)$; b) $D\left(0; -\frac{4}{3}\right)$. **367.** $l = -5$. **368.** a) $m = -3$; b) $m = \pm 3$; c) $m = 6$ sau $m = -0{,}5$.

370. a) 3; b) −1,5; c) −1; d) 5,5. **371.** 135°. **372.** a) $\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{29}$ și $\sqrt{29}$; c) $\sqrt{3}$ și 1; d) $\sqrt{13}$ și $\sqrt{37}$. **373.** 22. **377.** 108 cm; 432 cm². **386.** 1 : 2. **387.** $\overline{AM}=(5; 1)$; $|\overline{AM}|=\sqrt{26}$. **388.** (−2; 5). **389.** $x - 2y + 5 = 0$; $8x - 5y + 1 = 0$; $4x + 3y - 19 = 0$. **390.** $5x + 2y - 13 = 0$. **391.** 9 un. p. **399.** $C(-2; -2)$ sau $C(-5; -5)$. **400.** $2x - y - 1 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$. **401.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

419. a) 7 cm; b) $2\sqrt{39}$ cm. **420.** a) $2\sqrt{3}$ cm; b) $\sqrt{29}$ cm; c) 2 cm; d) 13 см. **421.** a) 60°; b) 120°. **423.** 16°. **425.** 60°. **426.** 120°. **427.** 5 cm și $\sqrt{109}$ cm. **428.** 4 cm și $4\sqrt{13}$ cm. **429.** $4\sqrt{37}$ cm. **430.** 6 cm și 7 cm. **431.** 11 cm și 7 cm. **432.** 9,5 cm. **433.** 12 cm. **434.** 10 cm. **435.** 24 cm. **436.** 90 cm. **437.** 20 cm și 12 cm. **438.** ≈ 5,3 min. **439.** 1B; 2D; 3C; 4E. **440.** 7 cm; 7 cm și $\sqrt{7}$ cm. **441.** $\sqrt{57}$ cm. **443.** 11 cm; 23 cm; 30 cm. **444.** 120°. **446.** $4\sqrt{3}$ cm și $4\sqrt{7}$ cm. **447.** 3 cm sau $\sqrt{73}$ cm. **448.** 60°. **450.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

452. $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$. **453.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$. **467.** a) $8\sqrt{2}$ cm; b) $3\sqrt{6}$ cm; c) $8\sqrt{2}$ cm.

468. a) $10\sqrt{2}$ cm; b) $5\sqrt{6}$ cm; c) $18\sqrt{2}$ cm. **469.** c) 45°. **470.** a) 60°; b) 30°.

472. $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **473.** 1D; 2C; 3B; 4A. **474.** 6 cm. **475.** $4\sqrt{3}$ cm.

476. $5\sqrt{2}$ cm. **477.** 60° și 75° sau 15° și 120°. **478.** 60° și 90° sau 120° și 30°.

479. Nu. **481.** $\frac{a\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; $-\frac{a\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. **482.** $\frac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\frac{m\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **483.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

484. $\frac{p\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; $\frac{p\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; $\frac{p\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$.

485. $\frac{2m\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. **486.** $\frac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{(a-b)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **487.** $\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

488. $2R\sin\alpha\sin\beta$. **489.** 45°; 60°; 75° sau 45°; 15°; 120°. **490.** $2{,}5\sqrt{10}$ cm. **491.** $\frac{15\sqrt{41}}{8}$. **492.** a) ≈ 13 m; b) ≈ 32 m. **504.** $\sqrt{41-20\sqrt{2}}\approx 3{,}6$ cm. **505.** ≈ 37 cm; ≈ 66 cm. **506.** 65°. **507.** ≈ 61,3 m; 80 m; ≈ 67,6 m. **509.** 18,3 cm; 19°; 29°. **510.** ≈ 6,3 cm; ≈ 15,2 cm. **511.** ≈ 3,7 cm; ≈ 7,6 cm. **512.** ≈ 12 cm; ≈ 13 cm; ≈ 8 cm. **513.** 51°; 129°; 147°; 33°. **514.** ≈ 29 m; ≈ 40 m. **516.** $AB\approx 7$ cm, $BC\approx 8{,}5$ cm. **517.** $AB\approx 7{,}1$ cm; $BC\approx 11{,}6$ cm; $AC\approx 13{,}4$ cm. **518.** ≈ 10,2 cm; ≈ 18,9 cm; ≈ 19 cm. **519.** ≈ 7,6 cm; ≈ 13,4 cm; ≈ 13,4 cm. **520.** ≈ 21,5 m. **523.** ≈ 16,8 km/oră. **524.** ≈ 12,6 dm. **540.** $S=9\sqrt{3}$ cm²; $r=\sqrt{3}$ cm; $R=2\sqrt{3}$ cm. **541.** 24 cm. **542.** 16cm. **543.** 10 cm; 10 cm; $10\sqrt{3}$ cm. **544.** 8 cm; 8 cm; 11 cm. **545.** 56 cm. **546.** $9\sqrt{3}$ cm; $8\sqrt{3}$ cm. **547.** $65\sqrt{3}$ cm. **549.** 3 cm; 6,25 cm. **551.** $5\sqrt{3}$ cm. **552.** $68\sqrt{3}$ cm². **553.** 45 cm². **555.** 30°; 150°. **556.** $ad\sin\alpha$. **557.** $12\sqrt{3}$ cm; $12\sqrt{3}$ cm². **558.** 468 cm². **559.** 10 cm²; 12 cm². **560.** $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm²; $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm²; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm²; $15\sqrt{3}$ cm². **561.** 31 cm². **563.** 6 cm²; 25 cm²; 29 cm². **564.** 2,5 cm. **565.** 15 cm; 15 cm; 7 cm. **566.** $4\sqrt{10}$ cm; $4\sqrt{10}$ cm; 5 cm. **567.** $\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **569.** 21 cm²; 63 cm². **571.** 22 cm². **572.** 16 cm; 24 cm. **573.** 624 cm². **574.** $\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **592.** 5; 6; 8; 9; 10; 12. **593.** a) 15; b) 12. **594.** 5 cm; $5\sqrt{2}$ cm. **596.** 1D; 2B; 3A; 4E. **597.** $\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$. **598.** $\frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}$. **599.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **601.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $a\sqrt{3}$. **602.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **607.** $\frac{1}{3}m$. **608.** $a(\sqrt{2}-1)$. **610.** 1 : 2. **611.** 72°. **628.** a) $8\sqrt{3}$ cm; d) $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. **629.** a) 48 cm. **634.** a) $12\sqrt{3}$ cm; $12\sqrt{3}$ cm²; b) $16\sqrt{2}$ cm; 32cm². **636.** 2. **643.** a) 12 cm; $6\sqrt{2}$ cm; b) $6\sqrt{3}$ cm; $6\sqrt{3}$ cm. **644.** $\frac{R\sqrt{6}}{2}$. **645.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **646.** 1 : 2. **648.** $\frac{l(3+\sqrt{3})}{6}$ sau $\frac{l(3-\sqrt{3})}{6}$. **649.** $10\sqrt{6}$ cm. **650.** $108\sqrt{3}$ cm². **651.** 1E; 2D; 3A; 4B. **667.** $8\sqrt{2}\pi$ cm; 8π cm. **668.** $\frac{\pi d\sqrt{2}}{2}$. **669.** 65π cm. **670.** 18π cm; 8π cm. **671.** $4\sqrt{3}\pi$ cm; $8\sqrt{3}\pi$ cm. **672.** a) π cm; b) 2π cм; c) 3π cm; d) 4π cm. **673.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ cm. **674.** 8π cm; 12π cm. **675.** $4{,}7\pi$ cm. **677.** 6π cm; 30π cm. **678.** 1C; 2B; 3A; 4E. **679.** ≈ 56,5 m. **683.** $\frac{\pi a}{\cos\beta}$. **684.** 2 : 1. **685.** a) $4\pi+20$; b) 8π; c) $7{,}3\,\pi$. **686.** $7{,}5\pi$ cm. **687.** $2\pi a$. **690.** 120°. **691.** 3π; 4π; 5π. **692.** 5π cm; 15π cm. **693.** 8π cm; 16π cm. **694.** π cm; 3π cm; 8π cm sau 5π cm; 3π cm; 4π cm. **716.** 2 : 3. **717.** 100π cm². **718.** 1 : 4. **719.** 4π cm²; 25π cm². **720.** 21π cm². **721.** 9 cm și 12 cm. **722.** a) 16π cm²; b) 24π cm²; c) 48π cm²; d) 108π cm². **723.** a) $3(2\pi-3\sqrt{3})$ cm²; b) $9(\pi-2)$ cm². **724.** 21,5 %. **726.** 25π cm². **728.** 9π cm²;

$\frac{27}{4}\pi$ cm². **729.** $4\pi\left(11-2\sqrt{10}\right)$ cm². **730.** 648 cm². **731.** $\frac{3201}{64}\pi$ cm². **733.** 1C; 2A; 3D; 4B. **734.** 3 : 2. **735.** $\frac{\pi R^2}{16}$. **736.** $\sqrt{5}$ cm. **737.** $\frac{27\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{4}$ cm²; $\frac{27\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{4}$ cm². **738.** $\frac{1}{6}R^2\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)$. **739.** $\frac{a^2\left(\pi+3\sqrt{3}\right)}{24}$. **758.** 30°; 50°; 100°. **759.** Nu. **764.** a) Da; b) nu; c) da; d) nu. **769.** $(x+4)^2+(y-5)^2=17$. **772.** 5 cm; $5\sqrt{3}$ cm; $12{,}5\sqrt{3}$ cm. **773.** $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; 1. **795.** a) $A_1(-2;\ 3)$; $B_1(-4;\ -2)$; $C_1(3;\ 3)$; $D(5;\ -1)$; b) $A'(0;5)$; $B'(-2;0)$; $C'(5;5)$; $D'(7;1)$. **796.** a) (3; 4); b) (1; 3); c) (−3; 4,5); d) (7,5; 4). **808.** $x=5$; $y=-5$. **809.** a) $(x+2)^2+(y-3)^2=20$; b) $(x-4)^2+(y+1)^2=20$. **810.** (−3; 7). **811.** a) $y=-2x-6$; b) $y=-2x$. **812.** $y=2x-3$; $2y+x+1=0$; $P=8\sqrt{5}$; $S=20$ un.p . **814.** 1E; 2A; 3D; 4B. **835.** 22. **844.** $y=-2x-3$; $y=-2x+3$. **845.** $x-3y+8=0$; $y+3x+4=0$; $y-2x-6=0$; $x+2y-2=0$. **848.** $y=-x+1$. **849.** a) 2; b) 1; c) 2. **851.** Duceţi prin punctul dat dreapta, perpendiculară pe bisectoarea unghiului dat. **852.** $y=-x+1$. **854.** Construiţi punctul B_1, simetric punctulului C în raport cu dreapta l,şi duceţi dreapta AB_1. Dacă $AB_1 \parallel l$, atunci problema nu are soluţii. **856.** 1D; 2C; 3B; 4E. **869.** a. **871.** $2a$; 90°. **872.** Două drepte, cărora le aparţin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date. **873.** Cu 120° în jurul centrului triunghiului. **875.** a) 72°; b) 60°; c) 40°; d) 36°; e) $\frac{360°}{k}$. **876.** $P=\sqrt{26}\left(2+\sqrt{2}\right)$; $S=13$. **877.** 90°. **879.** Mediatoarea segmentului care uneşte centrele circumferinţelor date. **880.** a) $a\sqrt{3}$; b) a. **881.** $AA_1=AD_1=a\sqrt{2}$; $AC_1=AB_1=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **882.** 60°. **883.** a) $BC_1=a\sqrt{3}$; $BD_1=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; b) $BC_1=a\left(\sqrt{2}-1\right)$; $BD_1=a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **902.** $M_1(5;-5)$; $P_1(7;\ -3)$; $K_1(-6;\ 1)$. **903.** $\bar{a}=(-8;8)$. **904.** a) Nu; b) da; c) nu. **905.** $M_1(0;\ 5)$, $N_1(2;\ -1)$. **907.** $(x-3)^2+(y+2)^2=9$. **908.** a) $y=-2x-3$; b) $y=-2x+9$. **909.** $x=-8$; $y=-8$. **910.** $x=3$; $y=4$. **914.** $A_1(4;\ 3)$; $B_1(8;\ 7)$; $C_1(10;\ 5)$; $D_1(6;\ 1)$. **917.** Realizaţi aşa o deplasare paralelă a punctului A, la care punctul K se transferă în P. Punctul obţinut uniţi-l cu B. **933.** Nu. **934.** Nu. **938.** 12 cm; 20 cm; 24 cm; 32 cm. **939.** 32 cm²; 200 cm². **940.** 10 cm; 18 cm. **941.** 480 cm². **942.** 3. **943.** 32 cm². **944.** 4 cm şi 10 cm. **945.** 36 cm². **950.** 250 cm². **951.** 2 : 9 sau 2 : 5. **952.** 25 cm². **953.** $4S$. **954.** 40 cm². **959.** Arătaţi că cea mai mică înălţime a triunghiului este egală cu jumătate din ipotenuză. **960.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **961.** $\frac{a^2-ad+d^2}{a-d}$. **962.** $\sqrt{16{,}25}$ cm. **964.** 30°; 60°; 120°; 150°.

966. 2 cm. **967.** Iniţial construiţi triunghiul drptunghic ale cărui ipotenuză şi catetă sunt egale corespunzător cu mediana şi înălţimea dată, şi puneţi în el segmentul care este egal cu bisectoarea dată. **968.** Divizaţi circumferinţa în 6 părţi egale şi consideraţi că $\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-1$. **969.** $\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. **970.** (3; −1); (−1; 5); (7; 3). **971.** $x=\frac{b_1+na_1}{1+n}$, $y=\frac{b_2+na_2}{1+n}$. **972.** Consideraţi că $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$,

$S = 0{,}5ab \sin C$. **975.** $75°$. Construiţi triunghiul echilateral M_1AD şi arătaţi că punctul M_1 coincide cu punctul M. **976.** $45°$, $45°$, $150°$ şi $120°$. Cu ajutorul teoremei cosinusurilor aflaţi unghiurile B şi D, examinaţi triunghiul dreptunghic isoscel cu ipotenuza AB. **977.** $75°$. Prin punctele A, B, C duceţi o circumferinţă şi arătaţi că punctul D - centrul acestei circumferinţe. **978.** $30°$. Construiţi pe AB triunghiul echilateral ABM. Dacă dreptele AM şi BC se intersectează în punctul K, atunci triunghiul DMK - tot este echilateral. **979.** $45°$. **987.** Arătaţi că triunghiul dat este dreptunghic, iar una din laturile lui - diametrul circumferinţei.

988. Dacă $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2R$, atunci $2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 = 2\pi R$. **989.** $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} r$, $r_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} r$. **990.** $3r^2\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$, trei cercuri, aria fiecăruia din ei este $r^2\sqrt{3}$ şi trei figuri curbilinii egale, ale căror arie este a câte $\frac{r^2}{6\left(7+4\sqrt{3}\right)}\left(8\sqrt{3}\pi - \pi - 6\sqrt{3}\right)$.

991. Fie $OA = r$, atunci raza circumferinţei mai mici $O_1A = \frac{r}{2}$. Dacă $\angle AOC = \alpha$, $\angle AO_1B = 2\alpha$. $\overset{\frown}{AC} = \frac{2\pi r\alpha}{360} = \frac{\pi r\alpha}{180}$. $\overset{\frown}{AB} = 2\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2\alpha}{360} = \frac{\pi r\alpha}{180}$; lungimile acestor arce sunt egale. **994.** 1,5. **997.** 1 : 2. **998.** Sunt proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5.

999. $m_a^2 \sin(B+C) : \left(\sin^2 B + \sin^2 C - 0{,}5\sin^2(B+C)\right)$. **1001.** $\cos A = (4cb - b^2 - c^2) : 2bc$. **1003.** $\frac{r^2}{12}\left(3\pi + 2\sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(5\pi + \sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$. **1004.** Arătaţi că laturile triunghiului sunt egalee cu $2S : h_1$, $2S : h_2$, $2S : h_3$, iar semiperimetrul $p = S : r$. **1006.** Fie r şi R — razele celor două semicircumferinţe mici. Atunci $CM = 2Rr$. **1009.** $60°$, $60°$, $120°$ şi $120°$. **1010.** a) 0; b) 0. **1013.** a) $\sin^2\beta$; b) 1. **1014.** a) $60°$. **1020.** $(-10; 5)$. **1022.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **1027.** $y = 1 - x$.

1038. $x = \pm 2$. **1047.** $x = 0$; $x = -5$. **1048.** $2\sqrt{3}$. **1050.** $a \in (-5; 6)$. **1052.** $(9; 3)$; $(-9; -3)$. **1054.** $3x + 4y - 15 = 0$; $3x - 4y - 15 = 0$. **1057.** a) 7 cm; b) 6 cm sau $3\frac{1}{3}$ cm. **1058.** $120°$. **1060.** 10 cm. **1062.** 5,9 cm. **1064.** $\frac{2m \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1066.** 20 cm².

1067. 20 cm şi 6 cm; 3 cm şi 10 cm. **1068.** 24 cm². **1069.** $10\frac{5}{6}$ cm². **1070.** 7 cm.

1078. $60°$, $80°$, $100°$, $140°$, $160°$. **1079.** 10. **1085.** $18\sqrt{3}$ cm³; $27\sqrt{3}$ cm. **1094.** $y = -3x - 4$. **1096.** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$; a) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$; d) $(x - 1)^2 + (y - 5) = 9$. **1103.** $6\sqrt{3}S$. **1104.** 8 cm şi 10 cm. **1105.** 14 cm.

CUPRINS

Capitolul 4. Poligoane regulate

Capitolul 5. Transformări geometrice

ANEXE

Informații despre starea manualului

№	Numele și prenumele elevului	Anul de învățământ	Starea manualului		Nota
			la început de an	la final de an	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням румунською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Грінчешин Іван Миколайович*

Румунською мовою

Редактор К.В. Даскалюк
Коректор М.Г. Кирчул

Автори ілюстрацій, використаних у підручнику:
Africa Studio, Andrey Bayda, Andrey Bayda, apiwut sookkasame, art_of_sun, B Brown, Bildagentur Zoonar GmbH, Bilyk Kateryna, Blaz Kure, Christian Mueller, Dmitr1ch, HDshooter, irmairma, jaret kantepar, Konstantin Gushcha, ktsdesign, LittlePigy, Marzolino, Mikadun, Morphart Creation, Morphart Creation, NadyaJema, Nicku, Pawel Szczepanski, robbylokamp, runzelkorn, s74, Serhii Kalaba, Shevchenko Andrey, Stockr, Strahil Dimitrov, Unconventional, vagnergamba, Valentina Proskurina, Valerii Iavtushenko, vichie81, Vitalliy, WDG Photo, Will Thomass

Формат 70x100/16.
Ум. друк. арк. 22,032 форзац. Обл.-вид. арк. 21,37 + 0,55 форзац.
Тираж 1956 пр. Зам. № 65П
Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,
svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ “Патент”
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

Coordonatele carteziene în plan

Formula distanței dintre două puncte

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Coordonatele mijlocului segmentului

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Ecuația generală a dreptei

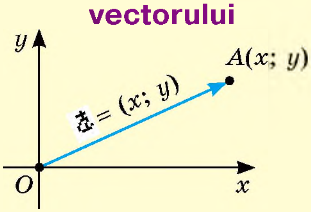
$ax + by = c$, unde $a^2 + b^2 \neq 0$

Ecuația circumferinței

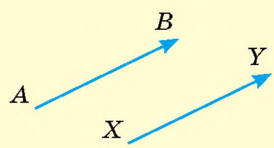
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$,
unde M(a; b) — centrul circumferinței,
R — raza circumferinței

Vectorii și operațiile cu ei

Coordonatele vectorului



Vectori egali

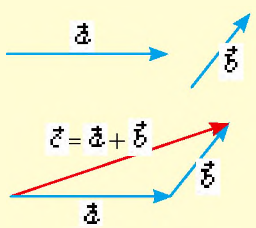


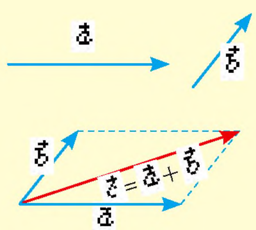
$$\vec{AB}=\vec{XY}$$

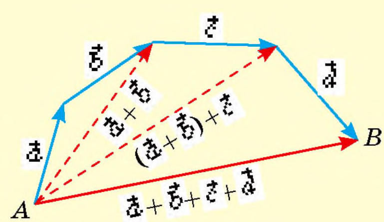
Modulul Vectorului

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Adunarea vectorilor







Dacă $\vec{a}=(x_1; y_1)$ și $\vec{b}=(x_2; y_2)$, atunci $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2)$ și $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2; y_1-y_2)$, $k\vec{a}=(kx_1; ky_1)$, unde k — număr arbitrar, $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

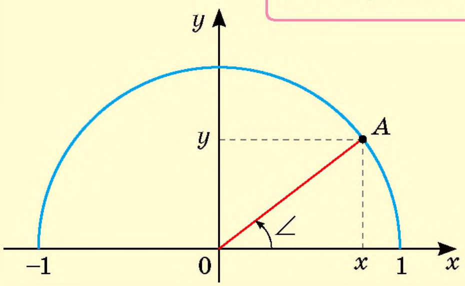
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

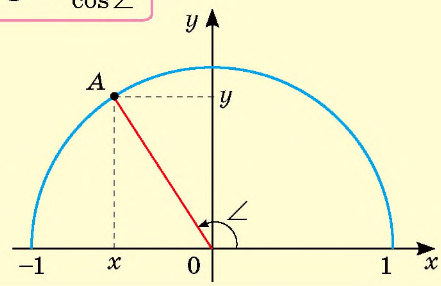
$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$, sau $\vec{a}=k\vec{b}$ — condițiile coliniarității $\vec{a}$ și $\vec{b}$,

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ sau $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ — condițiile perpendicularității $(\vec{a}\neq\vec{0}; \vec{b}\neq\vec{0})$.

Funcții trigonometrice

$\sin\angle = y;\ \cos\angle = x;\ \operatorname{tg}\angle = \dfrac{\sin\angle}{\cos\angle}$





Valorile funcțiilor trigonometrice ale unor unghiuri

$\angle$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\angle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\angle$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\angle$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

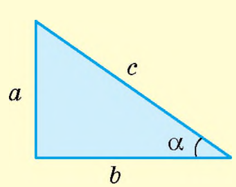
Identități trigonometrice

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ și $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$

Corelațiile dintre laturile și unghiurile triunghiului

dreptunghic



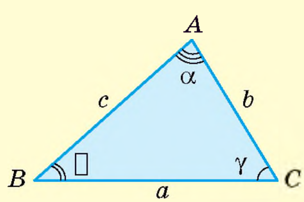
$a^2 + b^2 = c^2$

$a = c\sin\angle$

$b = c\cos\angle$

$a = b\operatorname{tg}\angle$

arbitrar

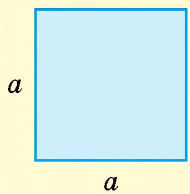


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle$ — teorema cosinusurilor

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ — teorema sinusurilor

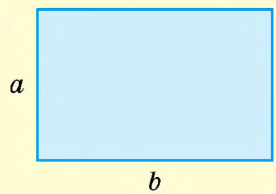
Ariile figurilor plane

Patrat



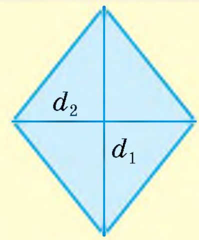
$$S = a^2$$

Dreptunghi



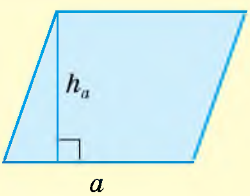
$$S = ab$$

Romb

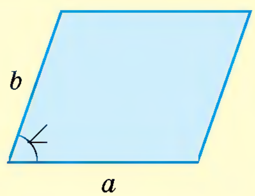


$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

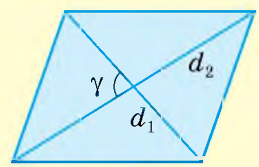
Paralelogram



$$S = a h_a$$

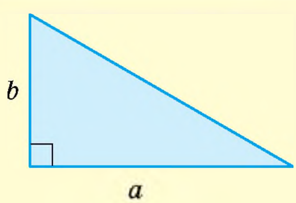


$$S = ab \sin \angle$$

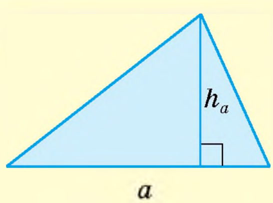


$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$$

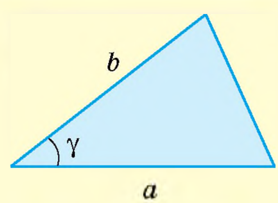
Triunghi



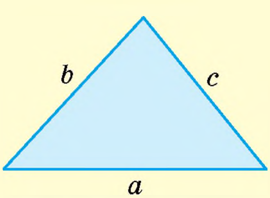
$$S = \frac{1}{2} ab$$



$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

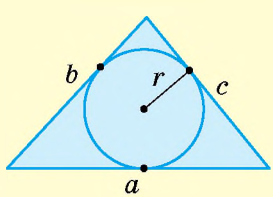


$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$



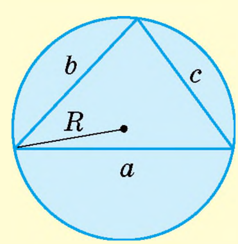
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



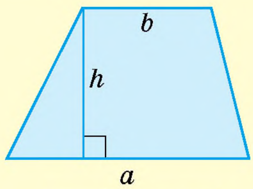
$$S = pr,$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

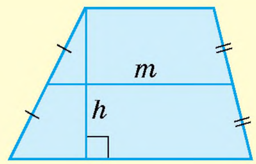


$$S = \frac{abc}{4R}$$

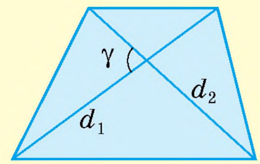
Trapez



$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$



$$S = mh$$



$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$$

Pentru poligoanele regulate

Unghi interior	Unghi exterior	Unghi la centru
$\frac{180°(n-2)}{n}$	$\frac{360°}{n}$	$\frac{360°}{n}$

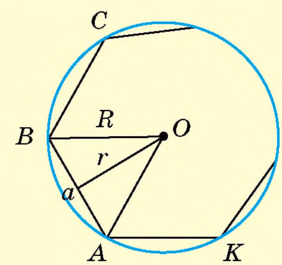
Latura a_n a poligonului n-laturi regulat $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$ și $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

Raza circumferinței circumscrise

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$$

Raza circumferinței înscrise

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$$



	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
P	$3a$	$4a$	$6a$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a^2	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$